Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Grupos localmente nilpotentes e o hipercentro local de um grupo

por

Marcus Vinícius de Andrade Neves

Brasília
2008

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Grupos localmente nilpotentes e o hipercentro local de um grupo

por

Marcus Vinícius de Andrade Neves

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 21 de Novembro de 2008

Comissão Examinadora:

Prof. Rudolf Richard Maier - MAT/UnB (Orientador)

Profª. Aline Gomes da Silva Pinto - MAT/UnB (Membro)

Profª. Ana Cristina Vieira - MAT/UFMG (Membro)

Resumo

A finalidade da presente dissertação é a apresentação de um trabalho recente [1] intitulado ON THE LOCAL HYPERCENTER OF A GROUP, de autoria de José Ivan Silva Ramos e Rudolf Maier. Nele o *hipercentro local* $\mathbf{K}(G)$ de um grupo G é introduzido e suas propriedades básicas são estudadas. Particularmente obtém-se extensões de teoremas clássicos de Baer, Mal'cev e McLain sobre *grupos localmente nilpotentes*. Além disso, abordamos também ligações entre $\mathbf{K}(G)$, os subgrupos abnormais e os subgrupos maximais localmente nilpotentes de G.

Abstract

The purpose of this dissertation is the presentation of a recent article [1] entitled ON THE LOCAL HYPERCENTER OF A GROUP, by Jose Ivan Silva Ramos and Rudolf Maier. In that work the *local hypercenter* $\mathbf{K}(G)$ of a group G is introduced and its basic properties are studied. Particularly extensions of classical theorems of Baer, Mal'cev and McLain on *locally nilpotent groups* are obtained. We also discuss the links between $\mathbf{K}(G)$, abnormal subgroups and the maximal locally nilpotent subgroups of G.

Sumário

Lista de símbolos.......... 1

Introducão.......... 2

Capítulo 1: Resultados preliminares.......... 5

1.1- O lema de Zorn e algumas propriedades de grupos 5

1.2- Grupos localmente nilpotentes 8

1.3- Grupos Hipercentrais 12

Capítulo 2: O hipercentro de um grupo.......... 14

2.4- Propriedades básicas 14

Capítulo 3: O hipercentro local de um grupo.......... 20

3.5- Propriedades básicas 20

Capítulo 4: $\mathbf{K}(G)$ **e o preservador da nilpotência local** $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$.......... 27

4.6- Propriedades básicas 27

4.7- Condições necessárias e suficientes para $\mathbf{H}(G) = \mathbf{K}(G)$

e para $\mathbf{K}(G) = \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$ 32

Apêndice.......... 35

A- Os subgrupos abnormais de um grupo 35

Referências bibliográficas 39

Lista de símbolos

$G,\ H,\ X,$ .... Grupos, conjuntos

$G \times W$ .... Grupo produto direto dos grupos G e W

$H \leq G, H < G$.............................. H é subgrupo de G, H é subgrupo próprio de G

$N \trianglelefteq G,$ .... N é subgrupo normal de G

$N \lhd G$ .... N é subgrupo normal próprio de G

$\mathbf{Z}(G)$... Centro do grupo G

$\mathbf{H}(G)$ .... Hipercentro do grupo G

$\mathbf{K}(G)$ .... Hipercentro local do grupo G

$\mathbf{N}_G(H)$ .... Normalizador de H em G

$H^G = \langle H^g \mid g \in G \rangle$ .... Fecho normal de H em G

$\left\langle x^G \right\rangle$ .... Subgrupo normal gerado pelo elemento $x \in G$

$H_G = \bigcap\limits_{g \in G} H^g$ .... Núcleo normal de H em G

$x^G = \{x^g := g^{-1}xg \mid g \in G\}$........... a classe de conjugação de um elemento $x \in G$

$G' = [G, G] = \langle [x, y] \mid x, y \in G \rangle$ .... Subgrupo derivado de G

$[x,\ {}_r g] = [x, \underbrace{g, g \cdots, g}_{r\ vezes}]$ .... Comutador de x com g, r vezes

$\mathbb{O}_{L\mathfrak{N}}(G)$ .... Radical de Hirsch-Plotkin

$\Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$ .... Preservador da nilpotência local de G

Introdução

O *hipercentro* $\mathbf{H}(G)$ de um grupo G pode ser visto como o menor subgrupo normal de G com quociente livre de centro e também como o maior subgrupo normal M de G que é $G-$hipercentral no sentido que para todo $N \trianglelefteq G$ tal que $N < M$, nós temos que M/N contém um elemento central não trivial de G/N. Um grupo G é hipercentral se, e somente se, $\mathbf{H}(G) = G$. Isto acontece se, e somente se, cada imagem homomórfica não trivial de G tem centro não trivial. Como um grupo localmente nilpotente (= localmente hipercentral) em geral não é hipercentral, é desejável estender o conceito de hipercentro de alguma maneira para *hipercentro local*. Uma possibilidade natural é a seguinte, sugerida pelo Professor O. H. KEGEL:

$$\mathbf{K}(G) = \{x \in G \mid x \in \mathbf{H}(< x, g_1, g_2, .., g_r >) \; \forall \; g_1, g_2, ..., g_r \; \in G\}$$

isto é, $\mathbf{K}(G)$ consiste de todos os elementos x que pertencem ao hipercentro de qualquer subgrupo finitamente gerado de G contendo x. Com este conceito tem-se que G é localmente nilpotente se, e somente se, $G = \mathbf{K}(G)$. Além disso, $\mathbf{K}(G)$ é compatível com subgrupos e quocientes de G de forma natural e esperada.

Lembramos no nosso capítulo 1 dois teoremas clássicos sobre grupos localmente nilpotentes, provados por Baer, Mal'cev e McLain em 1956, a saber:

Teorema (Baer, McLain): Se M é um subgrupo maximal de um grupo localmente nilpotente, então M é normal em G. Equivalentemente $G' \leq FratG$.

Teorema (Mal'cev, McLain): Um fator principal de um grupo localmente nilpotente é central.

No capítulo 2 definimos o hipercentro de um grupo e mostramos algumas propriedades básicas.

No capítulo 3 definimos hipercentro local. A utilidade surpreendente do conceito do hipercentro local pode ser vista por exemplo na possibilidade de estender estes teoremas na seguinte forma:

Proposição

Seja U um subgrupo maximal e M/N um fator principal de um grupo G tal que $M \leq \mathbf{K}(G)$. Então (ver[1])

a) U é normalizado por $\mathbf{K}(G)$;

b) M/N é central em G/N.

No capítulo 4, a partir da família dos subgrupos maximais localmente nilpotentes de G, definimos o *preservador da nilpotência local* $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$ de G que é:

$$\Lambda_{\mathfrak{N}}(G) = \bigcap_{H \in \mathcal{N}(G)} H \ ,$$

a interseção de todos os maximais entre os subgrupos localmente nilpotentes de G, introduzido em [2].

O grupo $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$ tem algumas propriedades análogas às propriedades do hipercentro e do hipercentro local (ver 4.6.3).

Temos que $\mathbf{H}(G) \leq \mathbf{K}(G) \leq \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$, e para todo grupo finito G nós temos $\mathbf{H}(G) = \mathbf{K}(G) = \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$. Obviamente $\mathbf{H}(G) \lneqq \mathbf{K}(G) = G$, se G é um grupo localmente nilpotente e não hipercentral. Apresentamos o exemplo de A. KRASSILNIKOV que mostra que em geral $\mathbf{K}(G) \lneqq \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$.

Temos algumas condições necessárias e suficientes para $\mathbf{H}(G) = \mathbf{K}(G)$ e para $\mathbf{K}(G) = \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$ que podem ser vistas nas proposições abaixo:

A-Proposição.
Seja G um grupo. São equivalentes:

a) $\mathbf{H}(G) = \mathbf{K}(G)$.

b) $\mathbf{K}(G)/\mathbf{H}(G)$ é finito.

c) $\mathbf{K}(G)/\mathbf{H}(G)$ é finitamente gerado.

d) Os subgrupos normais X de G com $\mathbf{H}(G) \leq X \leq \mathbf{K}(G)$ satisfazem a condição minimal.

B-Proposição.
Seja G um grupo. São equivalentes:

a) $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G) = \mathbf{K}(G)$.

b) $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G)/\mathbf{K}(G)$ é finito.

c) $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G)/\mathbf{K}(G)$ é finitamente gerado.

Um subgrupo H de G é abnormal em G se $g \in \langle H, H^g \rangle$ para cada elemento $g \in G$. No apêndice são citados alguns resultados importantes sobre abnormalidade e a nilpotência local de um grupo.

Se $\mathbf{A}(G)$ denota a interseção de todos os subgrupos abnormais de um grupo G, veremos que também $\mathbf{A}(G) \geq \mathbf{K}(G)$ (ver 3.5.6). Portanto um grupo localmente nilpotente não possui subgrupos abnormais próprios. A questão, se $\mathbf{A}(G)$ sempre é localmente nilpotente, parece ser interessante e difícil. Um trabalho recente de Kurdachenko, Russo e Vincenzi [10] pesquisa nesta direção. Citamos no nosso apêndice dois teoremas desse trabalho que garantem, sob certas hipóteses adicionais, a nilpotência local de um grupo G sem subgrupos abnormais próprios.

Capítulo 1

1 Resultados Preliminares

1.1 Lema de Zorn e algumas propriedades de grupos

Seja A um conjunto e $\phi \neq \mathfrak{M}$ uma família de subconjuntos de A. Dizemos que $\mathfrak{M}$ é uma família indutivamente ordenada se, e somente se, para toda cadeia $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{M}$, temos $J = \bigcup\limits_{X \in \mathfrak{C}} X \in \mathfrak{M}$.

Um elemento maximal de $\mathfrak{M}$, caso exista, é um conjunto $M \in \mathfrak{M}$ tal que para todo $X \in \mathfrak{M}$ com $M \subseteq X$, temos $M = X$. Indicamos por

$$m\mathfrak{M} = \{M \mid M \textit{ é um elemento maximal de } \mathfrak{M}\}$$

o conjunto dos elementos maximais de $\mathfrak{M}$.

Dizemos que uma família $\mathfrak{M}$ de subgrupos de um grupo G satisfaz a condição maximal se, e somente se, toda cadeia $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{M}$ possui um maior elemento. Isto acontece se, e somente se, toda subfamília não vazia $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$ possui um elemento maximal.

Em nossas investigações muitas vezes precisamos garantir a existência de elementos maximais para determinadas famílias de subgrupos. Quando estas famílias são indutivamente ordenadas estes elementos podem ser garantidos pelo conhecido

1.1.1-Lema de Zorn.
Toda família de subconjuntos indutivamente ordenada possui um elemento maximal.

1.1.2-Definição.
H/K é um fator principal de um grupo G se H/K é um subgrupo normal minimal de G/K, onde $K \trianglelefteq G$.

Para ilustrar o Lema de Zorn, faremos uma aplicação deste lema provando o seguinte resultado:

Proposição.
Todo grupo $G \neq 1$ possui um fator principal. Precisamente, para todo $1 \neq x \in G$, existe um fator principal H/M de G com $x \in H - M$.

Demonstração: Seja $1 \neq x$ um elemento em G. Temos que $H = \left\langle x^G \right\rangle$ é um subgrupo normal de G. Além disto, a família

$$\mathfrak{M} = \{X \mid X \trianglelefteq G \ e \ X < H\} = \{X \mid X \trianglelefteq G \ e \ x \notin X\}$$

é não vazia contendo 1. Mas ainda, para toda cadeia $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{M}$, temos que $J = \bigcup_{X \in \mathfrak{C}} X \in \mathfrak{M}$ já que $J \trianglelefteq G$ e $x \notin J$. Portanto, $\mathfrak{M}$ é indutivamente ordenada e assim sendo possui um elemento maximal, digamos M. Por fim temos M , $H \trianglelefteq G$ com $M < H$ e H/M subgrupo normal minimal de G/M, pois se H/M não for normal minimal, teremos um certo subgrupo Z/M, tal que $Z/M \trianglelefteq G/M$, com $M < Z < H$, um absurdo pois M é maximal em $\mathfrak{M}$. Segue que $x \in Z$ e $H = \left\langle x^G \right\rangle \leq Z$, um absurdo, logo H/M é fator principal.

