

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**APLICAÇÃO DE UM MODELO DE DANO ISOTRÓPICO
ESALAR NA ANÁLISE DE VIGAS PAREDE DE CONCRETO
ARMADO**

HILEANA HÉLEN FABRÍCIO FERNANDES

ORIENTADOR: WILLIAM TAYLOR MATIAS SILVA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO
CIVIL**

**PUBLICAÇÃO: E.DM – 005 A/10
BRASÍLIA/DF: SETEMBRO – 2010**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**

**APLICAÇÃO DE UM MODELO DE DANO ISOTRÓPICO ESCALAR
NA ANÁLISE DE VIGAS PAREDE DE CONCRETO ARMADO**

HILEANA HÉLEN FABRÍCIO FERNANDES

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADA POR:

**Prof. William Taylor Matias Silva, Dr. Ing. (ENC-UnB)
(Orientador)**

**Prof. Antônio Carlos de Oliveira Miranda, PhD (ENC-UnB)
(Examinador Interno)**

**Prof. Osvaldo Luís Manzoli, PhD (UNESP-BAURU)
(Examinador Externo)**

BRASÍLIA/DF, 29 DE SETEMBRO DE 2010

FICHA CATALOGRÁFICA

FERNANDES, HILEANA HELEN FABRICIO	
Aplicação de um Modelo de Dano Isotrópico Escalar na Análise de Vigas Parede de Concreto Armado [Distrito Federal] 2010.	
xvi, 85p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2010).	
Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.	
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.	
1.Dano isotrópico	2.Vigas parede
3.Modelo constitutivo	4.Simulação numérica
I. ENC/FT/UnB	II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

FERNANDES, H. H. F. (2010). Aplicação de um Modelo de Dano Isotrópico Escalar na Análise de Vigas Parede de Concreto Armado. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-005A/10, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 85p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Hileana Hélen Fabrício Fernandes.

TÍTULO: Análise Limite de Vigas Parede Via Modelagem Numérica.

GRAU: Mestre

ANO: 2010

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Hileana Hélen Fabrício Fernandes
SQS 404 Bloco L Apto 205
70.238-120 Brasília – DF – Brasil.

“Se A é o sucesso, então A é igual a X mais Y mais Z. O trabalho é X; Y é o lazer; e Z é manter a boca fechada.”

Albert Einstein

AGRADECIMENTOS

De forma generalizada, agradeço a todos que ajudaram, mesmo que indiretamente, no desenvolvimento desse trabalho.

Aos meus pais, Amauri e Lúcia, e minha irmã, Heloísa, que sempre me apoiaram na decisão de mudar de cidade em busca do melhor.

Ao Professor William Taylor Matias Silva pela orientação.

Aos colegas do PECC, em especial João Paulo, Giselle, Alber, Ivanildo e Fábio pela convivência diária no SG12.

Às amigas do PTARH: Nara, pelos anos de parceria desde os tempos de UFPB, Izabela e Glenda, pela amizade e apoio.

Ao meu namorado Anderson, pelo incentivo e companheirismo até mesmo nas noites sem dormir.

À Eva, secretária do PECC-UnB, pela atenção e gentileza.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil da UnB - PECC/UnB pelo aprendizado.

Ao meu chefe, Maj Lira pela compreensão.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, pelo suporte financeiro.

Dedicado aos meus pais, Amauri
e Lúcia, que não mediram esforços para
que eu alcançasse meus sonhos.

RESUMO

APLICAÇÃO DE UM MODELO DE DANO ISOTRÓPICO ESCALAR NA ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

Autor: Hileana Hélen Fabrício Fernandes

Orientador: William Taylor Matias Silva

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, setembro de 2010.

Nesta dissertação apresenta-se um modelo constitutivo para a simulação numérica do comportamento de vigas parede de concreto armado. Utiliza-se o método dos elementos finitos em estado plano de tensão para a discretização do concreto, cujo comportamento é simulado através de um modelo de Dano Contínuo que inclui duas variáveis escalares de dano, uma para tração e outra para compressão. As armaduras são discretizadas através de elementos de treliça plana, sendo o comportamento do aço representado pelo modelo constitutivo de Von-Mises com endurecimento isotrópico e cinemático. Considera-se a aderência perfeita entre o concreto e a armadura. São apresentados os resultados obtidos através da modelagem numérica de uma viga parede de concreto armado. Para demonstrar a boa representatividade do modelo de dano compara-se estes resultados com resultados experimentais.

Palavras chave: dano isotrópico; vigas parede; modelo constitutivo; simulação numérica.

ABSTRACT

A MODEL ISOTROPIC DAMAGE SCALAR APPLICATION IN CONCRETE STRUCTURES ANALYSIS

Author: Hileana Hélen Fabrício Fernandes

Supervisor: William Taylor Matias Silva

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, September of 2010

This work describes the numerical simulation of a reinforced concrete deep beam. Concrete is discretised with 2D finite elements, and its behavior is reproduced by a constitutive isotropic damage model with two scalar damage variables. Steel rebars are represented by 2-noded truss element, and its behaviour is reproduced by one-dimensional plasticity model with isotropic and kinematic hardening laws. The steel reinforcement is connecting adjacent nodes of the concrete finite element mesh. The perfect bond between concrete and reinforcement was considered. Finally, some numerical analyses are presented in order to show some characteristics of the model and demonstrate its capacity to describe the relevant features of concrete by an adequate calibration of the model parameters from experimental data.

Keywords: isotropic damage; deep beams; constitutive model; numerical simulation.

SUMÁRIO

1	– INTRODUÇÃO	1
1.1	– CONTEXTO E JUSTIFICATIVA.....	1
1.2	– PROPOSTA DO TRABALHO.....	1
1.3	– OBJETIVOS.....	2
1.3.1	– Objetivo geral	2
1.3.2	– Objetivos específicos	3
1.4	– ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	3
2	– MODELO CONSTITUTIVO DA ARMADURA	5
2.1	– INTRODUÇÃO.....	5
2.2	– EQUAÇÕES GOVERNANTES	5
2.2.1	– Modelo friccional unidimensional sem endurecimento	6
2.2.2	– Modelo friccional unidimensional com endurecimento	9
2.2.2.1	– Endurecimento isotrópico	10
2.2.2.2	– Endurecimento cinemático	10
2.3	– INTEGRAÇÃO DO MODELO CONSTITUTIVO DA ARMADURA.....	12
2.3.1	– Problema de valor inicial incremental elastoplástico.....	12
2.3.2	– Algoritmos <i>Return-mapping</i>	13
2.3.2.1	– Preditor elástico inicial.....	13
2.3.2.2	– Algoritmo <i>return-mapping</i> unidimensional	15
2.3.2.3	– Quadro resumo da integração do modelo constitutivo da armadura	17
3	– MODELO CONSTITUTIVO DO CONCRETO.....	18
3.1	– CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE MODELOS DE DANO	18
3.2	– MODELOS DE DANO ISOTRÓPICO ESCALAR.....	19
3.2.1	– Parâmetro de dano e conceito de tensão efetiva	20
3.2.2	– Lei constitutiva não-linear para o concreto	21
3.2.3	– Critério de dano, conceito de tensão equivalente e lei de evolução do dano	22
3.3	– APLICAÇÕES DE MODELOS DE DANO ISOTÓPICO	24

3.4	– O MODELO DE DANO COM DUAS VARIÁVEIS	25
3.4.1	– Tensões equivalentes	26
3.4.1.1	– Tração	26
3.4.1.2	– Compressão	27
3.4.2	– Parâmetros $r_0 + e r_0 -$	28
3.4.2.1	– Tração	28
3.4.2.2	– Compressão	28
3.4.3	– Lei de evolução do dano.....	29
3.4.3.1	– Tração	29
3.4.3.2	– Compressão	29
3.4.4	– Critério de dano.....	30
3.4.5	– Lei constitutiva	30
3.5	– INTEGRAÇÃO DO MODELO CONSTITUTIVO DO CONCRETO	30
3.5.1	– Considerações Gerais.....	30
3.5.2	– Esquemas de integração explícitos e implícitos	31
3.5.3	– Método IMPL-EX	31
3.5.4	– Aplicação do IMPL-EX para integração do modelo de dano	32
4	– SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES..	35
4.1	– CONSIDERAÇÕES INICIAIS	35
4.2	– MÉTODOS INCREMENTAIS-ITERATIVOS	36
4.3	– MÉTODOS DE COMPRIMENTO DE ARCO	39
4.4	– MÉTODOS DE COMPRIMENTO DE ARCO LINEARIZADOS	44
4.5	– MÉTODOS DE COMPRIMENTO DE ARCO CILÍNDRICOS	46
4.5.1	– Determinação do sinal da predição de $\Delta\lambda$	47
4.5.2	– TAMANHO DO COMPRIMENTO DE ARCO	48
4.6	– DETECÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS	49
5	– APLICAÇÕES NUMÉRICAS	50
5.1	– INTRODUÇÃO.....	50
5.2	– CARACTERÍSTICAS DO ENSAIO EXPERIMENTAL.....	51
5.2.1	– Instrumentação.....	52
5.2.1.1	– Medição das deformações	52
5.2.1.2	– Medição dos deslocamentos	53
5.3	– PROPRIEDADES DOS MATERIAIS.....	54
5.3.1	– Concreto	54

5.3.1.1 – Parâmetro $A +$	54
5.3.1.2 – Parâmetros $A -$ e $B -$	55
5.3.2 – Aço	56
5.2.3 – Aparelhos de apoio	57
5.2.4 – Resumo das propriedades dos materiais	57
5.4 – APLICAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO	59
5.4.1 – Curvas carga-deslocamento	59
5.4.1.1- Deslocamento D1	60
5.4.1.2- Deslocamento D2	61
5.4.1.3- Deslocamento D3	63
5.4.1.4- Deslocamento D4	64
5.5 – CARACTERÍSTICAS DO MODELO NUMÉRICO	69
5.5.1 – PARÂMETRO CST	69
5.5.2 – CONVERGÊNCIA	69
5.6 – PÓS-PROCESSAMENTO	70
5.6.1 – CARGA $P1= 177,22$ KN	70
5.6.2 - CARGA $P2= 351,48$ KN	71
5.6.3 - CARGA $P3= 434,86$ KN	72
5.6.4 - CARGA $P4= 450,34$ KN	73
6 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	75
6.1 – CONCLUSÕES	75
6.2 – SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	75
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	77
APÊNDICES	81
APÊNDICE A – OBTENÇÃO DAS TENSÕES PRINCIPAIS	82
APÊNDICE B - ACOPLAGEM ENTRE O CONCRETO E A ARMADURA	83

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Situações de carregamento para o modelo de elastoplasticidade.....	9
Tabela 2.2 - Sumário das principais equações governantes do modelo friccional unidimensional com endurecimento.....	11
Tabela 5.1 – Propriedades do concreto.....	58
Tabela 5.2 - Propriedades dos aparelhos de apoio	58
Tabela 5.3 - Propriedades da Armadura.	59
Tabela 5.4 – Características das curvas carga-deslocamento numéricas.....	68
Tabela B.1 – Conectividade dos elementos.....	84

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Dispositivo friccional de Coulomb (adaptada – Simo e Hughes, 1997).....	6
Figura 2.2 - Domínio elástico e estados de tensão admissíveis (Beck, 2009).....	9
Figura 3.1 - Elemento de volume com dano (Pituba, 1998).....	20
Figura 3.2 - Hipótese da equivalência de tensões (Adaptada - Pituba, 2003).	21
Figura 3.3 - Diagrama de tensão versus deformação uniaxial (Gonçalves, 2003).....	22
Figura 5.1 – Malha que representa a viga A1.....	50
Figura 5.2 - Viga A1.....	51
Figura 5.3 – Localização dos extensômetros.....	52
Figura 5.4 – Seções da viga A1. À direita, extensômetros que fornecem os valores de ϵ_{s1} e ϵ_{s3} . À esquerda, extensômetros que fornecem os valores de ϵ_{s2}	53
Figura 5.5 - Localização dos deflectômetros.....	53
Figura 5.6 – Ensaio compressão simples – Comparação entre as curvas numéricas para diferentes valores de parâmetros A – e B –, e experimental.....	56
Figura 5.7 – Curva tensão-deformação da armadura – Comparação entre curva numérica com e sem endurecimento e experimental.	57
Figura 5.8- Curva carga-deslocamento – Comparação entre curva experimental D1 e numérica para $ds1 = 1,0 \times 10^{-6}$	60
Figura 5.9 - Curva carga-deslocamento – Comparação entre curva experimental D1 e numérica para $ds2 = 2,5 \times 10^{-6}$	60
Figura 5.10 - Curva carga-deslocamento – Comparação entre curva experimental D1 e numérica para $ds3 = 2,5 \times 10^{-7}$	61
Figura 5.11 - Curva carga-deslocamento – Comparação entre curva experimental D2 e numérica para $ds1 = 1,0 \times 10^{-6}$	61
Figura 5.12 - Curva carga-deslocamento – Comparação entre curva experimental D2 e numérica para $ds2 = 2,5 \times 10^{-6}$	62
Figura 5.13 - Curva carga-deslocamento – Comparação entre curva experimental D2 e numérica para $ds3 = 2,5 \times 10^{-7}$	62
Figura 5.14 - Curva carga-deslocamento – Comparação entre curva experimental D3 e numérica para $ds1 = 1,0 \times 10^{-6}$	63

Figura 5.15 - Curva carga-deslocamento – Comparação entre curva experimental D3 e numérica para $ds1 = 2,5 \times 10^{-6}$	63
Figura 5.16 - Curva carga-deslocamento – Comparação entre curva experimental D3 e numérica para $ds3 = 2,5 \times 10^{-7}$	64
Figura 5.17 - Curva carga-deslocamento – Comparação entre curva experimental D4 e numérica para $ds1 = 1,0 \times 10^{-6}$	64
Figura 5.18 - Curva carga-deslocamento – Comparação entre curva experimental D4 e numérica para $ds2 = 2,5 \times 10^{-6}$	65
Figura 5.19 - Curva carga-deslocamento – Comparação entre curva experimental D4 e numérica para $ds3 = 2,5 \times 10^{-7}$	65
Figura 5.20 – Curvas carga-deslocamento numéricas do ponto D1 e D3 para $ds1$, $ds2$ e $ds3$	67
Figura 5.21 – Curvas carga-deslocamento numéricas do ponto D2 para $ds1$, $ds2$ e $ds3$	67
Figura 5.22 - Curvas carga-deslocamento numéricas do ponto D4 para $ds1$, $ds2$ e $ds3$	68
Figura 5.23 – Relação entre fator de carga e parâmetro CST.	69
Figura 5.24 – Número de iterações para cada passo de carga.	70
Figura 5.25 – Dano negativo – Carga $P1=177,22$ KN.	71
Figura 5.26 – Dano positivo – Carga $P1=177,22$ KN.	71
Figura 5.27 – Dano negativo – Carga $P2=351,48$ KN.	72
Figura 5.28 – Dano positivo – Carga $P2=351,48$ KN.	72
Figura 5.29 – Dano negativo – Carga $P3=434,86$ KN.	73
Figura 5.30 – Dano positivo – Carga $P3=434,86$ KN.	73
Figura 5.31 – Dano negativo – Carga $P4=450,34$ KN.	74
Figura 5.32 – Dano positivo – Carga $P4=450,34$ KN.	74
Figura B.0.1 – Exemplo simplificado da acoplagem concreto-armadura.	83

LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIACÕES

E	- módulo de elasticidade
σ_Y	- tensão de escoamento
ε	- deformação total
ε_e	- deformação elástica
ε_p	- deformação plástica
σ	- tensor de tensões de Cauchy
\mathbb{E}_σ	- domínio elástico
$f(\sigma)$	- função de escoamento
γ	- constante de escoamento
$sign(\sigma)$	- função sinal
$\Delta\gamma$	- desvio angular
K	- módulo plástico
α	- variável interna de endurecimento plástico isotrópico
H	- módulo de endurecimento cinemático
q	- variável interna de endurecimento plástico cinemático
$\Delta\gamma$	- multiplicador Lagrangeano
ξ	- variável auxiliar
S	- área representativa
S_0	- área danificada
d	- variável de dano
$\bar{\sigma}$	- tensor de tensões efetivas
\mathbf{D}_0	- tensor constitutivo linear-elástico de quarta ordem
$\tau(\bar{\sigma})$	- tensão equivalente
r	- dano escalar limite
$g(\tau(\bar{\sigma}), r)$	- critério de dano
$G(\cdot)$	- função escalar monotônica
$\hat{\mu}$	-parâmetro de dano consistente
r_0	- dano escalar limite inicial

d^+	- variável de dano à tração
d^-	- variável de dano à compressão
$\bar{\sigma}_i$	- i-ésima tensão principal do tensor de tensões $\bar{\sigma}$
p_i	- vetor unitário associado a i-ésima direção principal
$\langle \cdot \rangle$	- função de MacAuley
$\bar{\tau}^+$	- tensão equivalente à tração
$\bar{\tau}^-$	- tensão equivalente à compressão
ν	- coeficiente de Poisson
$\bar{\sigma}_{oct}^-$	- tensão octaédrica normal
$\bar{\tau}_{oct}^-$	- tensão octaédrica tangencial
k, R_0	- parâmetros que consideram a diferença do comportamento do concreto sobre ensaio uniaxial e biaxial
$f_{0\ 1D}^-$	- máximas tensões elásticas de compressão uniaxial
$f_{0\ 2D}^-$	- máximas tensões elásticas de compressão biaxial
r_0^+	- dano escalar limite inicial à tração
r_0^-	- dano escalar limite inicial à compressão
r^+	- dano escalar limite à tração
r^-	- dano escalar limite à compressão
A^+	- parâmetro de tração do modelo de dano
A^-, B^-	- parâmetros de compressão do modelo de dano
G_f	- energia de fratura do concreto
\mathbf{r}	- vetor de forças residuais
\mathbf{f}	- vetor de forças externas
$\boldsymbol{\varphi}$	- vetor de forças internas
$\Delta \mathbf{x}^n$	- incremento de deslocamento
λ	- parâmetro escalar
\mathbf{x}^n_i	- deslocamento no passo de carga n e na iteração i
b	- parâmetro de ponderação

1 – INTRODUÇÃO

1.1 – CONTEXTO E JUSTIFICATIVA

A análise do comportamento não linear físico dos materiais tem se desenvolvido a cada dia pela busca de modelos mecânicos matemáticos e técnicas computacionais que sejam capazes de simular com melhor precisão tal comportamento. Todavia, muitos desses modelos apresentam formulações complexas tornando inviável sua implementação computacional e aplicação prática. O concreto, devido a sua anisotropia e outras características largamente conhecidas, torna essa tarefa ainda mais difícil.

Segundo Lemaitre e Chaboche (1985) *apud* Álvares (1999) é difícil separar os fenômenos de deformação e de ruptura no concreto, pois as microfissuras e as cavidades que existem antes mesmo da existência de qualquer solicitação, interferem diretamente na resposta inicial do material induzindo-se, desde logo, mecanismos de ruptura frágil e gerando deformações permanentes. Nesse caso, a Mecânica do Dano é uma ferramenta de grande interesse, pois possibilita a consideração os efeitos da microfissuração difusa sobre a degradação das propriedades do material

A FIB - *Fédération Internationale du Béton*, em seu 45º boletim, fornece uma visão geral dos conceitos e técnicas relacionadas à modelagem computacional não-linear do concreto estrutural. Apresentando alguns modelos constitutivos, dentre eles os modelos baseados na Mecânica do Dano.

1.2 – PROPOSTA DO TRABALHO

No presente trabalho propõe-se implementar um modelo de dano escalar que utiliza duas variáveis escalares de dano, uma para representar a degradação do concreto quando sujeito a tensões de tração e outra para a mesma situação sobre compressão.

O ponto de partida foi a dissertação de mestrado desenvolvida por Pantoja (2003) na Universidade de Brasília, na qual o autor descreve a utilização de um modelo constitutivo

elastoplástico unidimensional para simular o comportamento da armadura em um modelo elastoplástico com função de escoamento de Drucker-Prager para o concreto na análise de vigas parede de concreto armado.

O modelo para armadura será mantido, e o modelo de dano será implementado no programa de elementos finitos 2D_CONCRETE_NL.f90.

O programa 2D_CONCRETE_NL.f90 foi desenvolvido pelo professor William Taylor Matias Silva da Universidade de Brasília, para fins de pesquisa, o qual analisa estruturas de concreto armado sob estado plano de tensões, cujos elementos podem ser discretizados em elementos finitos de barra, triangulares e quadriláteros isoparamétricos. Ao longo dos anos o programa recebeu contribuições que permitem que o concreto e o aço sejam representados por algumas combinações de modelos constitutivos, elásticos e plásticos com diferentes funções de escoamento.

Para realização do proposto foi feito um estudo das hipóteses e equações governantes básicas dos modelos constitutivos utilizados.

Com a finalidade de avaliar a qualidade dos resultados obtidos pelo programa, foi analisada uma estrutura exemplo, uma viga parede de concreto armado. Os resultados foram confrontados aos resultados experimentais de Guimarães (1980) através da comparação das curvas tensão-deformação obtidas para os dois casos. No entanto, o modelo é potencialmente aplicado a quaisquer estruturas de concreto armado sob estado plano de tensões.

1.3 – OBJETIVOS

1.3.1 – Objetivo geral

O objetivo geral do trabalho é avaliar a capacidade do modelo numérico constitutivo proposto de simular o comportamento real de estruturas de concreto armado sob aplicação de cargas.

1.3.2 – Objetivos específicos

Os objetivos específicos são apresentados a seguir:

- ✓ Estimar a carga de ruptura da viga parede em questão e compará-la ao valor experimental.
- ✓ Avaliar a capacidade do modelo em determinar a perda de rigidez da estrutura.
- ✓ Questionar quais os parâmetros dos materiais mais adequados ao problema, os quais levam a respostas mais condizentes com os resultados experimentais.
- ✓ Analisar a evolução do dano na estrutura.
- ✓ Avaliar a influência do tamanho dos passos de carga nos resultados numéricos.

1.4 – ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

O presente trabalho foi desenvolvido em seis capítulos e dois apêndices, descritos como segue.

No capítulo 2 é apresentado o desenvolvimento das equações relativas ao modelo constitutivo da armadura. Para tal, foi inicialmente apresentado um modelo friccional unidimensional sem endurecimento, e introduzidas características que permitiram levar em consideração efeitos dos fenômenos de endurecimento isotrópico e cinemático. É apresentado também o algoritmo de integração implícita *Backward-Euler*.

No capítulo 3 é apresentada uma breve introdução sobre modelos constitutivos baseados na mecânica do dano contínuo com ênfase nos modelos isotrópicos. Conceitos como parâmetro de dano, tensões efetivas, tensões equivalentes são estabelecidos. Além disso, é apresentada uma revisão sobre a utilização desses modelos isotrópicos na análise não-linear de estruturas de concreto armado. E por fim, discute-se o método de integração IMPL-EX utilizado para integração do modelo do concreto.

No capítulo 4 é apresentada uma explanação geral sobre alguns métodos de solução de sistemas de equações não-lineares.

No capítulo 5 a aplicação numérica do modelo sugerido é detalhada. Os resultados numéricos apresentados e discutidos.

No apêndice A é demonstrado como foram obtidas as tensões principais utilizadas para determinação da separação do tensor de tensões em suas partes tracionais e compressivas.

No apêndice B é detalhado o esquema de acoplamento entre os elementos que representam a armadura e o concreto.

2 – MODELO CONSTITUTIVO DA ARMADURA

2.1 – INTRODUÇÃO

Para simular numericamente o comportamento da armadura foi implementado computacionalmente um modelo elastoplástico unidimensional, detalhado em Simo e Hughes (1997), no qual são levados em consideração os efeitos do endurecimento isotrópico e cinemático do material.

Apresenta-se a formulação matemática das equações governantes básicas inerentes ao modelo utilizado, destacando-se a decomposição aditiva da deformação em partes elástica e plástica, função de escoamento considerando-se o endurecimento isotrópico e cinemático e condições de complementaridade de *Kuhn-Tucker*.

Para integração das equações governantes foi utilizado um algoritmo de integração implícita *Backward-Euler* conjuntamente com a utilização do preditor elástico durante o processo iterativo de retorno à superfície de escoamento.

2.2 – EQUAÇÕES GOVERNANTES

O modelo elastoplástico utilizado para representar os elementos da armadura é basicamente caracterizado pelas seguintes definições:

- i. Relação tensão-deformação.
- ii. Regra de fluxo plástico.
- iii. Leis para o endurecimento isotrópico e cinemático.
- iv. Condição de escoamento e domínio elástico.
- v. Condições de complementaridade de *Kuhn-Tucker*.
- vi. Condição de consistência.

Primeiramente será desenvolvida a formulação matemática de um modelo mais simplificado, no qual não considerados os fenômenos do endurecimento.

2.2.1 – Modelo friccional unidimensional sem endurecimento

Considerando o dispositivo friccional unidimensional de Coulomb mostrado na Figura 2.1, que inicialmente possui comprimento e área unitários, e é constituído por uma mola, com constante elástica E , e por um elemento de fricção de Coulomb, com constante $\sigma_Y > 0$. As constantes E e σ_Y representam respectivamente, o módulo de elasticidade e a tensão de escoamento do material.

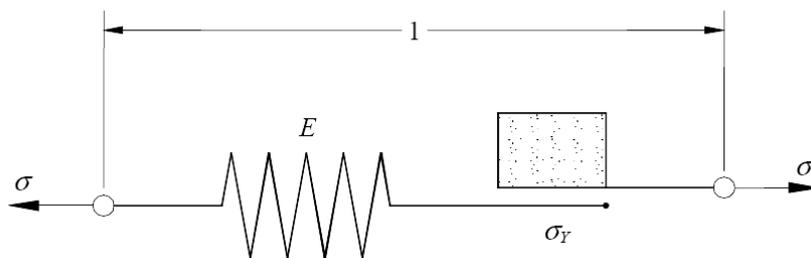


Figura 2.1 - Dispositivo friccional de Coulomb (adaptada – Simo e Hughes, 1997).

