



Universidade de Brasília

Instituto de Geociências

Programa de Pós-Graduação em Geociências Aplicadas e Geodinâmica

Tese de Doutorado Nº 77

***ABORDAGEM METODOLÓGICA PARA MODELAGEM E
ESTIMATIVA DAS MASSAS LATERAIS TOPOGRÁFICAS,
DAS ALTITUDES ORTOMÉTRICAS E DAS ALTURAS
GEOIDAIS NO BRASIL***

DANILO FERNANDES DE MEDEIROS

BRASÍLIA-DF

2022



Universidade de Brasília

Instituto de Geociências

Programa de Pós-Graduação em Geociências Aplicadas e Geodinâmica

**ABORDAGEM METODOLÓGICA PARA MODELAGEM E
ESTIMATIVA DAS MASSAS LATERAIS TOPOGRÁFICAS, DAS
ALTITUDES ORTOMÉTRICAS E DAS ALTURAS GEOIDAIIS NO
BRASIL**

Autor

Danilo Fernandes de Medeiros

Orientador

Prof. Dr. Giuliano Sant'Anna Marotta

Tese apresentada ao Instituto de Geociências da
Universidade de Brasília, como parte da
avaliação para obtenção do título de Doutorado
em Geociências Aplicadas e Geodinâmica, na
área de concentração Geofísica.

Área de concentração: Geofísica

Linha de Pesquisa: Geofísica Regional

BRASÍLIA-DF

2022

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

DD278a De Medeiros, Danilo Fernandes
Abordagem metodológica para modelagem e
estimativa das massas laterais topográficas, das
altitudes ortométricas e das alturas geoidais no
Brasil. / Danilo Fernandes De Medeiros; orientador
Giuliano Sant'Anna Marotta. -Brasília, 2022.
114 p.

Tese(Doutorado em Geociências Aplicadas) --
Universidade de Brasília, 2022.

1. Densidade. 2. Altitude Ortométrica. 3. Alturas
Geoidais. 4. Geoide. I. Marotta, Giuliano Sant'Anna ,
orient. II. Título.



Universidade de Brasília

Instituto de Geociências

Programa de Pós-Graduação em Geociências Aplicadas e Geodinâmica

**ABORDAGEM METODOLÓGICA PARA MODELAGEM E ESTIMATIVA DAS
MASSAS LATERAIS TOPOGRÁFICAS, DAS ALTITUDES ORTOMÉTRICAS E
DAS ALTURAS GEOIDAIS NO BRASIL**

Danilo Fernandes de Medeiros

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Giuliano Sant'Anna Marotta - UnB

Orientador

Prof. Dra. Mônica Giannoccaro Von Huelnsen- UnB

Examinadora Interna

Prof. Dra. Maria Lígia Chuerubim - UFU

Examinadora Externo

Dr. Mário Alexandre de Abreu - IBGE

Examinador Externo

EPÍGRAFE

“ A vontade de se preparar precisa ser maior
que a vontade de vencer. ”

(Bob Knight)

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à minha mãe, Maria de Fátima Almeida Fernandes (*in memoriam*) e ao meu Pai, Raimundo Tadeu Licarião de Medeiros, que pelo exemplo mostrou o caminho a ser seguido, e a minha esposa, Mainara Teles P. Dourado, pela compreensão e exemplo de esforço e perseverança.

Agradeço aos meus filhos, Gabriel Medeiros Dourado e Marina T. Medeiros Dourado, por mostrar o poder da imaginação e dividir a vontade do saber.

Agradeço ao orientador, Prof. Dr. Giuliano Sant'Anna Marotta, pelos seus ensinamentos, paciência e palavras de apoio.

Agradeço ao Instituto de Geociências, ao Programa de Pós-Graduação em Geociências Aplicadas e Geodinâmica e ao Observatório Sismológico pela infraestrutura adequada para elaboração da tese.

Agradeço aos colegas que fiz na sala dos pós-graduandos e nas disciplinas, em especial aos meus colegas Leticia e Yellinson.

Agradeço ao DNIT - Departamento Nacional de Infraestrutura de Transporte e amigos de trabalho pelo apoio durante a realização do Programa de Pós-Graduação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

Uma das principais fontes de informações geodésicas para a elaboração de estudos, projetos e execução de obras de infraestrutura é fornecida por meio do posicionamento pelo GNSS - (*Global Navigation Satellite System*). Todavia, as coordenadas verticais desse sistema não atendem às demandas de grandes obras da engenharia, necessitando da transformação dos dados referentes às altitudes geométricas em altitudes ortométricas. Para tal transformação é necessário o conhecimento de modelos geoidais mais rigorosos, que podem ser desenvolvidos por meio da combinação de diferentes tipos de informações, tais como: modelos globais do geopotencial, dados gravimétricos terrestres e marinhos, modelos digitais de terreno e modelos de distribuição das massas topográficas, sendo esse último ainda não rotineiramente incorporado no desenvolvimento dos modelos. Portanto, em busca de se desenvolver modelos geoidais rigorosos e confiáveis, esta pesquisa volta-se à análise crítica do uso dos diferentes tipos de informação citados, com vistas a investigar o quanto estes podem influenciar os resultados. Para isto, esta pesquisa busca, primeiramente, desenvolver um modelo de distribuição lateral das massas topográficas para o Brasil, juntamente com as incertezas associadas. Posteriormente, são estimados e analisados os valores de altitude ortométrica e de alturas geoidais no contexto da rede altimétrica brasileira, considerando a distribuição de densidade lateral das massas topográficas. E por fim, esta pesquisa busca desenvolver e analisar os modelos geoidais para o estado de São Paulo, envolvendo dados gravimétricos terrestres e marinhos, valor de densidade constante e variável, modelos globais do geopotencial desenvolvidos por diferentes fontes de informação e com maiores graus e ordens, modelos digitais de terreno com diferentes resoluções espaciais e diferentes métodos de truncamento da função de Stokes. Quanto ao desenvolvimento do modelo de distribuição lateral de densidade das massas topográficas para o Brasil, este foi concebido considerando as informações de mapas geológicos e valores de densidade de tipos de rocha para cada ocorrência registrada. Os resultados da modelagem indicaram uma densidade média para o Brasil de 2.459 kg/m^3 , variando de 1.625 a 3.400 kg/m^3 , com desvios-padrão variando de 8 a 351 kg/m^3 , podendo-se ressaltar que tal valor de densidade média encontrado sofre grande influência das grandes bacias sedimentares fanerozóicas (bacias do Amazonas/ Solimões/Acre, Alto Tapajós, Parecis, Parnaíba e Paraná), localizadas na área de estudo. Já em relação à estimativa e a análise das altitudes

ortométricas e de alturas geoidais, considerando o cenário com densidade constante e variável, os resultados mostram que as altitudes ortométricas são mais sensíveis aos valores de densidade em maiores altitudes nos métodos de Helmert e Mader. Além disso, verificamos que as altitudes normais e ortométricas apresentam diferenças significativas para as estações analisadas, considerando a alta correlação entre as altitudes, que fornecem pequenos valores de incerteza. No entanto, nossas análises mostram que o uso do método de Mader, juntamente com valores de densidade variável, fornece resultados mais rigorosos, ou mais confiáveis. Por fim, quanto a influência do uso de diferentes valores de densidade lateral das massas topográficas, dos modelos digitais de terreno com resoluções espaciais distintas, de diferentes modelos globais do geopotencial e de diferentes métodos de truncamento do núcleo de Stokes na estimativa de alturas geoidais, foi possível sugerir pela análise realizada que o truncamento do núcleo de Stokes e o modelo global do geopotencial podem interferir de forma significativa no desenvolvimento de modelos geoidais, ao passo que os valores de densidade lateral das massas topográficas, seguido da resolução dos modelos digitais de terreno adotado, não proporcionaram diferenças significativas. Contudo, ressalta-se que para os modelos geoidais locais há de se considerar a necessidade de uma análise criteriosa dos dados utilizados, a fim de se obter resultados mais coerentes com os estimados por outras técnicas.

Palavras-chave: Densidade, Altitude Ortométrica, Alturas Geoidais, Geoide.