1.1.3- Proposição.
Sejam X, Y subconjuntos de G e $H, K < G$. Então:

a) $X^K = \langle X, [X, K] \rangle$.

b) $[X, K]^K = [X, K]$.

c) Se $K = \langle Y \rangle$, então $[X, K] = [X, Y]^K$.

d) Se $H = \langle X \rangle$ e $K = \langle Y \rangle$, então $[H, K] = [X, Y]^{HK}$.

(ver [4], p.124)

1.1.4-Definição.
Um grupo G é dito satisfazer a condição maximal se cada cadeia estritamente crescente de subgrupos

$$G_1 \subset G_2 \subset G_3 \subset ...$$

é finita.

1.1.5-Proposição.
Um grupo G satisfaz a condição maximal se, e somente se, cada subgrupo é finitamente gerado (ver [4], p.68).

Lembramos que um grupo G é dito nilpotente, se ele possui uma cadeia de subgrupos

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_{n-1} \leq G_n = G \qquad (*)$$

com $G_i \trianglelefteq G$ e $G_i/G_{i-1} \leq \mathbf{Z}(G/G_{i-1})$, ou seja, $[G_i, G] \leq G_{i-1}$ para todo $i = 1, 2, ..., n$. A cadeia $(*)$ chama-se uma cadeia central de G de comprimento n. O comprimento c de uma cadeia central de G

$$1 = G_0 < G_1 < ... < G_{c-1} < G_c = G$$

de menor comprimento possível é a *classe de nilpotência* $c = cl(G)$ de G. Existem duas cadeias canônicas de comprimento mínimo c em todo grupo nilpotente:

$$1 = \mathbf{Z}_0(G) < \mathbf{Z}_1(G) < ... < \mathbf{Z}_c(G) = G \ ,$$

chamada série central superior de G e

$$G = \Gamma_1(G) > \Gamma_2(G) > ... > \Gamma_c(G) > \Gamma_{c+1}(G) = 1 \ ,$$

chamada série central inferior de G.

Aqui $\mathbf{Z}_i(G)/\mathbf{Z}_{i-1}(G) = \mathbf{Z}\left(G/\mathbf{Z}_{i-1}(G)\right)$ e $\Gamma_{i+1}(G) = [\Gamma_i(G), G]$ para todo $i = 1, 2, ..., c$.

Por $\mathfrak{N}$ denotamos a classe de todos os grupos nilpotentes.

Lembramos também que $\mathfrak{N}$ é fechada a subgrupos, quocientes e produtos diretos finitos. Um propriedade importante do centro de um grupo nilpotente é a seguinte: G é um grupo nilpotente então $\mathbf{Z}(G) \neq 1$.

1.1.6- Teorema(Baer).
Se G é um grupo nilpotente e G/G' é finitamente gerado, então G satisfaz a condição maximal (ver [4], p.137).

1.2 Grupos localmente nilpotentes

1.2.1-Definição.
Seja G um grupo. Dizemos que G é *localmente nilpotente* se todo subgrupo finitamente gerado de G é nilpotente.

Por $L\mathfrak{N}$ indicamos a classe de todos os grupos localmente nilpotentes.

É fácil ver que imagens e subgrupos de grupos localmente nilpotentes são localmente nilpotentes.

No estudo dos grupos nilpotentes temos um teorema de fundamental importância que é o seguinte:

1.2.2-Teorema de Fitting.
Sejam M e N subgrupos normais nilpotentes de um grupo G. Se c e d são a classe de nilpotência de M e N, então $L = MN$ é um subgrupo nilpotente de classe no máximo $c + d$.

Demonstração: Vamos calcular os termos da série central inferior de L, mostrando por indução sobre i que $\Gamma_i(L)$ é o produto de todos $[X_1, X_2, ..., X_i]$ com $X_j = M$ ou N. A afirmação está correta para $i = 1$ pois $[X_1] = X_1$. As identidades fundamentais de comutadores mostram que

$$[UV, W] = [U, W]\,[V, W] \quad e \quad [U, VW] = [U, V]\,[U, W]$$

se $U, V, W \lhd G$.Segue que

$$\Gamma_{i+1}(L) = [\Gamma_i(L), L] = [\Gamma_i(L), MN] = [\Gamma_i(L), M]\,[\Gamma_i(L), N]$$

e, consequentemente, $\Gamma_{i+1}(L)$ é produto de todos $[X_1, X_2, ..., X_i, X_{i+1}]$ com $X_j = M$ ou N.

Para completar a demonstração seja $i = c + d + 1$. Então em $[X_1, X_2, ..., X_i]$ M aparece pelo menos $c+1$ vezes ou N aparece pelo menos $d+1$ vezes. Agora $A \lhd G$ sempre implica que $[A, G] \leq A$ visto que $[a, g] = a^{-1}a^g$. Assim $[X_1, X_2, ..., X_i]$ está contido em ambos $\Gamma_{c+1}(M)$ e $\Gamma_{d+1}(N)$, mas ambos são iguais a 1. Consequentemente $[X_1, X_2, ..., X_i] = 1$ e $\Gamma_i(L) = 1$, de modo que L é nilpotente com classe no máximo $i - 1 = c + d$.

De acordo com o Teorema de Fitting nós temos que o produto de dois subgrupos normais nilpotentes é nilpotente. Temos uma afirmação correspondente que vale para grupos localmente nilpotentes e que é de grande importância.

1.2.3-Teorema de Hirsch-Plotkin.
Sejam H e K subgrupos normais localmente nilpotentes de um grupo G. Então o produto $J = HK$ é localmente nilpotente.

Demonstração: Escolha um subgrupo finitamente gerado de J, digamos $\langle h_1k_1, ..., h_mk_m\rangle$ onde $h_i \in H$ e $k_i \in K$. Vamos mostrar que J é nilpotente. Para isso vamos introduzir os subgrupos $X = \langle h_1, ..., h_m\rangle$ e $Y = \langle k_1, ..., k_m\rangle$, e também $Z = \langle X, Y\rangle$. Visto que $J \leq Z$, é suficiente mostrar que Z é nilpotente.

Seja C o conjunto de todos os comutadores $[h_i, k_j]$, $i, j = 1, ..., m$; então $C \subseteq H \cap K$ visto que H e K são normais. Como $\langle X, C\rangle$ é um subgrupo finitamente gerado de H, temos que $\langle X, C\rangle$ é nilpotente. Visto que grupos nilpotentes finitamente gerados satisfazem a condição maximal (1.1.6), o fecho normal C^X é finitamente gerado por 1.1.5, bem como nilpotente. Além disso $C^X \leq H \cap K$, de forma que $\left\langle Y, C^X\right\rangle \leq K$. Portanto $\left\langle Y, C^X\right\rangle$ é nilpotente, finitamente gerado e também satisfaz a condição maximal. Agora $[X, Y] = C^{XY}$ por 1.1.3 item d). Assim, usando 1.1.3, nós temos

$$\left\langle Y, C^X\right\rangle = \left\langle Y, C^{XY}\right\rangle = \langle Y, [X, Y]\rangle = Y^X.$$

Segue que Y^X é nilpotente, e por simetria X^Y é nilpotente. Finalmente $Z = \langle X, Y\rangle = X^Y Y^X$ é nilpotente pelo Teorema de Fitting.

1.2.4- Observação.
Em um grupo G qualquer há um único subgrupo normal maximal localmente nilpotente (chamado de radical de **Hirsch-Plotkin**) contendo todos subgrupos normais localmente nilpotentes de G, e que denotaremos por $\mathbb{O}_{L\mathfrak{N}}(G)$.

Demonstração: É fácil ver que a união de uma cadeia de subrupos localmente nilpotentes normais é localmente nilpotente normal. Assim o Lema de Zorn pode ser usado para mostrar que cada subgrupo normal localmente nilpotente está contido em um subgrupo normal maximal localmente nilpotente. Se H e K são dois subgrupos normais maximais localmente nilpotentes de G, entao HK é localmente nilpotente pelo Teorema de Hirsch-Plotkin. Portanto $H = K$.

Vamos relembrar duas propriedades de grupos nilpotentes: subgrupos maximais são normais e fatores principais são centrais. Vamos mostrar que essas afirmações valem ainda para grupos localmente nilpotentes.

1.2.5-Teorema (Baer, McLain).
Se M é um subgrupo maximal de um grupo localmente nilpotente, então M é normal em G. Equivalentemente $G' \leq Frat\ G$.

Demonstração: Se M não é normal, então $G' \nleq M$, pois sabemos que $G' \subset M$ implica que $M \trianglelefteq G$, logo há um elemento $c \in G' - M$. Então $G = \langle c, M \rangle$ desde que M é maximal. Agora $c \in \langle g_1, g_2, ..., g_n \rangle'$ para certos $g_1, g_2, ..., g_n$ e todos estes elementos pertencem a $L = \langle c, F \rangle$ para um conveniente subgrupo finitamente gerado F de M. Visto que $c \notin F$, nós podemos achar um subgrupo N de L(lema de Zorn) que é maximal em relação a propriedade $F < N$ e $c \notin N$. Se tivermos um subgrupo de L que contém N, este mesmo terá que conter c e assim será igual ao próprio L, logo não temos nenhum subgrupo em L que contém N, assim N é um subgrupo maximal de L. Visto que L é finitamente gerado, temos que L é nilpotente, e como N é maximal em L, N é normal em L. Assim L/N é de ordem prima, isto é, L/N é cíclico e portanto é abeliano, e assim temos que $L' \leq N$. Como $c \in L'$, temos $c \in N$, contradição pela escolha de N. Assim M é normal em G.
Lembramos que o subgrupo $Frat\ G$ é definido como sendo a interseção de todos subgrupos maximais de G. No nosso caso temos que se M é maximal em G, então M é normal em G, ou seja, G/M é de ordem prima e assim $G' \leq M$. Portanto $G' \leq Frat\ G$.

Para grupos finitos a condição $G' \leq Frat\ G$ é equivalente para nilpotência. Mas para grupos infinitos esta é uma propriedade muito fraca porque podemos ter grupo infinito que não tem qualquer subgrupo maximal e $G = Frat\ G$. Por exemplo, seja G o produto entrelaçado de grupos do tipo p^∞ e q^∞. É fácil ver que $G = Frat\ G$, de modo que certamente $G' \leq Frat\ G$. Além disso G não é localmente nilpotente se $p \neq q$. Assim $G' \leq Frat\ G$ não implica em nilpotência local.

1.2.6-Teorema (Mal'cev, McLain).
Um fator principal de um grupo localmente nilpotente é central.

Demonstração: Seja N um subgrupo normal minimal de G. É suficiente provar que N é central em G. Se $N \nleq \mathbf{Z}(G)$, então existe $a \in N$ e $g \in G$ tal que $b = [a, g] \neq 1$. Visto que $b \in N$ e $N \trianglelefteq G$, nós temos que $N = \langle b^G \rangle$ pela minimilidade de N. Notamos que $a \in \langle b^{g_1}, ..., b^{g_n} \rangle$para certos $g_i \in G$. Se $H = \langle a, g, g_1, ..., g_n \rangle$ então temos que H é um subgrupo nilpotente. Seja $A = \left\langle a^H \right\rangle$. Então $b \in [A, H]$, e segue $b^{g_i} \in [A, H]$ e consequentemente $a \in [A, H]$. Temos $A = [A, H]$ e $A = [A, {}_r H]$ para todo r. Visto que H é nilpotente, segue que $A = 1$ e $a = 1$. Mas isto quer dizer que $b = [a, g] = 1$. Este absurdo prova o resultado.

1.2.7-Definição.
Um subgrupo H de um grupo G é *abnormal* em G, se $g \in \langle H, H^g \rangle$ para todo $g \in G$.

O Teorema 1.2.5 de $Baer - McLain$ tem a seguinte consequência:

1.2.8-Proposição.
Um grupo localmente nilpotente não tem subgrupos abnormais próprios.