Num ponto da armadura submetido a um estado elastoplástico, a deformação total ε é dividida em sua parte elástica ε_e , recuperável, e sua parte plástica ε_p , irrecuperável, conforme mostra a Equação (2.1).

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad (2.1)$$

Sendo E o módulo de elasticidade, a relação tensão-deformação desse ponto é representada por:

$$\sigma = E\varepsilon_e = E(\varepsilon - \varepsilon_p) \quad (2.2)$$

Assumindo que ε , ε_p e σ são funções do tempo, temos que:

$$\dot{\varepsilon}_p = \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_p \quad (2.3)$$

Uma mudança na configuração do ponto só é possível se $\dot{\varepsilon}_p \neq 0$. Para caracterizar essa mudança serão assumidas algumas hipóteses:

1. A tensão σ não pode ser maior, em valor absoluto, que $\sigma_Y > 0$. Isso significa que a princípio as tensões admissíveis estão situadas num intervalo $[-\sigma_Y, \sigma_Y]$. O domínio elástico é, portanto estabelecido por:

$$\mathbb{E}_\sigma := \{\sigma \in \mathbb{R} \mid f(\sigma) \leq 0\} \quad (2.4)$$

Sendo $f(\sigma)$ é a função de escoamento, que tem a seguinte forma:

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y \leq 0 \quad (2.5)$$

2. Se o valor absoluto σ da tensão aplicada for menor que a tensão de escoamento σ_Y , nenhuma mudança em $\dot{\varepsilon}_p$ é observada, isto é, $\dot{\varepsilon}_p = 0$ caracterizando um regime elástico conforme se pode ver na Equação (2.6).

$$f(\sigma) := |\sigma| - \sigma_Y < 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varepsilon}_p = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\sigma} = E \dot{\varepsilon} \quad (2.6)$$

3. Quando $f(\sigma) := |\sigma| - \sigma_Y = 0$ considera-se que elemento escoe na direção das tensões aplicadas com uma constante de escoamento $\gamma \geq 0$. A variação da deformação plástica é representada pela regra de fluxo plástico apresentada pelas Equações (2.7).

$$\dot{\varepsilon}_p = \gamma \geq 0 \text{ se } \sigma = \sigma_Y > 0 \quad (2.7a)$$

$$\dot{\epsilon}_p = -\gamma \geq 0 \text{ se } \sigma = -\sigma_Y < 0 \quad (2.7b)$$

$$\dot{\epsilon}_p = \gamma \text{ sign}(\sigma) \quad (2.7c)$$

Onde a função $\text{sign}(\sigma)$ é uma função sinal definida como:

$$\text{sign}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{se } \sigma > 0 \\ -1 & \text{se } \sigma < 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

As condições de carga e descarga são determinadas através das condições de Kuhn-Tucker, Equação (2.9), e pela condição de consistência, Equação (2.10). Tais condições têm a função de manter o estado de tensão sob o contorno da região elástica durante as deformações plásticas e determinar quais as condições de carregamento.

<i>Condições de Kuhn-Tucker</i>	$f(\sigma) < 0 \Rightarrow \gamma = 0$	
	$\gamma < 0 \Rightarrow f(\sigma) = 0$	(2.9)
	$\gamma \cdot f(\sigma) = 0$	

<i>Condição de consistência</i>	$\gamma \cdot \dot{f}(\sigma) = 0$	(2.10)
---------------------------------	------------------------------------	--------

Durante o fluxo plástico a função de escoamento deve permanecer igual a zero, e portanto sua variação no tempo ser também igual a zero. Essa consideração leva a condição de consistência.

Para $f(\sigma) < 0$, o material está sob estado elástico, implicando em $\gamma = 0$, o que satisfaz as condições da Equação (2.9). No caso de $f(\sigma) = 0$, o material está sob estado plástico, podendo, portanto, continuar a deformar plasticamente, onde $\dot{f}(\sigma) = 0$ e $\gamma > 0$, ou descarregar elasticamente, onde $\dot{f}(\sigma) < 0$ e $\gamma = 0$. Na Tabela 2.1 são resumidos os tipos de situações ocorridas durante o processo de carregamento e descarregamento. A Figura 2.2 mostra de uma forma gráfica a Tabela 2.1.

Tabela 2.1 - Situações de carregamento para o modelo de elastoplasticidade.

Localização de $f(\sigma)$	Constante de escoamento	Situação de carga
$f < 0 \Leftrightarrow f(\sigma) \in \text{int}(\mathbb{E}_\sigma)$	$\gamma = 0$	Elástico
$f = 0 \Leftrightarrow f(\sigma) \in \partial\mathbb{E}_\sigma$	$\dot{f} < 0 \Rightarrow \gamma = 0$	Descarga elástica
	$\dot{f} = 0 \Rightarrow \gamma = 0$	Carga neutra
	$\dot{f} = 0 \Rightarrow \gamma > 0$	Carga plástica
$f > 0$	-	Estado inadmissível

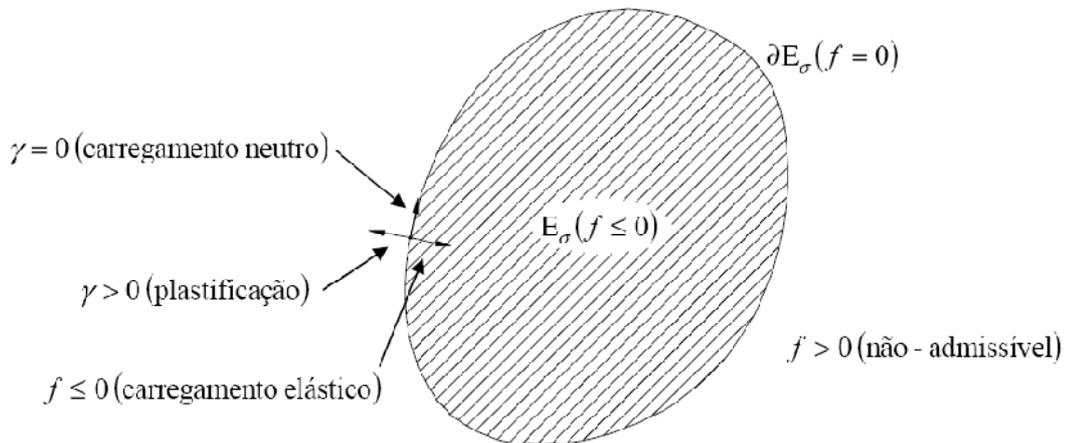


Figura 2.2 - Domínio elástico e estados de tensão admissíveis (Beck, 2009).

2.2.2 – Modelo friccional unidimensional com endurecimento

Para alguns materiais, uma vez iniciado o processo de plastificação, a superfície de escoamento varia devido ao fenômeno do endurecimento. À medida o endurecimento evolui, a superfície de fluência pode expandir sem mudança de forma, caracterizando o endurecimento isotrópico, ou transladar simulando o efeito de *Baushinger*, caracterizando o endurecimento cinemático.

A lei de endurecimento é marcada pela escolha de suas variáveis internas e pela definição da forma com a qual irá afetar a regra de fluxo e a condição de escoamento. Nos itens a seguir serão apresentadas tais definições, assim como a forma das equações governantes do modelo visto anteriormente para levar em conta o fenômeno do endurecimento.

2.2.2.1 – Endurecimento isotrópico

Para que a influência do endurecimento isotrópico na função de escoamento $f(\sigma)$ seja considerada, introduziram-se as variáveis K , denominada módulo plástico, e α , uma função não negativa designada variável interna de endurecimento plástico isotrópico. Dessa maneira a Equação (2.5) passa a ter a seguinte forma:

$$f(\sigma, \alpha) = |\sigma| - [\sigma_Y + K\alpha] \leq 0, \quad \alpha \geq 0 \quad (2.10)$$

A evolução da variável interna de endurecimento plástico isotrópico α é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= |\dot{\epsilon}_p| \\ \dot{\alpha} &= |\gamma \operatorname{sign}(\sigma)| \\ \dot{\alpha} &= \gamma \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.2.2.2 – Endurecimento cinemático

Sendo H o módulo de endurecimento cinemático, e q uma variável que define a localização do centro da superfície de escoamento designada variável interna de endurecimento plástico, a Equação (2.10) toma a forma da Equação (2.12) para levar-se em consideração o efeito do endurecimento cinemático.

$$f(\sigma, q, \alpha) := |\sigma - q| - [\sigma_Y + K\alpha] \leq 0 \quad (2.12)$$

A evolução da variável q é determinada pela Regra de Ziegler:

$$\begin{aligned}\dot{q} &= H \dot{\varepsilon}_p \\ \dot{\varepsilon}_p &= \gamma \operatorname{sign}(\sigma - q) \\ \dot{q} &= \gamma H \operatorname{sign}(\sigma - q)\end{aligned}\tag{2.13}$$

A Tabela 2.2 é um resumo das principais equações governantes do modelo constitutivo desenvolvido por Simo e Hughes (1997), o qual considera os efeitos do endurecimento do material. Esse modelo foi implementado dentro do programa em Elementos Finitos utilizado nesse trabalho.

Tabela 2.2 - Sumário das principais equações governantes do modelo friccional unidimensional com endurecimento.

Relação tensão-deformação	$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_p)$
Regra de fluxo plástico	$\dot{\varepsilon}_p = \gamma \operatorname{sign}(\sigma - q)$
Lei de endurecimento isotrópico	$\dot{\alpha} = \gamma$
Lei de endurecimento cinemático	$\dot{q} = \gamma H \operatorname{sign}(\sigma - q)$
Condição de escoamento	$f(\sigma, q, \alpha) := \sigma - q - [\sigma_Y + K\alpha] \leq 0$
Fechamento do domínio elástico	$\mathbb{E}_\sigma = \{(\sigma, q, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mid f(\sigma, q, \alpha) \leq 0\}$
Condições de complementaridade de Kuhn-Tucker	$\gamma \geq 0, f(\sigma, q, \alpha) \leq 0, \gamma f(\sigma, q, \alpha) = 0$
Condição de consistência	$\gamma \dot{f}(\sigma, q, \alpha) = 0 \text{ (se } f(\sigma, q, \alpha) = 0)$

2.3 – INTEGRAÇÃO DO MODELO CONSTITUTIVO DA ARMADURA

O problema da integração do modelo constitutivo é puramente localizado nos pontos de Gauss da armadura e obedecem as seguintes diretrizes:

- ✓ Seja $x \in [0, L]$ um dado ponto que obedece às equações da Tabela 2.2.
- ✓ Assume-se que o estado local do ponto x é completamente determinado no tempo atual t_n :

$$\{\varepsilon_n(x), \varepsilon_n^p(x), \alpha_n(x), q_n(x)\} \quad (2.12)$$

- ✓ Através da Equação (2.13), a tensão $\sigma_n(x)$ no ponto no tempo t_n é determinada.

$$\sigma_n(x) = [\varepsilon_n(x) - \varepsilon_n^p(x)] \quad (2.13)$$

- ✓ O incremento de tempo $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ é gerado através de um incremento de deformação $\Delta\varepsilon(x)$, ou seja, a deformação é a variável independente básica.

Para integração das equações do modelo constitutivo adotado será aplicado o método implícito *Backward-Euler* e o algoritmo *Return-Mapping* apresentados em Simo e Hughes (1997). Como leitura complementar sobre a aplicação dos algoritmos *Return-Mapping* é sugerida a consulta ao capítulo 3.5 do trabalho de Bonet e Wood (2008).

2.3.1 – Problema de valor inicial incremental elastoplástico

Pela aplicação do método *Backward-Euler* às equações presentes na Tabela 2.2, obtém-se:

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\gamma \operatorname{sign}(\sigma_{n+1}) \quad (2.14a)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\gamma \quad (2.14b)$$

$$\sigma_{n+1} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \quad (2.14c)$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_n \quad (2.14d)$$

Onde $\Delta\gamma = \gamma_{n+1}\Delta t \geq 0$ é um multiplicador Lagrangeano denominado multiplicador plástico. As variáveis $(\sigma_{n+1}, \alpha_{n+1})$ junto com $\Delta\gamma$ são restringidas pelas condições de Kuhn-Tucker em sua forma discreta:

$$\begin{aligned} f_{n+1} &:= |\sigma_{n+1}| - (\sigma_Y + K\alpha_{n+1}) \leq 0 \\ \Delta\gamma &\geq 0 \\ \Delta\gamma f_{n+1} &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

A seguir será discutido a solução do problema apresentado na Equação (2.14).

2.3.2 – Algoritmos *Return-mapping*

2.3.2.1 – Preditor elástico inicial

Será considerado um estado tensional auxiliar denominado preditor inicial que não necessariamente corresponde ao estado real de tensão no ponto da armadura e que pode ser obtido considerando-se o fluxo plástico constante. O passo é puramente elástico durante o processo incremental. As Equações (2.17) mostram as expressões que determinam esse estado auxiliar indicado pelo sobrescrito *trial*.

$$\sigma_{n+1}^{trial} := E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) \equiv \sigma_n + E\Delta\varepsilon_n \quad (2.17a)$$

$$\xi_{n+1}^{trial} := \sigma_{n+1}^{trial} - q_n \quad (2.17b)$$

$$\varepsilon_{n+1}^{p\,trial} := \varepsilon_n^p \quad (2.17c)$$

$$\alpha_{n+1}^{trial} := \alpha_n \quad (2.17d)$$

$$q_{n+1}^{trial} := q_n \quad (2.17e)$$

$$f_{n+1}^{trial} := |\sigma_{n+1}^{trial}| - [\sigma_Y + K\alpha_n] \quad (2.17f)$$

Onde ξ é uma variável auxiliar dada por $\xi = \sigma - q$, utilizada para fins de facilitar a notação.

Calculado f_{n+1}^{trial} podem ocorrer dois casos:

✓ CASO 1: $f_{n+1}^{trial} \leq 0$

Nesse caso, o estado auxiliar calculado é um estado admissível, visto que obedece à Equação (2.10). Sendo assim tal estado é de fato o estado real do ponto calculado, resultando nas seguintes afirmações:

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p \quad (2.18a)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n \quad (2.18b)$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial} \quad (2.19)$$

$$\Delta\gamma = 0 \quad (2.20)$$

✓ CASO 2: $f_{n+1}^{trial} > 0$

Essa situação não caracteriza uma solução real para o problema pois viola a condição expressa na Equação (2.10). Assim, faz-se necessário que $\Delta\gamma > 0$ para que o estado atenda as condições de Kuhn-Tucker.

$$\Delta\gamma > 0 \quad (2.21a)$$

$$\Delta\gamma f_{n+1} = 0 \Rightarrow f_{n+1} = 0 \quad (2.21b)$$

Os dois casos analisados podem ser vistos de forma mais imediata na Equação (2.22).

$$f_{n+1}^{trial} \begin{cases} \leq 0 \Rightarrow \text{Passo elástico } \Delta\gamma = 0 \\ > 0 \Rightarrow \text{Passo plástico } \Delta\gamma > 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

2.3.2.2 - Algoritmo *return-mapping* unidimensional

Considerando que ocorra o processo incremental, tem-se:

$$f_{n+1}^{trial} > 0 \Leftrightarrow f(\sigma_{n+1}, \alpha_{n+1}) = 0 \quad (2.23a)$$

$$\Delta\gamma > 0 \quad (2.23b)$$

Sendo assim, o estado final do ponto será expresso em termos da tensão obtida do preditor inicial e do multiplicador plástico, como segue:

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \\ &= E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) - E(\varepsilon_{n+1}^p - \varepsilon_n^p) \\ &= \sigma_{n+1}^{trial} - E \Delta\gamma \text{sign}(\sigma_{n+1}) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Por manipulações algébricas tem-se:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma E \text{sign}(\xi_{n+1}) \quad (2.25a)$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\gamma \text{sign}(\xi_{n+1}) \quad (2.25b)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\gamma \quad (2.25c)$$

$$q_{n+1} = q_n + \Delta\gamma H \text{sign}(\xi_{n+1}) \quad (2.25d)$$

$$f_{n+1} \equiv |\xi_{n+1}| - (\sigma_Y + K\alpha_{n+1}) = 0 \quad (2.25e)$$

Onde:

$$\xi_{n+1} := \sigma_{n+1} - q_{n+1} \quad (2.26)$$

Uma expressão para ξ_{n+1} é obtida pela subtração das Equações (2.25a) e (2.25d):

$$\xi_{n+1} = (\sigma_{n+1}^{trial} - q_n) - \Delta\gamma (E + H) \text{sign}(\xi_{n+1}) \quad (2.27)$$

Utilizando-se a Equação (2.17b) e rearranjando termos, a Equação (2.27) toma a seguinte forma:

$$[|\xi_{n+1}| + \Delta\gamma (E + H)] \text{sign}(\xi_{n+1}) = |\xi_{n+1}^{trial}| \text{sign}(\xi_{n+1}^{trial}) \quad (2.28)$$

Uma vez que $\Delta\gamma > 0$ e $E > 0$, a expressão entre colchetes da Equação (2.28) é necessariamente positiva, portanto:

$$\text{sign}(\xi_{n+1}) = \text{sign}(\xi_{n+1}^{trial}) \quad (2.29)$$

Utilizando a afirmação da Equação (2.29), a Equação (2.28) assume a seguinte forma:

$$|\xi_{n+1}| + \Delta\gamma [E + H] = |\xi_{n+1}^{trial}| \quad (2.30)$$

Agora, o multiplicador plástico é determinado da Equação (2.25) e utilizando-se a Equação (2.30) e a Equação (2.25c):

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= |\xi_{n+1}^{trial}| - (E + K)\Delta\gamma - [\sigma_Y + K\alpha_{n+1}] \\ &= |\xi_{n+1}^{trial}| - (E + K)\Delta\gamma - [\sigma_Y + K\alpha_n] - K(\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\ &= f_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma[E + (K + H)] = 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

De forma explícita:

$$\Delta\gamma = \frac{f_{n+1}^{trial}}{E + (K + H)} > 0 \quad (2.32)$$

2.3.2.3 – Quadro resumo da integração do modelo constitutivo da armadura

1. Dados iniciais: $\{\varepsilon_n^p, \alpha_n, q_n\}$
2. Dado um incremento de deformação no ponto: $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_n$
3. Calcular o preditor elástico inicial e testar para o carregamento plástico:

$$\sigma_{n+1}^{trial} := E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p)$$

$$\xi_{n+1}^{trial} := \sigma_{n+1}^{trial} - q_n$$

$$f_{n+1}^{trial} := |\xi_{n+1}^{trial}| - [\sigma_Y + K\alpha_n]$$

SE $f_{n+1}^{trial} \leq 0$ ENTÃO

Passo elástico: $(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{trial}$ e SAI

SENÃO

Passo plástico: Ir para item 4

4. *Return Mapping:*

$$\Delta\gamma := \frac{f_{n+1}^{trial}}{E + [K + H]} > 0$$

$$\sigma_{n+1} := \sigma_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma E \operatorname{sign}(\xi_{n+1}^{trial})$$

$$\varepsilon_{n+1}^p := \varepsilon_n^p + \Delta\gamma E \operatorname{sign}(\xi_{n+1}^{trial})$$

$$q_{n+1} := q_n + \Delta\gamma H \operatorname{sign}(\xi_{n+1}^{trial})$$

$$\alpha_{n+1} := \alpha_n + \Delta\gamma$$

3 – MODELO CONSTITUTIVO DO CONCRETO

3.1 – CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE MODELOS DE DANO

A mecânica do dano contínuo é formalizada com base na termodinâmica dos processos irreversíveis e considera os efeitos da deterioração do material em seu comportamento mecânico macroscópico.

Lemaitre e Desmorat (2005) definem dano, em mecânica dos sólidos, como o desenvolvimento e crescimento de microvazios ou microfissuras as quais são descontinuidades em um meio considerado contínuo em larga escala.

Enquanto a mecânica da fratura lida com as condições de propagação de fissuras macroscópicas, a mecânica do dano contínuo estuda o efeito de microfissuras distribuídas na resposta do material.

Segundo Pituba e Proença (2005), o conceito de dano é bem aplicado ao concreto, visto que nesse material o desenvolvimento da microfissuração pode ser considerado contínuo e iniciado a baixas tensões e deformações. Além disso, as deformações permanentes também estão relacionadas ao processo de evolução da microfissuras.

Modelos formulados com base na mecânica do dano admitem que a perda de rigidez seja oriunda da evolução de microfissuras. Tais modelos diferem entre si pela escolha das variáveis internas, dentre elas o parâmetro de dano, as leis de evolução dessas variáveis internas e a forma que terá a função da energia interna.

Para FIB (2008), uma importante vantagem dos modelos de dano é que os algoritmos que calculam as tensões correspondentes às deformações são geralmente explícitos, sem a necessidade de solução iterativa.

Dentre os modelos baseados na mecânica do dano contínuo, os mais simples consideram uma distribuição uniforme das fissuras e dos vazios em todas as direções do elemento recebendo assim a denominação de modelos de dano isotrópico. Seu comportamento não-linear é representado através de uma variável escalar de dano. No entanto, existem modelos anisotrópicos nos quais se considera que o processo de fissuração conduza a uma anisotropia do material.

Maiores detalhes sobre a mecânica do dano são apresentados em Krajcinovic (1996). Voyiadjis e Kattan (2006) fazem uma abordagem direcionada ao estudo do comportamento de metais. Lemaitre e Desmorat (2005) analisam os fenômenos da fadiga, retração aplicados à materiais frágeis. Já Lemaitre (2001) aborda vários tipos de modelos constitutivos para materiais diversos, abordando os modelos de dano em seu Capítulo 6. Voyiadjis *et al.* (2008) apresentam um modelo dano anisotrópico e de plasticidade para o concreto.

3.2 – MODELOS DE DANO ISOTRÓPICO ESCALAR

Para Simo e Ju (1987), formulações de dano isotrópico são extensivamente empregadas na literatura por causa de sua simplicidade, eficiência e adequação para muitas aplicações práticas. Os modelos de dano isotrópico representam o comportamento não-linear do material através de uma variável interna de dano escalar conhecida por degradação ou dano, d . Conforme Lemaitre (1985), *apud* Manzoli (1994), essa variável pode ser interpretada como a medida do estado dos defeitos do material devido à propagação das microfissuras internas, variando de 0 (material ileso) a 1 (material completamente colapsado).

A seguir serão apresentados as definições e variáveis mais importantes para o bom entendimento do modelo que foi implementado para análise dos elementos de concreto, tais como o parâmetro de dano escalar, tensão efetiva, equação constitutiva, critério de dano, tensão equivalente e lei de evolução do dano.

3.2.1 – Parâmetro de dano e conceito de tensão efetiva

Com base na Figura 3.1, considerando-se a seção S grande o suficiente para conter um número representativo de defeitos, o dano é definido pela Equação (3.1).

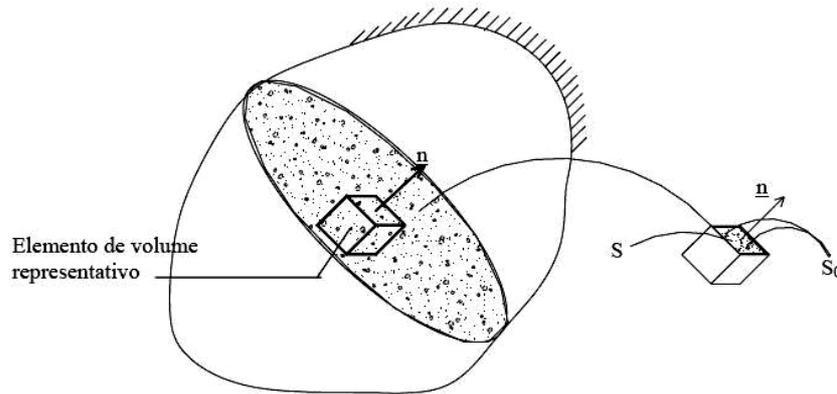


Figura 3.1 - Elemento de volume com dano (Pituba, 1998).

$$d = \frac{S - S_0}{S} = 1 - \frac{S_0}{S} \quad (3.1)$$

Na Equação (3.1) S_0 é a área efetiva restante (desconsiderando os microvazios). É então considerado que associada à área efetiva exista uma tensão efetiva $\bar{\sigma}$ expressa por:

$$\bar{\sigma} = \sigma \frac{1}{1 - d} \Rightarrow \sigma = (1 - d)\bar{\sigma} \quad (3.2)$$

A Equação (3.2) advém da hipótese de equivalência de deformações formulada por Lemaitre (1978), *apud* Manzoli (1994), que dispõe:

“a deformação associada a um estado danificado sob tensões aplicadas é equivalente às deformações associadas a um estado ileso sob tensões efetivas”

A representação gráfica da hipótese de equivalência de deformações é vista na Figura 3.2. Na representação da esquerda o material encontra-se sobre tensões aplicadas e danificado, na

direita, o dano é nulo e o material está sobre tensões efetivas, no entanto a deformação nos dois estados é a mesma.

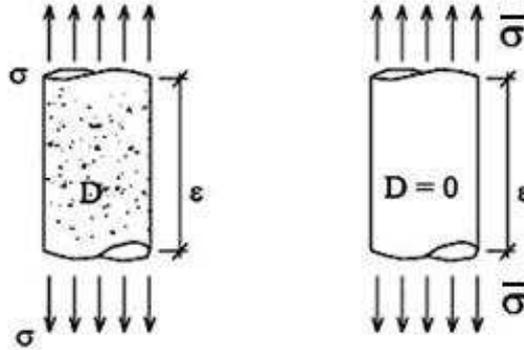


Figura 3.2 - Hipótese da equivalência de tensões (Adaptada - Pituba, 2003).