ABSTRACT

One of the main sources of geodetic information for the preparation of studies, projects and execution of infrastructure works is provided through the GNSS - (Global Navigation Satellite System) positioning. However, the vertical coordinates of this system do not meet the demands of large engineering works, requiring the transformation of data referring to geometric altitudes into orthometric altitudes. For such transformation it is necessary the knowledge of more rigorous geoidal models, which can be developed by combining different types of information, such as global geopotential models, terrestrial gravimetric data, digital terrain model and topographic mass distribution models, the latter not yet routinely incorporated in the development of models. Therefore, in order to develop accurate and reliable geoidal models, this research aims to critically analyze the use of the different types of information mentioned above, in order to investigate how much, they can significantly influence the results. To this end, this research first seeks to develop a model of the lateral distribution of topographic masses for Brazil, along with the associated uncertainties. Subsequently, the values of orthometric altitude and geoidal heights are estimated and analyzed in the context of the Brazilian altimetric network, considering the lateral density distribution of topographic masses. And finally, this research seeks to develop and analyze geoidal models for São Paulo state, involving terrestrial gravimetric data, constant and variable density value, models of the global geopotential developed by different sources of information and with higher degrees and orders, digital terrain models with different spatial resolutions and different methods of truncation of the Stokes function. As for the development of the topographic mass density lateral distribution model for Brazil, the model was developed considering information from geological maps and density values of rock types for each recorded occurrence. The results of the density modeling indicated an average density for Brazil of 2,459 kg/m³, ranging from 1,625 to 3,400 kg/m³, with standard deviations ranging from 8 to 351 kg/m³. It is noteworthy that this average density value is strongly influenced by the large Phanerozoic sedimentary basins (Amazon/Solimões/Acre, Upper Tapajós, Parecis, Parnaíba and Paraná basins), located in the study area. Regarding the estimation and analysis of orthometric altitudes and geoidal heights considering constant and variable density scenarios, the results show that orthometric altitudes are more sensitive

to density values at higher altitudes in the Helmert and Mader methods. Furthermore, we found that normal and orthometric altitudes show significant differences for the analyzed stations, considering the high correlation between altitudes, which provide small uncertainty values. However, our analyses show that the use of Mader's method, together with variable density values, provides more accurate or more reliable results. Finally, regarding the influence of using different lateral density values of topographic masses, digital terrain models with different spatial resolutions, different global geopotential models and different Stokes kernel truncation methods on the estimation of geoidal heights it was possible to suggest by the analysis performed that the Stokes kernel truncation and the global geopotential model can significantly interfere in the development of geoidal models, while the lateral density values of the topographic masses, followed by the resolution of the digital terrain models adopted, do not provide significant differences. However, it is emphasized that for local geoidal models it is necessary to consider the need for a careful analysis of the data used in order to obtain results more consistent with those estimated by other techniques.

Keywords: Density, Orthometric Height, Geoid Heights, Geoid.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	Objetivos.....	20
1.2	Motivação	20
1.3	Contribuição Original da Tese.....	21
1.4	Estrutura da Pesquisa.....	21
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	23
2.1	Geoide e Sistemas de Altimétricos Associados à Utilização de Modelos de Variação Lateral da Densidade das Massas Topográficas.....	24
2.2	Geoide e Sistemas de Altimétricos Associados à Utilização de Modelos do Geopotencial Global	29
2.3	Geoide e Sistemas de Altimétricos Associados à Utilização de Modelos Digitais de Terreno	34
2.4	Geoide e Sistemas de Altimétricos Associados à ao truncamento da função de Stokes.....	38
3	MATERIAIS E MÉTODOS	41
4	DESENVOLVIMENTO DE MODELO DE DENSIDADE LATERAL TOPOGRÁFICA PARA O BRASIL	43
4.1	Introdução.....	44
4.2	Modelo de Densidade Topográfica Lateral para o Brasil.....	45
4.2.1	Estimativa de valores de densidade para as rochas	47
4.2.2	Estimativa da densidade para unidades litoestratigráficas	48
4.2.3	 Modelos de Densidade Lateral Topográfica e de Incertezas para o Brasil.....	49
4.3	Resultados e Discussão.....	50
4.4	Conclusão	56
5	ALTITUDE ORTOMÉTRICA, NORMAL E ALTURA GEOIDAL NO CONTEXTO DA REDE ALTIMÉTRICA BRASILEIRA	63
5.1	Introdução.....	64
5.2	Altitudes Normais, Ortométricas, e Alturas Geoidais	65
5.3	H , ΔHH_N e N no contexto da Rede Altimétrica de Alta precisão do Brasil (RAAP)	70
5.4	Resultados e Discussão.....	73
5.5	Conclusão	76
6	AVALIAÇÃO DA INFLUÊNCIAS DE VARIÁVEIS EM MODELO GEOIDAL PARA O ESTADO DE SÃO PAULO	82
6.1	Introdução.....	83
6.2	Estimativa de Alturas Geoidais	84
6.3	Desenvolvimento dos Modelos Geoidais para estado de São Paulo, Brasil	85
6.3.1	Análise estatística dos resultados considerando as diferenças entre N e $N_{GNSS/Niv}$	89
6.3.2	Análise das diferenças entre os valores de N estimados.....	91
6.4	Conclusão	95
7	CONCLUSÕES FINAIS.....	101
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	104

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Modelo conceitual da pesquisa bibliográfica.....	23
Figura 2.2: Mapa de citações de produções mais citadas ligadas ao tema “desenvolvimento de variação lateral da densidade das massas topográficas”.....	24
Figura 2.3: Mapa de Calor de autores mais citados, ligados ao tema “desenvolvimento de variação lateral da densidade das massas topográficas”.....	25
Figura 2.4: Mapa da rede de produção científica mais citadas, ligadas ao tema “desenvolvimento de variação lateral da densidade das massas topográficas”.....	26
Figura 2.5: Mapa de Calor dos países com produção no tema em estudo.....	27
Figura 2.6: Mapa de Calor de produções mais citadas ligadas ao tema “Modelo Global Geopotencial e Geoide”.....	31
Figura 2.7: Mapa de Rede de maior ocorrência de palavras-chave.....	32
Figura 2.8: Mapa de Calor dos países com produção no tema em estudo.....	33
Figura 2.9: Mapa de Calor de produções mais citadas, ligadas ao tema “Modelo Digital de Terreno” e Geoide”.....	36
Figura 2.10: Mapa de Rede de produções mais citadas, ligadas ao tema “Modelo Digital de Terreno” e Geoide”.....	36
Figura 2.11: Mapa de Rede de maior ocorrência de palavras-chave ligadas ao tema “Modelo Digital de Terreno” e Geoide”.....	37
Figura 2.12: Mapa de Calor de produções mais citadas, ligadas ao tema “Integral de Stokes” e Geoide”.....	39
Figura 2.13: Mapa de Rede de citações.....	40
Figura 2.14: Mapa da rede de produção científica mais citadas, ligadas ao tema “Integral de Stokes” e Geoide”.....	40
 Figura 4.1: Províncias estruturais do Brasil. Fonte: CPRM (2003) modificado.	 46
Figura 4.2: Litologia generalizada em classes, ilustrando os limites das províncias Estruturais definidas para o Brasil. Classes: MR – Metamórfica (Metamorfismo Regional); MC – Metamórfica (Metamorfismo de Contato); MD – Metamórfica (Metamorfismo Dinâmico); IP – Í.....	46
Figura 4.3: Modelo de densidade lateral topográfica brasileira LTD_Brazil...	53
Figura 4.4: Modelo das incertezas associadas LTD_Brazil.	53
Figura 4.5 : Diferenças de densidade entre os modelos LTD_Brazil e UNB_TopoDensT.....	54
Figura 4.6: Distribuição das diferenças de densidade entre os modelos LTD_Brazil e UNB_TopoDensT.	55
Figura 4.7: Incerteza das diferenças de densidade entre os modelos LTD_Brazil e UNB_TopoDensT.....	55
Figura 4.8: Diferenças significativas de densidade entre os modelos LTD_Brazil e UNB_TopoDensT.....	56

Figura 5.1: Altitudes geométrica (h), ortométrica (H), normal (H_N), juntamente com altura geoidal (N) e anomalia de altura (ζ), no ponto P. U_0 representa o potencial normal, e W_0 e W_P os potenciais de gravidade no nível do geoide e do ponto (P), respectivamente.	67
Figura 5.2: Estações da RAAP e distribuição dos valores de σ_{H_N} e σ_h associados aos valores de H_N e h utilizados neste estudo.	71
Figura 5.3: Estações da RAAP selecionadas e valores de densidade lateral das massas topográficas, juntamente com suas incertezas, segundo modelos LTD_Brazil (para o Brasil) e UNB_TopoDensT (regiões que extrapolam a área de estudos - Brasil).....	72
Figura 5. 4: $\sigma_{\Delta HH_N}$ distribuição de valor considerando: a) $H_{H \rho_{(con)}} - H_N$ (eixo horizontal) e $H_{H \rho_{(var)}} - H_N$ (eixo vertical). b) $H_{M \rho_{(con)}} - H_N$ (eixo horizontal) e $H_{M \rho_{(var)}} - H_N$ (eixo vertical). c) $\sigma_{\Delta HH_N}$ versus H_N distribuição de valor considerando $H_{H \rho_{(con)}} - H_N$ (cor preta) e $H_{H \rho_{(var)}} - H_N$ (cor azul). ΔHH_N diferença de valores versus H_N . d) $H_{M \rho_{(var)}} - H_N$ e $H_{M \rho_{(con)}} - H_N$. e) $H_{H \rho_{(var)}} - H_N$ e $H_{H \rho_{(con)}} - H_N$. f) $H_{M \rho_{(var)}} - H_N$ e $H_{H \rho_{(con)}} - H_N$. *Individualizando os valores de H para estimar ΔHH_N	73
Figura 5.5: Dispersão dos valores de ΔHH_N em relação aos valores de H_N , considerando: a) $H_{M \rho_{(var)}}$ (cor vermelha), $H_{M \rho_{(var)}}$ (cor azul).b) $H_{H \rho_{(var)}}$ (cor vermelha), $H_{H \rho_{(var)}}$ (cor azul).....	74
Figura 5.6: $\Delta HH_N \pm \sigma_{\Delta HH_N}$ estimados por meio de valores de $H_N \pm \sigma_{H_N}$ e $H_{M \rho_{(var)}} \pm \sigma_{H_{M \rho_{(var)}}}$	75
Figura 5.7: Distribuição espacial $H_{M \rho_{(var)}}$	75
Figura 5.8: Distribuição espacial de $N \pm \sigma_N$ computed using $h \pm \sigma_h$ and $H_{M \rho_{(var)}} \pm \sigma_{H_{M \rho_{(var)}}}$	76
Figura 6.1: Distribuição dos dados de EGT, provenientes de um MGG (grau e ordem até 2190 e livre de maré) e do DTU17. Os limites da área de estudo, dos dados de EGT, MGG e DTU17, e do MDT, são também apresentados.	87
Figura 6.2: Distribuição dos dados de NGNSS/Niv.	89
Figura 6.3: Diferença (ΔN) entre os modelos N1-30-V-WG e N1-30-V-EV... ..	91
Figura 6.4: ΔN considerando diferença entre modelos N1-30-V-WG e N2-30-V-WG.	92
Figura 6.5: ΔN considerando diferença entre modelos N1-30-V-WG e N1-90-V-WG.	93
Figura 6.6: ΔN considerando os modelos N1-30-C-WG e N1-30-V-WG, que consideram um cenário com densidade constante e variável.	94
Figura 6.7: Valores de densidade lateral das massas topográfica para estado de São Paulo, extraído de Medeiros et al. (2021).....	95