Demonstração: Se $H < G$, seja $g \in G - H$ e considere $K = \langle H, g \rangle$. Existe um subgrupo maximal $M < K$ com $H \leq M$, isto é $g \notin M$. Pelo teorema de Baer-Mclain, $M \lhd K$, já que K é localmente nilpotente. Segue $H^g \leq M$ e então $\langle H, H^g \rangle \leq M$ com $g \notin \langle H, H^g \rangle \leq M$. Portanto H não pode ser subgrupo abnormal de G.

1.3 Grupos Hipercentrais

Uma outra generalização do conceito da nilpotência é:

1.3.1-Definição.
Um grupo G é dito *hipercentral*, se para todo $N \lhd G$ temos que $\mathbf{Z}(G/N) > N/N$.

Por $\mathfrak{H}$ indicamos a classe dos grupos hipercentrais.

1.3.2-Proposição.

a) $\mathfrak{H}$ é fechada para subgrupos e quocientes.

b) Se $G \in \mathfrak{H}$ e $1 \neq M \trianglelefteq G$, então $\mathbf{Z}(G) \cap M \neq 1$.

c) Se $G = AB$ com $A, B \trianglelefteq G$ e se A e B são hipercentrais, então $G = AB$ é hipercentral (P. HALL).

Demonstração:

a) Seja G hipercentral e $N \lhd G$, vamos mostrar que G/N é hipercentral. Ou seja, devemos mostrar que para todo $M/N \lhd G/N$ temos que $\mathbf{Z}((G/N)/(M/N)) > (M/N)/(M/N)$. Como $M/N \lhd G/N$, então $M \lhd G$, logo $\mathbf{Z}(G/M) > M/M$. Como $(G/N)/(M/N) \cong G/M$ e $\mathbf{Z}(G/M)$ é não trivial, temos $\mathbf{Z}((G/N)/(M/N)) > (M/N)/(M/N)$.
Seja $S \leq G$, vamos mostrar que S é hipercentral, ou seja , para todo $R \lhd S$ devemos mostrar que $\mathbf{Z}(S/R) > R/R$. Seja $R \lhd S$ e seja $\mathfrak{F} = \{X \trianglelefteq G | X \cap S \leq R\}$. Temos que nossa família de subgrupos $\mathfrak{F}$ é indutivamente ordenada, assim pelo Lema de Zorn, $\mathfrak{F}$ tem elemento maximal M.Temos $M \lhd G$ e $M \cap S \leq R$. Como G é hipercentral, $Z/M = \mathbf{Z}(G/M) > M/M$, ou seja, $M < Z \trianglelefteq G$, temos que $Z \notin \mathfrak{F}$. Assim $Z \cap S \not\leq R$, ou seja, existe $x \in Z \cap S$ tal que $x \notin R$. Note que $x \notin M$, pois caso contrário $x \in M \cap S \leq R$, contradição. Temos $[x, G] \leq M$, daí $[x, S] \leq [x, G] \leq M$, mas $[x, S] \leq S$. Então $[x, S] \leq S \cap M \leq R$, logo $\mathbf{Z}(S/R) > R/R$.

b) Considere a família $\mathfrak{F} = \{X \trianglelefteq G | X \cap M = 1\}$. Esta família é indutivamente ordenada. Seja $N \in \mathfrak{F}$ um elemento maximal. Então $N \lhd G$, pois se $N = G$ teríamos $G \cap M = M = 1$ e $M \neq 1$. Logo $Z/N = \mathbf{Z}(G/N) > N/N$, isto é $N < Z \trianglelefteq G$. Logo $Z \cap M \neq 1$, pois $Z \notin \mathfrak{F}$. Existe $x \in Z \cap M$, e $x \notin N$ se não teríamos $N \cap M \neq 1$, contradição. Temos $[x, G] \leq N$ e $[x, G] \leq M$, pois $x \in M$ e $M \trianglelefteq G$, assim $[x, G] \leq M \cap N = 1$, ou seja $x \in \mathbf{Z}(G)$.

c) Seja $G = AB$. Para todo $N \trianglelefteq G$, vale $G/N = (AN/N)(BN/N)$ com $AN/N, BN/N \trianglelefteq G/N$ e $AN/N \cong A/A \cap N$ tal como $BN/N \cong B/B \cap N$ são hipercentrais pois A e B são hipercentrais logo por a), $A/A \cap N$ e $B/B \cap N$ também são. Para provar que G é hipercentral, podemos portanto supor $N = 1$ e provar que $\mathbf{Z}(G) > 1$.

Se $A \cap B = 1$, temos $G = A \times B$ e assim temos $\mathbf{Z}(G) = \mathbf{Z}(A) \times \mathbf{Z}(B) > 1$, pois A e B são hipercentrais. Suponhamos então que $A \cap B > 1$. Temos então que $A \cap B \trianglelefteq A$, logo pelo *item b*), $\mathbf{Z}(A) \cap (A \cap B) = \mathbf{Z}(A) \cap B > 1$. Assim $\mathbf{Z}(B) \cap (\mathbf{Z}(A) \cap B) = \mathbf{Z}(B) \cap \mathbf{Z}(A) > 1$. Como $\mathbf{Z}(B) \cap \mathbf{Z}(A) \leq \mathbf{Z}(G)$, temos $\mathbf{Z}(G) > 1$ e portanto $G = AB \in \mathfrak{H}$.

1.3.3-Proposição.

a) Todo grupo nilpotente é hipercentral.

b) Todo grupo hipercentral é localmente nilpotente.

Abreviado: $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq L\mathfrak{N}$

Demonstração:

a) Temos que os grupos nilpotentes são fechados a quocientes e tem o centro não trivial. Logo se G é nilpotente e $N \triangleleft G$ então G/N é nilpotente e $\mathbf{Z}(G/N) > N/N$, logo G é hipercentral.

b) Seja $G \in \mathfrak{H}$ e $g \in G$ e seja M um subgrupo localmente nilpotente maximal de G, contendo g. Consideremos $K = \mathbf{N}_G(M)$.
Temos $\mathbf{N}_G(K) = K$. De fato, como M é maximal e $M \trianglelefteq K$, temos que $M = \mathbb{O}_{L\mathfrak{N}}(K)$ é o radical de Hirsch-Plotkin de K. Para $x \in \mathbf{N}_G(K)$ temos $M^x = M$, pois $K^x = K$ e M é característico em K. Logo $x \in \mathbf{N}_G(M) = K$, isto é, $\mathbf{N}_G(K) = K$.
Suponha $K < G$. Então $N = K_G < G$, pois K_G é o maior subgrupo normal de G contido em K. Como $N \triangleleft G$ temos $Z/N = \mathbf{Z}(G/N) > N/N$, pois G é hipercentral. Segue $Z \trianglelefteq G$ e $N < Z \nleq K$, pois se $Z \leq K$ teríamos $Z \leq N$.
Vamos mostrar que $Z \leq \mathbf{N}_G(K)$. Para todo $x \in Z$ e $k \in K$ temos $x^{-1}kxk^{-1} \in N$ e daí $k^x = x^{-1}kx \in K$.
Como $\mathbf{N}_G(K) = K$, isto é impossível. Concluímos $K = G$ e daí $M = \mathbb{O}_{L\mathfrak{N}}(G)$ é o radical de G. Logo, $\mathbb{O}_{L\mathfrak{N}}(G)$ contém todo elemento $g \in G$, isto é, $G = \mathbb{O}_{L\mathfrak{N}}(G)$ é localmente nilpotente.

Capítulo 2

2 O hipercentro de um grupo

Um importante subgrupo característico canônico de um grupo arbitrário G é seu hipercentro $\mathbf{H}(G)$, que seguindo Baer, tem as seguintes descrições equivalentes: ele pode ser visto como o menor subgrupo normal de G com quociente livre de centro e também o maior subgrupo normal Mde G que é G-hipercentral no sentido que para todo $N \trianglelefteq G$ tal que $N < M$, nós temos que M/N contém um elemento central não trivial de G/N. Um grupo G é hipercentral, se $\mathbf{H}(G) = G$. Pela Seção 3 do Capítulo 1 isto acontece se, e somente se, cada imagem homomórfica não trivial tem centro não trivial. Como vimos, grupos nilpotentes são hipercentrais e grupos hipercentrais são localmente nilpotentes(1.3.3). Como consequência obtemos que se $\mathfrak{H}$ e $\mathfrak{N}$ indicam as classes dos grupos hipercentrais e nilpotentes, respectivamente, $\mathrm{L}\mathfrak{N} = \mathrm{L}\mathfrak{H}$ é a classe dos grupos localmente nilpotentes que coincide com a classe dos grupos localmente hipercentrais.

2.4 Propriedades básicas

Para qualquer grupo G consideremos a seguinte família de subgrupos normais:

$$\mathfrak{F}_1(G) = \mathfrak{F}_1 = \left\{ X \trianglelefteq G \mid \mathbf{Z}\left(\frac{G}{X}\right) = \frac{X}{X} \right\}.$$

2.4.1-Definição.
O *hipercentro* de um grupo G é definido como sendo

$$\mathbf{H}(G) = \bigcap_{X \in \mathfrak{F}_1(G)} X.$$

Note que, $\mathbf{H}(G)$ é um subgrupo característico de G.

Para todo grupo G introduzimos ainda a família de subgrupos normais de G:

$$\mathfrak{F}_2(G) = \mathfrak{F}_2 = \left\{ M \trianglelefteq G \mid \forall\, N \trianglelefteq G \textit{ com } N < M \textit{ temos } \frac{M}{N} \cap \mathbf{Z}\left(\frac{G}{N}\right) > \frac{N}{N} \right\} =$$

$$= \{ M \trianglelefteq G \mid \forall\, N \trianglelefteq G \textit{ com } N < M\ \exists\, x \in M - N \textit{ tal que } [x, G] \leq N \}.$$

Com isso vale a

2.4.2-Proposição.
Para todo grupo G temos:

a) $\mathbf{H}(G) \in \mathfrak{F}_1(G) \cap \mathfrak{F}_2(G)$.

b) $\mathbf{H}(G) = \prod_{M \in \mathfrak{F}_2(G)} M$.

Demonstração: Coloquemos $\mathbf{H}(G) = H_1 = \bigcap_{X \in \mathfrak{F}_1(G)} X$.

a) $H_1 \in \mathfrak{F}_1$:
Vamos colocar $L/H_1 = \mathbf{Z}(G/H_1)$. Sejam $l \in L$, $g \in G$ e $X \in \mathfrak{F}_1(G)$. Segue $[l, g] \in H_1 \leq X$ logo, $lX \in \mathbf{Z}(G/X) = X/X$, isto é, $l \in X$. Segue $L \leq \bigcap_{X \in \mathfrak{F}_1(G)} = H_1$. Daí $\mathbf{Z}(G/H_1) = H_1/H_1$.

$H_1 \in \mathfrak{F}_2$:
Seja $N \trianglelefteq G$, $N < H_1$. Pela definição de H_1 concluímos $\mathbf{Z}(G/N) > N/N$. Seja $L/N = \mathbf{Z}(G/N)$. Para todo $l \in L$ e $g \in G$ temos $[l, g] \in N \leq H_1$. Logo, $LH_1/H_1 \leq \mathbf{Z}(G/H_1) = H_1/H_1$. Daí $LH_1 \leq H_1$, isto é, $L \leq H_1$. Portanto, $L/N \leq H_1/N \cap \mathbf{Z}(G/N)$. Isto implica $H_1 \in \mathfrak{F}_2$.

b) Coloquemos $H_2 = \prod_{M \in \mathfrak{F}_2(G)} M$. Como $H_1 \in \mathfrak{F}_2(G)$, vemos que $H_1 \leq H_2$. Para provar que $H_1 = H_2$, falta mostrar que $H_2 \leq H_1$, ou seja, mostrar que $M \leq H_1$ para todo $M \in \mathfrak{F}_2(G)$:
Se $M \not\leq H_1$ para algum $M \in \mathfrak{F}_2(G)$, teríamos $MH_1 > H_1$ e $M \cap H_1 < M$. Por definição da família $\mathfrak{F}_2(G)$, existe $x \in M - (M \cap H_1)$ com $[x, G] \leq M \cap H_1$. Logo $x \in G - H_1$ com $[x, G] \leq H_1$, contrariando o fato que $H_1 \in \mathfrak{F}_1(G)$. logo, $M \leq H_1$ e $H_2 = H_1$

Usaremos em seguida, dependendo do contexto, uma destas descrições alternativas do hipercentro de um grupo que acabamos de abordar, isto é, lembraremos sempre que

$$\mathbf{H}(G) = \bigcap_{X \in \mathfrak{F}_1(G)} X = \prod_{M \in \mathfrak{F}_2(G)} M.$$

Vamos provar agora alguns fatos básicos a respeito do hipercentro $\mathbf{H}(G)$ de G.