A relação entre o tensor de tensões efetivas e o tensor de tensões de Cauchy é determinada pelo parâmetro de dano e assume a forma apresentada na Equação (3.3).

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{1-d} \sigma \quad (3.3)$$

3.2.2 – Lei constitutiva não-linear para o concreto

Uma lei constitutiva linear-elástica padrão pode ser usada para descrever as relações tensão-deformação efetivas para pontos do material localizados na área efetiva, isto é:

$$\bar{\sigma} = \mathbf{D}_0 : \varepsilon \quad (3.4)$$

Onde \mathbf{D}_0 é o tensor constitutivo linear-elástico de quarta ordem e ε é o tensor de deformações. A aplicação da hipótese de equivalência de tensões é feita através da associação das Equações (3.5) e (3.2), resultando em:

$$\sigma = (1-d)\bar{\sigma} = (1-d)\mathbf{D}_0 : \varepsilon \quad (3.5)$$

Manzoli (1994) ressalta que por considerar a relação tensão-deformação linear-elástica no espaço efetivo, o comportamento geral não-linear é essencialmente dirigido pela evolução do dano. O dano é portanto interpretado como a medida da redução da rigidez inicial do material. A perda da rigidez devido à evolução do parâmetro de dano pode ser visualizada na Figura 3.3.

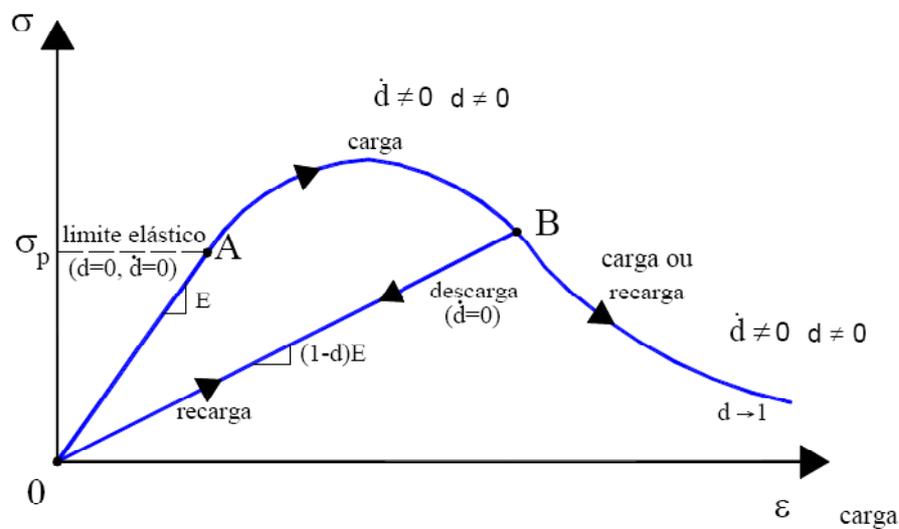


Figura 3.3 - Diagrama de tensão versus deformação uniaxial (Gonçalves, 2003).

3.2.3 – Critério de dano, conceito de tensão equivalente e lei de evolução do dano

Similarmente aos modelos de elastoplasticidade, é necessária a introdução de um critério que especifique o domínio elástico e o estado no qual se inicia o crescimento do dano. Simo e Ju (1987) consideram que o estado do dano no material é caracterizado por meio de um critério de dano na seguinte forma:

$$g(\tau(\bar{\sigma}), r) = \tau(\bar{\sigma}) - r \leq 0 \quad (3.6)$$

Onde $\tau(\bar{\sigma})$ é a tensão equivalente dada por uma norma do tensor de tensões efetivas, e r é o dano escalar limite corrente. O critério de dano apresentado na Equação (3.6) define um

conjunto de superfícies de dano, cuja forma é determinada pela escolha da norma para $\tau(\bar{\sigma})$ e o tamanho é controlado pelo incremento dos valores de r . A Equação (3.6) também pode ser expressa em sua forma equivalente:

$$g'(\tau, r) = G(\tau) - G(r) \leq 0 \quad (3.7)$$

Onde $G(\cdot)$ é uma função escalar monotônica crescente a ser definida.

Diante da definição do parâmetro e critério de dano, é necessária a introdução de uma lei de evolução para o dano, de modo a caracterizar a degradação das propriedades mecânicas do material. A Equação (3.9) descreve a evolução do dano.

$$\begin{aligned} \dot{d} &= \dot{\mu} \frac{\partial g'(\tau, r)}{\partial r} = \dot{\mu} \frac{\partial G(r)}{\partial r} \\ \dot{r} &= \dot{\mu} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Onde $\dot{\mu}$ é o parâmetro de dano consistente que define as condições de carregamento ou descarregamento de acordo com as relações de Kuhn-Tucker anteriormente mostradas na Equação (2.9), mas adaptadas nesse capítulo às variáveis utilizadas:

$$\dot{\mu} \geq 0, \quad g' = 0, \quad \dot{\mu} g'(\tau, r) = 0 \quad (3.9)$$

Para $g' < 0$, o critério de dano não é satisfeito e, conforme a Equação (3.10), $\dot{\mu} = 0$, ou seja, não existe evolução do dano. No caso de $g' > 0$, o dano é crescente:

$$g' = 0 \Rightarrow \tau - r = 0 \Rightarrow \dot{\tau} = \dot{r} = \dot{\mu} \quad (3.10)$$

O que leva a uma forma explícita para a variável r :

$$r_t = \max[r_0, \max(\tau)] \quad (3.11)$$

Onde r_0 é o do dano limite inicial, assumido ser propriedade do material.

A seguir serão apresentados exemplos de aplicação de modelos de dano isotrópico em análise não-linear de estruturas de concreto armado, bem como seus aspectos gerais.

3.3 – APLICAÇÕES DE MODELOS DE DANO ISOTÓPICO

Um modelo constitutivo para simulação do comportamento sísmico de pilares de seção oca, validado através de resultados experimentais obtidos em modelo reduzido, é apresentado por Faria *et al.* (2000). Para tanto, o concreto foi discretizado em elementos finitos sob estado plano de tensão, cujo comportamento foi simulado através de um modelo de dano contínuo com duas variáveis escalares de dano, uma para tração e outra para compressão. As armaduras foram discretizadas em elementos de treliça no qual o comportamento cíclico do aço é simulado através do modelo de Giuffré-Menegotto-Pinto. Os autores consideraram, também, a influência do confinamento do concreto. Dois tipos de pilares foram estudados, um longo, no qual predomina efeitos de flexão, e outro curto, onde são relevantes os efeitos não-lineares associados ao corte. Em ambos os modelos a concordância entre a resposta obtida no modelo numérico proposto e aquela observada experimentalmente é bastante satisfatória e demonstrou-se capaz de prever com grande precisão a contínua modificação de rigidez registrada no ensaio experimental.

Faria *et al.* (1999) descrevem uma simulação numérica de duas paredes de concreto armado, ligadas entre si por seis lajes ensaiadas em mesa sísmica. Os modelos constitutivos para o aço e para o concreto foram os mesmos adotados nos pilares analisados por Faria *et al.* (2000). A simulação foi capaz de prever os principais fenômenos que influenciam o comportamento de paredes estruturais.

Cervera *et al.* (1996) apresentam uma análise numérica de barragens de concreto sujeitas à excitação sísmica. O modelo é primeiramente introduzido na forma de taxa independente com

a incorporação de duas variáveis internas de dano caracterizando a tração e a compressão separadamente. Em seguida, é apontada uma regularização viscosa do modelo pela introdução de uma característica chamada taxa de sensibilidade.

3.4 – O MODELO DE DANO COM DUAS VARIÁVEIS

A característica básica do modelo adotado consiste na utilização de duas variáveis de dano, uma para representar o dano a tração, d^+ , e a outra, o dano a compressão, d^- . Visto que o concreto apresenta um comportamento diferente quanto submetido à cargas compressivas e de tração, é oportuno que a degradação devido a tais situações seja tratadas de forma diferenciada. De modo a identificar claramente quais variáveis são referentes à tração e à compressão, os índices (+) e (-) são utilizados respectivamente.

Para o propósito exposto a pouco o tensor de tensões efetivas é decomposto em partes tracionais e compressivas de acordo com Cervera *et al.* (1996):

$$\bar{\sigma}^+ = \langle \bar{\sigma} \rangle = \sum_{i=1}^3 \langle \bar{\sigma}_i \rangle p_i \otimes p_i \quad (3.12a)$$

$$\bar{\sigma}^- = \langle \bar{\sigma} \rangle = \sum_{i=1}^3 \langle \bar{\sigma}_i \rangle p_i \otimes p_i \quad (3.12b)$$

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^+ + \bar{\sigma}^- \quad (3.12c)$$

Na Equação acima, $\bar{\sigma}_i$ representa a i -ésima tensão principal do tensor de tensões $\bar{\sigma}$, p_i é um vetor unitário associado a direção principal. O símbolo $\langle \cdot \rangle$ é a função de MacAuley assim descrita na Equação (3.13), e o símbolo $\langle x \rangle = x$ é tal que $\langle x \rangle = x$.

$$\langle \bar{\sigma}_i \rangle = \begin{cases} \bar{\sigma}_i, & \text{se } \bar{\sigma}_i > 0 \\ 0, & \text{se } \bar{\sigma}_i < 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

No Apêndice 1 é mostrada a forma como foi feita a obtenção das tensões principais.

De posse dos tensores de tensões efetivas $\bar{\sigma}^+$ e $\bar{\sigma}^-$, podem-se desenvolver as equações para o modelo proposto separadamente para a tração e para a compressão.

3.4.1 – Tensões equivalentes

A tensão equivalente é definida como uma forma de representar quantitativamente e unidimensionalmente o estado de tensão de um ponto a fim de compará-lo com as tensões limites, que são grandezas escalares obtidas em ensaios. Como consequência da divisão das tensões serão definidas tensões equivalentes tanto para tração quanto para compressão.

3.4.1.1 – Tração

Nesse trabalho, a forma para a tensão equivalente positiva é dada pela seguinte expressão:

$$\bar{\tau}^+(\bar{\sigma}^+) = \sqrt{\bar{\sigma}^+ : \mathbf{D}_0^{-1} : \bar{\sigma}^+} \quad (3.14)$$

onde \mathbf{D}_0^{-1} é o tensor constitutivo elástico de quarta ordem e $\bar{\sigma}^+$ é o tensor de tensões efetivas de tração.

Particularizando para o caso de estado plano de tensões, e adotando a notação matricial, a Equação (3.14) toma a seguinte forma:

$$\bar{\tau}^+(\bar{\sigma}^+) = \sqrt{\{\bar{\sigma}^+\}^T [D_0]^{-1} \{\bar{\sigma}^+\}} \quad (3.15)$$

onde $\{\bar{\sigma}^+\}^T$ é um vetor e $[D_0]^{-1}$ é uma matriz.

A matriz constante elástica $[D_0]$, e sua inversa $[D_0]^{-1}$ são dadas por:

$$[D_0] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 1 & 1 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$[D_0]^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson.

3.4.1.2 – Compressão

Para a compressão, a expressão para tensão equivalente é inspirada no critério de *Drucker-Prager* e formulada *Cervera et al* (1996) como a seguinte forma:

$$\bar{\tau}^-(\bar{\sigma}^-) = \sqrt{\sqrt{3} (K \bar{\sigma}_{oct}^- + \bar{\tau}_{oct}^-)} \quad (3.18)$$

Na equação (3.18) $\bar{\sigma}_{oct}^-$ e $\bar{\tau}_{oct}^-$ designam as tensões octaédricas normal e tangencial correspondentes ao tensor efetivo de compressão. Os valores para tais tensões octaédricas são dados pelas expressões a seguir:

$$\bar{\sigma}_{oct}^- = \frac{> \bar{\sigma}_1 < + > \bar{\sigma}_2 <}{3} \quad (3.19)$$

$$\bar{\tau}_{oct}^- = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{> \bar{\sigma}_1 <^2 + > \bar{\sigma}_1 < . > \bar{\sigma}_2 < + > \bar{\sigma}_2 <^2}{3}} \quad (3.20)$$

Onde k , expressa pelas Equações (3.21) e (3.22), é definida por *Faria et al* (2000) como uma propriedade do material que permite graduar o ganho de resistência biaxial que em compressão bidimensional o concreto apresenta, relativamente à situação de referência com compressão uniaxial. A relação entre as resistências uniaxial e biaxial à compressão do concreto é dada pelo parâmetro R_0 .

$$k = \sqrt{2} \frac{R_0 - 1}{2R_0 - 1} \quad (3.21)$$

$$R_0 = \frac{f_{0\ 2D}^-}{f_{0\ 1D}^-} \quad (3.22)$$

Onde $f_{0\ 1D}^-$ e $f_{0\ 2D}^-$ são as máximas tensões elásticas de compressão obtidas em ensaios unidimensionais e bidimensionais. Segundo Cervera *et al* (1996) os valores típicos para o concreto são $R_0 = 1,16$ e $K = 0,1714$.

3.4.2 – Parâmetros r_0^+ e r_0^-

São considerados características do material, sendo assim um indicador de quando o material começa a danificar. Da mesma forma das outras variáveis e equações tem-se uma formulação para compressão e tração.

3.4.2.1 – Tração

$$r_0^+ = \sqrt{f_{0\ 1D}^+ \cdot \frac{1}{E} \cdot f_{0\ 1D}^+} = \frac{f_{0\ 1D}^+}{\sqrt{E}} \quad (3.23)$$

Onde $f_{0\ 1D}^+$ é a máxima tensão elástica de tração.

3.4.2.2 – Compressão

$$r_0^- = \sqrt{\frac{f_{0\ 1D}^-}{\sqrt{3}} (\sqrt{2} - K)} \quad (3.24)$$

3.4.3 – Lei de evolução do dano

3.4.3.1 – Tração

A evolução do parâmetro de dano à tração é definida pela Equação (3.25). Nota-se que quando $r^+ = r_0^+$ o dano é nulo.

$$d^+ = G^+(r^+) = 1 - \frac{r_0^+}{r^+} \exp \left[A^+ \left(1 - \frac{r^+}{r_0^+} \right) \right] \quad (3.25)$$

Segundo Manzoli (1994), o parâmetro A^+ é obtido pela relação entre a energia total dissipada num processo de tração unidimensional e a energia de fratura do concreto, G_f , então:

$$A^+ = \left(\frac{G_f E}{l (f_0^+)^2} - \frac{1}{2} \right)^{-1} \quad (3.26)$$

Onde l é o comprimento característico do elemento finito considerado.

3.4.3.2 – Compressão

A evolução do dano a compressão é dada por:

$$d^- = G^-(r^-) = 1 - \frac{r_0^-}{r^-} (1 - A^-) - A^- \exp \left[B^- \left(1 - \frac{r^-}{r_0^-} \right) \right] \quad (3.27)$$

Segundo Faria *et al* (1999) os parâmetro A^- e B^- devem ser definidos pela imposição da curva tensão-deformação unidimensional numérica a compressão coincidir em dois pontos seleccionados com a curva extraída do ensaio a compressão simples.

3.4.4 – Critério de dano

Separando as Equações (3.6) e (3.11) em termos de tração e compressão temos:

$$g^+ = \bar{\tau}^+(\bar{\sigma}^+) - r^+ \leq 0, \quad , \quad r^+ = \max[r_0^+, \max(\bar{\tau}^+)] \quad (3.28)$$

$$g^- = \bar{\tau}^-(\bar{\sigma}^-) - r^- \leq 0, \quad , \quad r^- = \max[r_0^-, \max(\bar{\tau}^-)] \quad (3.29)$$

3.4.5 – Lei constitutiva

O tensor de tensões de Cauchy é dado por:

$$\sigma = (1 - d^+)\bar{\sigma}^+ + (1 - d^-)\bar{\sigma}^- \quad (3.30)$$

3.5 – INTEGRAÇÃO DO MODELO CONSTITUTIVO DO CONCRETO

3.5.1 – Considerações Gerais

Segundo Mesquita e Coda (2005), a derivação da matriz tangente elastoplástica algorítmica é consistente com o algoritmo de integração implícito (*backward Euler*) e a aplicação desta preserva a característica de convergência quadrática do método de *Newton-Raphson*. Técnicas padrão podem utilizar a matriz tangente elastoplástica, que é inconsistente com o procedimento de integração implícito (a não ser que o tamanho do incremento seja infinitesimal), provocando a perda da característica de convergência quadrática do método de *Newton-Raphson*.

No caso desse trabalho, não foi utilizada a matriz algorítmica, e sim a matriz tangente elastoplástica, e tal como Mesquita e Coda (2005) colocam, a convergência não foi obtida, ou necessitava de muitas iterações e tamanhos de passos de carga muito pequenos. Sendo assim, para integração do modelo constitutivo do concreto, optou-se pela utilização de um esquema

de integração explícito e implícito, denominado IMPL-EX, desenvolvido por Oliver *et al.* (2008)

A versão do IMPL-EX aqui utilizada e uma interpretação sugerida pelo Professor Osvaldo Luís Manzoli da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, não publicada ainda por estar em fase de melhorias. O professor Manzoli adapta o método desenvolvido por Oliver *et al.* (2008) para ser aplicado a modelos de danos com duas variáveis escalares de dano, ao invés de apenas uma.

A seguir será feita uma breve discussão sobre os esquemas de integração explícitos e implícitos e suas implicações.

3.5.2 – Esquemas de integração explícitos e implícitos

Segundo Oliver *et al.* (2008), os esquemas de integração explícitos são em muitos casos condicionalmente estáveis. Isso se traduz na limitação do tamanho do passo de carga e, conseqüentemente, um grande número de passos de carga são necessários para resolver um problema. Seus algoritmos de resolução são mais robustos, portanto mais caros (em termos de custo computacional).

Ainda de acordo com Oliver *et al.* (2008), os esquemas de integração implícitos são geralmente estáveis. Portanto, não existe limitação intrínseca do tamanho do passo de carga, exceto para controle de erro da integração. Tais esquemas levam a resultados exatos, mesmo para grandes passos de carga, mas isso à custa de uma perda de robustez do algoritmo que, para muitos casos de interesse prático, também podem afetar no custo computacional.

3.5.3 – Método IMPL-EX

O algoritmo IMPL-EX associa a robustez dos métodos explícitos à utilização de informações de iterações passadas, tal como nos métodos implícitos. Foi desenvolvido baseado em duas famílias de modelos constitutivos, os modelos de dano contínuo e os modelos elastoplásticos.

Oliver *et al.* (2008) listam os seguintes benefícios da utilização do método IMPL-EX:

- ✓ O tensor constitutivo tangente algorítmico torna-se simétrico e semi-definido positivo. Isso leva a uma considerável melhoria da robustez em problemas onde o resultado das integrações implícitas resulta em singularidade.
- ✓ Em muitos casos, o tensor constitutivo tangente algorítmico torna-se constante. Portanto, na ausência de fontes de não-linearidade que não seja o modelo constitutivo, o problema não-linear completo reduz-se a uma seqüência de problemas lineares (a cada passo de carga).
- ✓ As boas propriedades de estabilidade do algoritmo de integração implícita são herdadas pelo IMPL EX.
- ✓ A ordem de precisão do algoritmo de integração IMPL-EX, é a mesma dos clássicos algoritmos implícitos de *backward-Euler*. No entanto, o erro absoluto é maior para um mesmo tamanho de passo de carga.

3.5.4 – Aplicação do IMPL-EX para integração do modelo de dano

3.5.4.1 – Algoritmo

No Quadro 3.1 é descrito o procedimento de integração do modelo de dano.

Quadro 3.1 – Método IMPL-EX.

1. Cálculo do tensor de tensões de Cauchy no passo de carga n+1

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = (1 - d_{n+1}^+) \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^+ + (1 - d_{n+1}^-) \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^- \quad (3.31)$$

2. Cálculo do incremento do tensor de tensões de Cauchy no passo de carga n + 1

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^d = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \text{ com } \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \mathbf{D}_0 \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \quad (3.32)$$

3. Cálculo final do tensor de tensões de Cauchy no passo de carga n + 1

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^* = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \Delta \boldsymbol{\sigma}_n^d \quad (3.33)$$

Onde n é o incremento de tensões calculado em (2), porém no passo de carga n.

Na Equação (3.33), o termo $\Delta \boldsymbol{\sigma}_n^d$ é uma informação do passo de carga anterior. No passo de carga atual ele é constante e tem sua derivada anulada:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^*}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \quad (3.34)$$

Aplicando a Equação (3.34) à Equação (3.32) tem-se:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^d = \mathbf{0} = \mathbf{D}_0 \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \quad (3.34a)$$

$$\mathbf{D}_0 = \mathbf{0} \quad (3.34b)$$

ou seja, o tensor constitutivo elástico é positivo definido.

4.5.4.2 – Características

O IMPL-EX tem a particularidade de necessitar uma análise de convergência, a fim de determinar-se qual melhor tamanho do passo de carga para problema dado.

Destacam-se algumas vantagens deste procedimento em relação aos métodos totalmente implícitos:

- ✓ Não é necessário o cálculo do tensor constitutivo algorítmico;
- ✓ Sempre se obtém convergência com no máximo 3 iterações;
- ✓ É estável e obtém convergência para qualquer tamanho de passo de carga.

Porém como desvantagem pode-se destacar que este procedimento é extremamente sensível ao tamanho do passo de carga. Para obter respostas mais próximas do comportamento de vigas parede observado em ensaios experimentais, este procedimento exigiu passos de carga pequenos da ordem de $ds = 10^{-6}$. Desta maneira, para realizar as análises numéricas nesta dissertação utilizou-se de 2000 a 8000 passos de carga para simular as fases elásticas, de início de fissuração das zonas tracionadas até ao esmagamento das regiões comprimidas das vigas parede.

4 – SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

4.1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS

No período anterior à metade dos anos 70, problemas estruturais envolvendo não-linearidade geométrica eram, geralmente, tratados com métodos puramente incrementais sob controle de carga. Estes métodos têm a grande desvantagem de poder desviar a solução da trajetória de equilíbrio. Uma vez que estes métodos não fazem a verificação de forças residuais ou desequilibradas, o erro associado neste caso é dependente do passo de carga e, freqüentemente, é acumulativo durante a análise, tanto que requer um passo de carga muito pequeno para uma análise mais precisa. Somando-se a esta deficiência, a possibilidade de a resolução do sistema ir além de um ponto crítico, utilizando controle de carga, era muita pequena ou mesmo nula.

Esta dificuldade motivou o desenvolvimento de métodos incrementais-iterativos, nos quais os incrementos, que caracterizavam uma fase preditora, foram seguidos pelas iterações de correção do equilíbrio ou fase corretora. Estas correções trazem a solução de volta para a trajetória de equilíbrio e o algoritmo passa a ser menos dependente do tamanho do passo de carga utilizado.

Em uma análise envolvendo não-linearidade geométrica, as estruturas ou componentes estruturais, usualmente, alcançam um nível de carga máximo, no qual se tornam incapazes de resistir a mais incrementos de carga, até que uma mudança significativa na geometria ocorra. Estes níveis de carga são chamados de pontos críticos (limites ou de bifurcação), sendo caracterizados por uma matriz de rigidez tangente singular. Um método baseado em controle de carga pode ser capaz de detectar um ponto limite, mas, em geral, não é capaz de ir além deste ponto. A necessidade de atravessar um ponto limite é motivada pelo fato de que, em muitos casos, a estrutura possui capacidade resistente de carga que pode ainda ser aproveitada.

Durante os últimos 30 anos, importantes avanços têm sido alcançados na resolução de sistemas não-lineares de equações, possibilitando que tanto a carga quanto o deslocamento possam variar simultaneamente durante os passos incrementais, de modo a permitir que os

algoritmos sejam capazes de atravessar um ponto limite e com isso obter com maior êxito a continuação da resposta.