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1: Valor de densidade média das rochas e desvios padrão associados por tipo de rocha.	50
Tabela 6.1: Modelos Geoidais desenvolvidos adotando a combinação entre os diferentes dados e formulações. N1, N2 e N3 referem-se aos MGG SGG-UGM-2, XGM2019 e EIGEN-6C4, respectivamente; 90 e 30 referem-se aos MDT SRTM com resolução de 3 segundos (~90 m) e 1 segundo (~30 m) de arco, respectivamente; WG, VK e EV referem-se à $SM\psi$ considerando Wong e Gore (1969), Vaniček and Kleusberg (1987) e Featherstone et al. (1998), respectivamente; e C e V referem-se ao uso de ρ constante e variável, respectivamente.	87
Tabela 6.2: Estatística descritiva das diferenças entre entre N e NGNSS/Niv, incluindo χ^2 e E calculados.	89
Tabela 6.3: Estatística descritiva das diferenças (ΔN) entre os valores N dos modelos considerando diferentes modificadores do núcleo de Stokes. ...	91
Tabela 6.4: Estatística descritiva das diferenças (ΔN) entre os valores N dos modelos considerando os MGG utilizados.	92
Tabela 6.6: Estatística descritiva das diferenças (ΔN) entre os valores N dos modelos considerando os MDT utilizados.	93
Tabela 6.6: Estatística descritiva das diferenças entre os valores N que consideram um cenário com densidade constante e variável.	94

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

mGal	miligal
ρ	densidade lateral das massas topográficas
ρ_{fix}	densidade fixa
ρ_{var}	densidade variável
S_M	modificador do núcleo da função de Stokes
ANNEL	Agência Nacional de Energia Elétrica
N	Altura geoidal
cm	Centímetro
CT	Correção do Terreno
CPRM	Companhia de Pesquisa de Recursos Minerais
DNIT	Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes
EPUSP	Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
EUA	Estados Unidos da América
FES	Finite Element Solution
FFT	Transformada rápida de Fourier
g/cm^3	Grama por centímetro cúbico
Gal	Galileo (unidade de medida de aceleração da gravidade)
GNSS	Global Navigation Satellite System
GPS	Global Positioning Satellite System
GRACE	Gravity Recovery and Climate Experiment
IAG	International Geodesy Association
IBGE	Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IERS	International Earth Rotation and Reference Systems Service
ICGEM	International Center for Global Earth Models
IHRS	International Height Reference System
IUGG	International Union of Geodesy and Geophysics
JPL	Jet Propulsion Laboratory
JPO	Joint Program Office

km	Quilômetro
kg/m ³	Quilograma por metro cúbico
mm	Milímetro
MATLAB	MATrix LABoratory
MDT	Modelo Digital do Terreno
MGG	Modelo Geopotencial Global
MMQ	Método dos Mínimos Quadrados
RAAP	Rede Altimétrica de Alta Precisão
RCR	Remove Compute Restore
RRNN	Referências de Nível
SIG	Sistema de Informação Geográfica
SGQ	Separação Geoide e Quase-Geoide
TEMAC	Teoria do Enfoque Meta Analítico
UNB_TopoDens	University of New Brunswick's - Modelo de Densidade Massas Topograficas
UnB	Universidade de Brasília

APRESENTAÇÃO

A presente Tese de Doutorado tem o objetivo de realizar uma abordagem metodológica para a modelagem e estimativa das massas laterais topográficas, das altitudes ortométricas e das alturas geoidais no Brasil.

A tese faz parte do cumprimento de requisitos para obtenção do título de Doutorado no Programa de Pós-graduação em Geociências Aplicadas e Geodinâmica do Instituto de Geociências da Universidade de Brasília.

A área de concentração da pesquisa é Geofísica, pertencente à linha de pesquisa Geofísica Regional.

Cumprir destacar que a pesquisa tem o apoio do Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes (DNIT), o qual o presente doutorando faz parte do corpo técnico de servidores efetivos.

Academicamente, a pesquisa busca abordar 3 (três) temas distintos, sendo eles:

1. Desenvolvimento de modelo de densidade lateral para o Brasil, o qual tem como propósito desenvolver um modelo (2D) de densidade lateral das massas topográficas e de suas incertezas;
2. Estimativa de altitudes ortométricas e de alturas geoidais no contexto da rede altimétrica brasileira, considerando a distribuição de densidade lateral das massas topográficas, os valores de altitudes normais e as respectivas incertezas; e
3. Avaliação das influências de variáveis no modelo geoidal para o estado de São Paulo, no qual foi avaliado a influência de modelo de distribuição de densidade lateral das massas topográficas, modelos digitais de elevação, modelos globais do geopotencial e métodos de truncamento da função núcleo de Stokes. Ressalta-se que a escolha do estado de São Paulo foi motivada pelo fato do estado ter maior quantidade de dados gravimétricos, maior número de estações altimétricas e maior contraste de densidade e relevo.

1 INTRODUÇÃO

As coordenadas oriundas de levantamentos por meio do posicionamento pelo GNSS (*Global Navigation Satellite System*) satisfazem às necessidades primárias de diversas áreas. No entanto, para aplicações associadas ao contexto físico, que demandem o conhecimento de energia potencial gravitacional de corpos, as altitudes estimadas por meio do posicionamento pelo GNSS (altitudes geométricas) não são adequadas por terem, em sua concepção, características puramente geométricas. Por este motivo, no Brasil, seguindo diretrizes definidas pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) para a caracterização do Sistema Geodésico Brasileiro, as instituições públicas nacionais responsáveis pela gestão de obras de infraestrutura, como o Departamento Nacional de Infraestrutura de Transporte (DNIT) e a Agência Nacional de Energia Elétrica (Aneel), passaram a instituir atos normativos para a realização da transformação das altitudes geométricas em altitudes com as características físicas para subsidiar seus projetos e estudos.

Apesar do exposto, ressalta-se que o estabelecimento de altitudes físicas inconsistentes, seja por problema de definição do referencial vertical, seja por sua concepção teórica e/ou pela baixa precisão, podem proporcionar falhas na concepção e/ou operacionalização de estudos e projetos de infraestrutura, tais como projetos de drenagem, esgotamento sanitário, construção de barragens, transposição de cursos d'água, rodovias, ferrovias, hidrovias, etc.

Os referenciais verticais com contexto físico podem ser estabelecidos com uso das formulações desenvolvidas pela Teoria de Stokes (1849), a qual se baseia na concepção de superfícies equipotenciais, como o geoide. Porém, suas formulações ficam prejudicadas em decorrência da falta de conhecimento preciso da distribuição da densidade das massas topográficas (Freitas e Blitzkow, 1999). Portanto, afastando-se de quaisquer suposições hipotéticas sobre a distribuição de densidades das massas topográficas (Tenzer et al., 2015), Molodensky, em 1945, realizou-se a proposição de uma superfície denominada quase-geoide.

Atendo-se ao geoide, uma alternativa ao problema anteriormente citado, que vem sendo empregada ao longo do tempo, é a adoção de um valor médio de densidade das massas topográficas na ordem de 2.670 kg/m^3 (Hinze, 2003). Porém, Tziavos e Featherstone (2001), por exemplo, mencionaram que a densidade das massas topográficas pode variar entre 20% a 30%, fato que demonstra a necessidade de verificação da sensibilidade da densidade das massas topográficas nos modelos geoidais. Observou-se, a realização de pesquisas diversas (Martinec et al., 1995; Hung et al., 2001; Rózsa, 2002; Tenzer e Vaníček, 2003; Sjöberg, 2004; Kiamehr, 2006; Marotta et al., 2019; Albarici et al., 2019 e Sheng et al., 2019), as quais debatem sobre o impacto da variação lateral da densidade das massas topográficas na determinação de modelo geoidal rigoroso e, conseqüentemente, na obtenção de altitudes ortométricas consistentes.

É importante relatar que a maioria dos modelos de distribuição de densidade das massas topográficas regionais e globais, ou são determinados via inversões de campo de gravidade, ou possuem baixa precisão. Além disso, os modelos de densidade por inversões gravimétricas não são adequados para se utilizar nos problemas afetos a Geodésia (Sheng et al., 2019). Todavia, a utilização de mapas geológicos vem sendo aplicados com bastante êxito na elaboração de modelos de distribuição de densidade das massas topográficas, podendo citar os estudos realizados por Tenzer et al. (2011), Marotta et al. (2019) e Sheng et al. (2019).