2.4.3-Lema.
Seja G um grupo, T um subgrupo e N um subgrupo normal de G. Então

a) $T \cap \mathbf{H}(G) \leq \mathbf{H}(T)$.

b) $\frac{\mathbf{H}(G)N}{N} \leq \mathbf{H}(\frac{G}{N})$.

c) Vale a propriedade radical: se $N \leq \mathbf{H}(G)$, então $\frac{\mathbf{H}(G)}{N} = \mathbf{H}(\frac{G}{N})$. Em particular, $\mathbf{H}(\frac{G}{\mathbf{H}(G)})$ é trivial, isto é, $\frac{G}{\mathbf{H}(G)}$ é $\mathbf{H}$-livre.

d) $\mathbf{H}(G) = \mathbf{H}(A) \times \mathbf{H}(B)$, se $G = A \times B$ é um produto direto.

e) $S\mathbf{H}(G)$ é hipercentral sempre que $S = \mathbf{H}(S)$ é um subgrupo hipercentral de G.

f) Se $T\mathbf{H}(G) = G$, então $\mathbf{H}(T) = T \cap \mathbf{H}(G)$.

Demonstração:

a) Seja $D = T \cap \mathbf{H}(G)$, vamos mostrar que $D \leq \mathbf{H}(T)$. Para isso, basta mostrar que $D \in \mathfrak{F}_2(T)$, isto é, que $D \leq T$ e que $\forall\ N \trianglelefteq T$ com $N < D$ vale $\frac{D}{N} \cap \mathbf{Z}(\frac{T}{N}) > \frac{N}{N}$ ou $\exists\ x \in D - N$ tal que $[x, T] \leq N$. Seja $\mathfrak{F} = \{K \trianglelefteq G \mid K \leq \mathbf{H}(G)\ e\ K \cap D \leq N\}$ uma família indutivamente ordenada. Pelo lema de Zorn, essa família de subgrupos tem elemento maximal R, ou seja, $R \trianglelefteq G$, $R < \mathbf{H}(G)$ e $R \cap D \leq N$. Como $\mathbf{H}(G) \in \mathfrak{F}_2(G)$, temos para $R \trianglelefteq G$, $\frac{\mathbf{H}(G)}{R} \cap \mathbf{Z}(\frac{G}{R}) = \frac{Z}{R} > \frac{R}{R}$ ou existe $x \in Z - R$ tal que $[x, G] \leq R$ com $R < Z$, $Z \trianglelefteq G$ e $Z < \mathbf{H}(G)$. Como R é maximal, temos $Z \cap D \not\leq N$ ou seja existe $x \in (Z \cap D) - N$ tal que $[x, T] \leq [x, G] \cap D \leq R \cap D \leq N$. Com isso encontramos $x \in D - N$ com $[x, T] \leq N$, logo $D \in \mathfrak{F}_2(T)$

OBSERVAÇÃO: $x \in Z \cap D - N$, onde $Z < \mathbf{H}(G)$, e $x \in D = T \cap \mathbf{H}(G)$, assim $x \in T \cap \mathbf{H}(G)$, logo $[x, T] \leq [x, G]$ e $[x, T] \leq T \cap \mathbf{H}(G) = D$.

b) Seja $\varphi : G \to \frac{G}{N}$ a projeção canônica. Temos que $\mathbf{H}(\frac{G}{N}) = \frac{K}{N} \trianglelefteq \frac{G}{N}$, e pelo teorema da correspondência K é o único subgrupo de G contendo N tal que $\varphi(K) = \frac{K}{N} = \mathbf{H}(\frac{G}{N})$, como $\mathbf{H}(\frac{G}{N}) \trianglelefteq \frac{G}{N}$ isto implica que $K \trianglelefteq G$.

Temos que $\mathbf{H}(\frac{G}{N}) \in \mathfrak{F}_1(\frac{G}{N})$, ou seja $\mathbf{Z}(\frac{\frac{G}{N}}{\mathbf{H}(\frac{G}{N})})$ é trivial, mas temos que $\frac{G/N}{\mathbf{H}(G/N)} = \frac{G/N}{K/N} \simeq \frac{G}{K}$, assim $\mathbf{Z}(\frac{G}{K}) = \frac{K}{K}$ é trivial, isto implica que $K \in \mathfrak{F}_1(G)$, ou seja $\frac{G}{K}$ é livre de centro, portanto, $\mathbf{H}(G) \leq K$. Temos então que $\mathbf{H}(G) \leq \varphi^{-1}(\mathbf{H}(\frac{G}{N}))$, assim $\varphi(\mathbf{H}(G)) = \frac{\mathbf{H}(G)N}{N} \leq \mathbf{H}(\frac{G}{N})$.

c) Por *b)* temos que $\frac{\mathbf{H}(G)}{N} \leq \mathbf{H}(\frac{G}{N})$; temos que como $\mathbf{H}(G) \trianglelefteq G \Rightarrow \varphi(\mathbf{H}(G)) = \frac{\mathbf{H}(G)}{N} \trianglelefteq \frac{G}{N}$. Como $\frac{G}{\mathbf{H}(G)} \simeq \frac{\frac{G}{N}}{\frac{\mathbf{H}(G)}{N}}$ temos que $\frac{\mathbf{H}(G)}{N} \in \mathfrak{F}_1(\frac{G}{N})$, ou seja $\frac{\frac{G}{N}}{\frac{\mathbf{H}(G)}{N}}$ é livre de centro, assim temos que $\mathbf{H}(\frac{G}{N}) \leq \frac{\mathbf{H}(G)}{N}$. Assim $\frac{\mathbf{H}(G)}{N} = \mathbf{H}(\frac{G}{N})$ sempre que $N \trianglelefteq G$ e $N \leq \mathbf{H}(G)$. Em particular, quando $N = \mathbf{H}(G)$, temos $\mathbf{H}(\frac{G}{\mathbf{H}(G)}) = \frac{\mathbf{H}(G)}{\mathbf{H}(G)}$, ou seja, $\frac{G}{\mathbf{H}(G)}$ é livre de hipercentro.

d) Vamos mostrar que $\mathbf{H}(A) \in \mathfrak{F}_2(G)$. Temos $\mathbf{H}(A) \trianglelefteq G$, pois dado $x \in \mathbf{H}(A)$ e $g = ab \in G$, temos $x^g = b^{-1}a^{-1}xab = b^{-1}hb = h \in \mathbf{H}(A)$. Seja $N \trianglelefteq G$ com $N < \mathbf{H}(A)$, daí $N \trianglelefteq A$, e como $\mathbf{H}(A) \in \mathfrak{F}_2(A)$, $\exists\ x \in \mathbf{H}(A) - N$ tal que $[x, A] = [x, AB] = [x, G] \leq N$, daí resulta que $\mathbf{H}(A) \in \mathfrak{F}_2(G)$. Raciocínio análogo mostra que $\mathbf{H}(B) \in \mathfrak{F}_2(G)$ e como $\mathbf{H}(A) \cap \mathbf{H}(B) = \{e\}$, temos que $\mathbf{H}(A) \times \mathbf{H}(B) \leq \mathbf{H}(G)$.

Considerando o diagrama abaixo. Temos $\mathbf{H}(G) \leq \mathbf{H}(G)A \cap \mathbf{H}(G)B = (\mathbf{H}(G)B \cap A) \times (\mathbf{H}(G)A \cap B) \simeq (\frac{\mathbf{H}(G)B}{B}) \times (\frac{\mathbf{H}(G)A}{A}) \leq \mathbf{H}(\frac{G}{B}) \times \mathbf{H}(\frac{G}{A}) \simeq \mathbf{H}(A) \times \mathbf{H}(B)$ pois $\frac{G}{B} \simeq A$ e $\frac{G}{A} \simeq B$. Portanto $\mathbf{H}(G) = \mathbf{H}(A) \times \mathbf{H}(B)$.

$$
\begin{tikzcd}
 & & AB = G \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
 & \mathbf{H}(G)A \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \mathbf{H}(G)B \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
A \arrow[dr, dash] & & \mathbf{H}(G)A \cap \mathbf{H}(G)B \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & B \arrow[dl, dash] \\
 & \mathbf{H}(G)B \cap A \arrow[dr, dash] & & \mathbf{H}(G)A \cap B \arrow[dl, dash] & \\
 & & A \cap B = \{e\} & &
\end{tikzcd}
$$

e) Seja $L = \mathbf{H}(G)S$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & L = \mathbf{H}(G)S \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \mathbf{H}(G) \arrow[dr, dash] & & S \arrow[dl, dash] \\ & \mathbf{H}(G) \cap S & \end{tikzcd}$$

$$\mathbf{H}(L) \in \mathfrak{F}_2(L) = \{M \trianglelefteq L \mid \forall N \trianglelefteq L \; com \; N < M \; \exists \, x \; \in M - N \; tal \; que \; [x, L] \leq N\}$$

$$\mathbf{H}(L) = \prod_{M \in \mathfrak{F}_2(L)} M$$

Para cada $N \trianglelefteq L$ com $N < \mathbf{H}(G)$, temos que achar $x \in \mathbf{H}(G) - N$ tal que $[x, L] \leq N$. Como $\mathbf{H}(G) \in \mathfrak{F}_2(G)$, temos que existe $x \in \mathbf{H}(G) - N$ tal que $[x, L] \leq [x, G] \leq N$, portanto $\mathbf{H}(G) \leq \mathbf{H}(L)$.

Como $\frac{L}{\mathbf{H}(L)} = \frac{\mathbf{H}(L)S}{\mathbf{H}(L)} \simeq \frac{S}{S \cap \mathbf{H}(L)}$, vamos mostrar que $\frac{S}{\mathbf{H}(L) \cap S}$ é hipercentral.

Seja $\varphi : S \to \frac{S}{S \cap \mathbf{H}(L)}$ o epimorfismo canônico. Temos $\mathbf{H}(\frac{S}{S \cap \mathbf{H}(L)}) = \frac{K}{S \cap \mathbf{H}(L)}$ e $\frac{\frac{S}{S \cap \mathbf{H}(L)}}{\frac{K}{S \cap \mathbf{H}(L)}} \simeq \frac{S}{K}$ e assim $\frac{S}{K}$ é livre de centro, logo $\mathbf{H}(S) \leq K$, mas $K \leq S = \mathbf{H}(S)$.Portanto $S = K$ e $\mathbf{H}(\mathbf{H}(\frac{S}{S \cap \mathbf{H}(L)})) = \frac{S}{S \cap \mathbf{H}(L)}$ é hipercentral.

Assim $\frac{L}{\mathbf{H}(L)}$ é hipercentral, ou seja, $\mathbf{H}(\frac{L}{\mathbf{H}(L)}) = \frac{L}{\mathbf{H}(L)}$.Mas $\frac{L}{\mathbf{H}(L)}$ é $\mathbf{H} - livre$, ou seja $\mathbf{H}(\frac{L}{\mathbf{H}(L)}) = \frac{L}{\mathbf{H}(L)}$ é trivial. Assim $\frac{L}{\mathbf{H}(L)}$ e L é hipercentral.

f) Pelo item $a)$ temos $T \cap \mathbf{H}(G) \leq \mathbf{H}(T)$, seja o diagrama, lembramos que $\mathbf{H}(G) \trianglelefteq G$ e $G/\mathbf{H}(G)$ é livre de centro

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & T\mathbf{H}(G) = G \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ N \arrow[dr, dash] & & \mathbf{H}(G) \arrow[dl, dash] \\ & T \cap \mathbf{H}(G) & \end{tikzcd}$$

$G/\mathbf{H}(G) \simeq T/T \cap \mathbf{H}(G) \Rightarrow T/T \cap \mathbf{H}(G)$ é livre de centro $\Rightarrow T \cap \mathbf{H}(G) \in \mathfrak{F}_1(T) \Rightarrow \mathbf{H}(T) \leq T \cap \mathbf{H}(G)$, portanto $\mathbf{H}(T) = T \cap \mathbf{H}(G)$

2.4.4-Corolário.
Seja G um grupo e M um subgrupo normal de G com $1 \neq M \leq \mathbf{H}(G)$. Então, vale que $\mathbf{Z}(G) \cap M \neq 1$. Em particular, um grupo G é hipercentral se, e somente se, todo grupo quociente não trivial tem centro não trivial.