4.2 – MÉTODOS INCREMENTAIS-ITERATIVOS

O sistema discreto de equações não-lineares que governa os problemas estáticos com não-linearidade pode ser definido pela seguinte equação:

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{f} - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

Onde \mathbf{r} é o vetor de forças residuais ou desequilibradas, \mathbf{x} é o vetor de deslocamentos nodais, \mathbf{f} é o vetor de forças externas e $\boldsymbol{\varphi}$ é o vetor de forças internas da estrutura calculado em função dos deslocamentos nodais. Argumentos numéricos (boa aproximação inicial da solução) e físicos (resposta completa do sistema) levam a dividir a carga externa total \mathbf{f} em vários incrementos. Deste modo, certo nível de carga será caracterizado por uma força externa \mathbf{f}^{n-1} e o equilíbrio para este nível de carga será expresso por:

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}^{n-1}) = \mathbf{f}^{n-1} - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^{n-1}) = \mathbf{0} \quad (4.2)$$

A incógnita do problema passa a ser o deslocamento \mathbf{x}^{n-1} para este nível de carga e uma vez satisfeito o equilíbrio para o passo de carga $n - 1$, procede-se o incremento na força externa:

$$\mathbf{f}^n = \mathbf{f}^{n-1} + \Delta\mathbf{f}^n \quad (4.3)$$

Com este incremento na força externa, o vetor de deslocamentos \mathbf{x}^n para o novo passo de carga pode ser definido pela equação abaixo, sendo que a nova incógnita do problema passará a ser o incremento de deslocamento $\Delta\mathbf{x}^n$:

$$\mathbf{x}^n = \mathbf{x}^{n-1} + \Delta\mathbf{x}^n \quad (4.4)$$

A maneira mais fácil de dividir a carga externa total \mathbf{f} em incrementos é fazendo de forma proporcional, utilizando-se um parâmetro escalar λ , chamado nível ou fator de carga:

$$\mathbf{f}^n = \lambda^n \mathbf{f} \quad (4.5)$$

Em função do qual a Equação (4.3) toma a seguinte forma:

$$\lambda^n \mathbf{f} = \lambda^{n-1} \mathbf{f} + \Delta \lambda^n \mathbf{f} \quad (4.6)$$

$$\lambda^n = \lambda^{n-1} + \Delta \lambda^n \quad (4.7)$$

O método incremental apresentado nas Equações (4.2) a (4.4) pode ser convertido em um método incremental-iterativo quando se decide resolver iterativamente para cada um dos incrementos $\Delta \mathbf{x}^n$. Utilizando-se uma expansão em série de Taylor de $\mathbf{r}(\mathbf{x}^n)$ pode-se obter uma predição inicial para $\Delta \mathbf{x}^n$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{x}^n) &= \mathbf{f}^n - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^n) = \mathbf{f}^{n-1} + \Delta \mathbf{f}^n - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^{n-1} + \Delta \mathbf{x}^n) \\ &= \mathbf{f}^{n-1} - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^{n-1}) + \Delta \mathbf{f}^n - \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^{n-1}) \Delta \mathbf{x}^n \\ &= \mathbf{r}(\mathbf{x}^{n-1}) + \Delta \mathbf{f}^n - \mathbf{K}(\mathbf{x}^{n-1}) \Delta \mathbf{x}^n \\ &= \mathbf{0} + \Delta \mathbf{f}^n - \mathbf{K}(\mathbf{x}^{n-1}) \Delta \mathbf{x}^n = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.8)$$

O que implica em:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}^{n-1}) \Delta \mathbf{x}^n = \Delta \mathbf{f}^n \quad (4.9)$$

O valor de $\Delta \mathbf{x}^n$ obtido pela resolução da Equação (4.9) é tomado então como uma primeira aproximação do incremento de deslocamento, denominado $\Delta \mathbf{x}^n_1$. Como aproximação inicial

ao deslocamento \mathbf{x}^n_0 no passo de carga n , é tomado o valor \mathbf{x}^{n-1} . Portanto, tem-se uma primeira aproximação \mathbf{x}^n_1 :

$$\mathbf{x}^n_1 = \mathbf{x}^n_0 + \Delta\mathbf{x}^n_1 = \mathbf{x}^{n-1} + \Delta\mathbf{x}^n_1 \quad (4.10)$$

Caso a primeira aproximação \mathbf{x}^n_1 não seja suficiente para atingir o equilíbrio do sistema, é necessário iniciar a fase iterativa ou corretora:

$$\mathbf{x}^n_{i+1} = \mathbf{x}^n_i + \delta\mathbf{x}_i \quad (4.11)$$

lembrando que o símbolo δ é empregado para destacar que se trata de um deslocamento iterativo e não de um deslocamento incremental que corresponde a um incremento de carga $\Delta\mathbf{f}^n$. Vale a pena ressaltar que a Equação (4.11) pode também ser escrita para o caso dos deslocamentos incrementais:

$$\Delta\mathbf{x}^n_{i+1} = \Delta\mathbf{x}^n_i + \delta\mathbf{x}_i \quad (4.12)$$

Da mesma forma que havia sido feito para os deslocamentos incrementais, o deslocamento iterativo $\delta\mathbf{x}_i$ que aparece nas Equações (4.11) e (4.12) pode ser obtido utilizando-se uma expansão em série de Taylor similar à utilizada na Equação (4.8):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{x}^n_{i+1}) &= \mathbf{f}^n - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^n_{i+1}) \approx \mathbf{f}^n - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^n_i) - \mathbf{K}(\mathbf{x}^n_i)\delta\mathbf{x}_i \\ &= \mathbf{r}(\mathbf{x}^n_i) - \mathbf{K}(\mathbf{x}^n_i)\delta\mathbf{x}_i = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.13)$$

O que implica em:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}^n_i)\delta\mathbf{x}_i = \mathbf{r}(\mathbf{x}^n_i) \quad (4.14)$$

O esquema “preditor-corretor” apresentado nesta seção é conhecido como *Newton-Raphson Completo*, lembrando que são conhecidas modificações na Equação (4.14) que levam a métodos de Newton-Raphson modificados.

É importante mencionar que neste esquema “preditor-corretor” se utiliza controle de carga, uma vez que o parâmetro utilizado para dividir o problema definido na Equação (4.1) em incrementos é o nível ou fator de carga λ . Um certo valor λ^n deste parâmetro caracteriza precisamente um incremento e os deslocamentos iterativos $\delta \mathbf{x}_i$ são sempre calculados para um mesmo nível de carga que não sofre variações durante o processo iterativo.

Conforme comentado, o esquema preditor-corretor que utiliza controle de carga não é um método muito apropriado para muitas situações encontradas na análise estrutural, em especial na transposição de pontos críticos. Existem outros métodos (longitude de arco e controle de deslocamentos) nos quais se escolhe outro parâmetro para caracterizar os incrementos. Conforme será abordado a seguir, a idéia básica destes métodos é tratar o fator de carga como uma variável e impor, no lugar da sua constância, uma restrição diferente caracterizada por um certo incremento do comprimento de arco no espaço definido por forças e deslocamentos.

4.3 – MÉTODOS DE COMPRIMENTO DE ARCO

Da mesma forma que havia sido feito para o caso de métodos incrementais-iterativos com controle de carga, supõe-se uma situação de equilíbrio no passo $n - 1$, conforme definido na Equação (4.2) e busca-se uma nova situação de equilíbrio para o passo n , correspondente a uma carga \mathbf{f}^n definida conforme a Equação (4.6). A diferença básica nos métodos de comprimento de arco é que o incremento de carga $\Delta \lambda^n \mathbf{f}$ é desconhecido a priori. Para determinar a incógnita adicional $\Delta \lambda^n$ se impõe a seguinte restrição:

$$(\Delta \mathbf{x}^n)^T \cdot (\Delta \mathbf{x}^n) + b \cdot (\Delta \lambda^n)^2 \mathbf{f}^T \mathbf{f} = \Delta L^2 \quad (4.15)$$

Onde b um parâmetro de ponderação que será discutido posteriormente. A Equação (4.15) impõe que o incremento da solução no espaço \mathbf{x} - \mathbf{f} tenha um certo comprimento de valor ΔL

convenientemente escolhido a priori. A Equação (4.9) continua sendo válida para definir uma predição do deslocamento incremental:

$$\mathbf{K}^{n-1} \cdot \Delta \mathbf{x}^n = \Delta \lambda^n \cdot \mathbf{f} \quad (4.16)$$

É observado que a solução predita $\Delta \mathbf{x}^n$ definida na Equação (4.16) depende linearmente de $\Delta \lambda^n$, de modo que:

$$\mathbf{K}^{n-1} \cdot \Delta \mathbf{x}_T = \mathbf{f} \quad (4.17)$$

$$\Delta \mathbf{x}^n = \Delta \lambda^n \cdot \Delta \mathbf{x}_T \quad (4.18)$$

Sendo $\Delta \mathbf{x}_T$ o incremento de deslocamento correspondente a totalidade da carga externa de referência. Em função da Equação (4.18) a restrição do método de comprimento de arco definida na Equação (4.15), pode ser escrita por:

$$(\Delta \lambda^n)^2 \cdot [(\Delta \mathbf{x}_T)^T \cdot (\Delta \mathbf{x}_T) + b \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f}] = \Delta L^2 \quad (4.19)$$

$$(\Delta \lambda^n)^2 = \frac{\Delta L^2}{(\Delta \mathbf{x}_T)^T \cdot (\Delta \mathbf{x}_T) + b \mathbf{f}^T \mathbf{f}} \Rightarrow \Delta \lambda^n = \pm \frac{\Delta L}{\sqrt{(\Delta \mathbf{x}_T)^T \cdot (\Delta \mathbf{x}_T) + b \mathbf{f}^T \mathbf{f}}} \quad (4.20)$$

Uma vez conhecido $\Delta \lambda^n$, pode-se calcular $\Delta \mathbf{x}^n$ na Equação (4.18), e em seguida o deslocamento para o nível de carga n , conforme a Equação (4.4). Este método puramente incremental pode ser combinado com iterações dentro de cada incremento. Deste modo, os valores de $\Delta \lambda^n$ e $\Delta \mathbf{x}^n$ são considerados apenas como as primeiras aproximações $\Delta \lambda^n_1$ e $\Delta \mathbf{x}^n_1$ a serem corrigidas de forma iterativa. Com base nas Equações (4.11) e (4.12), pode-se então escrever equações similares para o fator de carga λ^n .

$$\lambda^n_{i+1} = \lambda^n_i + \delta \lambda_i \quad (4.21)$$

$$\Delta\lambda_{i+1}^n = \Delta\lambda_i^n + \delta\lambda_i \quad (4.22)$$

Lembrando que o incremento $\Delta\lambda^n$ é desconhecido a priori, deve-se determinar o seu valor iterativamente, sem considerá-lo fixo dentro de um mesmo incremento.

Supondo que para a iteração i -ésima não tenha sido alcançado uma posição de equilíbrio:

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}^n_i) = \mathbf{f}^n_i - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^n_i) = \lambda^n_i \cdot \mathbf{f} - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^n_i) \neq \mathbf{0} \quad (4.23)$$

Então, para a iteração seguinte tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{x}^n_{i+1}) &= \mathbf{f}^n_{i+1} - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^n_{i+1}) = \lambda^n_{i+1} \cdot \mathbf{f} - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^n_{i+1}) \\ &= (\lambda^n_i + \delta\lambda_i) \mathbf{f} - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^n_i + \delta\mathbf{x}_i) \\ &= \lambda^n_i \mathbf{f} - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^n_i) + \delta\lambda_i \mathbf{f} - \mathbf{K}(\mathbf{x}^n_i) \delta\mathbf{x}_i \\ &= \mathbf{r}(\mathbf{x}^n_i) + \delta\lambda_i \cdot \mathbf{f} - \mathbf{K}(\mathbf{x}^n_i) \delta\mathbf{x}_i \end{aligned} \quad (4.24)$$

Comparando-se as Equações (4.13) e (4.24), pode-se ver que esta última tem um termo adicional $\delta\lambda_i \cdot \mathbf{f}$ que está associado à variação da carga durante o processo iterativo. Em virtude deste termo adicional, ao se admitir $\mathbf{r}(\mathbf{x}^n_{i+1}) = \mathbf{0}$, não se pode obter diretamente o deslocamento iterativo $\delta\mathbf{x}_i$ até que seja determinado o termo $\delta\lambda_i$, obtido graças à utilização da restrição definida na Equação (4.15):

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}^n_{i+1}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K}(\mathbf{x}^n_i) \delta\mathbf{x}_i = \mathbf{r}(\mathbf{x}^n_i) + \delta\lambda_i \cdot \mathbf{f} \quad (4.25)$$

A Equação (4.25) pode, então, ser invertida para se obter a seguinte equação:

$$\delta\mathbf{x}_i = [\mathbf{K}^n_i]^{-1} \mathbf{r}^n_i + \delta\lambda_i \cdot [\mathbf{K}^n_i]^{-1} \cdot \mathbf{f} = \delta\mathbf{x}_{Ri} + \delta\lambda_i \cdot \delta\mathbf{x}_{Ti} \quad (4.26)$$

Sendo $\delta \mathbf{x}_{Ri}$ o deslocamento iterativo correspondente ao método com controle de cargas e $\delta \mathbf{x}_{Ti}$ o deslocamento iterativo correspondente a totalidade da carga externa de referência, podendo os mesmos serem obtidos através da resolução dos seguintes sistemas:

$$\mathbf{K}^n_i \cdot \delta \mathbf{x}_{Ri} = \mathbf{r}^n_i \quad (4.27a)$$

$$\mathbf{K}^n_i \cdot \delta \mathbf{x}_{Ti} = \mathbf{f} \quad (4.27b)$$

Observando-se que na Equação (4.26) aparece novamente o termo adicional que está associado à variação da carga externa.

Combinando as Equações (4.12) e (4.26) obtém-se:

$$\Delta \mathbf{x}^n_{i+1} = \Delta \mathbf{x}^n_i + \delta \mathbf{x}_i = \Delta \mathbf{x}^n_i + \delta \mathbf{x}_{Ri} + \delta \lambda_i \cdot \delta \mathbf{x}_{Ti} \quad (4.28)$$

Uma vez que a restrição definida anteriormente na Equação (4.15) admite, evidentemente, uma formulação em iterações:

$$(\Delta \mathbf{x}^n_{i+1})^T \cdot (\Delta \mathbf{x}^n_{i+1}) + b \cdot (\Delta \lambda^n_{i+1})^2 \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} = (\Delta \mathbf{x}^n_i)^T \cdot (\Delta \mathbf{x}^n_i) + b \cdot (\Delta \lambda^n_i)^2 \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} = \Delta L^2 \quad (4.29)$$

Substituindo-se as Equações (4.22) e (4.28) em (4.29) pode-se obter a seguinte expressão após manipulações algébricas simples:

$$\begin{aligned} & (\Delta \mathbf{x}^n_{i+1})^T \cdot (\Delta \mathbf{x}^n_{i+1}) + b \cdot (\Delta \lambda^n_{i+1})^2 \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} = \\ & = (\delta \lambda_i)^2 ((\delta \mathbf{x}_{Ti})^T \cdot \delta \mathbf{x}_{Ti} + b \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f}) + \delta \lambda_i \cdot (2 \cdot (\Delta \mathbf{x}^n_i + \delta \mathbf{x}_{Ri})^T \delta \mathbf{x}_{Ti} + 2 \cdot \Delta \lambda^n_i \cdot b \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f}) \\ & + ((\Delta \mathbf{x}^n_i + \delta \mathbf{x}_{Ri})^T \cdot (\Delta \mathbf{x}^n_i + \delta \mathbf{x}_{Ri}) + (\Delta \lambda^n_i)^2 \cdot b \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f}) = \Delta L^2 \end{aligned} \quad (4.30)$$

podendo ser compactada na forma de um equação de segundo grau em função de $\delta \lambda_i$:

$$a_1(\delta\lambda_i)^2 + a_2\delta\lambda_i + a_3 = 0 \quad (4.31)$$

Onde:

$$a_1 = (\delta\mathbf{x}_{Ti})^T \cdot \delta\mathbf{x}_{Ti} + b \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} \quad (4.32a)$$

$$a_2 = 2 \cdot (\Delta\mathbf{x}_i^n + \delta\mathbf{x}_{Ri})^T \delta\mathbf{x}_{Ti} + 2 \cdot \Delta\lambda_i^n \cdot b \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} \quad (4.32b)$$

$$\begin{aligned} a_3 &= (\Delta\mathbf{x}_i^n + \delta\mathbf{x}_{Ri})^T \cdot (\Delta\mathbf{x}_i^n + \delta\mathbf{x}_{Ri}) + (\Delta\lambda_i^n)^2 \cdot b \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} - \Delta L^2 \\ &= (\Delta\mathbf{x}_i^n)^T \cdot \Delta\mathbf{x}_i^n + (\Delta\lambda_i^n)^2 \cdot b \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} - \Delta L^2 + 2 \cdot (\Delta\mathbf{x}_i^n)^T \cdot \delta\mathbf{x}_{Ri} + (\delta\mathbf{x}_{Ri})^T \delta\mathbf{x}_{Ri} \\ &= \Delta L^2 - \Delta L^2 + 2 \cdot (\Delta\mathbf{x}_i^n)^T \cdot \delta\mathbf{x}_{Ri} + (\delta\mathbf{x}_{Ri})^T \delta\mathbf{x}_{Ri} \\ &= 2 \cdot (\Delta\mathbf{x}_i^n)^T \cdot \delta\mathbf{x}_{Ri} + (\delta\mathbf{x}_{Ri})^T \delta\mathbf{x}_{Ri} \end{aligned} \quad (4.32c)$$

Supondo que a Equação (4.31) tenha duas raízes reais $\delta\lambda_1^{(1)}$ e $\delta\lambda_1^{(2)}$, isto implica na existência de dois deslocamentos incrementais:

$$\Delta\mathbf{x}_{i+1}^{n(1)} = \Delta\mathbf{x}_i^n + \delta\mathbf{x}_i^{(1)} = \Delta\mathbf{x}_i^n + \delta\mathbf{x}_{Ri} + \delta\lambda_1^{(1)} \cdot \delta\mathbf{x}_{Ti} \quad (4.33a)$$

$$\Delta\mathbf{x}_{i+1}^{n(2)} = \Delta\mathbf{x}_i^n + \delta\mathbf{x}_i^{(2)} = \Delta\mathbf{x}_i^n + \delta\mathbf{x}_{Ri} + \delta\lambda_1^{(2)} \cdot \delta\mathbf{x}_{Ti} \quad (4.33b)$$

Na escolha de uma das duas raízes da Equação (4.31), existem várias estratégias propostas por um grande número de pesquisadores, sendo uma delas, impor a seguinte condição:

$$(\Delta\mathbf{x}_{i+1}^n)^T \cdot (\Delta\mathbf{x}_i^n) > 0 \quad \Rightarrow \quad (\Delta\mathbf{x}_i^n + \delta\mathbf{x}_{Ri} + \delta\lambda_1 \cdot \delta\mathbf{x}_{Ti})^T \cdot (\Delta\mathbf{x}_i^n) > 0 \quad (4.34)$$

Esta condição evita que a solução retorne pela trajetória de equilíbrio, iniciando um processo de descarregamento indesejado. Caso as duas raízes satisfaçam a Equação (4.34), pode-se optar pela solução que mais se aproxime da solução linear $\delta\lambda_i^{linear} = -a_3/a_2$.

Este procedimento apresentado na presente seção recebe o nome de comprimento de arco esférico (*spherical arc-length procedure*) para o caso de se utilizar o parâmetro de ponderação $b = 1$. No espaço $\mathbf{x}\text{-}\mathbf{f}$, as sucessivas aproximações da solução estão situadas em uma esfera de raio ΔL e centrada no ponto de equilíbrio da iteração anterior $(\mathbf{x}^{n-1}, \lambda^{n-1}, \mathbf{f})$, conforme pode ser visualizado na Figura 4.1.

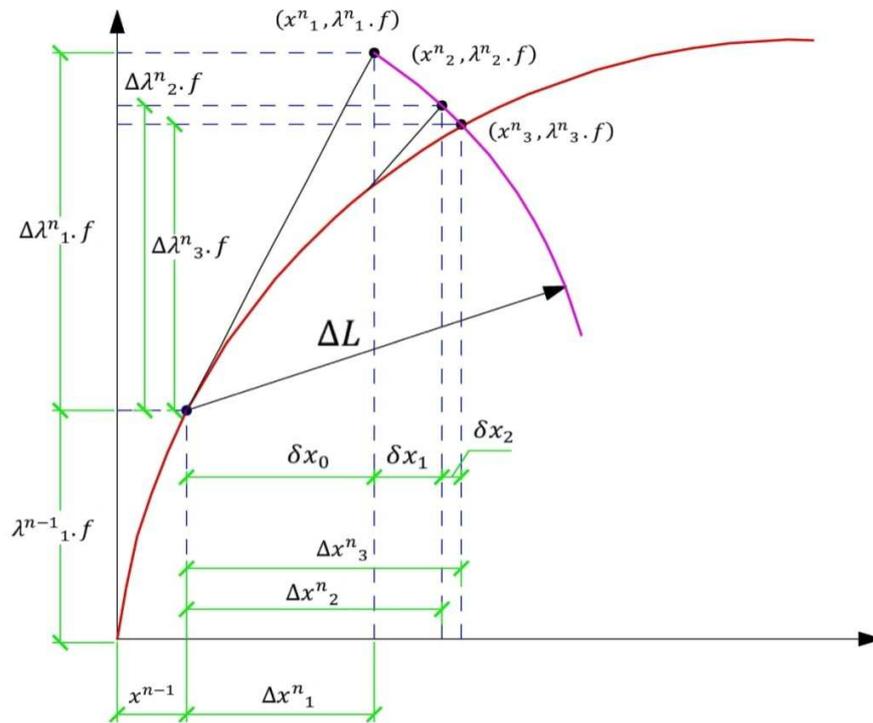


Figura 4.1 – Método de comprimento de arco esférico.

4.4 – MÉTODOS DE COMPRIMENTO DE ARCO LINEARIZADOS

Pode-se utilizar uma formulação alternativa linearizada da Equação (4.31), empregando-se a seguinte restrição:

$$(\Delta \mathbf{x}_{i+1}^n)^T \cdot (\Delta \mathbf{x}_i^n) + b \cdot (\Delta \lambda_{i+1}^n) \cdot (\Delta \lambda_i^n) \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} = \Delta L^2 \quad (4.35)$$

na qual os produtos escalares são entre vetores em duas iterações distintas i e $i + 1$. Substituindo-se as Equações (4.22) e (4.28) em (4.35) pode-se obter:

$$\begin{aligned}
& (\Delta \mathbf{x}_i^n + \delta \mathbf{x}_{Ri} + \delta \lambda_i \cdot \delta \mathbf{x}_{Ti})^T \cdot (\Delta \mathbf{x}_i^n) + b \cdot (\Delta \lambda_i^n + \delta \lambda_i) \cdot (\Delta \lambda_i^n) \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} = \Delta L^2 \\
& (\Delta \mathbf{x}_i^n + \delta \mathbf{x}_{Ri})^T \cdot (\Delta \mathbf{x}_i^n) + b \cdot (\Delta \lambda_i^n)^2 \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} + \delta \lambda_i \cdot ((\delta \mathbf{x}_{Ti})^T \cdot \Delta \mathbf{x}_i^n + b \cdot \Delta \lambda_i^n \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f}) = \Delta L^2 \\
& \quad (\Delta \mathbf{x}_i^n)^T \cdot (\Delta \mathbf{x}_i^n) + b \cdot (\Delta \lambda_i^n)^2 \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} + (\delta \mathbf{x}_{Ri})^T \cdot \Delta \mathbf{x}_i^n \\
& \quad \quad + \delta \lambda_i \cdot ((\delta \mathbf{x}_{Ti})^T \cdot \Delta \mathbf{x}_i^n + b \cdot \Delta \lambda_i^n \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f}) = \Delta L^2 \tag{4.36} \\
& \Delta L^2 + (\delta \mathbf{x}_{Ri})^T \cdot \Delta \mathbf{x}_i^n + \delta \lambda_i ((\delta \mathbf{x}_{Ti})^T \cdot \Delta \mathbf{x}_i^n + b \cdot \Delta \lambda_i^n \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f}) = \Delta L^2 \\
& (\delta \mathbf{x}_{Ri})^T \cdot \Delta \mathbf{x}_i^n + \delta \lambda_i ((\delta \mathbf{x}_{Ti})^T \cdot \Delta \mathbf{x}_i^n + b \cdot \Delta \lambda_i^n \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f}) = 0
\end{aligned}$$

a partir da qual pode-se extrair a correção linearizada para o fator de carga:

$$\delta \lambda_i = - \frac{(\delta \mathbf{x}_{Ri})^T \cdot \Delta \mathbf{x}_i^n}{(\delta \mathbf{x}_{Ri})^T \cdot \Delta \mathbf{x}_i^n + b \cdot \Delta \lambda_i^n \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f}} \tag{4.37}$$

Esta formulação recebe o nome de plana normal atualizada – *updated normal plane*, sendo também conhecida na literatura como método de Ramm (Ramm, 1981). A equação acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& (\delta \mathbf{x}_{Ri} + \delta \lambda_i \cdot \delta \mathbf{x}_{Ti})^T \cdot \Delta \mathbf{x}_i^n + b \cdot (\Delta \lambda_i^n \cdot \mathbf{f}^T) \cdot (\delta \lambda_i \cdot \mathbf{f}) = 0 \\
& (\delta \mathbf{x}_i)^T \cdot \Delta \mathbf{x}_i^n + b \cdot (\Delta \lambda_i^n \cdot \mathbf{f}^T) \cdot (\delta \lambda_i \cdot \mathbf{f}) = 0 \tag{4.38}
\end{aligned}$$

o que implica que $(\delta \mathbf{x}_i, \delta \lambda_i \cdot \mathbf{f})$ é ortogonal a $(\Delta \mathbf{x}_i^n, \Delta \lambda_i^n \cdot \mathbf{f})$

Pode-se conseguir uma simplificação ainda maior em relação ao método de Ramm com a seguinte restrição linearizada:

$$(\Delta \mathbf{x}_{i+1}^n)^T \cdot (\Delta \mathbf{x}_1^n) + b \cdot (\Delta \lambda_{i+1}^n) \cdot (\Delta \lambda_1^n) \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} = \Delta L^2 \tag{4.39}$$

Sendo o produto escalar obtido entre os vetores nas iterações atual $i + 1$ e inicial 1. Usando um raciocínio análogo ao método de Ramm, pode-se obter a seguinte correção linearizada para o fator de carga:

$$\delta\lambda_i = -\frac{(\delta\mathbf{x}_{Ri})^T \cdot \Delta\mathbf{x}_1^n}{(\delta\mathbf{x}_{Ti})^T \cdot \Delta\mathbf{x}_1^n + b \cdot \Delta\lambda_1^n \cdot \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f}} \quad (4.40)$$

Esta formulação recebe o nome de plana normal – *normal plane*, sendo também conhecida na literatura como método de Riks-Wempner (Riks, 1972 e Wempner, 1971). A equação acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (\delta\mathbf{x}_{Ri} + \delta\lambda_i \cdot \delta\mathbf{x}_{Ti})^T \cdot \Delta\mathbf{x}_1^n + b \cdot (\Delta\lambda_1^n \cdot \mathbf{f}^T) \cdot (\delta\lambda_i \cdot \mathbf{f}) &= 0 \\ (\delta\mathbf{x}_i)^T \cdot \Delta\mathbf{x}_1^n + b \cdot (\Delta\lambda_1^n \cdot \mathbf{f}^T) \cdot (\delta\lambda_i \cdot \mathbf{f}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.41)$$

A Equação (4.41) implica que $(\delta\mathbf{x}_i, \delta\lambda_i \cdot \mathbf{f})$ é ortogonal a $(\Delta\mathbf{x}_1^n, \Delta\lambda_1^n \cdot \mathbf{f})$.