Além das informações citadas, é correto dizer que os modelos geoidais atuais também vêm sendo desenvolvidos por meio dos dados de estações gravimétricas associados a diferentes fontes de informação, tais como Modelos Digitais de Terreno (MDT), Modelos Globais do Geopotencial (MGG) e diferentes métodos de truncamento da função de Stokes.

Diante do exposto, entende-se que o desenvolvimento de modelos geoidais rigorosos continua a ser assunto atual e pendente de compreensão, visto que uma análise crítica das informações utilizadas é necessária para que seja possível identificar quais e como elas podem interferir nos resultados.

1.1 Objetivos

O objetivo geral desta pesquisa, volta-se a realizar uma abordagem metodológica para a modelagem e estimativa das massas laterais topográficas, das altitudes ortométricas e das alturas geoidais no Brasil. Assim como realizar uma análise da sensibilidade de diferentes tipos de informações: MDTs com diferentes resoluções espaciais; MGGs com diferentes fontes de informação utilizadas em sua concepção e diferentes grau e ordem dos coeficientes das funções harmônicas; valores de densidade constante e variável, sendo o segundo extraído de um modelo de densidade lateral das massas topográficas; e diferentes métodos de truncamento da função de Stokes, no aprimoramento do desenvolvimento de Modelos Geoidais precisos.

Os objetivos específicos se traduzem em:

- i. Estimativa e análise de um modelo de densidade lateral das massas topográficas para o Brasil;
- ii. Estimativa e análise de altitudes ortométricas, e de alturas geoidais para estações da Rede Altimétrica de Alta Precisão (RAAP) do Brasil, considerando MDT e valores de densidade constante e variável;
- iii. Avaliar a influência da sensibilidade da densidade lateral das massas topográficas (ρ), da resolução dos Modelos Digitais de Terreno (MDT), dos Modelos Globais do Geopotencial (MGG) e dos diferentes métodos de truncamento do núcleo da função de Stokes (S_M) na estimativa de alturas geoidais (N), com propósito de subsidiar e orientar a elaboração e o desenvolvimento de modelos geoidais mais rigorosos.

1.2 Motivação

Esta pesquisa pretende aprimorar a metodologia para cálculo de modelos geoidais rigorosos, considerando analisar tanto as informações que são utilizadas quanto as rotinas para cálculo. Dentre as informações, considera-se, também, que a estimativa de densidade variável segundo a litologia diferenciada, e presente no interior da Terra, ainda não é uma prática utilizada no Brasil, o que coloca este estudo no nível das pesquisas que, atualmente, vêm sendo desenvolvidas internacionalmente. Portanto, os resultados esperados nesta

pesquisa incluem tanto o desenvolvimento, aprimoramento e análise de metodologia para estimativa de modelos geoidais, quanto a análise das variáveis que influenciam na estimativa de altitudes ortométricas e de alturas geoidais.

Logo, o estudo tem como motivação central contribuir para o desenvolvimento de estudos/anteprojetos/projetos de infraestrutura que necessitam de altitudes com cunho físico confiáveis, combinado com a necessidade de discussões e análises críticas quanto ao desenvolvimento de modelos geoidais mais rigorosos.

1.3 Contribuição da Tese

A contribuição da Tese consiste em desenvolver metodologia e elaborar um modelo (2D) de densidade lateral das massas topográficas para o Brasil aliado a análise da sensibilidade da variação das massas topográficas, resolução dos Modelos Digitais de Terreno (MDT), Modelos Globais do Geopotencial (MGG) e diferentes tipos de truncamento do núcleo da função de Stokes (S_M) e nas estimativas de alturas geoidais e altitudes ortométricas. Acredita-se que este, juntamente com os objetivos expostos nesta pesquisa, configura tópico inovador e proporciona contribuição da pesquisa quando comparada à literatura internacional publicada.

1.4 Estrutura da Pesquisa

A presente pesquisa é dividida em sete Capítulos, conforme descritos abaixo:

O capítulo 1 trata da introdução e dos objetivos, onde são demonstradas a importância do tema e definidas as ações a serem tomadas para o desenvolvimento da pesquisa.

O capítulo 2 contém uma revisão da literatura com vistas a avaliar o histórico do tema e o atual estado-da-arte.

O capítulo 3 apresenta os Materiais e Métodos aplicados no desenvolvimento da pesquisa.

Os capítulos 4, 5 e 6 apresentam os trabalhos desenvolvidos com vistas a atingir os objetivos propostos.

O capítulo 7 apresenta a conclusão da Tese de Doutorado.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

No presente capítulo são apresentadas as pesquisas bibliográficas desenvolvidas, com base no banco de dados *Web of Science* e *Scopus* tendo por principal objeto avaliar o direcionamento das pesquisas envolvendo o tema desenvolvimento de modelos geoidais.

As pesquisas dos referenciais bibliográficos no contexto do tema em estudo foram realizadas com auxílio da Teoria do Enfoque Meta Analítico (TEMAC), proposta por Mariano e Rocha (2017), tendo como produtos as principais produções científicas sobre o tema em estudo. A Figura 2.1 apresenta o fluxo do modelo conceitual utilizado para realização da pesquisa bibliográfica nesta Tese.

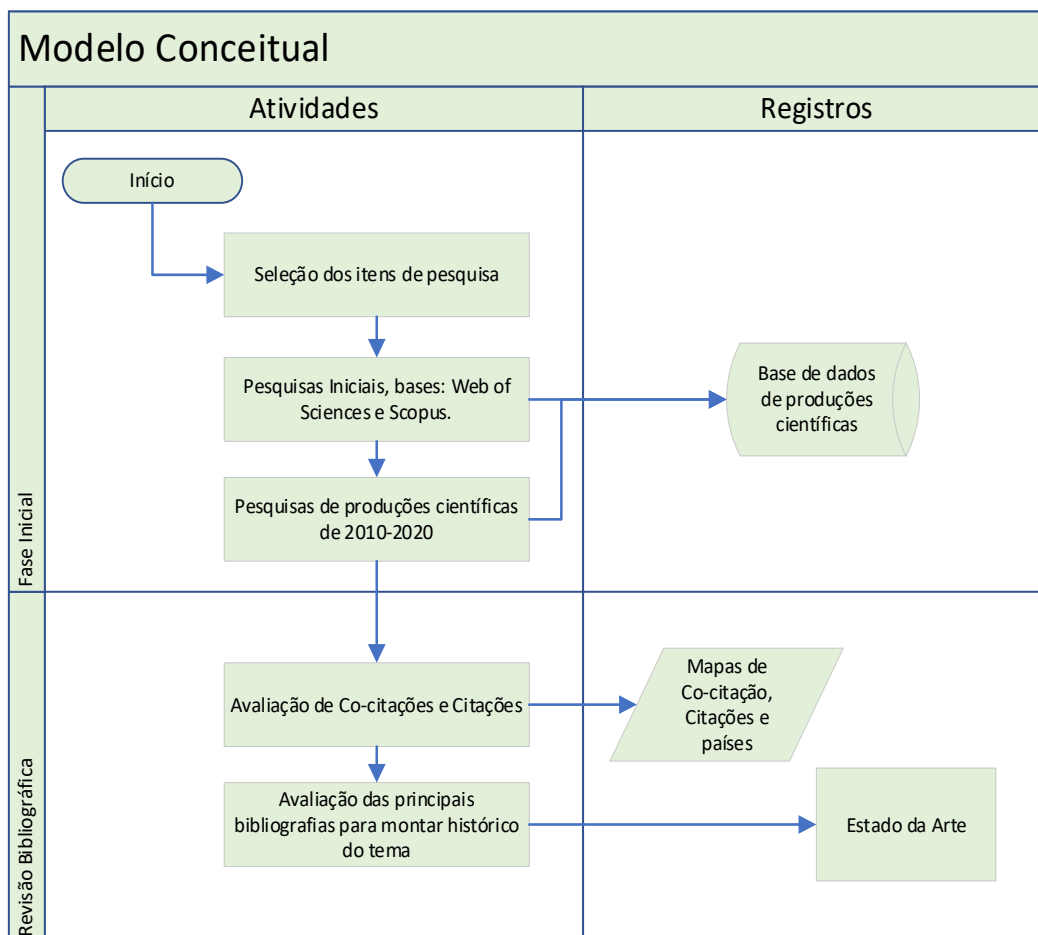


Figura 2.1: Modelo conceitual da pesquisa bibliográfica

2.1 Geoide e Sistemas de Altimétricos Associados à Utilização de Modelos de Variação Lateral da Densidade das Massas Topográficas

Utilizando as orientações do TEMAC realizou-se pesquisa nas bases; *Web of Science* e *Scopus (Elsevier)*, com argumentos: período de “2010-2021” e tópico “*Geoid and Topographic density*”, onde verificamos a ocorrência de 196 (cento e noventa e seis) produções científicas desenvolvidas relacionados ao tema da pesquisa. Para melhor visualização e direcionamento no processo de revisão bibliográfica, elaborou-se os mapas de calor referentes as citações mais relevantes, de autores e países que trabalham nessa temática.

Verifica-se pelo mapa de calor, Figura 2.2, que o artigo publicado por Sheng et al. (2019) é uma das bibliografias mais atuais dentre as pesquisas que envolvem o tema relacionado ao desenvolvimento de variação lateral da densidade das massas topográficas.