Capítulo 3

3 O hipercentro local de um grupo

Devido a existência do grupo de **Heineken** e **Mohamed** (ver [4, *página* 365]) e dos grupos de **McLain**(ver [4, *página* 361]) que são grupos localmente nilpotentes com centro trivial, é desejável estender o conceito do hipercentro de um grupo para o conceito de hipercentro local de um grupo.

3.5 Propriedades básicas

3.5.1-Definição.
Para um grupo G qualquer, o hipercentro local de G é definido como

$$\mathbf{K}(G) = \{x \in G \mid x \in \mathbf{H}(< x, g_1, g_2, .., g_r >) \ \forall \ g_1, g_2, ..., g_r \ \in G\}$$

$\mathbf{K}(G)$ consiste portanto de todos os elementos x que pertencem ao hipercentro de qualquer subgrupo finitamente gerado de G contendo x.

Análogo a 2.4.3 temos:

3.5.2-Proposição.(ver[1])
Seja G um grupo, $T \leq G$ e $N \trianglelefteq G$. Então

a) $\mathbf{K}(G)$ é um subgrupo característico localmente nilpotente de G com $\mathbf{H}(G) \leq \mathbf{K}(G)$.

b) $T \cap \mathbf{K}(G) \leq \mathbf{K}(T)$.

c) $\mathbf{K}(G)N/N \leq \mathbf{K}(G/N)$.

d) Vale a propriedade radical: se $N \leq \mathbf{K}(G)$, então $\mathbf{K}(G/N) = \mathbf{K}(G)/N$. Em particular, $\mathbf{K}(G/\mathbf{K}(G))$ é trivial, isto é, $G/\mathbf{K}(G)$ é $\mathbf{K}$-livre.

e) $\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}(A) \times \mathbf{K}(B)$, se $G = A \times B$ é um produto direto.

f) $\mathbf{K}(G)S \in L\mathfrak{N}$ para todo subgrupo localmente nilpotente S de G.

g) Se $T\mathbf{K}(G) = G$, então $\mathbf{K}(T) = T \cap \mathbf{K}(G)$

Demonstração:

Para $x, y, g_1, g_2, ..., g_r \in G$, usaremos as seguintes notações: $F_x =< x, g_1, g_2, .., g_r >$, $F_y =< y, g_1, g_2, .., g_r >$, $F_{x,y} =< x, y, g_1, g_2, .., g_r >$.

a) Seja $x \in \mathbf{H}(G)$. Então $x \in \mathbf{H}(G) \cap F_x \leq \mathbf{H}(F_x)$ logo $x \in \mathbf{K}(G)$ e portanto $\mathbf{H}(G) \subseteq \mathbf{K}(G)$.

Para $x, y \in \mathbf{K}(G)$, temos $x, y \in \mathbf{H}(F_{x,y})$, ou seja, $x, y^{-1} \in \mathbf{H}(F_{x,y}) \cap F_{xy^{-1}} \leq \mathbf{H}(F_{xy^{-1}})$, assim $x, y^{-1} \in \mathbf{K}(G)$, ou seja, $\mathbf{K}(G) \leq G$.

Sejam $g_1, g_2, .., g_r \in \mathbf{K}(G)$, assim
$g_1, g_2, .., g_r \in \mathbf{H}(< g_1, g_2, .., g_r >) =< g_1, g_2, .., g_r >$ é subgrupo hipercentral, isto é subgrupo nilpotente, assim $\mathbf{K}(G) \in L\mathfrak{N}$.

b) Para quaisquer $x \in T \cap \mathbf{K}(G)$ e $g_1, g_2, .., g_r \in T$, temos $x \in T \cap \mathbf{K}(F_x) \leq \mathbf{H}(T)$ assim $x \in \mathbf{K}(T)$ e portanto $T \cap \mathbf{K}(G) \leq \mathbf{K}(T)$.

c) Seja $N \trianglelefteq G$. Para quaisquer $x \in \mathbf{K}(G)$, e $g_1, g_2, .., g_r \in G$, temos $x \in \mathbf{K}(F_x)$, assim temos $x(N \cap F_x) \in \mathbf{H}(F_x)(N \cap F_x)/N \cap F_x \leq \mathbf{H}(F_x/N \cap F_x)$. Como temos

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & NF_x \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ N \arrow[dr, dash] & & F_x \arrow[dl, dash] \\ & N \cap F_x & \end{tikzcd}$$

por isomorfismo, segue que $xN \in \mathbf{H}(F_xN/N) = \mathbf{H}(< xN, g_1N, .., g_rN >)$, ou seja $xN \in \mathbf{K}(G/N)$. Isso implica que, para quaisquer $x \in \mathbf{K}(G)$, $xN \in \mathbf{K}(G/N)$, ou seja, $\mathbf{K}(G)N/N \leq \mathbf{K}(G/N)$.

d) Por c) temos $\mathbf{K}(G)/N \leq \mathbf{K}(G/N)$, pois $N \leq \mathbf{K}(G)$.

Seja $xN \in \mathbf{K}(G/N)$, ou seja, $xN \in \mathbf{H}(< xN, g_1N, g_2N, .., g_rN >) = \mathbf{H}(F_xN/N)$.

Temos

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & NF_x \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ N \arrow[dr, dash] & & F_x \arrow[dl, dash] \\ & N \cap F_x & \end{tikzcd}$$

$F_xN/N \simeq F_x/N \cap F_x$, por isomorfismo, e como $xN \in \mathbf{H}(F_xN/N)$, temos $x(N \cap F_x) \in \mathbf{H}(F_x/N \cap F_x)$. Como $N \leq \mathbf{K}(G)$, temos $N \cap F_x \leq \mathbf{K}(G) \cap F_x \leq \mathbf{K}(F_x) = \mathbf{H}(F_x)$ pois F_x é finitamente gerado. Temos então $x(N \cap F_x) \in \mathbf{H}(F_x/N \cap F_x) = \mathbf{H}(F_x)/N \cap F_x$, pois $N \cap F_x \leq \mathbf{H}(F_x)$ e $N \cap F_x \trianglelefteq G$. Assim $x \in \mathbf{H}(F_x)$, ou seja, $x \in \mathbf{K}(G)$, logo $xN \in \mathbf{K}(G)/N$. Então $\mathbf{K}(G/N) \leq \mathbf{K}(G)/N$, portanto $\mathbf{K}(G/N) = \mathbf{K}(G)/N$.

Quando $N = \mathbf{K}(G)$, temos que $G/\mathbf{K}(G)$ é $\mathbf{K}$-livre.

e) Seja o diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & AB = G \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
 & \mathbf{K}(G)A \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \mathbf{K}(G)B \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
A \arrow[dr, dash] & & \mathbf{K}(G)A \cap \mathbf{K}(G)B \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & B \arrow[dl, dash] \\
 & \mathbf{K}(G)B \cap A \arrow[dr, dash] & & \mathbf{K}(G)A \cap B \arrow[dl, dash] & \\
 & & A \cap B = \{e\} & &
\end{tikzcd}$$

Temos que $\mathbf{K}(G) \leq \mathbf{K}(G)A \cap \mathbf{K}(G)B = (\mathbf{K}(G)B \cap A) \times (\mathbf{K}(G)A \cap B) \simeq \mathbf{K}(G)B/B \times \mathbf{K}(G)A/A \leq \mathbf{K}(G/B) \times \mathbf{K}(G/A)$. Como $G/B \simeq A$ e $G/A \simeq B$, temos $\mathbf{K}(G) \leq \mathbf{K}(A) \times \mathbf{K}(B)$.

Seja $x = ab \in \mathbf{K}(A) \times \mathbf{K}(B)$, com $a \in \mathbf{K}(A)$ e $b \in \mathbf{K}(B)$. Se $g_1 = a_1b_1$, $g_2 = a_2b_2$, ... , $g_r = a_rb_r$ são elementos quaisquer em G com $a_i \in A$ e $b_i \in B$ e pondo $A_1 =< a, a_1, a_2, ..., a_r >$, $B_1 =< b, b_1, b_2, ..., b_r >$ e $F_x =< x, g_1, g_2, ..., g_r >$, nós temos $a \in \mathbf{H}(A_1)$ e $b \in \mathbf{H}(B_1)$, assim $x = ab \in \mathbf{H}(A_1) \times \mathbf{H}(B_1) = \mathbf{H}(A_1 \times B_1)$, como $F_x \leq A_1 \times B_1$, temos $x \in F_x \cap \mathbf{H}(A_1 \times B_1) \leq \mathbf{H}(F_x) \Rightarrow x \in \mathbf{K}(G)$, portanto $\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}(A) \times \mathbf{K}(B)$.

f) Cada subgrupo finitamente gerado L_1 de $\mathbf{K}(G)S$ está contido em um subgrupo da forma $L =< K_1, S_1 >$, onde $K_1 =< k_1, k_2, ..., k_r >$, $S_1 =< s_1, s_2, ..., s_r >$ com $k_i \in \mathbf{K}(G)$ e $s_i \in S$. Temos então cada $k_i \in \mathbf{H}(L) = \mathbf{H}(< K_1, S_1 >)$, assim $K_1 \leq \mathbf{H}(L)$ e logo temos $K_1 \in \mathfrak{F}_2(L)$, assim $K_1 \trianglelefteq L$, assim temos $L = K_1S_1 = \mathbf{H}(L)S_1$ e como $S_1 \leq S$ e S_1 é finitamente gerado, temos S_1 nilpotente

$\Rightarrow S_1$ hipercentral, logo $L = \mathbf{H}(L)S_1$ é hipercentral(logo localmente nilpotente) e como L é finitamente gerado, temos que L é nilpotente e assim L_1 é nilpotente e portanto $\mathbf{K}(G)S$ é localmente nilpotente.

g) Seja o diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathbf{K}(G)T = G \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
T \arrow[dr, dash] & & \mathbf{K}(G) \arrow[dl, dash] \\
 & \mathbf{K}(G) \cap T &
\end{tikzcd}$$

temos $G/\mathbf{K}(G) \simeq T/\mathbf{K}(G) \cap T$, e como $\mathbf{K}(G/\mathbf{K}(G)) = \mathbf{K}(G)/\mathbf{K}(G)$, temos que $T/\mathbf{K}(G) \cap T$ também é $\mathbf{K}$-livre.

Como $T \cap \mathbf{K}(G) \leq \mathbf{K}(T)$, temos que $\mathbf{K}(T/\mathbf{K}(G) \cap T) = \mathbf{K}(T)/\mathbf{K}(T)$ pelo item d) e como $T/\mathbf{K}(G) \cap T$ é $K-$livre temos que $\mathbf{K}(T) = \mathbf{K}(G) \cap T$.

3.5.3-Corolário.
Se G é um grupo finitamente gerado, temos $\mathbf{H}(G) = \mathbf{K}(G)$. Além disto, G é localmente nilpotente se, e somente se, temos $\mathbf{K}(G) = G$.