4.5 – MÉTODOS DE COMPRIMENTO DE ARCO CILÍNDRICOS

Conforme comentado para o método de comprimento de arco esférico, o parâmetro de ponderação $b = 1$, ou seja, é considerado o mesmo peso para os termos de deslocamento e força no cálculo do comprimento de arco. Uma alternativa comumente utilizada é considerar $b = 0$. Recordando a restrição do método de comprimento de arco definida na Equação (4.15), pode ver claramente que tomar $b = 0$ equivale a considerar unicamente os deslocamentos na determinação do incremento da solução. Segundo Crisfield (1991), vários pesquisadores comprovaram a pequena influência dos termos de carregamento e um bom funcionamento dos algoritmos com $b = 0$ para uma grande variedade de problemas práticos, sendo estes algoritmos conhecidos pelo nome de comprimento de arco cilíndrico.

Deste modo, uma formulação esférica pode ser transformada em uma formulação cilíndrica simplesmente anulando o parâmetro de ponderação b na definição dos coeficientes a_1 , a_2 e a_3 das Equações (4.31) e (4.32):

$$a_1 \cdot (\delta\lambda_i)^2 + a_2 \cdot \delta\lambda_i + a_3 = 0 \quad (4.42)$$

Onde:

$$a_1 = (\delta \mathbf{x}_{Ti})^T \cdot \delta \mathbf{x}_{Ti} \quad (4.43a)$$

$$a_2 = 2 \cdot (\Delta \mathbf{x}_i^n + \delta \mathbf{x}_{Ri})^T \cdot \delta \mathbf{x}_{Ti} \quad (4.43b)$$

$$\begin{aligned} a_3 &= (\Delta \mathbf{x}_i^n + \delta \mathbf{x}_{Ri})^T \cdot (\Delta \mathbf{x}_i^n + \delta \mathbf{x}_{Ri}) - \Delta L^2 \\ &= (\Delta \mathbf{x}_i^n)^T \cdot \Delta \mathbf{x}_i^n - \Delta L^2 + 2 \cdot (\Delta \mathbf{x}_i^n)^T \cdot \delta \mathbf{x}_{Ri} + (\delta \mathbf{x}_{Ri})^T \cdot \delta \mathbf{x}_{Ri} \\ &= \Delta L^2 - \Delta L^2 + 2 \cdot (\Delta \mathbf{x}_i^n)^T \cdot \delta \mathbf{x}_{Ri} + (\delta \mathbf{x}_{Ri})^T \cdot \delta \mathbf{x}_{Ri} \\ &= 2 \cdot (\Delta \mathbf{x}_i^n)^T \cdot \delta \mathbf{x}_{Ri} + (\delta \mathbf{x}_{Ri})^T \cdot \delta \mathbf{x}_{Ri} \end{aligned} \quad (4.43c)$$

Procedendo de forma análoga com a formulação plana normal atualizada e anulando o termo b na Equação (4.37), pode-se extrair a seguinte correção linearizada para o fator de carga em uma formulação cilíndrica:

$$\delta \lambda_i = - \frac{(\delta \mathbf{x}_{Ri})^T \cdot \Delta \mathbf{x}_i^n}{(\delta \mathbf{x}_{Ti})^T \cdot \Delta \mathbf{x}_i^n} \quad (4.44)$$

A correção linearizada para o fator de carga na formulação plana normal cilíndrica pode também ser obtida anulando o coeficiente de ponderação b que aparece na Equação (4.40), resultando na seguinte equação:

$$\delta \lambda_i = - \frac{(\delta \mathbf{x}_{Ri})^T \cdot \Delta \mathbf{x}_1^n}{(\delta \mathbf{x}_{Ti})^T \cdot \Delta \mathbf{x}_1^n} \quad (4.45)$$

4.5.1 – Determinação do sinal da predição de $\Delta \lambda$

Em uma formulação cilíndrica, a predição do incremento de carga pode ser obtida tomando o coeficiente de ponderação $b = 0$ na Equação (4.20):

$$\Delta\lambda_1^n = \pm \frac{\Delta L}{\sqrt{(\Delta x)^T \cdot (\Delta x)}} = a \cdot \frac{\Delta L}{\sqrt{(\Delta x)^T \cdot (\Delta x)}} \quad (4.46)$$

A definição do sinal da equação acima esta associada a um processo de carga ou descarga da estrutura, que por sua vez esta associado às características da matriz de rigidez. No presente trabalho foi utilizado o seguinte critério nesta definição, segundo Crisfield (1991):

$$a = \text{sign}(r) \Rightarrow r = (\Delta x_T)^T \cdot \mathbf{f} = (\Delta x_T)^T \cdot \mathbf{K} \cdot \Delta x_T \quad (4.47)$$

4.5.2 – Tamanho do comprimento de arco

A idéia básica na determinação do tamanho do comprimento de arco a ser utilizado é que ele seja grande em regiões com poucas não-linearidades e pequeno em regiões com forte comportamento não-linear. Um mecanismo automático para atualização do comprimento de arco sugerido por Crisfield (1991) é o seguinte:

$$\Delta L^n = \Delta L^{n-1} \cdot \sqrt{\frac{I_d^n}{I^{n-1}}} \quad (4.48)$$

Sendo ΔL^{n-1} o comprimento de arco no passo $n - 1$; I^{n-1} o número de iterações necessárias para convergir no passo $n - 1$ e I_d^n o número de iterações desejadas no passo n , sendo $I_d^n \approx 3$ segundo Crisfield (1991) e finalmente ΔL^n o comprimento de arco a ser utilizado no passo n . Caso a Equação (4.31) tenha duas raízes complexas, isto indica que não existem intersecções entre a esfera (ou o cilindro) de raio ΔL e a trajetória de equilíbrio. Esta situação indica que o comprimento de arco é muito longo e o método perdeu o seu caráter de continuação da resposta, optando-se pela redução do comprimento:

$$\Delta L^{new} = \frac{1}{2} \cdot \Delta L \quad (4.49)$$

4.6 – DETECÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS

Existe uma grande quantidade de métodos indiretos na literatura que podem ser utilizados para a detecção de pontos críticos ao longo da trajetória de equilíbrio. O parâmetro de rigidez *CST* – *current stiffness parameter* definido por Bergan (1980) é uma ferramenta bastante eficiente para fornecer uma medida do grau de não-linearidade e detecção de pontos limites. A expressão não normalizada que define o *CST* é a seguinte:

$$k_n = \frac{f \cdot \Delta \mathbf{x}_T}{\Delta \mathbf{x}_T \cdot \Delta \mathbf{x}_T} \quad (4.50)$$

A partir da qual pode-se obter uma expressão normalizada do parâmetro, dividindo-se o valor atual k_n pelo seu valor no início do processo de carregamento k_0 :

$$CST = \frac{k_n}{k_0} \quad (4.51)$$

Podendo ser observado que, ao se atingir um ponto limite, o *CST* tende a zero enquanto que nos pontos de bifurcação o *CST* assume um valor arbitrário diferente de zero.

5 – APLICAÇÕES NUMÉRICAS

5.1 – INTRODUÇÃO

Guimarães (1980), através de ensaios experimentais, investigou a influência do enrijecimento dos apoios, causado pela existência de pilares em vigas parede de concreto armado sujeitas a cargas concentradas aplicadas no bordo superior. Em seu trabalho foram analisadas 9 vigas cujas principais variáveis são as dimensões dos pilares e a taxa geométrica de armadura.

Para fins de validação dos resultados obtidos no modelo numérico implementado, foi utilizada a viga A1 do trabalho citado, cujas características e métodos de ensaio serão abordados no item 5.2 que se segue.

Na viga parede em questão foram utilizados 1024 elementos finitos quadriláteros serendípticos (Q4), sendo 1008 para discretizar o concreto e 16 para discretizar as chapas de aço que agem como elementos de apoio, e outros 84 elementos finitos lineares para discretizar as armaduras. A malha foi gerada através do software QUEBRA2D (Miranda *et al.*, 2003), e sua configuração é mostrada na Figura 5.1.

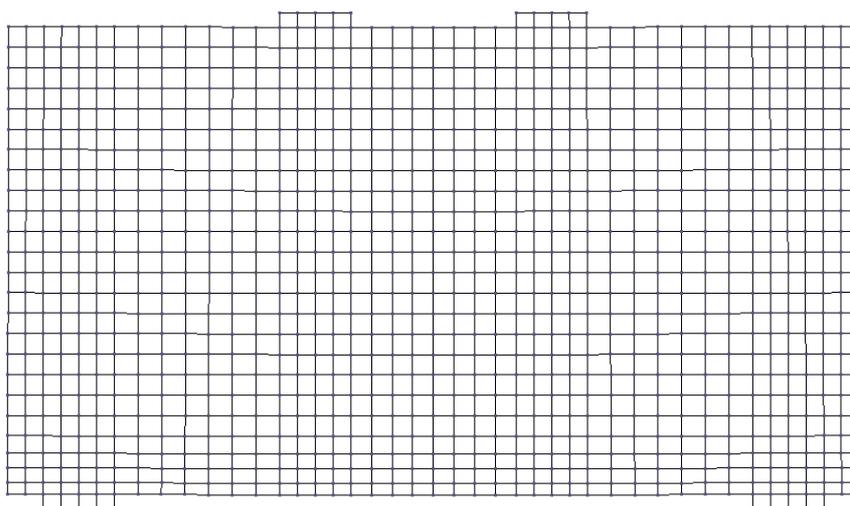


Figura 5.1 – Malha que representa a viga A1.

5.2 – CARACTERÍSTICAS DO ENSAIO EXPERIMENTAL

A viga A1 possui somente armadura principal horizontal constituída de 4 barras de 8.0 mm e dimensões tais como as mostradas na Figura 5.2.

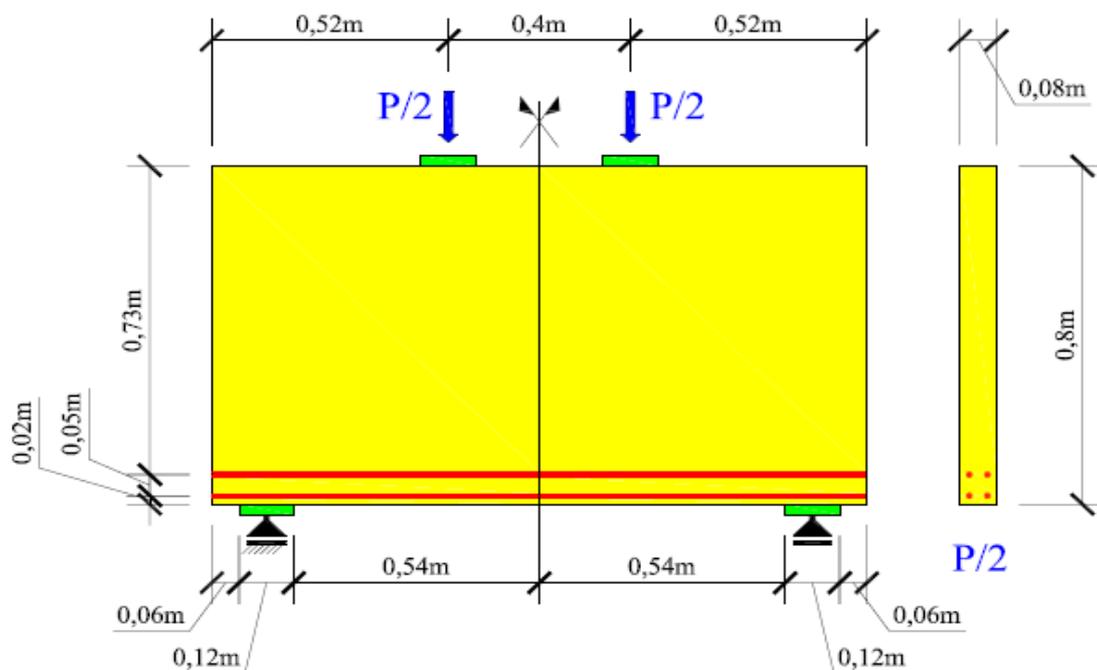


Figura 5.2 - Viga A1.

Os ensaios na viga foram executados com o objetivo obter as seguintes informações:

- ✓ Resistência última: um dos parâmetros de maior importância no projeto de estruturas.
- ✓ Mecanismo de ruptura: o tipo de ruptura mais frequente em vigas parede acontece quando ocorre o escoamento da armadura principal de tração. Fenômeno observado na viga A1 estudada.
- ✓ Curva carga-deformação: importante na análise do comportamento global da estrutura.
- ✓ Curva carga-deslocamento: principal instrumento de comparação da eficiência do modelo numérico em simular o que ocorre de fato na estrutura analisada.

A aplicação das cargas foi feita lentamente em incrementos nunca superiores a 20 kN até a formação de fissuras. Após a fissuração, os incrementos são de no máximo 30 kN . Após cada incremento a carga é mantida constante durante um tempo suficiente para a leitura dos deslocamentos e deformações.

5.2.1 – Instrumentação

5.2.1.1 – Medição das deformações

As deformações foram medidas com extensômetros elétricos de resistência. Os valores das deformações ε_{s1} , ε_{s2} e ε_{s3} apresentados nas curvas carga-deformação são os valores médios obtidos em cada seção. Os extensômetros ε_{s1} e ε_{s3} são colocados na interface viga-pilar e os extensômetros ε_{s2} nas duas camadas de armadura no meio do vão conforme o observado nas Figuras 5.3 e 5.4.

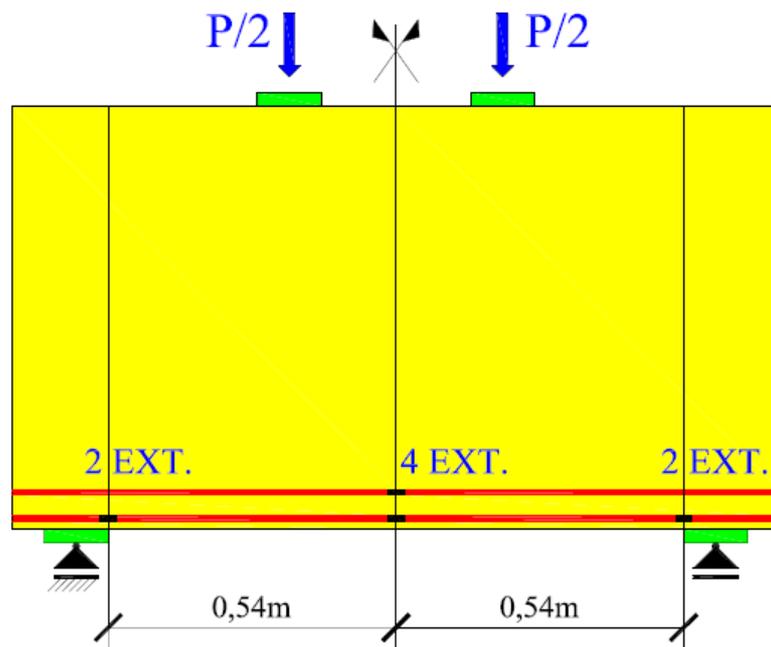


Figura 5.3 – Localização dos extensômetros.

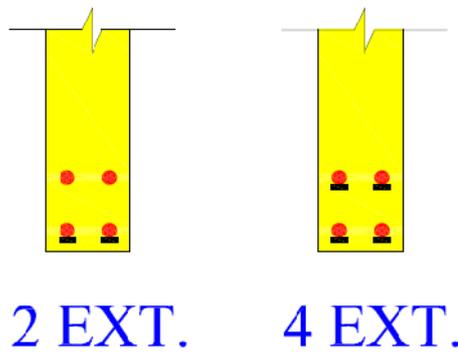


Figura 5.4 – Seções da viga A1. À direita, extensômetros que fornecem os valores de ϵ_{s1} e ϵ_{s3} .
À esquerda, extensômetros que fornecem os valores de ϵ_{s2} .

5.2.1.2 - Medição dos deslocamentos

Os deslocamentos foram medidos por quatro deflectômetros com precisão de $0,00245 \text{ mm}$, um na parte inferior central, dois situados a 30 cm do centro, medindo as deflexões verticais, e o quarto na parte inferior direita, medindo deflexões horizontais como pode ser visualizado na Figura 5.5.

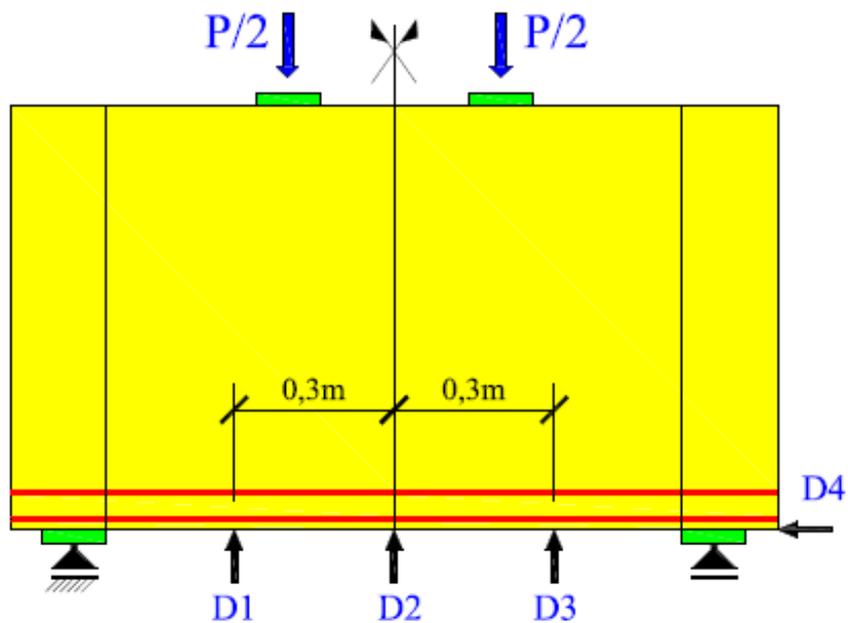


Figura 5.5 - Localização dos deflectômetros.

5.3 – PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

5.3.1 – Concreto

Foram feitos ensaios em corpos de prova cilíndricos $15 \times 30 \text{ cm}$. O valor da resistência a compressão f_c , é o resultado médio de três ensaios por compressão simples. O valor da resistência à tração por fendilhamento f_t , é o valor médio do resultado de três ensaios por compressão diametral, para cada viga.

Foram realizados ensaios nos corpos de prova das 9 vigas, todos resultaram em valores para resistências diferentes, no entanto o autor apresenta apenas uma curva tensão-deformação generalizando o concreto ensaiado.

Segundo o autor, o concreto apresenta $f_c = 24.8 \text{ MPa}$ aos 51 dias, a deformação última a compressão é $\varepsilon_u = 2.502 \times 10^{-3}$ e a resistência a tração é $f_0^+ = 2.4 \text{ MPa}$. A partir da análise da curva tensão-deformação foram adotados, para fins de modelagem, um módulo de elasticidade de 30 MPa e a resistência $f_0 = 12 \text{ MPa}$, correspondendo a $0.484 \times f_c$. Não há informação sobre a energia de fratura, assim adotou-se $G_f = 150 \text{ N/m}$.

Para que o modelo detalhado no Capítulo 3 seja implementado são necessários os valores dos parâmetros A^+ , A^- e B^- que serão obtidos a seguir.

5.3.1.1 - Parâmetro A^+

Para que não houvesse problemas de objetividade da malha, o comprimento característico l foi calculado para cada elemento finito como sendo a raiz quadrada de sua área. Portanto, o parâmetro A^+ , determinado pela equação (3.26), depende das características geométrica do elemento.

5.3.1.2 - Parâmetros A^- e B^-

Os parâmetros A^- e B^- do modelo de dano devem ser ajustados para simular a curva tensão-deformação do concreto no ensaio de compressão simples

A Figura 5.6 apresenta curvas tensão-deformação do ensaio à compressão simples para o concreto em questão. É mostrada a comparação entre as curvas obtidas por duas configurações de parâmetros A^- e B^- diferentes, e a curva experimental.

Visto que a dissertação na qual foi obtida a viga A1 é antiga, tem-se apenas a curva em questão no formato impresso. Para obtenção dos dados que geraram tal curva importou-se a figura da dissertação para o programa AutoCAD no qual foi feito um ajuste para que a escala da figura e do programa fossem compatíveis. Através do comando *polyline* foi traçada uma curva formada por vários pontos os quais foram captados pelo comando *list*. Tal processo apresenta algumas imprecisões consideradas toleráveis para fins de comparação, visto que o ramo descendente, destacado em tracejado na Figura 5.6, foi estimado pelo autor.

Quando $A^- = 0,85$ e $B^- = 0,780$, é obtida uma deformação última de $\varepsilon_u = 3,5 \times 10^{-3}$. Já para $A^- = 1,00$ e $B^- = 0,744$, a deformação última é $\varepsilon_u = 2,9 \times 10^{-3}$, valor mais próximo do fornecido pelo autor, $\varepsilon_u = 2,502 \times 10^{-3}$.

Pela análise da Figura 5.6, nota-se que o concreto modelado é diferente do experimental, no entanto, melhores resultados foram obtidos com tais configurações. Somado ao fato que a curva é uma generalização de 9 concretos com resistências diferentes, isso revela um indício que a curva apresentada pelo autor não representa com fidelidade o concreto ensaiado.

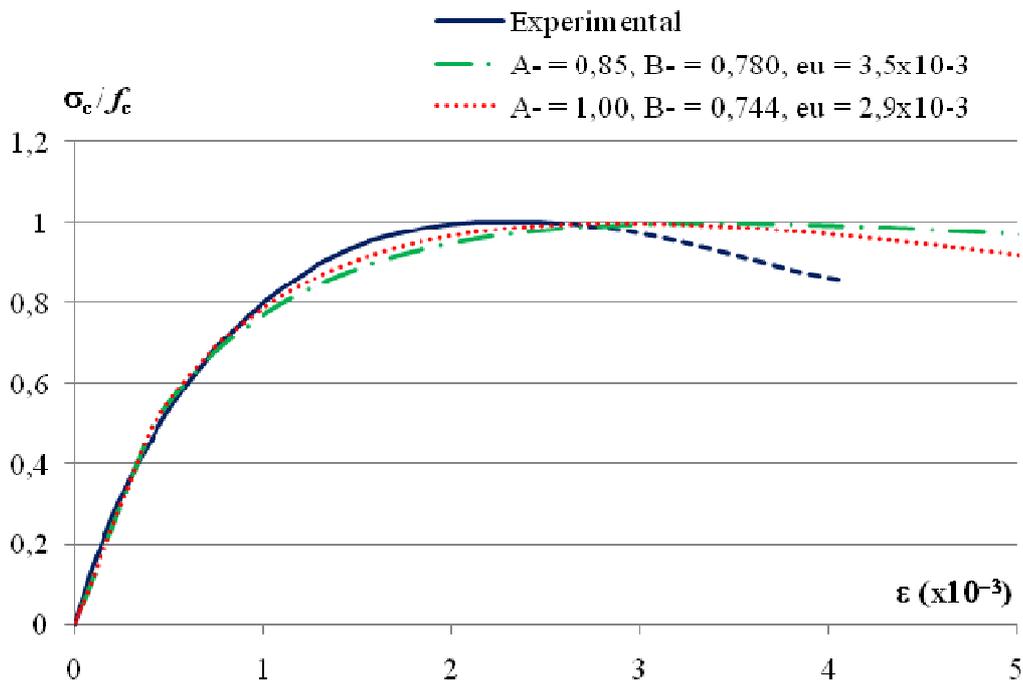


Figura 5.6 – Ensaio compressão simples – Comparação entre as curvas numéricas para diferentes valores de parâmetros A^- e B^- , e experimental.

5.3.2 – Aço

Foram realizados ensaios de tração simples com auxílio de extensômetros mecânicos de modo a permitir a construção da curva tensão-deformação para armadura. Para as barras de aço, a tensão de escoamento obtida foi $f_y = 534 \text{ MPa}$ e módulo de elasticidade $E = 212,5 \text{ GPa}$.

Na figura 5.6 tem-se comparação entre a curva experimental obtida através do mesmo processo que foi utilizado para o concreto e a curva obtida pelo modelo numérico sem endurecimento e com endurecimento isotrópico de 1 GPa .