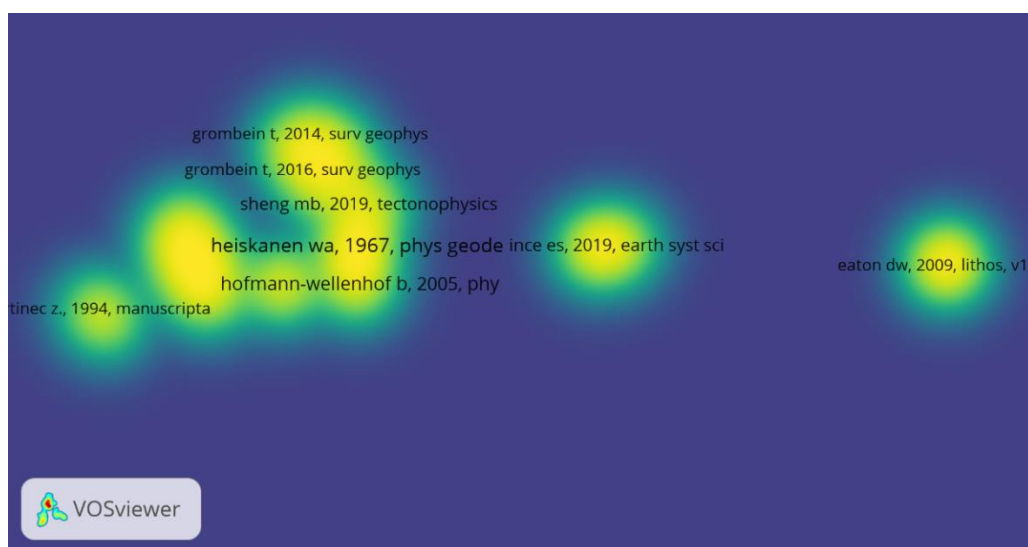


Figura 2.2: Mapa de citações de produções mais citadas ligadas ao tema “desenvolvimento de variação lateral da densidade das massas topográficas”.

Fonte: Base de dados *Web of Science* e *Scopus*.

Em contraste com as informações apresentadas na Figura 2.2, a Figura 2.3 mostras que Hung et al. (2001) é de grande relevância na abordagem do tema objeto desta pesquisa. Nesta pesquisa, Hung et al. (2001) utilizaram valores de densidade estimados por meio de mapas geológicos do Canadá e dos EUA, e

associações de valores de densidade a cada tipo de rocha em região montanhosa do Canadá, concluíram que o efeito da variação lateral da densidade das massas topográficas é significativo e que deve ser levado em consideração para a determinação do geoide mais rigoroso. Tal conclusão impulsionou a realização de linhas de pesquisa sobre a temática.

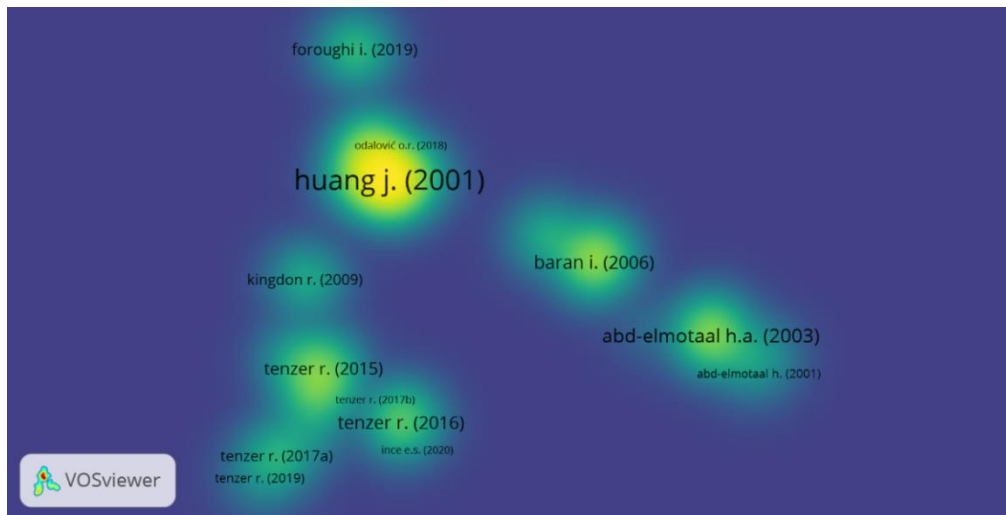


Figura 2.3: Mapa de Calor de autores mais citados, ligados ao tema “desenvolvimento de variação lateral da densidade das massas topográficas”.

Fonte: Base de dados *Web of Science* e *Scopus*.

De forma geral, conforme apresentado na Figura 2.4, diversas pesquisas se conectam com Huang et al. (2001), fato esse que reforça que o estudo recente dos efeitos da variação lateral da densidade das massas topográficas é significativamente relevante no desenvolvimento de modelos geoidais.

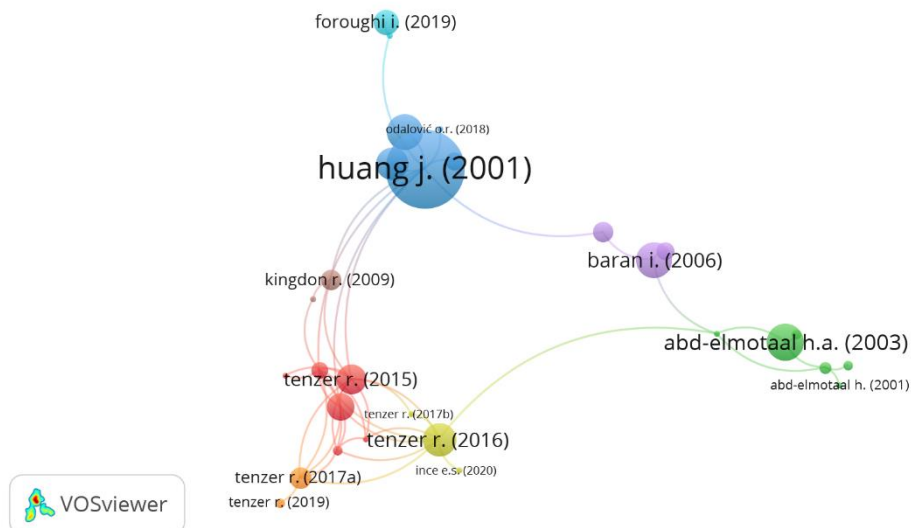


Figura 2.4: Mapa da rede de produção científica mais citadas, ligadas ao tema “desenvolvimento de variação lateral da densidade das massas topográficas”.
Fonte: Base de dados *Web of Science* e *Scopus*.

Além do exposto, pesquisas que envolvem os termos geoide e densidade topográfica, como palavras-chave, se dividem em basicamente três grupos percebidos na Figura 2.4, como (1) azul escuro e lilás; (2) azul claro e verde claro; e (3) laranja e vermelho.

Grupo (1) tem abordagem central de desenvolvimento de modelos geoidais, considerando a variação de densidade lateral das massas topográficas. O Grupo (2) apresenta estudos regionais e locais do uso de densidade das massas topográficas laterais no desenvolvimento de geoide. Já o Grupo (3) estuda transformações entre as superfícies de referência geoide e quase-geoide.

Em termos distribuição de produção científica ligados à pesquisa, observa-se que o tema vem sendo discutido em diversos países, com maior ênfase no Canadá (Figura 2.5).

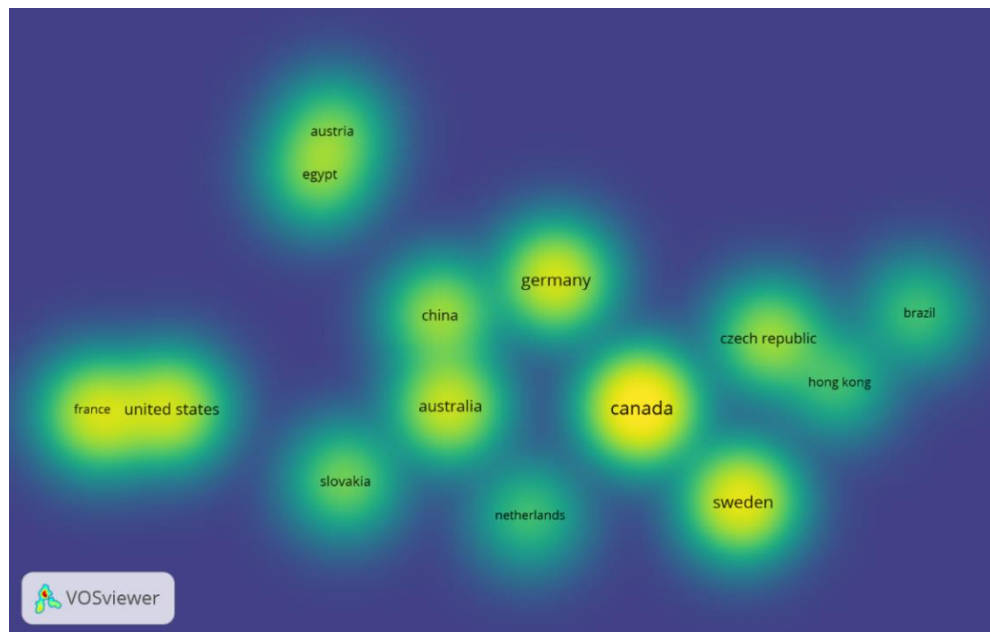


Figura 2.5: Mapa de Calor dos países com produção no tema em estudo.