Demonstração: Seja G grupo finitamente gerado. Por 3.4.2 *item a)*, temos que $\mathbf{H}(G) \subset \mathbf{K}(G)$. Então basta mostrar que $\mathbf{K}(G) \subset \mathbf{H}(G)$. Sejam $g_1, g_2, ..., g_n$ geradores de G, ou seja, $G = \langle g_1, g_2, ..., g_n \rangle$. Seja $x \in \mathbf{K}(G)$, $x \in \mathbf{H}(\langle x, g_1, g_2, ..., g_n \rangle)$ e $x \in \langle g_1, g_2, ..., g_n \rangle$, assim

$$x \in \mathbf{H}(\langle x, g_1, g_2, ..., g_n \rangle) \cap \langle g_1, g_2, ..., g_n \rangle \leq \mathbf{H}(\langle g_1, g_2, ..., g_n \rangle) = \mathbf{H}(G).$$

Logo $x \in \mathbf{H}(G)$, e portanto $\mathbf{H}(G) = \mathbf{K}(G)$.

Seja G um grupo localmente nilpotente, ou seja, tal que todo subgrupo finitamente gerado é nilpotente. Vamos mostrar que $G = \mathbf{K}(G)$. Temos já que $\mathbf{K}(G) \subset G$, falta mostrar que $G \subset \mathbf{K}(G)$. Dado $x \in G$, se $x \in \mathbf{H}(\langle x, g_1, g_2, ..., g_r \rangle)$, $g_i \in G$, temos $x \in \mathbf{K}(G)$.

Seja $x \in G$, como G é localmente nilpotente, temos que $\langle x, g_1, g_2, ..., g_r \rangle$ é subgrupo nipotente de G e $x \in \langle x, g_1, g_2, ..., g_r \rangle$. Como temos que todo subgrupo nilpotente é hipercentral, assim temos que, $\langle x, g_1, g_2, ..., g_r \rangle = \mathbf{H}(\langle x, g_1, g_2, ..., g_r \rangle)$, ou seja $x \in \mathbf{H}(\langle x, g_1, g_2, ..., g_r \rangle)$. Portanto $x \in \mathbf{K}(G)$, logo se G é localmente nilpotente, temos que $\mathbf{K}(G) = G$.

Seja agora $G = \mathbf{K}(G)$, por 3.5.2 item $a)$ vemos que G é localmente nilpotente.

Se G é um grupo localmente nilpotente, já mostramos que:

1.2.5-Teorema (Baer, McLain).
Se M é um subgrupo maximal de um grupo localmente nilpotente, então M é normal em G. Equivalentemente $G' \leq Frat\ G$.

1.2.6-Teorema (Mal'cev, McLain).
Um fator principal de um grupo localmente nilpotente é central.

Mostramos também que G é localmente nilpotente se, e somente se, $G = \mathbf{K}(G)$. Quando G é um grupo qualquer, os dois resultados acima podem ser expressos na seguinte forma:

3.5.4-Proposição.
Seja U um subgrupo maximal e M/N um fator principal de um grupo G tal que $M \leq \mathbf{K}(G)$. Então

a) U é normalizado por $\mathbf{K}(G)$.

b) M/N é central em G/N.

Para demonstrar este resultado, vamos usar o seguinte:

3.5.5-Lema.
Seja L um subgrupo e A/B um fator principal de um grupo W tal que $A \leq \mathbf{H}(W)$. Então

a) Se $\mathbf{H}(W) \nleq L$, então $L < N_W(L)$. Em particular, $\mathbf{H}(W)$ normaliza todo subgrupo maximal L de W.

b) A/B é central em W/B.

Nós mencionamos que a primeira parte de $a)$ do lema não vale para $\mathbf{K}(G)$, pois existem grupos localmente nilpotentes com subgrupos próprios auto-normalizantes.

Demonstração:

a) Seja L um subgrupo de W e suponha $\mathbf{H}(W) \nleq L$. Seja

$$N = (L \cap \mathbf{H}(W))_W = \bigcap_{g \in W} (L \cap \mathbf{H}(W))^g$$

denota o núcleo normal de $L \cap \mathbf{H}(W)$ em W. como $N < \mathbf{H}(W)$, existe um $x \in \mathbf{H}(W) - N$ tal que $[x, W] \leq N$. Portanto, $L^x \leq [x, L]\, L \leq NL = L$ e também $L^{x^{-1}} \leq L$. Assim $x \notin L$ mas $x \in N_W(L)$.

b) Visto que $B \trianglelefteq W$ e $B < A \leq \mathbf{H}(W)$, existe um $x \in A - B$ tal que $[x, W] \leq B$. Como $\langle x \rangle\, B \trianglelefteq W$ e A/B é normal minimal em W/B, nós vimos que $\langle x \rangle\, B = A$ e portanto $[A, W] \leq B$. Isto quer dizer que A/B é central W/B.

Demonstração de 3.5.4:

a) Seja U um subgrupo maximal de G e suponha $\mathbf{K}(G) \nleq U$. Nós vamos mostrar que U é normal em G. Suponha isto não acontece. Visto que $G = U\mathbf{K}(G)$, nós temos que existe um comutador $c = [u, x] \notin U$ com $u \in U$ e $x \in \mathbf{K}(G)$. Visto que $G = \langle U, c \rangle$, nós podemos escolher um subgrupo finitamente gerado V de U com $u \in V$ e $x \in \langle V, c \rangle$. Portanto nós temos

$$u, x \in W = \langle V, c \rangle = \langle V, x \rangle$$

e W é finitamente gerado. Visto que $W = \langle V, x \rangle$, existe um subgrupo maximal L de W tal que $x \notin L$ e $V \leq L$. Visto que $x \in \mathbf{H}(W)$, temos que $L \triangleleft W$ (Lema 3.5.5 *item a)*). Portanto $c \in L$ e nós chegamos na contradição $W = \langle V, c \rangle \leq L < W$.

b) Seja M/N um fator principal de G com $M \leq \mathbf{K}(G)$ e suponha que $[M, G] \nleq N$. Usando 3.5.2 *item c)*, nós podemos assumir $N = 1$, isto é, M é subgrupo normal minimal, não central de G contido em $\mathbf{K}(G)$. Existe $x \in M$ e $g \in G$ tal que $c = [x, g] \neq 1$. Assim $M = \left\langle c^G \right\rangle$ e existirão $g_1, g_2, ..., g_r \in G$ tal que $x \in \langle c^{g_1}, c^{g_2}, ..., c^{g_r} \rangle$. Para o subgrupo finitamente gerado $W = \langle x, g, g_1, ..., g_r \rangle$ nós temos que $x \in \mathbf{H}(W)$ assim $x \in \mathbf{K}(G)$. Com $A = \left\langle x^W \right\rangle$ nós temos $[A, W] \leq A$. Mas visto que $c \in [A, W]$ nós temos também $c^{g_i} \in [A, W]$ para $i = 1, 2, ..., r$ assim $[A, W] \trianglelefteq W$. Portanto $x \in [A, W]$ e então $[A, W] = A$. Visto que $A = \left\langle x^W \right\rangle > 1$, existe um fator principal A/B de W (escolha B maximal entre os subgrupos X de A com $X \trianglelefteq W$ e $x \notin X$). Visto que $A \leq \mathbf{H}(W)$, temos que A/B é central em W/B (Lema 3.5.5 *item b*)). Assim $[A, W] \leq B < A$, uma contradição.

Aqui podemos mencionar a seguinte generalização da Proposição 1.2.8.

3.5.6-Proposição.
Seja H um subgrupo abnormal de G. Então $\mathbf{K}(G) \leq H$.

Particularmente:

3.5.7-Corolário. O único subgrupo abnormal de um grupo localmente nilpotente é $H = G$

Demonstração de 3.5.6: Se $\mathbf{K}(G) \nleq H$, seja $g \in \mathbf{K}(G) - H$. Temos $g \in \langle H, H^g \rangle \leq \langle H, g \rangle$. Existe um subgrupo maximal M de $\langle H, g \rangle$ com $g \notin M$ e $H \leq M$. Temos $g \in \mathbf{K}(G) \cap \langle H, g \rangle \leq \mathbf{K}(\langle H, g \rangle)$. Aplicando 1.2.5 ao grupo $\langle H, g \rangle$, vemos que $M \lhd \langle H, g \rangle$. Daí $H^g \leq M^g = M$ e portanto $g \in \langle H, H^g \rangle \leq M$, uma contradição. Logo, $\mathbf{K}(G) \leq H$.

Capítulo 4

4 K(G) e o preservador da nilpotência local $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$

Para um grupo G qualquer, denote por $\mathcal{N}(G)$ a família dos subgrupos maximais localmente nilpotentes de G (que existem pelo lema de Zorn). Segue abaixo o seguinte subgrupo característico:(*ver* [2])

4.6 Propriedades básicas

4.6.1-Definição.
Seja G um grupo.

$$\Lambda_{\mathfrak{N}}(G) = \bigcap_{H \in \mathcal{N}(G)} H\ ,$$

a interseção de todos os maximais entre os subgrupos localmente nilpotentes de G, nós chamamos o *preservador da nilpotência local de G*.

Claramente, $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$ é um subgrupo característico de G, contido no radical de HIRSCH-PLOTKIN $\mathbb{O}_{L\mathfrak{N}}(G)$.

4.6.2-Proposição.
Considerando G um grupo e o seu preservador da nilpotência local $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$. Temos que

$$\Lambda_{\mathfrak{N}}(G) = \left\{x \in G | \left\langle x^G \right\rangle \langle g \rangle \in\ L\mathfrak{N}\ \forall\ g\ \in G\right\}.$$

Demonstração: Ponhamos $X = \left\{x \in G \mid \left\langle x^G \right\rangle \langle g \rangle \in L\mathfrak{N}\ \forall g \in G\right\}$. Seja $x \in \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$. Também $\left\langle x^G \right\rangle \leq \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$. Todo $g \in G$ está contido em algum $H \in \mathcal{N}(G)$. Como $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G) \leq H$ vale também $\left\langle x^G \right\rangle \langle g \rangle \leq H$. Logo $\left\langle x^G \right\rangle \langle g \rangle$ é localmente nilpotente, isto é, $x \in X$. Logo $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G) \leq X$.

Seja, reciprocamente, $x \in X$ e suponhamos $x \notin H$ para algum $H \in \mathcal{N}(G)$. Coloquemos $L = \langle x, H \rangle$. Como $L > H$, para termos uma contradição com a maximalidade de H, é suficiente mostrarmos que L é localmente nilpotente:
Suponhamos que isto não é o caso. Então existe um subgrupo finitamente gerado

$K \leq L$ com $x \in K$, tal que K não é nilpotente. Claro que $K = \langle x, H_1 \rangle$ com algum subgrupo finitamente gerado, isto é, nilpotente, de H. Temos $K = \left\langle x^K \right\rangle H_1$ e $K/\left\langle x^K \right\rangle = \left\langle x^K \right\rangle H_1/\left\langle x^K \right\rangle \cong H_1/H_1 \cap \left\langle x^K \right\rangle$ é nilpotente. Logo, os subgrupos de $K/\left\langle x^K \right\rangle$ são subnormais. Como $x \in X$ e $\left\langle x^K \right\rangle \langle g \rangle \leq \left\langle x^G \right\rangle \langle g \rangle$, vemos que $\left\langle x^K \right\rangle \langle g \rangle$ é nilpotente para todo $g \in H_1$. Daí, $\left\langle x^K \right\rangle \langle g \rangle$ é um subgrupo nilpotente e subnormal de K, isto é, H_1 está no radical de K e segue que K é nilpotente.

O grupo $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$ tem algumas propriedades análogas às propriedades do hipercentro e do hipercentro local que seguem abaixo.

4.6.3-Proposição.
Seja G um grupo, T um subgrupo e N subgrupo normal de G. Então:

a) $\mathbf{K}(G) \leq \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$.

b) $T \cap \Lambda_{\mathfrak{N}}(G) \leq \Lambda_{\mathfrak{N}}(T)$.

c) $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G)N/N \leq \Lambda_{\mathfrak{N}}(G/N)$.

d) $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G) = \Lambda_{\mathfrak{N}}(A) \times \Lambda_{\mathfrak{N}}(B)$, se $G = A \times B$ é um produto direto.

e) $S\Lambda_{\mathfrak{N}}(G) \in L\mathfrak{N}$ para todo subgrupo localmente nilpotente $S \leq G$.