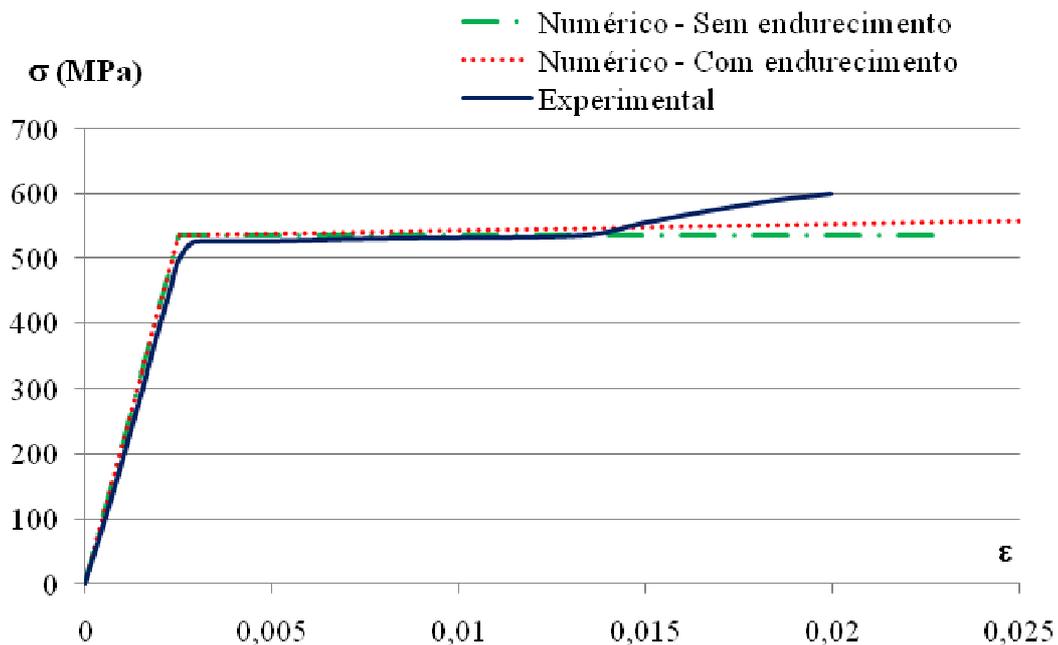


Figura 5.7 – Curva tensão-deformação da armadura – Comparação entre curva numérica com e sem endurecimento e experimental.

5.2.3 – Aparelhos de apoio

Segundo o autor, os aparelhos de apoio foram projetados de maneira a permitir rotações e deslocamentos horizontais e construídos com placas e cilindros de aço. Não foram dadas informações sobre o material dos mesmos. As placas de aço têm as dimensões $12 \times 10 \times 2,5$ cm.

5.2.4 – Resumo das propriedades dos materiais

As Tabelas 5.1, 5.2 e 5.3 apresentam um resumo das propriedades dos materiais utilizados na modelagem numérica para o concreto, e para os aparelhos de apoio e armadura, sejam elas obtidas experimentalmente por Guimarães (1980) ou adotadas para fins de cálculo.

Tabela 5.1 – Propriedades do concreto.

Propriedade	Valor	Unidade
Dimensão (2D)	1,44 x 0,8	m
Espessura	0,1	m
E_c	30	GPa
ν	0,20	-
ρ	$2,3 \times 10^3$	Kg/m ³
G_f	150	N/m
f_0^+	2,4	Mpa
f_0^-	12	Mpa
K	0,1714	-
A^-	1,0	-
B^-	0,744	-

Tabela 5.2 - Propriedades dos aparelhos de apoio

Propriedade	Valor	Unidade
Dimensão (2D)	0,12 x 0,025	m
Espessura	0,1	m
E_s	212,5	Gpa
ν	0,33	-
ρ	$7,3 \times 10^3$	Kg/m ³

Tabela 5.3 - Propriedades da Armadura.

Propriedade	Valor	Unidade
Dimensão (1D)	1,44	m
Área	$1,005 \times 10^{-4}$	m ²
E_s	212,5	GPa
f_Y	553	MPa

5.4 – APLICAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO

Com base nos dados apresentados anteriormente o modelo numérico foi utilizado para simular o comportamento da Viga A1. A seguir serão mostrados os resultados dessa simulação bem como a comparação com os resultados experimentais quando for o caso.

Os resultados mostrados foram obtidos com o concreto de parâmetros $A^- = 1,00$ e $B^- = 0,744$, a deformação última $\varepsilon_u = 2,9 \times 10^{-3}$ e o aço sem endurecimento. Para obtenção das curvas que serão apresentadas, foram utilizados três tamanhos de passos de carga diferentes, $ds_1 = 1,0 \times 10^{-6}$, $ds_2 = 2,5 \times 10^{-6}$ e $ds_3 = 2,5 \times 10^{-7}$ de modo a verificar a sensibilidade do modelo a essa variável.

5.4.1 – Curvas carga-deslocamento

Serão apresentadas as curvas carga-deslocamento dos quatro pontos especificados na Figura 5.5, a qual mostra a localização dos deflectômetros. É feita uma comparação entre a curva experimental obtida através do processo descrito nesse capítulo e a curva numérica correspondente ao deflectômetro em questão.

Nos Itens 5.4.1.1, 5.4.1.2, 5.4.1.3 e 5.4.1.4 são comparadas as curvas obtidas pelos deflectômetros 1, 2, 3 e 4, respectivamente, para os três passos de carga ds_1 , ds_2 e ds_3 .

5.4.1.1- Deslocamento D1

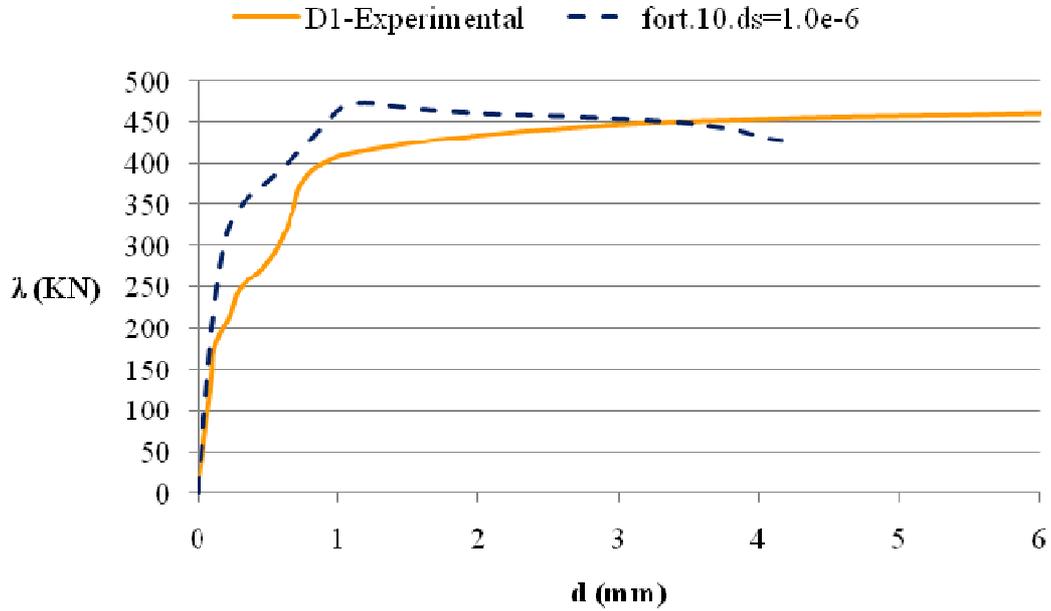


Figura 5.8- Curva carga-deslocamento – Comparação entre curva experimental D1 e numérica para $ds_1 = 1,0 \times 10^{-6}$.

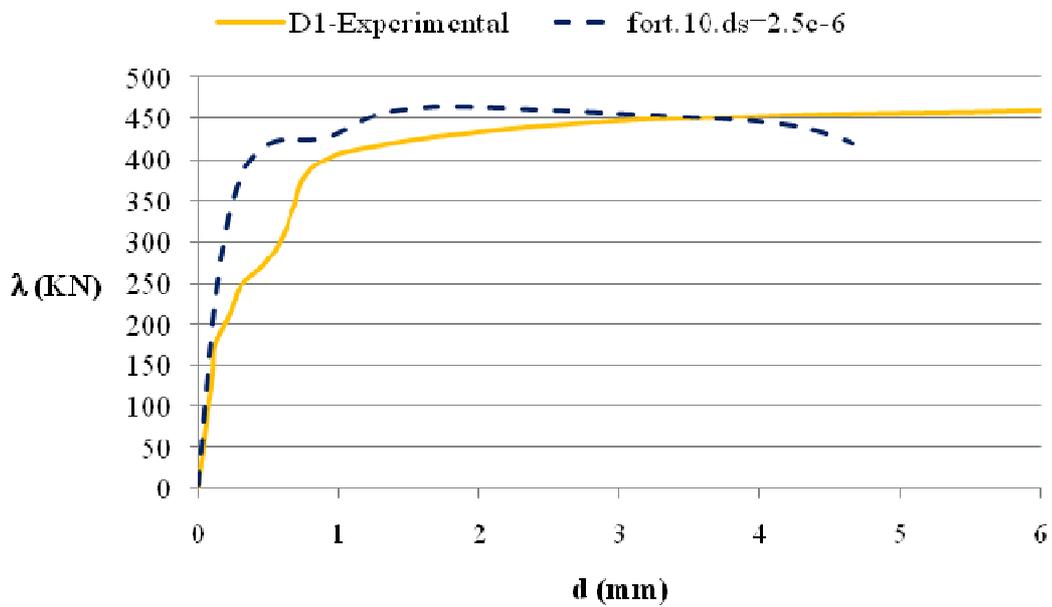


Figura 5.9 - Curva carga-deslocamento – Comparação entre curva experimental D1 e numérica para $ds_2 = 2,5 \times 10^{-6}$.

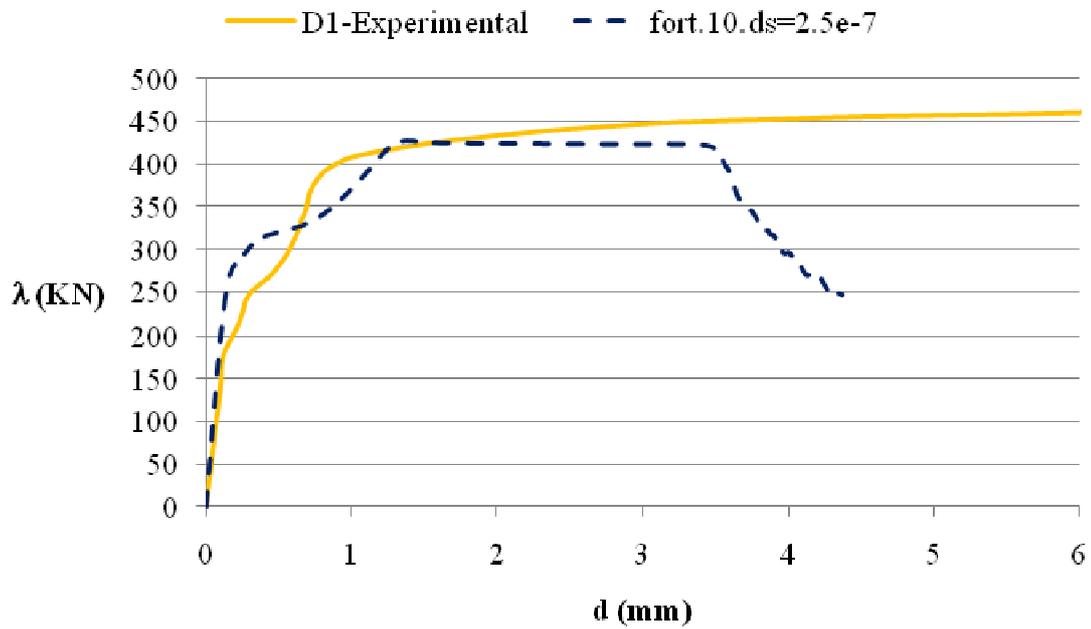


Figura 5.10 - Curva carga-deslocamento – Comparação entre curva experimental D1 e numérica para $ds_3 = 2,5 \times 10^{-7}$.

5.4.1.2- Deslocamento D2

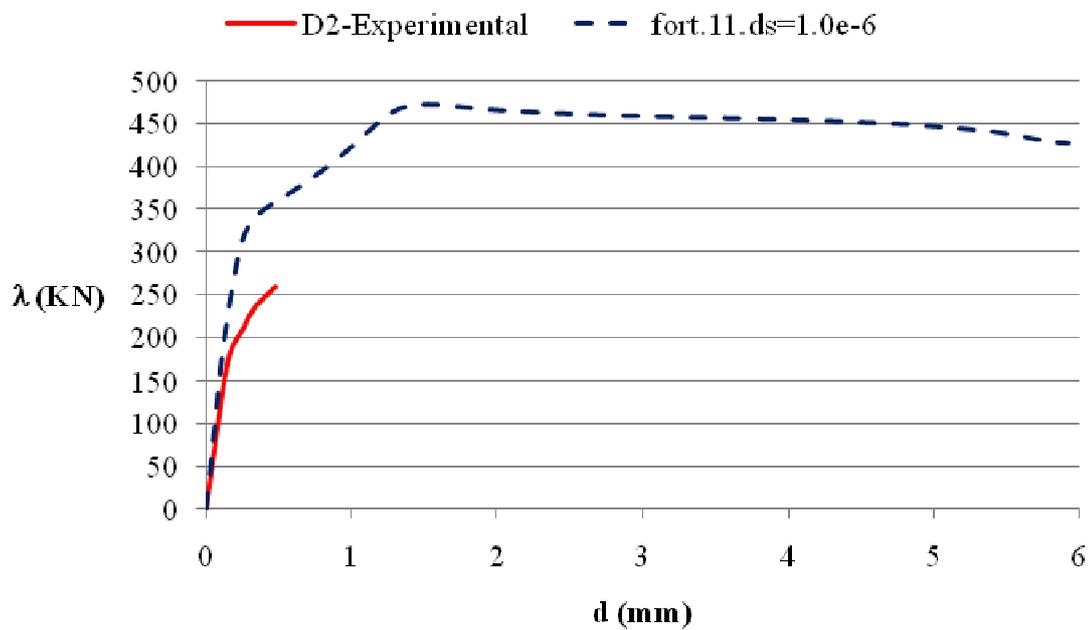


Figura 5.11 - Curva carga-deslocamento – Comparação entre curva experimental D2 e numérica para $ds_1 = 1,0 \times 10^{-6}$.

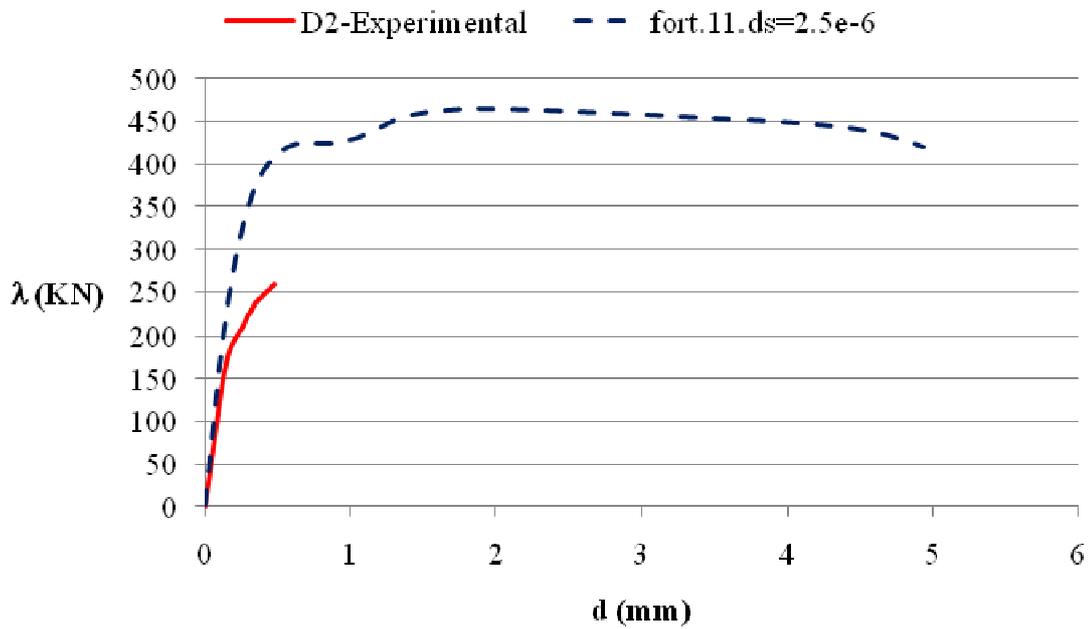


Figura 5.12 - Curva carga-deslocamento – Comparação entre curva experimental D2 e numérica para $ds_2 = 2,5 \times 10^{-6}$.

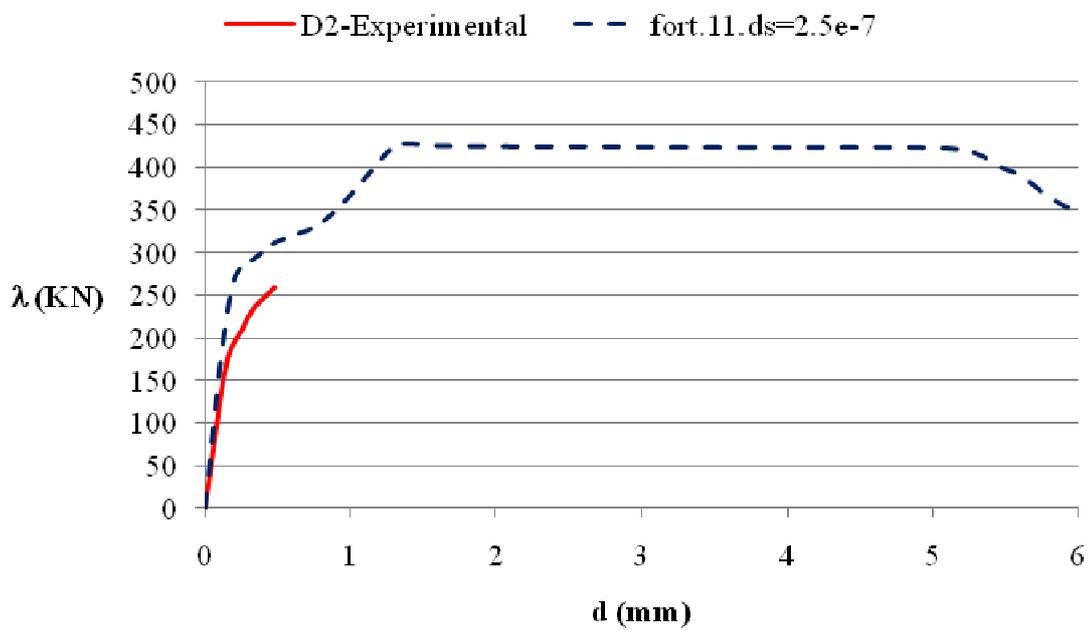


Figura 5.13 - Curva carga-deslocamento – Comparação entre curva experimental D2 e numérica para $ds_3 = 2,5 \times 10^{-7}$.

5.4.1.3- Deslocamento D3

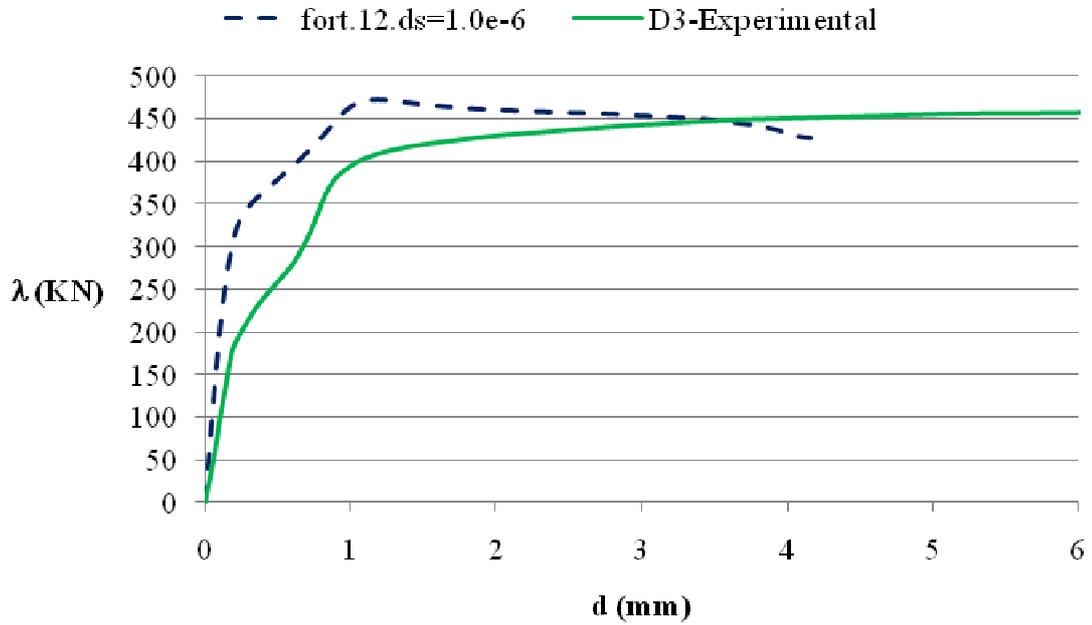


Figura 5.14 - Curva carga-deslocamento – Comparação entre curva experimental D3 e numérica para $ds_1 = 1,0 \times 10^{-6}$.

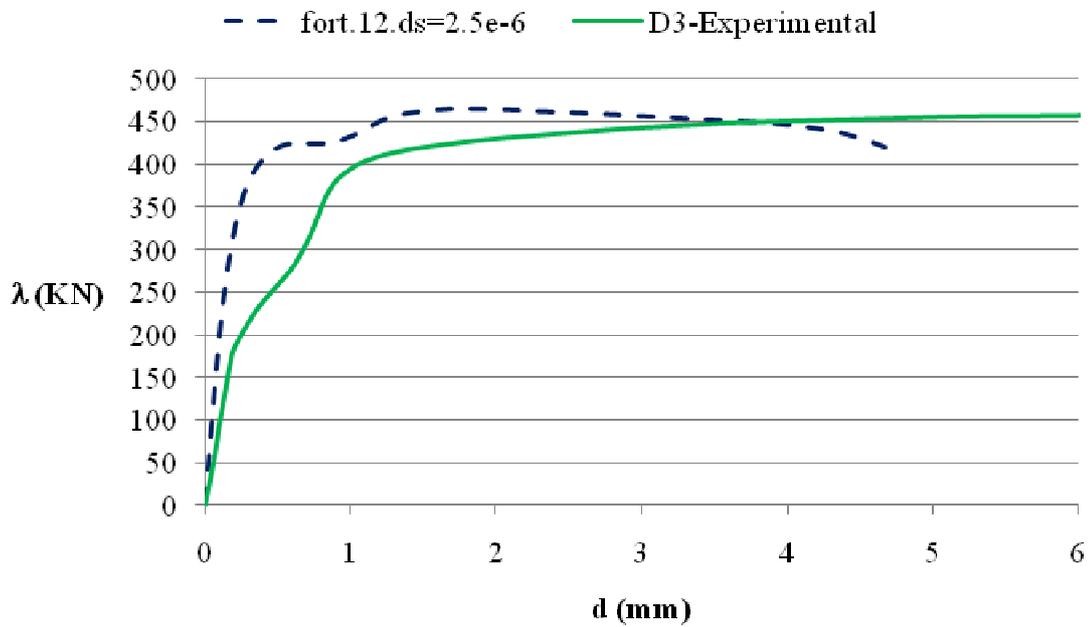


Figura 5.15 - Curva carga-deslocamento – Comparação entre curva experimental D3 e numérica para $ds_1 = 2,5 \times 10^{-6}$.

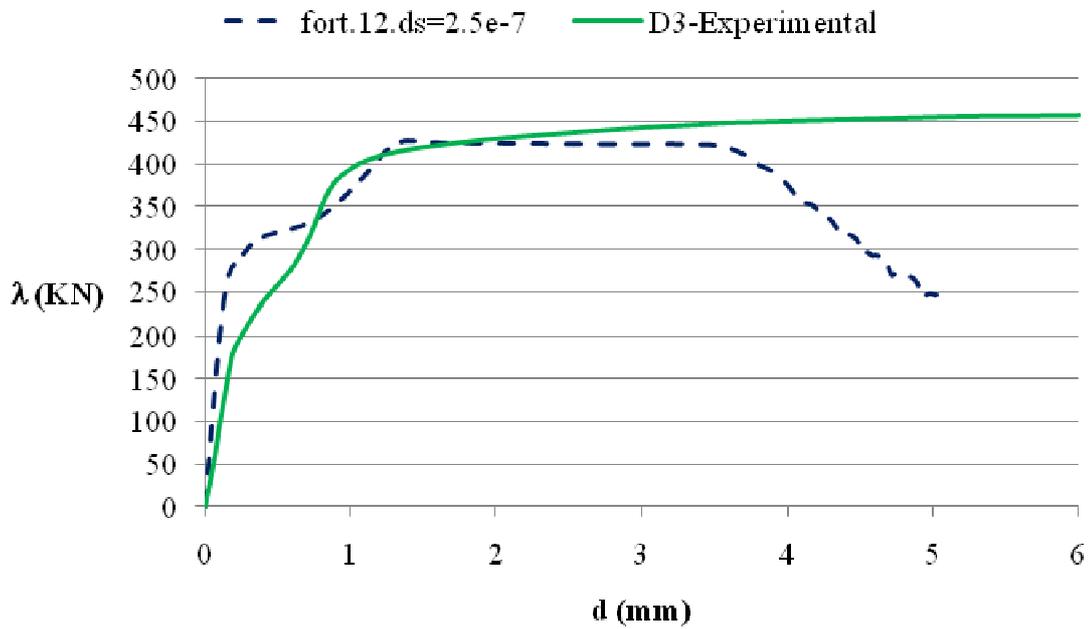


Figura 5.16 - Curva carga-deslocamento – Comparação entre curva experimental D3 e numérica para $ds_3 = 2,5 \times 10^{-7}$.