Fonte: Base de dados *Web of Science* e *Scopus*.

Adicionalmente, elenca-se um histórico e síntese dos estudos que auxiliaram no direcionamento da pesquisa dentro do tema densidade lateral de massas topográficas e modelo geoidal.

Martinec et al. (1995), realizaram estudos no Canadá que iniciaram as discussões quanto à necessidade se considerar o efeito das variações de densidade lateral das massas topográficas na determinação de um modelo geoidal mais rigoroso/preciso.

Pagiatakis e Armenakis. (1999), pesquisaram, na região de Skeene e Norte de New Brunswick, no Canadá, os efeitos da consideração da variação da densidade lateral das massas topográficas em comparação com a adoção de densidade constante de 2.670 Kg/m^3 nos procedimentos de modelagem de geoide. Pelos resultados, verificaram que negligenciar os efeitos da variação lateral de densidade na modelagem do geoide proporcionou incertezas na ordem de dezenas de centímetros, para a área de estudo.

Allister e Featherstone (2001), em pesquisas proferidas no sudoeste da Austrália, consideraram os valores de densidade de 2.420 kg/m^3 e 2.900 kg/m^3 conforme geologia da região. Os resultados não mostraram diferenças significativas. No entanto, tratou-se de um experimento com uma linha de nivelamento de apenas 14 km, com altitudes menores que 200 m.

Huang et al. (2001), utilizaram conceitos e dados de Sistema de Informação Geográfica - SIG como ferramenta para relacionar as densidades de rochas e mapas geológicos e, posteriormente, avaliar aos efeitos da densidade das massas topográficas na região montanhosa do Canadá, onde observaram variações de -7,0 cm a 2,8 cm nas altitudes.

Em estudo realizado por Rózsa et al. (2002), para uma região plana na Hungria, foi comparado o efeito na determinação de geoide em escala local considerando a distribuição lateral da densidade das massas topográficas e a adoção do valor fixo de 2.670 Kg/m^3 . Neste estudo foram observadas variações milimétricas entre os modelos, porém, indicaram a necessidade de aperfeiçoamento nos modelos de densidade e de verificar a sensibilidade da variação da densidade em terrenos com topografia acidentada.

Hwang e Hsiao (2003), em estudo realizado em Taiwan, utilizaram um modelo de variações laterais da densidade cujos valores, relacionados às planícies costeiras e ao maciço montanhoso na parte central do país, foi de 2.000 kg/m^3 a 3.008 kg/m^3 . Pelos resultados, foi observada melhoria na modelagem do geoide em até 15 cm para regiões montanhosas.

Kiamehr (2006), avaliou o impacto do modelo de variação da densidade lateral, desenvolvido por meio de informações contidas nos mapas geológicos da região, na determinação de geoide na região montanhosa do Iran. Como resultado da pesquisa concluíram que o efeito da densidade na determinação do geoide é na ordem de até 0,29 m, evidenciando que o uso do modelo de variação de densidade é significativo e pode melhorar a precisão do geoide, especialmente em áreas montanhosas.

Vanícek et al. (2012), realizaram experimentos no Canadá e mostraram que o aumento no conhecimento da distribuição da densidade topográfica mudou substancialmente a situação da precisão das alturas geoidais, alcançando precisão de 1 cm a 2 cm.

Marotta et al. (2019), desenvolveram um modelo de distribuição lateral de densidade das massas topográficas, por meio de dados geológicos, e analisaram a influência desse modelo na estimativa de um modelo geoidal para

uma região plana, definida pelo Distrito Federal, Brasil. Pelos resultados, foram encontradas diferenças na ordem de -0,003 m a 0,008 m.

Sheng et al. (2019), desenvolveram modelo da distribuição lateral de densidade das massas topográficas em escala global, com suas respectivas incertezas, diante da necessidade de utilização no desenvolvimento de modelos geoidais rigorosos/precisos.

Albarici et al. (2019), realizou estudo referente à atualização do sistema altimétrico do estado de São Paulo e suas aplicações em infraestruturas viárias. Neste trabalho, foi utilizado modelo desenvolvido por Sheng et al. (2019) e, pelos resultados, concluíram que a variação de densidade lateral das massas topográficas foi a variável que mais contribuiu na estimativa de altitudes ortométricas rigorosas.

Trojanowicz et al. (2020), analisaram a utilização do modelo de distribuição de massas topográficas desenvolvido por Sheng et al. (2019), na região da fronteira entre Polônia, Eslováquia e República Tcheca, para determinar a separação de geóide e quase-geóide considerando a densidade constante e variável, no qual encontrou variações de até 7,4 cm entre os cenários.

León et al. (2020), desenvolveram um modelo geoidal para a Costa Rica, no qual encontraram variações de até 7 cm comparado com sistema altimétrico existente. Na conclusão da pesquisa foi recomendação o desenvolvimento de um modelo de distribuição das massas topográficas para a região de estudo, visando o aperfeiçoamento do modelo geoidal da Costa Rica.

2.2 Geoide e Sistemas de Altimétricos Associados à Utilização de Modelos do Geopotencial Global

O conhecimento mais fidedigno do campo gravitacional da Terra é crucial para uma infinidade de estudos em Geociências, pois pode ser utilizado na implantação de referenciais verticais e fornecer informações sobre a distribuição das massas no sistema da Terra. Neste contexto, os modelos do geopotencial são constituídos por um conjunto de parâmetros terrestres e

coeficientes do potencial anômalo expresso por funções harmônicas esféricas, as quais são estabelecidas por meio de dados obtidos com uso de técnicas terrestres e espaciais (SEEBER, 2003).

Os modelos do geopotencial trazem como característica principal a representação do potencial gravitacional, onde se derivam os valores da gravidade e de suas funcionais, representando com fidelidade os longos comprimentos de onda do campo da gravidade terrestre (Li e Sideris, 1994).

Diversos Modelos do Geopotencial tem sido desenvolvido ao longo do tempo, cada um com fontes e conjuntos de dados referentes ao propósito a que se destinam. Dessa diversidade de modelos disponíveis o ICGEM (*International Center for Global Earth Models*) possui papel importante. Dentre as suas atribuições estão o armazenamento e a divulgação das informações dos modelos existentes.

Diante da relevância do Modelo Geopotencial Global (MGG) no contexto do estudo em andamento, foi realizada pesquisa bibliográfica com a metodologia descrita na Figura 2.1 nas bases *Web of Science* e *Scopus (Elsevier)*, considerando o período de 2010 a 2020 e tópico “*Geoid and Global Models Geopotential*”, a qual registrou a ocorrência de 206 (duzentas e seis) produções científicas associadas ao tema da pesquisa. Para melhor visualização e direcionamento no processo de revisão bibliográfica, foram elaborados os mapas de calor atinente às citações mais relevantes (Figura 2.6).

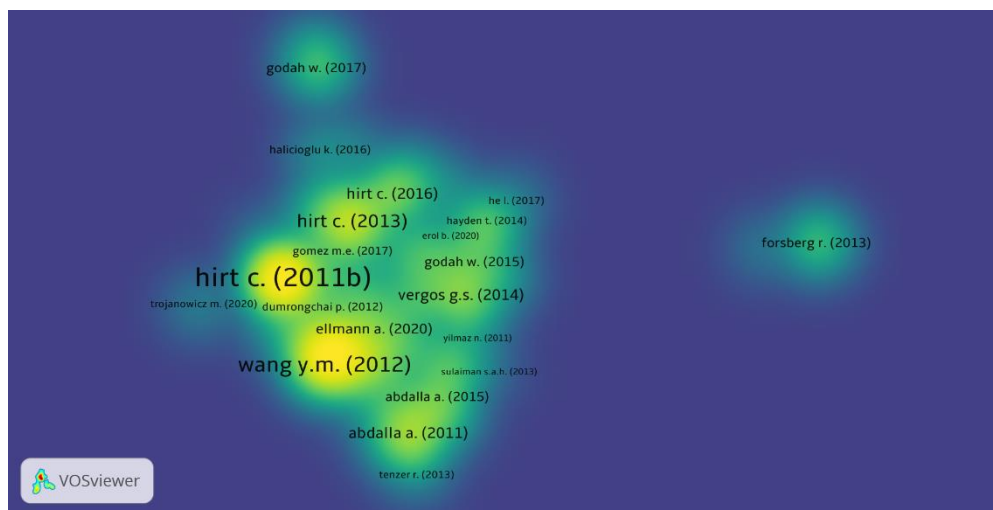


Figura 2.6: Mapa de Calor de produções mais citadas ligadas ao tema “Modelo Global Geopotencial e Geoide

Fonte: Base de dados do *Web of Science* e *Scopus*.

Da análise do Mapa de calor das produções científicas mais citadas ligadas ao tema da pesquisa destaca-se o estudo “*Evaluation of the first goce static gravity field models using terrestrial gravity, vertical deflection and EGM2008 quasegeoide heights*” desenvolvido por Hirt et al. (2011), o qual utilizaram dados de MGG e dados de gravidades terrestres para aperfeiçoar o conhecimento sobre o campo de gravidade da Terra e sua aplicação na Geodésica e no desenvolvimento de modelos geoidais. Por outro lado, cabe relatar o distanciamento dos trabalhos realizados por Forsberg et al. (2013), uma vez que esse segue uma linha de pesquisa voltada para aerogravimetria e Modelo do Geopotencial Global na construção de geoide.