Demonstração:

a) Temos que $\mathbf{K}(G)$ é um subgrupo localmente nilpotente (veja 3.5.2$-$*item a)*). Seja $H \in \mathcal{N}(G)$, se $\mathbf{K}(G) \nleq H$, temos

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathbf{K}(G)H \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \mathbf{K}(G) \arrow[dr, dash] & & H \arrow[dl, dash] \\ & \mathbf{K}(G) \cap H & \end{tikzcd}$$

por 3.5.2$-$*item f)* temos que $\mathbf{K}(G)H$ é subgrupo localmente nilpotente e temos $H \leq \mathbf{K}(G)H$, uma contradição pois H é um subgrupo maximal localmente nilpotente, assim $\mathbf{K}(G) \leq H$ para todo $H \in \mathcal{N}(G)$, portanto $\mathbf{K}(G) \leq \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$.

b) Seja $x \in T \cap \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$, temos que para todo $g \in G$ vale $\left\langle x^G \right\rangle \langle g \rangle \in L\mathfrak{N}$. $\Lambda_{\mathfrak{N}}(T) = \left\{ x \in T | \left\langle x^T \right\rangle \langle g \rangle \in \; L\mathfrak{N} \, \forall \; g \; \in T \right\}$, como $x \in T \cap \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$, temos $\left\langle x^T \right\rangle \langle g \rangle \leq \left\langle x^G \right\rangle \langle g \rangle \in L\mathfrak{N}$, logo $x \in \Lambda_{\mathfrak{N}}(T)$.

c) Seja $x \in \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$, assim $\left\langle x^G \right\rangle \langle g \rangle \in L\mathfrak{N} \;\; \forall \, g \in G$ temos

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \left\langle x^G \right\rangle \langle g \rangle N \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\left\langle x^G \right\rangle \langle g \rangle \arrow[dr, dash] & & N \arrow[dl, dash] \\
 & \left\langle x^G \right\rangle \langle g \rangle \cap N &
\end{tikzcd}$$

temos $\left\langle (xN)^{G/N} \right\rangle \langle gN \rangle = \left\langle x^G \right\rangle \langle g \rangle N/N \cong \left\langle x^G \right\rangle \langle g \rangle / \left\langle x^G \right\rangle \langle g \rangle \cap N$
como $\left\langle x^G \right\rangle \langle g \rangle \in L\mathfrak{N}$, então $\left\langle x^G \right\rangle \langle g \rangle / \left\langle x^G \right\rangle \langle g \rangle \cap N \in L\mathfrak{N}$,
logo $\left\langle (xN)^{G/N} \right\rangle \langle gN \rangle \in L\mathfrak{N}$, assim $xN \in \Lambda_{\mathfrak{N}}(G/N)$.

d) Seja o diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & AB = G \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
 & \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)A \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)B \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
A \arrow[dr, dash] & & \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)A \cap \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)B \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & B \arrow[dl, dash] \\
 & \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)B \cap A \arrow[dr, dash] & & \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)A \cap B \arrow[dl, dash] & \\
 & & A \cap B = \{e\} & &
\end{tikzcd}$$

Temos que $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G) \leq \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)A \cap \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)B = (\Lambda_{\mathfrak{N}}(G)B \cap A) \times (\Lambda_{\mathfrak{N}}(G)A \cap B) \simeq \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)B/B \times \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)A/A \leq \Lambda_{\mathfrak{N}}(G/B) \times \Lambda_{\mathfrak{N}}(G/A)$. Como $G/B \simeq A$ e $G/A \simeq B$, temos $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G) \leq \Lambda_{\mathfrak{N}}(A) \times \Lambda_{\mathfrak{N}}(B)$.

Para mais detalhes ver [3].

e) Visto que o subgrupo localmente nilpotente S está contido em algum $H \in \mathcal{N}(G)$ e $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$ em todos $H \in \mathcal{N}(G)$, temos $S\Lambda_{\mathfrak{N}}(G) \in L\mathfrak{N}$.

O hipercentro $\mathbf{H}(G)$ e também o hipercentro local $\mathbf{K}(G)$ de um grupo G tem a chamada propriedade do radical, que é, $G/\mathbf{H}(G)$ é $\mathbf{H}(G)-livre$ e $G/\mathbf{K}(G)$ é $\mathbf{K}(G)-livre$. Mais geral (ver 2.4.3 $-$ *item c*) e 3.5.2 $-$ *item d*)):

$$\mathbf{H}\left(\frac{G}{N}\right)=\frac{\mathbf{H}(G)}{N} \quad \textit{quando} \;\; N \trianglelefteq G \;\; e \;\; N \leq \mathbf{H}(G),$$
$$\mathbf{K}\left(\frac{G}{N}\right)=\frac{\mathbf{K}(G)}{N} \quad \textit{quando} \;\; N \trianglelefteq G \;\; e \;\; N \leq \mathbf{K}(G).$$

Também $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$ tem a propriedade do radical:

4.6.4-Proposição.
Em todo grupo G nós temos

$$\Lambda_{\mathfrak{N}}(G/N)=\Lambda_{\mathfrak{N}}(G)/N$$

quando $N \trianglelefteq G$ e $N \leq \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$. Em particular,

$$\Lambda_{\mathfrak{N}}(G/\Lambda_{\mathfrak{N}}(G)) \;\; \textit{é trivial, isto é,} \;\; G/\Lambda_{\mathfrak{N}}(G) \textit{ é } \Lambda_{\mathfrak{N}}-livre.$$

4.6.5-Corolário.
Seja $G=T\Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$ para algum subgrupo $T \leq G$. Então

$$\Lambda_{\mathfrak{N}}(T)=T \cap \Lambda_{\mathfrak{N}}(G).$$

Demonstração Nós temos que $G/\Lambda_{\mathfrak{N}}(G) \cong T/\Lambda_{\mathfrak{N}}(G) \cap T$ é $\Lambda_{\mathfrak{N}}-livre$. Como $\Lambda_{\mathfrak{N}}(T/\Lambda_{\mathfrak{N}}(G) \cap T)=\Lambda_{\mathfrak{N}}(T)/\Lambda_{\mathfrak{N}}(G) \cap T$, a afirmação segue.

Para mostrar 4.6.4, nós primeiro vamos provar

4.6.6-Lema.
Seja G um grupo. Se $G/\Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$ é localmente nilpotente, então G também é localmente nilpotente.

Demonstração: Seja H um subgrupo finitamente gerado de G, temos

$$\begin{array}{ccc} & H\Lambda_{\mathfrak{N}}(G) & \\ \diagup & & \diagdown \\ H & & \Lambda_{\mathfrak{N}}(G) \\ \diagdown & & \diagup \\ & H \cap \Lambda_{\mathfrak{N}}(G) & \end{array}$$

Então $H/H \cap \Lambda_{\mathfrak{N}}(G) \cong \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)H/\Lambda_{\mathfrak{N}}(G) \leq G/\Lambda_{\mathfrak{N}}(G) \in L\mathfrak{N}$.
Assim $H/H \cap \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$ é nilpotente. Visto que $H \cap \Lambda_{\mathfrak{N}}(G) \leq \Lambda_{\mathfrak{N}}(H)$, nós vemos também que $H/\Lambda_{\mathfrak{N}}(H)$ é nilpotente. Para todo $g \in H$ nós temos portanto que $\Lambda_{\mathfrak{N}}(H) \langle g \rangle \trianglelefteq\trianglelefteq H$ e $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G) \langle g \rangle$ é localmente nilpotente. Por isso g está no radical de Hirsch-Plotkin de H. Portanto H é nilpotente e G é localmente nilpotente.

Demonstração de 4.6.4: Seja $N \trianglelefteq G$ tal que $N \leq \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$. Por 4.6.3 $-$ *item c)*, nós temos que $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G/N) \geq \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)/N$. Seja $L/N = \Lambda_{\mathfrak{N}}(G/N)$. Para cada $g \in G$, nós temos que $Y/N = (L \langle g \rangle)/N = (L/N) \langle gN \rangle = \Lambda_{\mathfrak{N}}(G/N) \langle gN \rangle \in LN$. Visto que $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G) \leq \Lambda_{\mathfrak{N}}(Y)$, também $Y/\Lambda_{\mathfrak{N}}(Y) \in L\mathfrak{N}$. Portanto, $Y = L \langle g \rangle$ é localmente nilpotente, pelo *Lema* 4.6.6, o que significa que $L \leq \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$, isto é $L = \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$.

4.7 Condições necessárias e suficientes para $\mathbf{H}(G) = \mathbf{K}(G)$ e para $\mathbf{K}(G) = \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$

Vimos que $\mathbf{H}(G) \leq \mathbf{K}(G) \leq \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$. Para todo grupo finito G nós temos $\mathbf{H}(G) = \mathbf{K}(G) = \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$. Obviamente $\mathbf{H}(G) \lneqq \mathbf{K}(G) = G$, se G é um grupo localmente nilpotente e não hipercentral.
É notável que $\mathbf{K}(G)$ também não coincide em geral com $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$, que pode ser visto no exemplo seguinte

4.7.1-Exemplo (*A. KRASSILNIKOV*)[*ver* 1, 4.1]
Em geral,

$$\mathbf{K}(G) \lneqq \Lambda_{\mathfrak{N}}(G).$$

Demonstração: Seja T_p um grupo de TARSKI (isto é, um grupo simples infinito de expoente p) e considere o produto entrelaçado regular restrito

$$G = C_p \wr T_p\ .$$

G é o produto semi-direto $G = [B]K$, onde B é o grupo base de G e $K \cong T_p$. G é finitamente gerado de modo que $\mathbf{K}(G) = \mathbf{H}(G) = \mathbf{Z}(G) = 1$. Nós afirmamos que $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G) = B$:
G não é (localmente) nilpotente e se $1 \neq y \in K$, então os subgrupos $M_y = B\langle y\rangle$ descrevem todos subgrupos maximais localmente nilpotentes de G e segue que $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G) = B$. Claramente os M_y são alguns deles. Seja Y um subgrupo localmente nilpotente maximal qualquer de G. Certamente, $Y \nleq B$, de modo que $B < BY$. Além disso, $BY \neq G$ pois $BY/B \cong Y/B \cap Y$ e $G/B \cong T_p$ não é localmente nilpotente. Assim $BY = M_y$ para algum $1 \neq y \in K$. Segue que $Y = M_y$ pela maximalidade de Y.

Observação:
Um *grupo de Tarski* é um grupo infinito G tal que todo subgrupo próprio não trivial é de ordem prima. Os grupos de Tarski são também chamados de *Monstros de Tarski*, especialmente no caso quando todos subgrupos próprios não triviais são de mesma ordem (isto é, quando o grupo de Tarski é um p-grupo para algum primo p). Alexander Ol'shanskii mostrou que grupos de Tarski existem, e que existe um p-grupo para cada primo $p > 10^{75}$ que é um *grupo de Tarski* . Todo grupo de Tarski é um grupo simples, este satisfaz a condição minimal e a condição maximal, ele pode ser gerado por apenas dois elementos, e é periódico mas não localmente finito.

4.7.2-Lema.
Seja G um grupo e $M \trianglelefteq G$ tal que $M \leq \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$. Se M é finitamente gerado, então $M \leq \mathbf{Z}_k(G)$ para algum número natural $k \geq 0$, onde $\mathbf{Z}_k(G)$ é o k-ésimo termo da série central superior de G.