5.4.1.4- Deslocamento D4

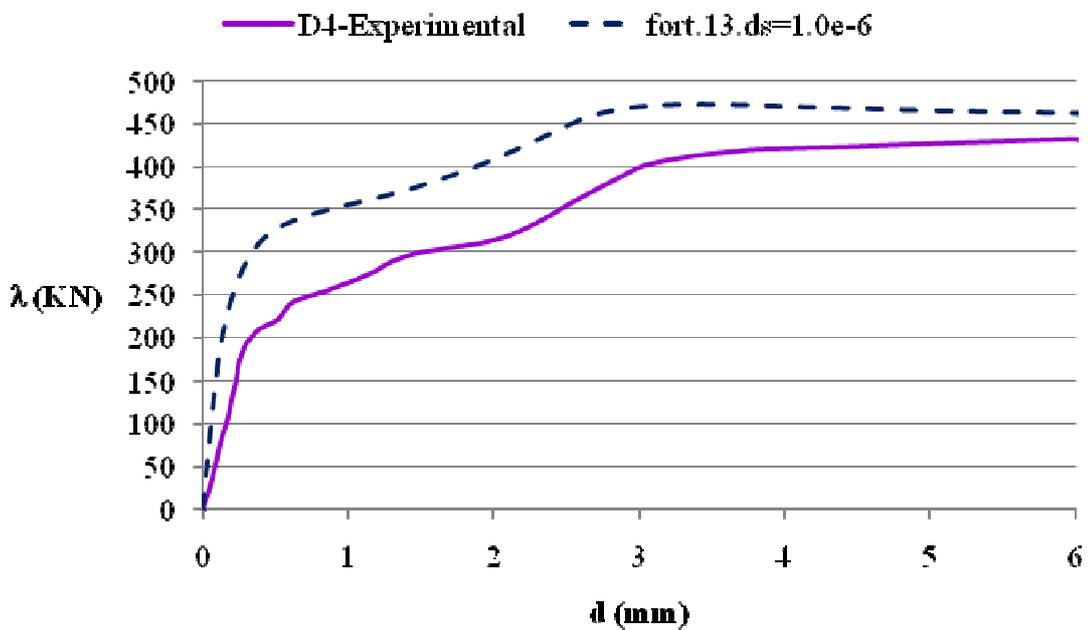


Figura 5.17 - Curva carga-deslocamento – Comparação entre curva experimental D4 e numérica para $ds_1 = 1,0 \times 10^{-6}$.

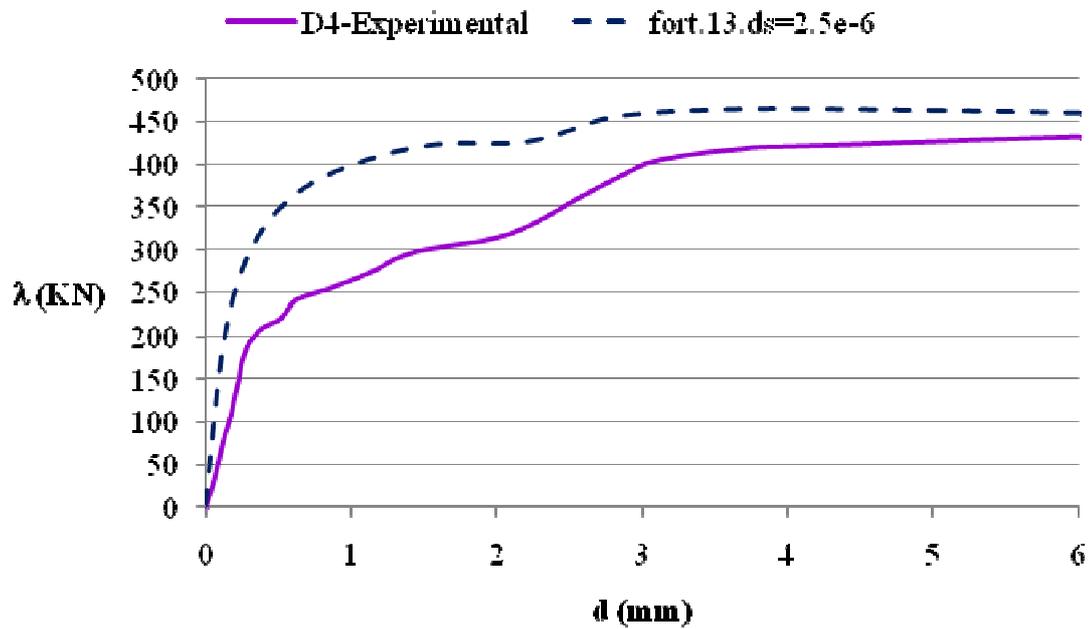


Figura 5.18 - Curva carga-deslocamento – Comparação entre curva experimental D4 e numérica para $ds_2 = 2,5 \times 10^{-6}$.

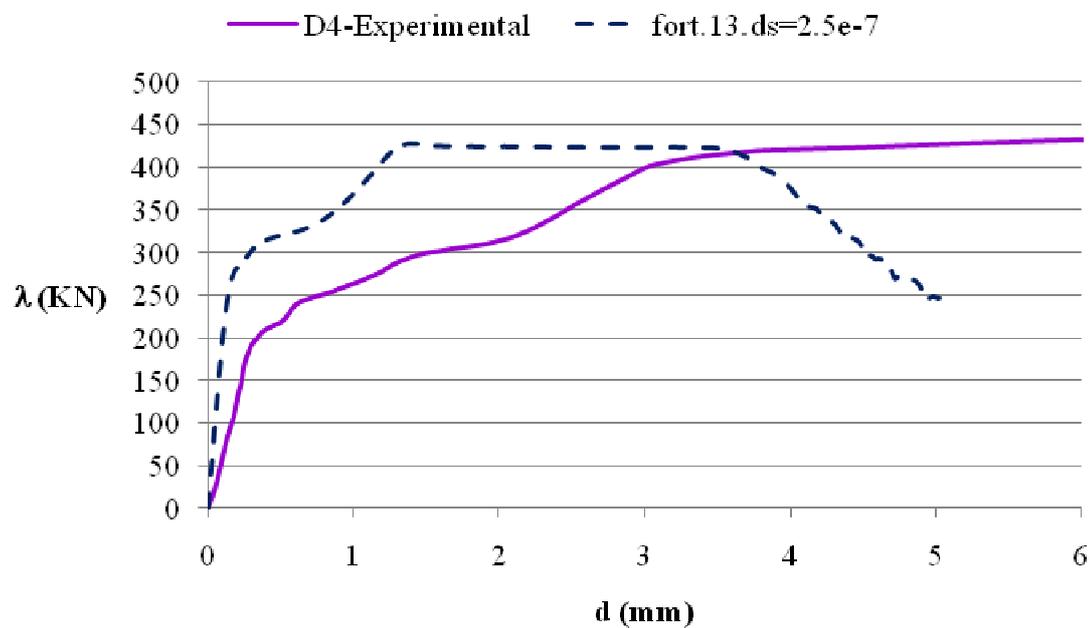


Figura 5.19 - Curva carga-deslocamento – Comparação entre curva experimental D4 e numérica para $ds_3 = 2,5 \times 10^{-7}$.

De forma geral, os resultados numéricos são bons quando comparados aos valores experimentais apresentados por Guimarães (1980).

De acordo com as curvas apresentadas, o modelo numérico utilizado resulta numa rigidez inicial maior que a experimental. Esse fato pode ter sido originado de um equívoco no valor do módulo de elasticidade adotado.

O modelo apresentou-se sensível ao tamanho do passo de carga, resultando em valores diferentes para a carga de ruptura e valores de deslocamentos onde ocorre a ruptura. As Figuras 5.20, 5.21 e 5.22 apresentam as curvas carga-deslocamento numéricas quando os tamanhos de passos de carga são ds_1 , ds_2 e ds_3 para os pontos D1 e D3 (numericamente iguais por simetria), D2 e D4.

Quando foi utilizado o menor passo de carga, $ds_3 = 2,5 \times 10^{-7}$, as curvas apresentam uma forma característica. Depois da fase inicial elástica, apresentam uma diminuição da rigidez seguida da ruptura. Após a ruptura ocorre um visível patamar de escoamento seguido de uma queda brusca.

Na Tabela 5.4 são resumidos as características das curvas numéricas apresentadas na Figuras 5.20, 5.21 e 5.22. Nela é relacionado o tamanho do passo de carga ds_i , a cargas de ruptura P_u , o deslocamento onde ocorre a carga de ruptura d_u e quando for o caso o deslocamento onde há a queda visível d_q .

Segundo Guimarães (1980) a ruptura da viga A1 é iniciada pelo escoamento da armadura seguido do esmagamento do concreto na zona de compressão. De acordo com as curvas carga-deslocamento apresentadas pelo autor, a viga rompe com uma carga ultima de 480 KN para grandes deformações. Em D1, D3 e D4 as deformações chegam a 12 mm.

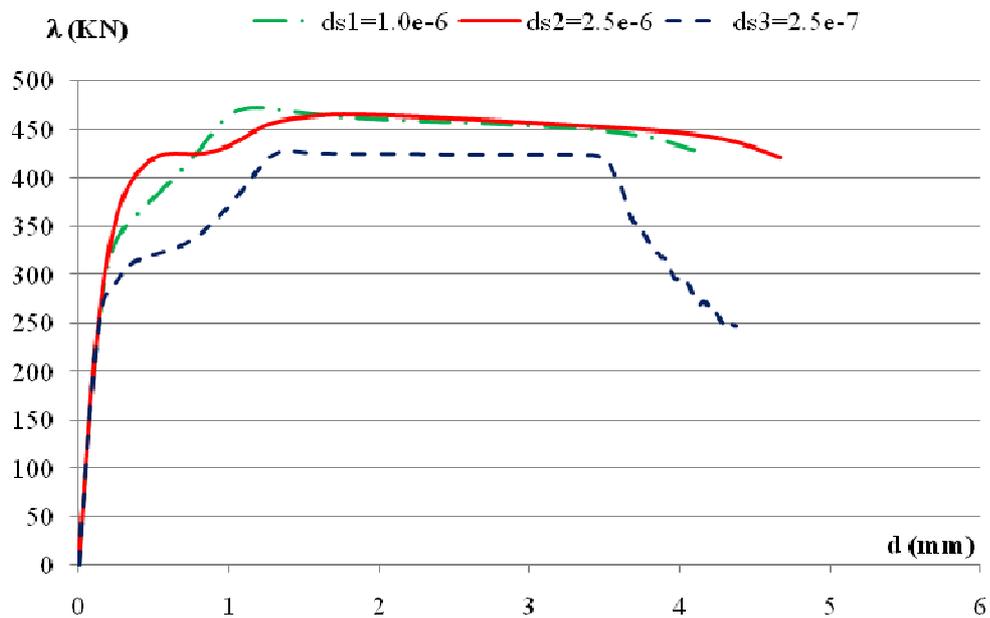


Figura 5.20 – Curvas carga-deslocamento numéricas do ponto D1 e D3 para ds_1 , ds_2 e ds_3 .

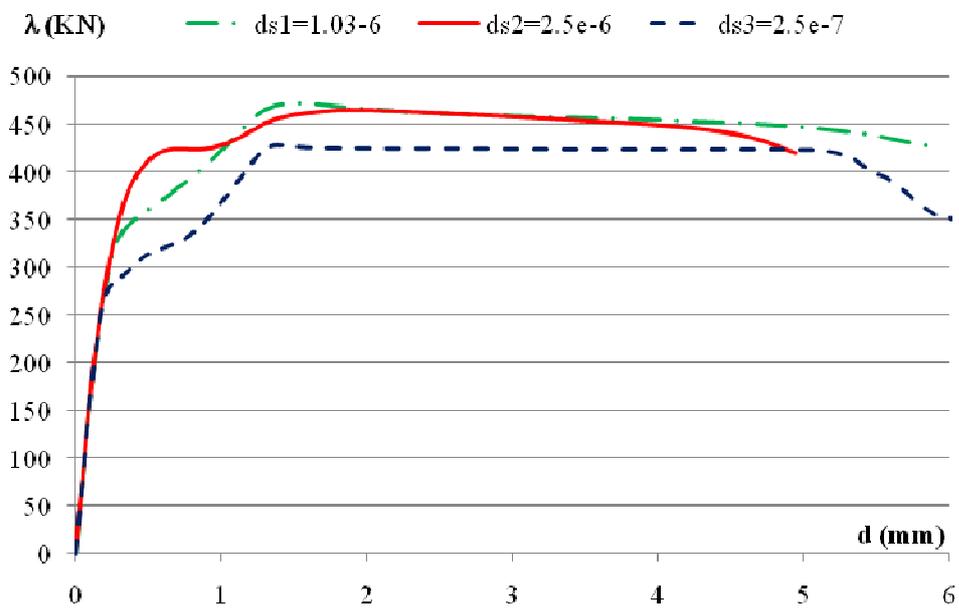


Figura 5.21 – Curvas carga-deslocamento numéricas do ponto D2 para ds_1 , ds_2 e ds_3 .

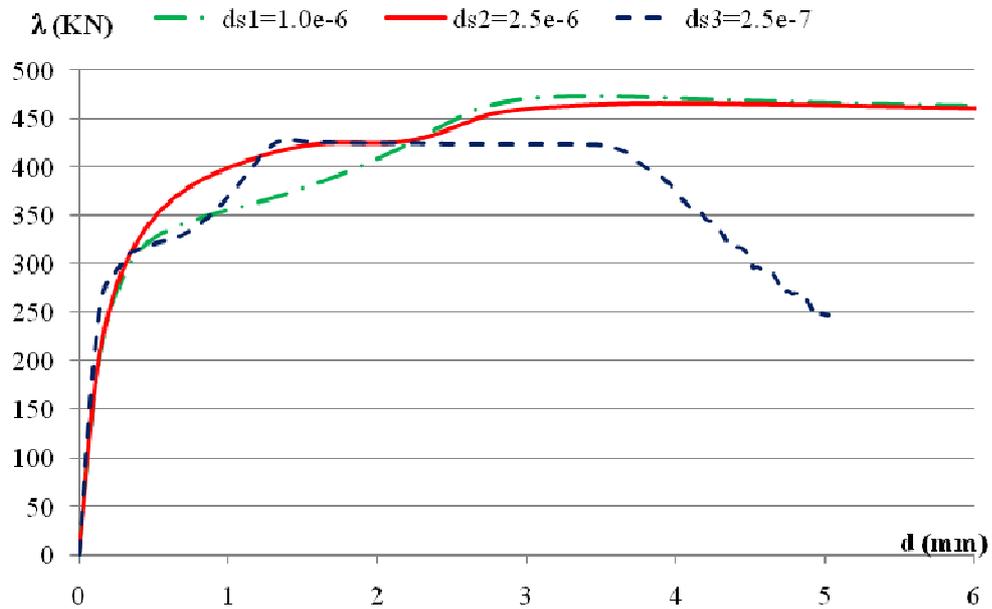


Figura 5.22 - Curvas carga-deslocamento numéricas do ponto D4 para ds_1 , ds_2 e ds_3 .

Tabela 5.4 – Características das curvas carga-deslocamento numéricas.

D_i (Figura)	ds_i	P_u (KN)	d_u (mm)	d_q (mm)
D1 (Figura 5.20)	ds_1	480	1 – 2	–
	ds_2	470	1 – 2	–
	ds_3	430	1 – 2	3 – 4
D2 (Figura 5.21)	ds_1	470	1 – 2	–
	ds_2	460	1 – 2	–
	ds_3	430	1 – 2	5 – 6
D4 (Figura 5.22)	ds_1	470	2 – 3	–
	ds_2	470	2 – 3	–
	ds_3	430	1 – 2	2 – 4

5.5 – CARACTERÍSTICAS DO MODELO NUMÉRICO

5.5.1 – Parâmetro *CST*

A definição do intervalo onde ocorre a ruptura da viga em estudo pode ser visualmente percebida através da figura 5.23. O parâmetro de rigidez de Bergan (1980) capturou com uma boa precisão tal ponto.

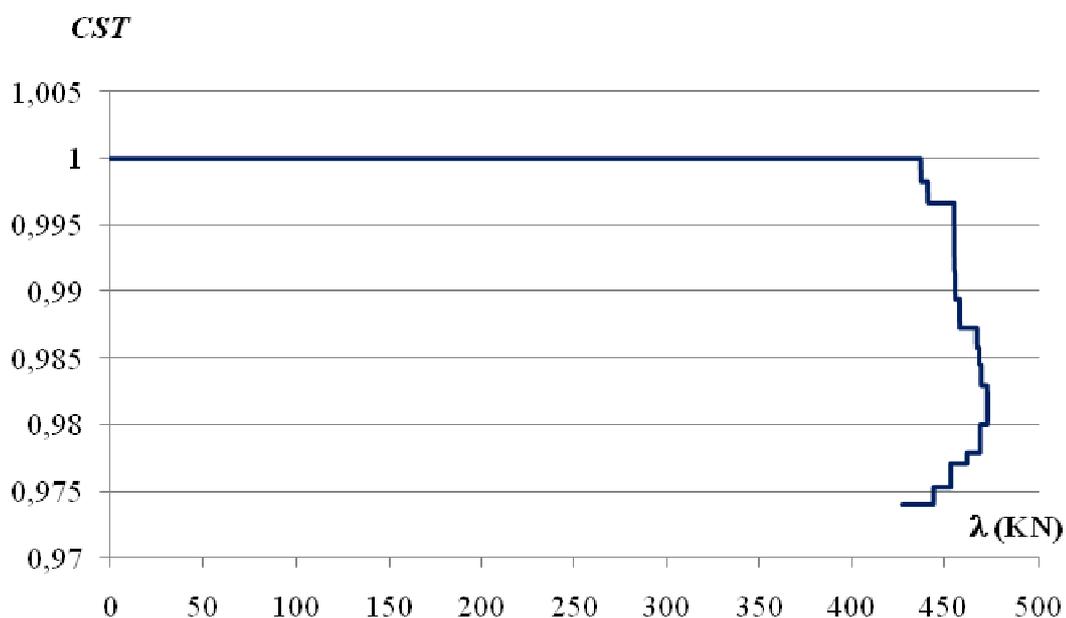


Figura 5.23 – Relação entre fator de carga e parâmetro *CST*.

5.5.2 – Convergência

O desempenho do modelo numérico na análise da viga em estudo foi muito bom. Como pode ser visto na Figura 5.24, houve convergência com uma, duas e no máximo três iterações para cada passo de carga.

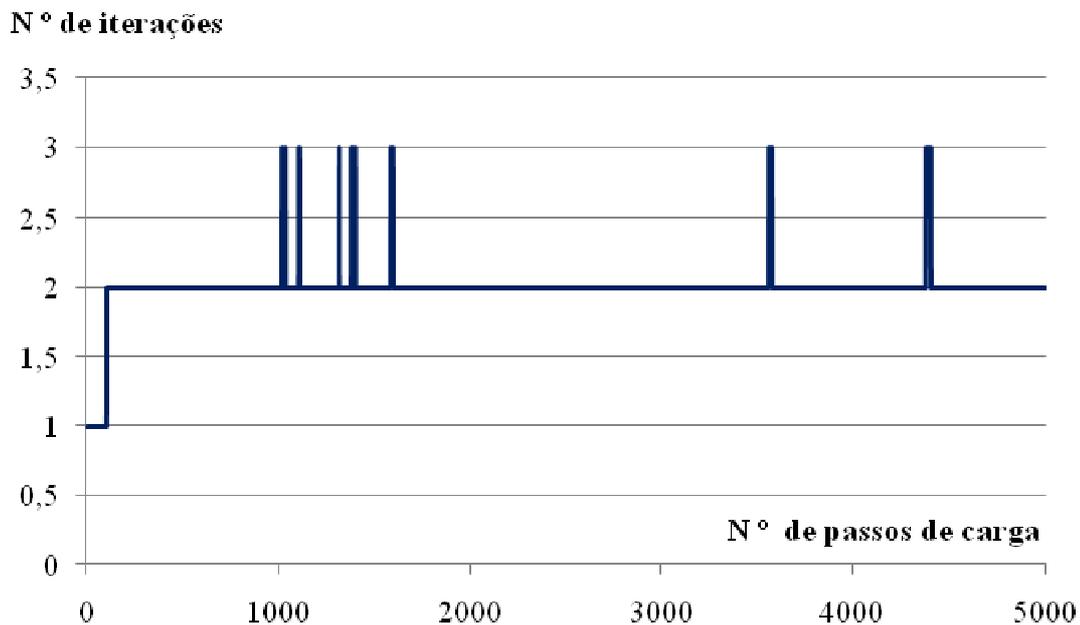


Figura 5.24 – Número de iterações para cada passo de carga.

5.6 – PÓS-PROCESSAMENTO

A seguir serão apresentados gráficos que mostram a evolução do parâmetro de dano escalar à medida que o fator de carga é aumentado. Os gráficos foram gerados pelo software QUEBRA2D (Miranda *et al.*, 2003) a partir dos valores da variável de dano nos pontos de Gauss de cada elemento.

5.6.1 – Carga P1= 177,22 KN

Nota-se que para o fator de carga P1=177,22 KN ainda não há dano à compressão, apenas a zona tracionada no meio do vão apresenta dano. Os valores do parâmetro de dano d^+ chegam a 0,55.

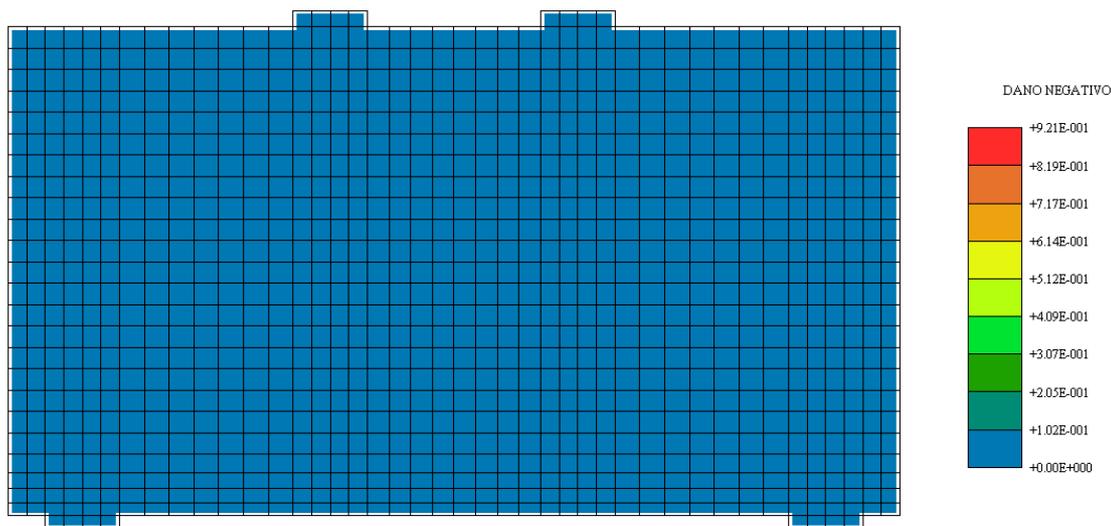


Figura 5.25 – Dano negativo – Carga P1=177,22 KN.

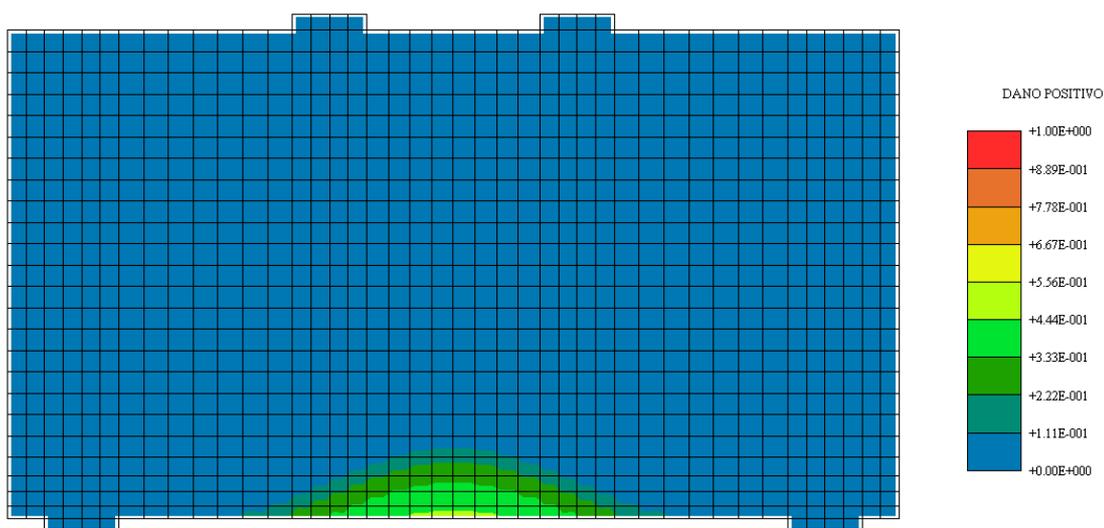


Figura 5.26 – Dano positivo – Carga P1=177,22 KN.

5.6.2 - Carga P2= 351,48 KN

Para o fator de carga P2 começa a se desenvolver dano à compressão na zona de aplicação de carga. É possível perceber que esse dano é acentuado na parte interna da interface entre o concreto e as placas de aplicação de carga. Já a degradação à tração progride diagonalmente dos apoios ao centro da viga atingido valores máximos, caracterizando zonas de perda total da capacidade portante.