Outra referência relevante, como também se pode verificar na Figura 2.6, é a publicação do estudo de Wang et al. (2012), sob o título de “*The us Gravimetric Geoid of 2009 (USGG2009): Modelo Development and Evaluation*”, a qual utilizaram o MGG EGM08 como referência para o desenvolvimento de modelo geoidal para os Estados Unidos e seus territórios, sendo que nesse estudo foram apresentados erros máximos de 26,4 cm e -32,1 cm na área de estudo.

Além disso, as consultas apontaram por meio das palavras-chave dos artigos ligados ao tema, a existência de uma divisão de linhas de pesquisa que

podem ser definidas em basicamente três grupos (Figura 2.7), como (1) verde e amarelo; (2) vermelho e lilás; e (3) azul claro.

No grupo (1), composto pelas cores verde e amarelo, foi verificada a existência de uma linha de pesquisa mais focada na sensibilidade do MGG na estimativa de modelos geoidais. No grupo (2), composto pelas cores vermelho e lilás, verifica-se a existência de uma linha de pesquisa mais voltada à estimativa de altitudes físicas. Por fim, no grupo (3), composto pela cor azul clara, são identificados trabalhos voltados à avaliação da precisão dos modelos geoidais em relação grau e ordem dos MGG.

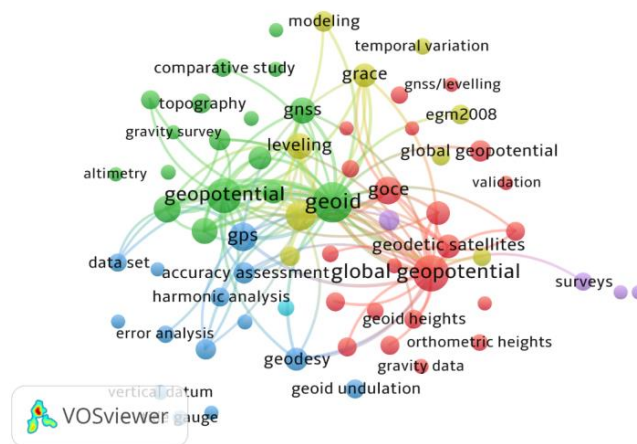


Figura 2.7: Mapa de Rede de maior ocorrência de palavras-chave.
Fonte: Base de dados *Web of Science* e *Scopus*.

Outra constatação encontrada, utilizando como dado de referência os países de origem dos autores (Figura 2.8), é que a Austrália, Alemanha e Canadá são os países com maiores produções na área, sendo possível identificar certo acoplamento das pesquisas entre Austrália, Alemanha.

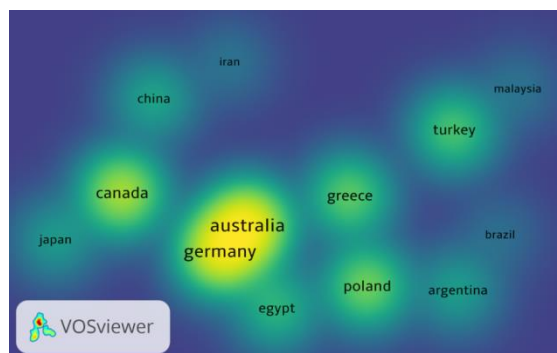


Figura 2.8: Mapa de Calor dos países com produção no tema em estudo.
Fonte: Base de dados *Web of Science* e *Scopus*.

No Brasil, pode-se destacar o trabalho sob o título “*Avaliação de modelos geopotenciais globais para os Estados do Maranhão e Piauí*” realizado por Melo e Freitas (2012), o qual avaliou a adoção de MGG para estimativas das alturas geoidais com menor discrepância na região dos estados do Maranhão e Piauí. A pesquisa constatou a existência de modelos geopotenciais globais com melhor desempenho frente ao adotado pelo Brasil na elaboração do modelo geoidal do brasileiro, à época.

Acrescenta-se, em síntese, um histórico dos principais documentos acadêmicos que abordam o tema geoide e MGG.

Hirt et al. (2011) apresentaram estudo com dados do MGG EGM2008 para preenchimento de lacunas de dados de gravidades terrestres, e concluíram que a utilização de MGG contribuiu significativamente no aperfeiçoamento das aplicações na Geodésica e no desenvolvimento de modelos geoidais.

Abbak et al. (2012) desenvolveram estudos com a combinação de modelos geopotenciais global e dados terrestres de gravidade em região montanhosa na Turquia, onde foi observado melhorias no modelo geoidal gravimétrico da área de estudo.

Odera et al. (2014) realizaram estudos para aperfeiçoamento do modelo geoidal japonês com combinação de modelos geopotenciais e dados de gravidade terrestres com resolução de $1 \times 1,5$ arco-minuto. A combinação dos modelos geopotencial ocasionou em redução no desvio padrão de $\pm 8,3$ cm para $\pm 7,5$ cm em comparação com o modelo geoidal anterior do Japão.

Yakubu et al. (2017) analisaram a influência dos MGGs em grau e ordem distintos na qualidade do modelo geoidal do Gana, aonde foram verificados que o EGM2008 teve um desempenho melhor do que todos os demais MGGs testados.

Ding et al. (2018) avaliaram os MGGs (EGM96, OSU91A, EGM2008, EIGEN-6C4) e o resultado da pesquisa mostrou, para a área de estudos, que o uso do EGM2008 proporcionou maior precisão, em comparação com o EIGEN-6C4, no desenvolvimento do modelo geoidal.

Kim et al. (2020) pesquisaram a influência de três MGGs com maiores grau e ordem (EIGEN-6C4, EGM2008, GECO) na precisão do geoide da Coreia do Sul, e concluíram que o modelo EGM2008 apresentou-se mais adequado quando comparado com alturas geoidais estimadas por nivelamento geométrico / GNSS em toda a Coreia do Sul.

Lücke et al. (2021) realizaram estudos na Costa Rica com propósito de obter um conjunto de dados gravimétricos com distribuição espacial homogeneia, oriundos de dados gravimétricos terrestres e de MGGs (EGM2008, GECO, EIGEN-6C4 e SGG-UGM-1). A combinação realizada resultou em uma melhor precisão dos modelos de gravidade e seus produtos derivados, como o modelo geoidal.

Diante da síntese dos trabalhos acadêmicos pesquisados, observa-se que o modelo EGM2008 tem se mostrado como o mais adequado para a definição de um SGA (Sistema Global de Altitudes) e para auxiliar outros modelos geopotencias. Porém, constata-se a contínua necessidade de se avaliar o modelo que melhor se adeque a uma determinada área de estudos, segundo os objetivos dos trabalhos a serem realizados.

2.3 Geoide e Sistemas de Altimétricos Associados à Utilização de Modelos Digitais de Terreno

Segundo Petrie e Kennie (1990) o termo Modelo Digital do Terreno (MDT) é uma representação estatística da superfície contínua do terreno por

muitos pontos selecionados com conhecimento das coordenadas tridimensionais em um sistema de coordenadas arbitrário.

No contexto da modelagem geoidal o MDT possui papel relevante no cálculo das anomalias da gravidade através da correção do terreno e do efeito indireto secundário da topografia (Silva, 2017). Segundo Matos (2005), os efeitos gravitacionais das massas topográficas devem ser considerados no cálculo das anomalias do campo de gravidade e das alturas geoidais.

Ressalta-se que para o desenvolvimento dos modelos geoidais são utilizados dados altimétricos provenientes de MDT globais, tais como os desenvolvidos por meio de dados do *Shuttle Radar Topography Mission* (SRTM) e *Advanced Spaceborne Thermal Emission and Reflection Radiometer* (Aster), os quais devem ser analisados para obtenção da melhor eficiência para uma dada área de estudo.

Diante a relevância do MDT no contexto da presente pesquisa realizou-se, também, uma pesquisa bibliográfica com as orientações do TEMAC nas bases; *Web of Science* e *Scopus (Elsevier)*, considerando o período de 2010 a 2020 e tópico “*Geoid and Digital Terrain Models*”, onde verificou-se a ocorrência de 66 (sessenta e seis) produções científicas desenvolvidas. Para melhor visualização e direcionamento no processo de revisão bibliográfica, elaborou-se o mapa de calor atinente as citações de autores e mapas de calor correspondentes à rede das citações e palavras chaves que trabalham nessa temática. (Figuras 2.9, 2.10 e 2.11).

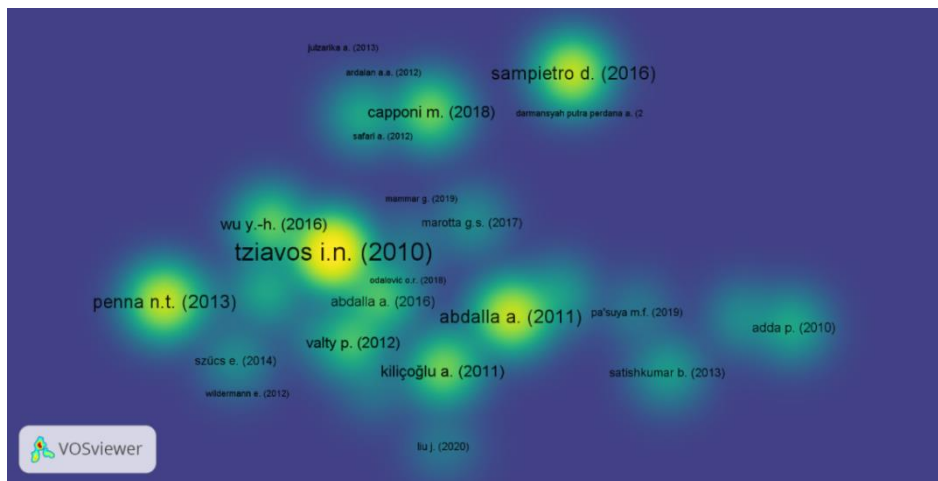


Figura 2.9: Mapa de Calor de produções mais citadas, ligadas ao tema “Modelo Digital de Terreno” e Geoide”.