Demonstração: M é nilpotente e policíclico [*ver* 4, *página* 152]. Vamos provar que, se $N \trianglelefteq G$ com $N < M$, então M/N contém um elemento central não trivial de G/N. Sabendo isto, nós concluiremos com a condição maximal de M, que existe um k tal que

$$1 = \mathbf{Z}_0(G) \cap M < \mathbf{Z}_1(G) \cap M < ... < \mathbf{Z}_k(G) \cap M = M.$$

Portanto $M \leq \mathbf{Z}_k(G)$.
Para provar que $M/N \cap \mathbf{Z}(G/N) > 1$ nós vamos assumir $N = 1 < M$. Temos que $1 < \mathbf{Z}(M) \trianglelefteq G$. Seja $Z = \mathbf{Z}(M)$.
Caso 1 : Se o subgrupo de torção T de Z é não trivial, nós temos para algum primo p um p-subgrupo finito não trivial $P \trianglelefteq G$ com $P \leq T$. Para todo $g \in G$, nós temos que $P\langle g \rangle \leq \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)\langle g \rangle$ e segue que $P\langle g \rangle$ é nilpotente. g deve induzir um p-automorfismo sobre P e portanto $G/\mathbf{C}_G(P)$ é um p-grupo finito e algum elemento não trivial de P está no centro de G.
Caso 2 : Z é livre de torção e é portanto o produto direto de (quantidade finita) grupos cíclicos infinitos. Seja $D \trianglelefteq G$, $1 < D \leq Z$ com D de posto mínimo r. Para todo primo p, seja D_p denotado o menor subgrupo de D com p-quociente abeliano elementar. Então $|D/D_p| = p^r$ e $D_p \trianglelefteq G$. Seja $D_p \leq X_p < D$ com $X_p \trianglelefteq G$ tal que D/X_p é um fator principal de G. Visto que $M/X_p \leq \Lambda_{\mathfrak{N}}(G/X_p)$, vemos pelo *caso* 1 que D/X_p é $G-central$, isto é, $[D,G] \leq X_p$. Portanto $[D,G] \leq \bigcap_p X_p$. Mas $\bigcap_p X_p$, tendo índice infinito em D, é de posto $< r$. Assim $\bigcap_p X_p = 1$, como r é mínimo e segue-se $1 < D \leq \mathbf{Z}(G)$.

4.7.3-Proposição.
Seja G um grupo. São equivalentes:

a) $\mathbf{H}(G) = \mathbf{K}(G)$.

b) $\mathbf{K}(G)/\mathbf{H}(G)$ é finito.

c) $\mathbf{K}(G)/\mathbf{H}(G)$ é finitamente gerado.

d) Os subgrupos normais X de G com $\mathbf{H}(G) \leq X \leq \mathbf{K}(G)$ satisfazem a condição minimal.

Demonstração: "$a) \Rightarrow b) \Rightarrow c)$" e "$a) \Rightarrow d)$" são triviais.
"$c) \Rightarrow a)$": Visto que $\mathbf{K}(G/\mathbf{H}(G)) = \mathbf{K}(G)/\mathbf{H}(G)$, nós podemos assumir $\mathbf{H}(G) = 1$. Vamos considerar $M = \mathbf{K}(G)$ no *Lema* 4.7.2 e vemos que $\mathbf{K}(G) \leq \mathbf{Z}_k(G) \leq \mathbf{H}(G) = 1$.
"$d) \Rightarrow a)$: Se $\mathbf{H}(G) < \mathbf{K}(G)$, existe $N \trianglelefteq G$, $N \leq \mathbf{K}(G)$, tal que $N/\mathbf{H}(G)$ é um fator principal de G. Pelo *Lema* 4.7.2, $[N, G] \leq \mathbf{H}(G)$, contrariando a propriedade do radical do hipercentro.

4.7.4-Proposição.
Seja G um grupo. São equivalentes:

a) $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G) = \mathbf{K}(G)$.

b) $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G)/\mathbf{K}(G)$ é finito.

c) $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G)/\mathbf{K}(G)$ é finitamente gerado.

Demonstração: "$a) \Rightarrow b) \Rightarrow c)$" são triviais.
"$c) \Rightarrow a)$": Visto que $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G/\mathbf{K}(G)) = \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)/\mathbf{K}(G)$, nós podemos assumir $\mathbf{K}(G) = 1$. Considerando $M = \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$ no *Lema* 4.7.2, nós temos que $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G) \leq \mathbf{Z}_k(G) \leq \mathbf{K}(G)$, isto é, $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G) = 1$

4.7.5-Corolário.
Se $G/\Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$ é localmente finito, então $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G) = \mathbf{K}(G)$.

Demonstração: Seja $x \in \Lambda_{\mathfrak{N}}(G)$ e F_x um subgrupo finitamente gerado de G contendo x, então $F_x/\Lambda_{\mathfrak{N}}(F_x)$ é finito, de modo que, pelo teorema do Schreier [*ver* 4, *página* 36], também $\Lambda_{\mathfrak{N}}(F_x)$ é finitamente gerado. Pela *Proposição* 4.7.4 nós temos que $\Lambda_{\mathfrak{N}}(F_x) = \mathbf{K}(F_x) = \mathbf{H}(F_x)$, isto é, $x \in \mathbf{H}(F_x)$. Isto quer dizer que $x \in \mathbf{K}(G)$. Assim $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G) = \mathbf{K}(G)$.

APÊNDICE

Neste apêndice iremos estudar e citar resultados mais recentes sobre a abnormalidade e a nilpotência local de um grupo.

A-Os subgrupos abnormais de um grupo

Pela de definição 1.2.7 temos que subgrupo H de um grupo G é abnormal em G se $g \in \langle H, H^g \rangle$ para cada elemento $g \in G$.

Algumas propriedades básicas da abnormalidade estão na seguinte proposição.

A.1-Proposição.
Seja G um grupo qualquer, H abnormal em G, $N \trianglelefteq G$ e $H \leq Y \leq G$. Então

a) HN/N é abnormal em G/N.

b) H é abnormal em Y e Y é abnormal em G.

c) $\mathbf{N}_G(Y) = Y$, isto é, Y é auto-normalizante.

Demonstração:

a) Para todo $gN \in G/N$ temos $\left\langle NH/N, (NH/N)^{gN} \right\rangle = \langle H, H^g \rangle N/N$. Como $g \in \langle H, H^g \rangle$, concluímos $gN \in \left\langle NH/N, (NH/N)^{gN} \right\rangle$. Portanto HN/N é abnormal em G/N.

b) Que H é abnormal em Y, é claro.
Seja $g \in G$. Temos $\langle H, H^g \rangle \leq \langle Y, Y^g \rangle$ e como $g \in \langle H, H^g \rangle$ concluímos $g \in \langle Y, Y^g \rangle$. Logo Y é abnormal em G.

c) Por $b)$ é suficiente mostrar que todo subgrupo abnormal é auto-normalizante. De fato: se $g \in \mathbf{N}_G(H)$, segue $g \in \langle H, H^g \rangle = H$. Logo $\mathbf{N}_G(H) = H$.

Seja M um subgrupo maximal não normal de um grupo G. o que podemos dizer a respeito da abnormalidade de M?

A.2-Proposição:
Todo subgrupo maximal não normal é abnormal.

Demonstração: Seja H um subgrupo próprio maximal não normal de G. Vamos mostrar que H é abnormal em G. Como H é maximal em G e H é subgrupo próprio não normal de G,temos $H = \mathbf{N}_G(H)$. Seja $g \in G$.
Se $g \in H$, então $g \in H = \langle H, H^g \rangle$.
Se $g \notin H$, então $g \notin \mathbf{N}_G(H)$ e segue $g \in G = \langle H, H^g \rangle$, pois H é maximal.

Como consequência de $A.2$, iremos mostrar o seguinte:

A.3-Proposição.
Grupos finitos sem subgrupos abnormais próprios são nilpotentes.

Demonstração: Seja G um grupo finito sem subgrupos abnormais próprios. Temos que G não tem subgrupo maximal não normal, por $A.2$.
Mas, sabemos que se G é um grupo finito, então G é nilpotente se, e somente se, todo subgrupo maximal é normal.

Vamos voltar a falar de grupos localmente nilpotentes e ver qual a sua relação com os subgrupos abnormais.

Vimos em 3.5.7:

A.4-Proposição.
Um grupo localmente nilpotente não tem subgrupo abnormal próprio.

Podemos introduzir mais um subgrupo característico em todo grupo G, a saber

$$\mathbf{A}(G) = \bigcap_{H \in \, ab(G)} H,$$

onde $ab(G)$ é a família dos subgrupos abnormais de G.

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[d, dash] \\
 & \mathbb{O}_{L\mathfrak{N}}(G) \arrow[d, dash] \\
\mathbf{A}(G) \arrow[uur, dash] \arrow[dr, dash] & \Lambda_{\mathfrak{N}}(G) \arrow[d, dash] \\
 & \mathbf{K}(G) \arrow[d, dash] \\
 & \mathbf{H}(G) \arrow[d, dash] \\
 & \mathbf{Z}(G) \arrow[d, dash] \\
 & \{e\}
\end{tikzcd}$$

Duas questões com respeito a $\mathbf{A}(G)$ são:

i) Será que $\Lambda_{\mathfrak{N}}(G) \leq \mathbf{A}(G)$?
ii) Será que $\mathbf{A}(G)$ é localmente nilpotente, isto é, $\mathbf{A}(G) \leq \mathbb{O}_{L\mathfrak{N}}(G)$?

Em um grupo finito G, $\mathbf{A}(G)$ coincide com o hipercentro $\mathbf{H}(G)$ de G.

Sabemos então que todo grupo localmente nilpotente não tem subgrupos abnormais próprios, mas é uma pergunta em aberto se a volta vale. Em [10] é provado essa conjectura para algumas classes de grupos. Em particular, é provado que um grupo **FG**-nilpotente sem subgrupos abnormais próprios é hipercentral.

O estudo de abnormalidade em grupos infinitos parece ser muito difícil. Exemplos de grupos cujo todo subgrupo próprio não trivial são abnormais inclue o grupo de Tarski. Por outro lado, é desconhecido que grupos infinitos não contém nenhum subgrupo abnormal próprio.

Vamos definir o que vem a ser um grupo **FG**-nilpotente.
Seja G um grupo e **FG** a classe de todos grupos finitamente gerados solúveis por finito(solúvel por finito que dizer que o grupo tem um subrupo normal solúvel de índice finito). O **FG**-centro de G é

$$\mathbf{FG}(G) = \textit{ subgrupo gerado por todos } \mathbf{FG} - \textit{subgrupos normais de } G$$

Apartir do $\mathbf{FG}(G)$, então $\mathbf{FG}_n(G)$ é obtido indutivamente por $\mathbf{FG}_0(G) = \{1\}$, $\mathbf{FG}_1(G) = \mathbf{FG}(G)$ e $\mathbf{FG}_n(G)/\mathbf{FG}_{n-1}(G) = \mathbf{FG}(G/\mathbf{FG}_{n-1}(G))$ para n inteiro não negativo.

Se $\mathbf{FG}_n(G) = G$ para algum inteiro não negativo n, então G é chamado de **FG**-nilpotente.

Em [10] são provados os dois seguintes resultados:

Teorema A :
Seja G um grupo sem subgrupos abnormais próprios. Então $\mathbf{FG}_n(G)$ é hipercentral para cada inteiro positivo n. Em particular, se G é **FG**-nilpotente, então G é hipercentral.

Teorema B
Seja G um grupo com uma quantidade finita de subgrupos abnormais próprios, isto é, $|\, G/\mathbf{A}(G)| < \infty$. Então $\mathbf{FG}_n(G)$ é hipercentral-por-finito para cada inteiro positivo n. Em particular, se G é **FG**-nilpotente, então G hipercentral-por-finito.

Referências

[1] J. I. S. Ramos e R. Maier, *On the local hypercenter of a group*,Proyecciones Journal of Mathematics, vol. 26, pp. 341-356, 2007.

[2] J. I. S. Ramos e R. Maier, *Property Preserving Subgroups of a group*, JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications, vol. 6, pp. 237-264, 2006.

[3] J. I. S. Ramos, *Subgrupos preservadores de propriedades em grupos*, Tese de Doutorado, Universidade de Brasília, 2003.

[4] J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, Springer-Verlag, New York-Belin-Heidelberg, 1996.

[5] J. S. Robinson, *Finiteness Condition and Generalized Soluble Groups*, Part 1, Springer-Verlag, 1972.

[6] J. S. Robinson, *Finiteness Condition and Generalized Soluble Groups*, Part 2, Springer-Verlag, 1972.

[7] J. J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*, Springer-Verlag, 1995.

[8] R. Baer, *The hypercenter of a group*, Acta Math, vol.89, pp. 165-208, 1953.

[9] D. H. McLain ,*On locally nilpotent groups*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 52, no. 1, pp. 5-11, 1956.

[10] L. A. Kurdachenko, A. Russo e G. Vincenzi, *Groups without proper abnormal subgroups*, Journal of Group Theory, vol. 9, pp. 507-518, 2006.