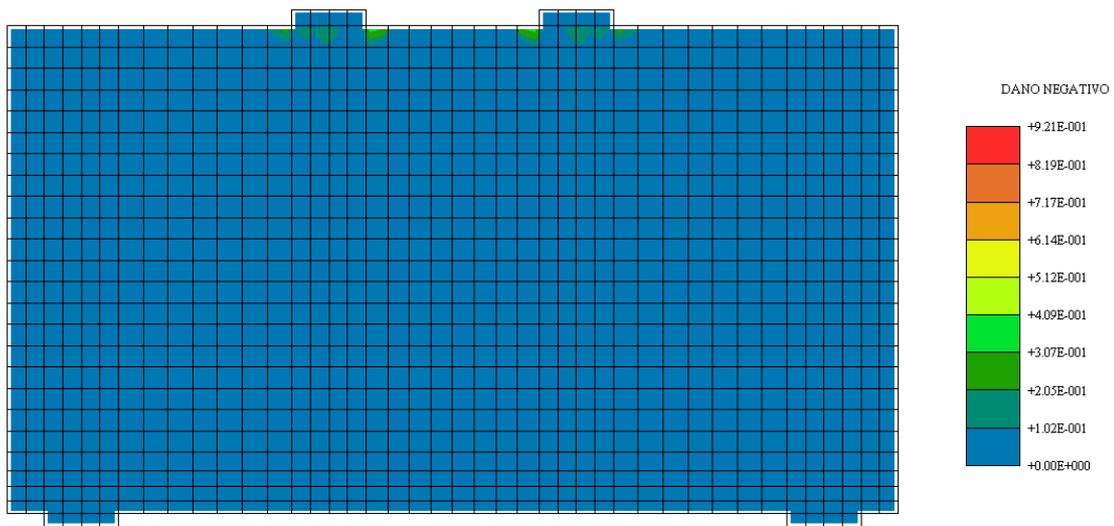


Figura 5.27 – Dano negativo – Carga P2=351,48 KN.

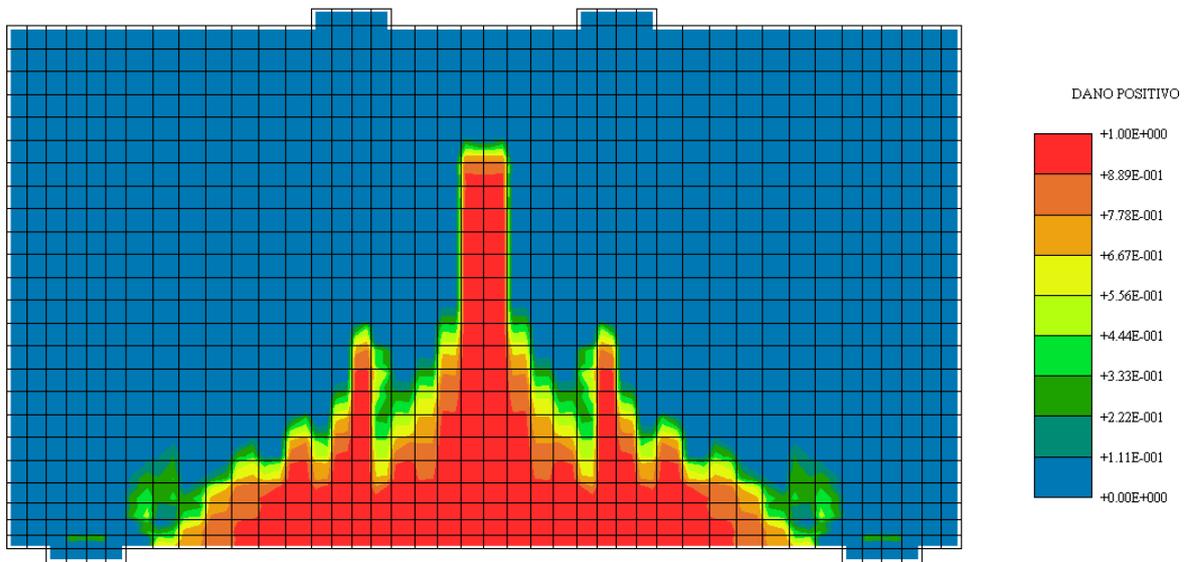


Figura 5.28 – Dano positivo – Carga P2=351,48 KN.

5.6.3 - Carga P3= 434,86 KN

O dano negativo ocupa toda a região de aplicação do carregamento para P3=434,86. Nessa fase também aparece uma pequena zona de dano à compressão na região dos apoios. O dano positivo mantém o mesmo padrão do nível de carga anterior ocupando uma área maior da viga.

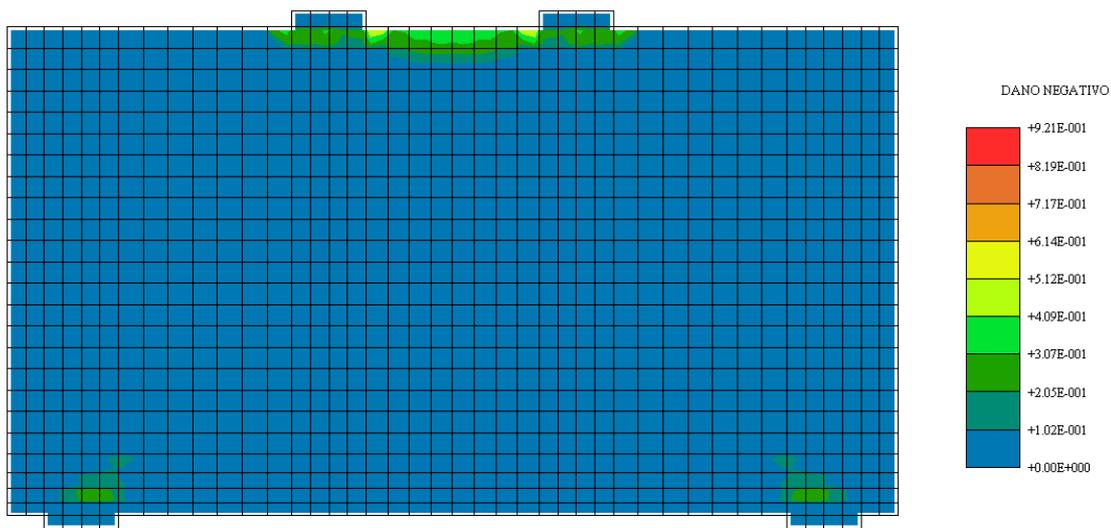


Figura 5.29 – Dano negativo – Carga P3=434,86 KN.

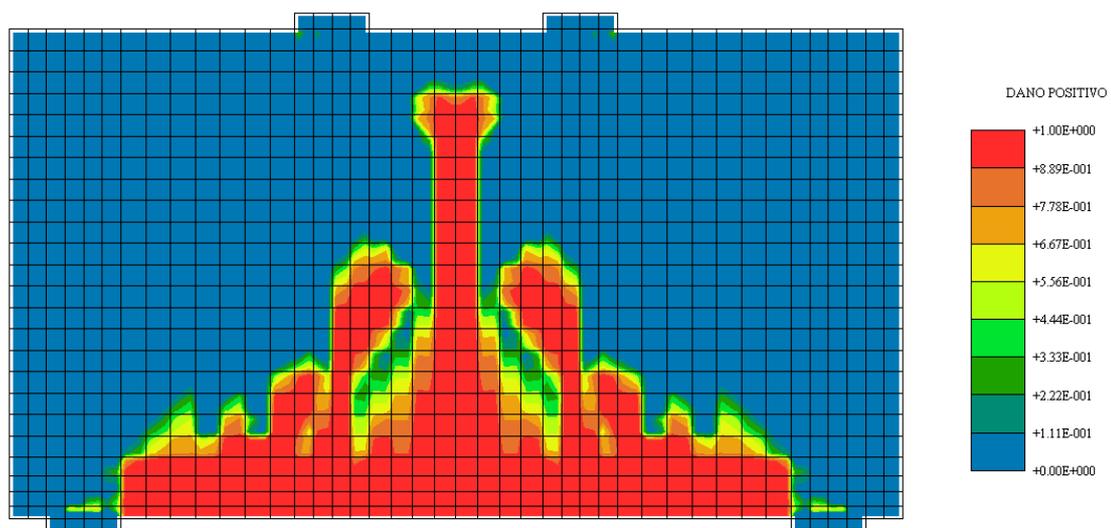


Figura 5.30 – Dano positivo – Carga P3=434,86 KN.

5.6.4 - Carga P4= 450,34 KN

Para o ultimo nível de carga analisado o dano positivo ocupada quase toda a altura da viga parede.

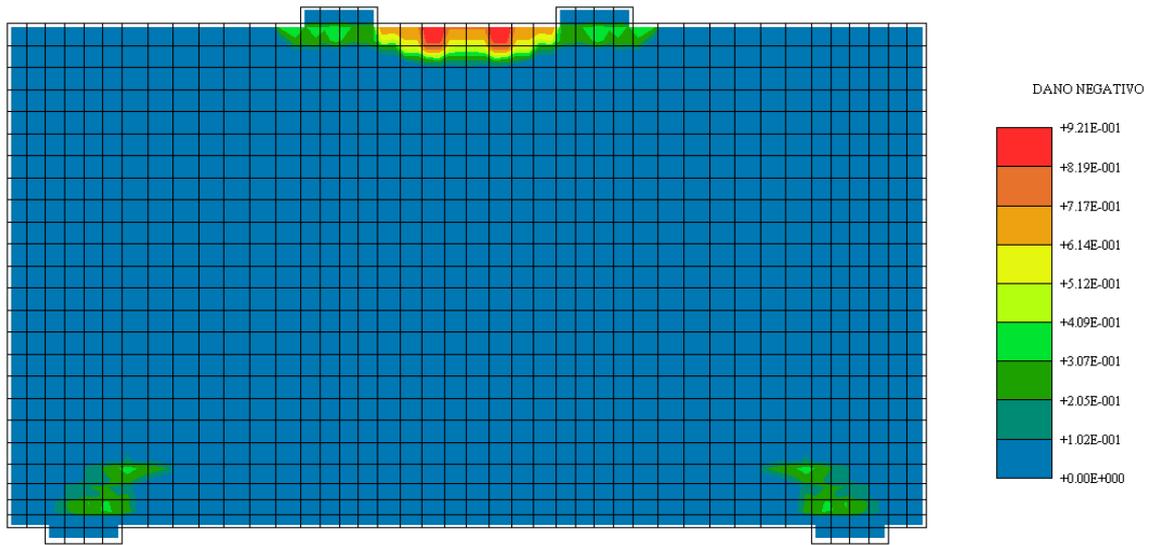


Figura 5.31 – Dano negativo – Carga P4=450,34 KN.

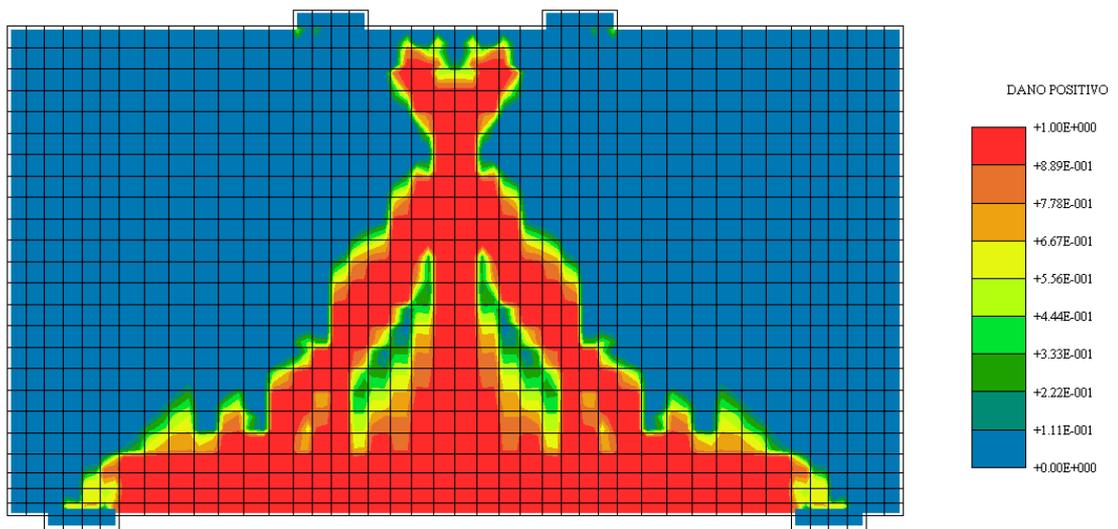


Figura 5.32 – Dano positivo – Carga P4=450,34 KN.

6 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

6.1 – CONCLUSÕES

As conclusões e aspectos mais importantes presentes nesta dissertação serão apresentados a seguir:

- ✓ Mesmo não se levando em consideração a aderência entre o concreto e a armadura, para a viga parede estudada os resultados da análise numérica apresentaram-se bons quando comparados aos resultados experimentais.
- ✓ O IMPL-EX apresentou-se sensível ao tamanho do passo de carga, resultando numa diminuição do valor da carga de ruptura para tamanhos de passos de carga menores.
- ✓ Apesar dessa sensibilidade apresentada pelo IMPL-EX, sempre houve convergência dos incrementos com no máximo três iterações. O modelo é bastante eficiente desse ponto de vista.
- ✓ Mesmo ajustando os parâmetros A^- e B^- ao concreto apresentado por Guimarães (1980) a viga parede apresentou-se mais rígida quando modelada numericamente.

6.2 – SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A seguir serão apresentadas algumas sugestões para melhoramento do modelo apresentado nesta dissertação:

- ✓ Sugere-se utilizar o tensor constitutivo algorítmico proposto por Faria *et al.* (2000) como forma de melhorar a resposta do modelo discutido. Podendo captar melhor o início da fissuração da estrutura.

- ✓ Considerar o efeito do confinamento do concreto, o que acontece em vigas com armadura de alma, através da utilização de parâmetros diferentes para o material em áreas confinadas como apresentado por Faria *et al.* (1999).
- ✓ Testar o modelo em análises de estruturas sob ações sísmicas.
- ✓ Estender a análise para problemas tridimensionais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ÁLVARES, M. S. (1999). *Contribuição ao estudo e emprego de modelos simplificados de dano e plasticidade para a análise de estruturas de barras em concreto armado*, Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 123p.
- BECK, R. (2009). *Identificação experimental de curvas tensão-deformação a taxa constante por ensaios axiais de impacto em corpos de prova de pvc e pp*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 131p.
- BERGAN, P. G. (1980). "Solution algorithms for nonlinear structural problems." In: *Computers & Structures*, 12(4), 497-509.
- BONET, J., WOOD, R. D. (2008). *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis. 2nd Edition*. Cambridge University Press, United States of America.
- CERVERA, M., OLIVER, J., MANZOLI, O. (1996). "A rate-dependent isotropic damage model for the seismic analysis of concrete dams." In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 25, 987-1010.
- CHEN, W. F. (1994). "*Constitutive Equations for Engineering Materials, Volume 2: Plasticity and Modeling*." In: *Studies in Applied Mechanics*, 37, Parte B. Elsevier.
- CRISFIELD, M.A., (1991), "Non-linear finite element analysis of solids and structures", Volume 1: Essential, John Wiley & Sons, Chichester, UK.
- FARIA, R., POUCA, N. V., DELGADO, R. (1999). "Seismic behaviour of a R/C wall: Numeric simulation and experimental validation" In: *IV Congresso de Métodos Numéricos en Ingeniería*. Sevilha, Espanha
- FARIA, R., POUCA, N. V., DELGADO, R. (2000). "Modelação numérica do comportamento cíclico de pilares de betão armado." In: *VI Congresso Nacional de Mecânica Aplicada e Computacional*, Seção II, 827-836. Aveiro, Portugal.

- FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON (2008), “*Practitioners’ guide to finite element modelling of reinforced concrete structures*” Bulletin n° 45, Suíça, 344p.
- GONÇALVES, R. (2003). *Análise de propagação de fissuras por fadiga em concreto pelo mef mediante a mecânica do dano contínuo*, Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 103p.
- KACHANOV, L. M. (1986). *Introduction to continuum damage mechanics*. Martinus Nijhoff, Dordrecht, Holanda, 132p.
- KRAJČINOVIC, D. (1996). *Damage Mechanics. Volume 41: Applied Mathematics and Mechanics*. Elsevier, The Netherlands, 753p.
- LEMAITRE, J., DESMORAT, R. (2005). *Engineering Damage Mechanics. Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures*. Springer, Netherlands, 380p.
- LEMAITRE, J. (2001). *Handbook of Materials Behavior Models. Volume 1: Deformations of Materials*. Academic Press, USA, 1200p.
- MANZOLI, O. L. (1994). “Rate dependent effects in an isotropic damage constitutive model for concrete.” In: International Center for Numerical Methods in Engineering - CIMNE, Technical Report N° 126. Barcelona, Espanha.
- MARTINS, M. A. D. (2001). *Estruturas de dados por arestas para a solução de problemas de plasticidade computacional*, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, 249p.
- MESQUITA, A. D., CODA, H. B. “Uma Formulação do Método dos Elementos Finitos Aplicada à Análise Elastoplástica de Cascas” In: *Cadernos de Engenharia de Estruturas*, 22 (7), 89-105.
- MIRANDA, A. C. O., M. A. MEGGIOLARO, et al. (2003). “Fatigue life and crack path predictions in generic 2D structural components.” In: *Engineering Fracture Mechanics*, 70(10), 1259-1279.

- OLIVER, J., CERVERA, M., OLLER, S., LUBLINER, J. (1990). "Isotropic Damage Models and Smeared Crack Analysis of Concrete." In: Second International Conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures, Vol. 2, 945-958. Zell am See, Austria.
- OLIVER, J., HUESPE, A. E., CANTE, J. C. (2008). "An implicit/explicit integration scheme to increase computability of non-linear material and contact/friction problems." In: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 197(21-24), 1865-1889.
- OLIVER, J., SARACÍBAR, C.A. (2000). *Mecánica de medios continuos para ingenieros*. Edicions UPC, Barcelona, Espanha, 329p.
- PITUBA, J. J. C. (1998). *Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na mecânica do dano contínuo*, Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 130p.
- PITUBA, J. J. C. (2003). *Sobre a formulação de um modelo de dano para o concreto*, Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 151p.
- PITUBA, J. J. C., PROENÇA, S. P. B. (2005). "Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na mecânica do dano contínuo." In: Cadernos de Engenharia de Estruturas, 7(23), 33-60.
- POUCA, N. V., FARIA, R., DELGADO, R. (2002). "Simulação do comportamento sísmico de paredes estruturais de betão armado." In: Encontro Nacional Betão Estrutural, 393-402. Lisboa, Portugal.
- SIMO, J. C., JU, J. W. (1987). "Strain- and stress-based continuum damage models – I. Formulation." In: International Journal of Solids and Structures, 23(7), 821-840.
- SIMO, J. C., JU, J. W. (1987). "Strain- and stress-based continuum damage models – II. Computational aspects." In: International Journal of Solids and Structures, 23(7), 841-869.

SIMO, J. C. E HUGHES, T. J. R. (1997). “Motivation. One-Dimensional Plasticity and Viscoplasticity.” In: *Computational Inelasticity, Vol. 7 Serie Interdisciplinary Applied Mathematics*, Springer-Verlag.

VOYIADJIS, G. Z., KATTAN, P. I. (2006). *Advances in damage mechanics. Metals and Metal Matrix Composites with an Introduction to Fabric Tensors*. Elsevier, UK, 708p.

VOYIADJIS, G. Z., TAQIEDDIN, Z. N., KATTAN, P. I. (2008) “Anisotropic damage–plasticity model for concrete.” In: *International Journal of Plasticity*, 24(10), 1946-1965.

APÊNDICES

APÊNDICE A – OBTENÇÃO DAS TENSÕES PRINCIPAIS

Seja \mathbf{X} um tensor de tensões o qual se deseja obter as tensões principais x_α e as direções principais \mathbf{E}_α , ou seja, os autovalores e autovetores obtidos através da equação característica que no espaço bidimensional é dada por:

$$x_\alpha^2 - I_1 x_\alpha + I_2 = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (\text{A.1})$$

Onde I_1 e I_2 são os invariantes do tensor \mathbf{X} :

$$I_1 = \text{tr}[\mathbf{X}] = X_{11} + X_{22} \quad (\text{A.2})$$

$$I_2 = \det[\mathbf{X}] = X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21} \quad (\text{A.3})$$

A solução da Equação (A.1) fornece a fórmula exata para os autovalores de \mathbf{X} :

$$x_1 = \frac{I_1 + \sqrt{I_1^2 - 4I_2}}{2}, \quad x_2 = \frac{I_1 - \sqrt{I_1^2 - 4I_2}}{2} \quad (\text{A.4})$$

Se $x_1 \neq x_2$ tem-se a seguinte fórmula fechada dada por Neto *et al.* (2008) para o cálculo dos autovetores de \mathbf{X} em duas dimensões:

$$\mathbf{E}_\alpha = \frac{1}{2x_\alpha - I_1} [\mathbf{X} + (x_\alpha - I_1)\mathbf{I}] \quad (\text{A.5})$$

Por outro lado, se $x_1 = x_2$:

$$\mathbf{E}_\alpha = \mathbf{I} \quad (\text{A.6})$$

APÊNDICE B - ACOPLAGEM ENTRE O CONCRETO E A ARMADURA

É feita a imersão do elemento barra representante da armadura dentro do elemento de concreto através da substituição da integração em linha correspondente a contribuição da rigidez do elemento de barra por uma equivalente feita sobre o volume do elemento de concreto ao qual está imersa, somando-se então diretamente as rigidezes do elemento de concreto e de aço.

A seguir apresenta-se a acoplagem executada entre os elementos de concreto e aço através de um exemplo simplificado. Este exemplo é composto de um elemento retangular de concreto armado com dois elementos quadriláteros lineares de concreto e dois elementos unidimensionais lineares representantes das armaduras conforme mostrado na Figura B.1 cuja conectividade é detalhada na Tabela B.1.

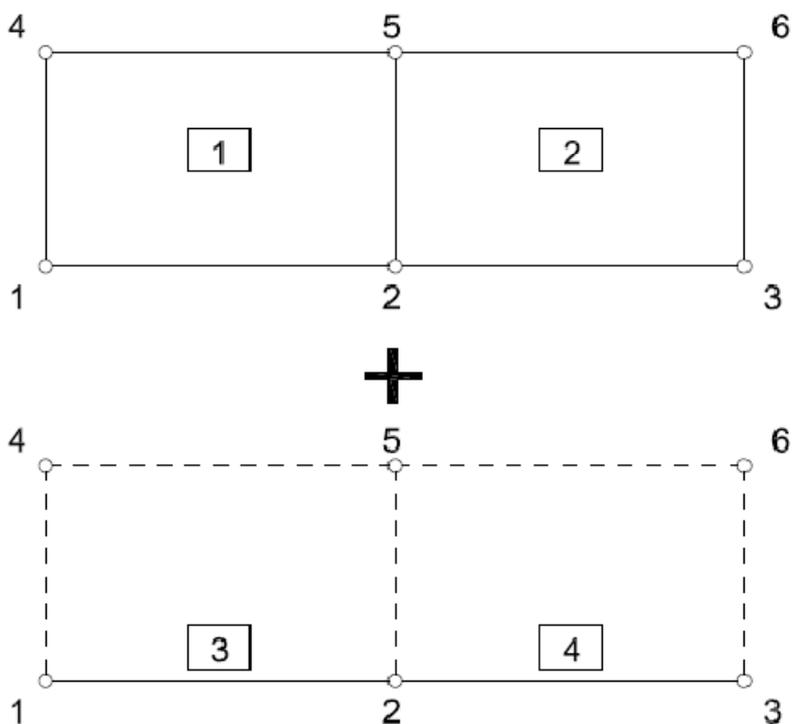


Figura B.0.1 – Exemplo simplificado da acoplagem concreto-armadura.

Tabela B.1 – Conectividade dos elementos.

Elemento	Conectividade
1- Concreto	1-2-5-4
2- Concreto	2-3-6-5
3- Armadura	1-2
4- Armadura	2-3

Considerando uma representação condensada para as matrizes de rigidez dos elementos podemos escrever matriz representante da rigidez de um elemento de concreto como:

$$K_{ij}^{(1),(2)} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Sendo que cada termo da mesma é representado por:

$$K_{11}^{(\text{concreto})} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Da mesma forma para o elemento de barra representante da armadura temos:

$$K_{ij}^{(3),(4)} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

e

$$K_{11}^{(Aço)} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \quad (B.4)$$

Adotando a discretização apresentada na Figura B.1 e considerando as conectividades entre os elementos de concreto e aço da Tabela B.1, podemos montar a matriz de rigidez global da estrutura considerada através do somatório puro e simples das rigidezes dos elementos de concreto e das armaduras pertencentes a um mesmo nó nas direções dos graus de liberdade correspondentes. Assim sendo, apresenta-se abaixo a matriz global da estrutura resultante do acoplamento entre os quatro elementos.

$$K_{ij}^{(Global)} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} + K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(1)} + K_{12}^{(3)} & 0 & K_{14}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & 0 \\ K_{21}^{(1)} + K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} + K_{22}^{(3)} + K_{11}^{(4)} & K_{12}^{(2)} + K_{12}^{(4)} & K_{24}^{(1)} & K_{23}^{(1)} + K_{13}^{(2)} & K_{14}^{(2)} \\ 0 & K_{21}^{(2)} + K_{21}^{(4)} & K_{22}^{(2)} + K_{22}^{(4)} & 0 & K_{23}^{(2)} & K_{24}^{(2)} \\ K_{41}^{(1)} & K_{41}^{(1)} & 0 & K_{44}^{(1)} & K_{43}^{(1)} & 0 \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} + K_{41}^{(2)} & K_{42}^{(2)} & K_{34}^{(1)} & K_{33}^{(1)} + K_{43}^{(2)} & K_{34}^{(2)} \\ 0 & K_{31}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & 0 & K_{33}^{(2)} & K_{34}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (B.5)$$