Fonte: Base de dados *Web of Science* e *Scopus*.

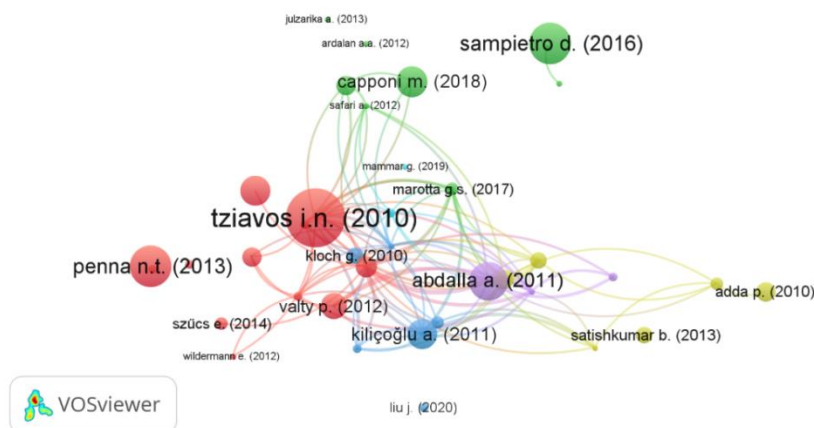


Figura 2.10: Mapa de Rede de produções mais citadas, ligadas ao tema “Modelo Digital de Terreno” e Geoide”.

Fonte: Base de dados *Web of Science* e *Scopus*.

Por meio da análise das Figuras 2.9 e 2.10 verifica-se a relevância e conexão do estudo desenvolvido por Tziavos, et al. (2010), sob o título “*Investigation of topographic reductions and aliasing effects on gravity and the geoid over Greece based on various digital terrain models*”, onde foi estudado o emprego de MDT no efeito da topografia para os calculos das coreções gravimétrica e desenvolvimento de modelos geoidais. O estudo utilizou dados SRTM 3, com resolução espacial de 3 arco-segundos e o modelo digital de terreno local da Grécia, com resolução espacial de 450 m. Os dados daqueles modelos foram utilizadas onde não havia dados confiáveis considerando a

2.4 Geoide e Sistemas de Altimétricos Associados ao truncamento da função de Stokes

O núcleo da integral de Stokes atua como uma função de ponderação para as anomalias de gravidade. Ela depende da distância esférica entre o ponto de integração e o ponto de cálculo. Assim, a modificação da função núcleo é considerada a base para minimização do erro de truncamento nas determinações gravimétricas do geoide (Ferreira, 2011).

A modificação do núcleo da integral de Stokes é definida por métodos determinístico, estatístico e estocástico, sendo o método determinístico o mais usual.

Na literatura científica são apresentados vários trabalhos atinentes à modificação do núcleo da integral de Stokes, dos quais pode-se citar pesquisas desenvolvidas por Molodensky et al. (1962), Wong e Gore (1969), Meissl (1971), Heck e Uninger (1987), Vanicek e Kleusberg (1987), Vanicek e Sjoberg (1991), e Featherstone et. al (1998).

Tendo em vista a importância do núcleo da integral de Stokes no contexto de geoide gravimétrico, utilizou-se orientações do TEMAC para efetuar pesquisa nas bases *Web of Science* e *Scopus (Elsevier)*, considerando o período de 2000 a 2020 e tópico “*Geoid and Stokes’ integration*”. Foram identificadas 53 (cinquenta e três) ocorrências de produções científicas desenvolvidas. Para melhor visualização e direcionamento no processo de revisão bibliográfica, foram elaborados mapas de calor atinente as citações mais relevantes (Figura 2.12), a rede de conexão entre os autores (Figura 2.13) e a países que trabalham nessa temática (Figura 2.14).

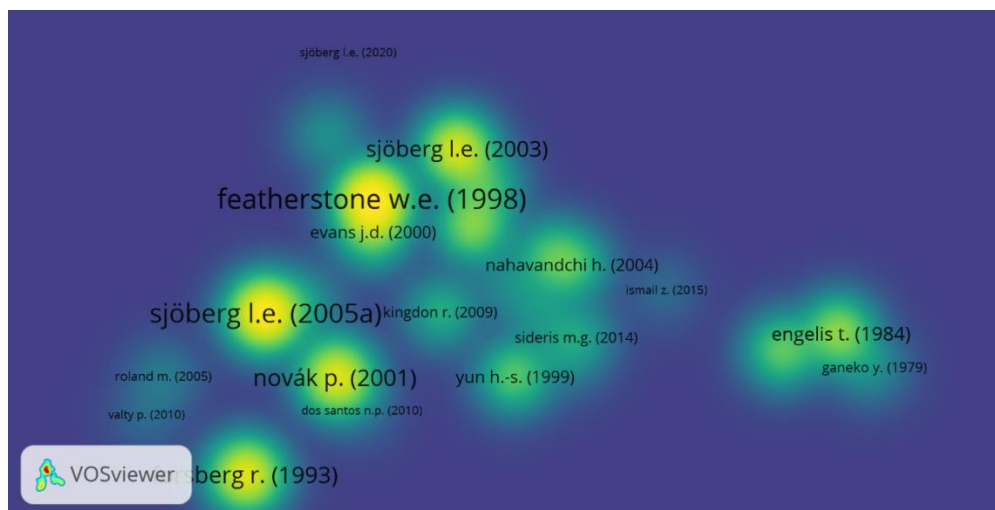


Figura 2.12: Mapa de Calor de produções mais citadas, ligadas ao tema “Integral de Stokes” e Geoide”.

Fonte: Base de dados *Web of Science* e *Scopus*.

Além dos estudos anteriormente citados, nota-se que os estudos realizados por Vaníček et al. (1991), Forsberg (1993), Featherstone et al. (1998) e Sjöberg (2005) são de grande relevância na abordagem dos efeitos do truncamento e modificadores da integração de Stokes's.

No estudo realizado por Vaníček et al. (1991) sob título “*Reformulation of Stokes's theory for higher than second-degree reference field and modification of integration kernels*”, foi avaliado os efeitos de truncamento da integração de Stokes estabelecendo modificação com vistas a atenuar os erros de truncamento.

Outra referência relevante, principalmente quando utiliza a técnica Remove-Calcula-Restaura no desenvolvimento de modelos geoidais gravimétricos, é o estudo realizado por Featherstone et al. (1998), onde foi proposta a modificação do núcleo de integração de Stokes a fim de aumentar a taxa de convergência dos coeficientes e reduzir o erro de truncamento.

Ressalta-se, também, o estudo realizado por Huang et al. (2018), onde avaliaram a resposta espectral da integral de Stokes com duas funções do núcleo de Stokes modificadas. A integral de Stokes foi truncada em quatro tamanhos de calota esférica, com raios esféricos $\psi_0 = 1^\circ, 3^\circ, 6^\circ$ e 9° . Os resultados sugeriram que a integral de Stokes não modificada é espectralmente instável ao ser truncada arbitrariamente e que a modificação no núcleo de Stokes é necessária para um modelo geoidal suave.

Por meio do mapa de redes (Figura 2.13) observa-se que todos os estudos que abordam o tema se conectam ao estudo realizado por Featherstone et al. (1998).

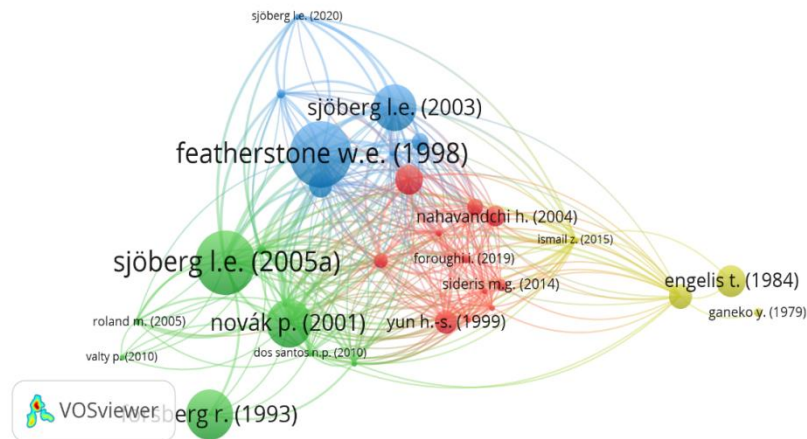


Figura 2.13: Mapa de Rede de citações.
Fonte: Base de dados *Web of Science* e *Scopus*.

Em termos de países com maior produção científica utilizando como referência o país de origem dos seus autores (Figura 2.14), pode-se concluir que a Suécia e o Canadá são os países que mais realizam pesquisa sobre o tema em comento.

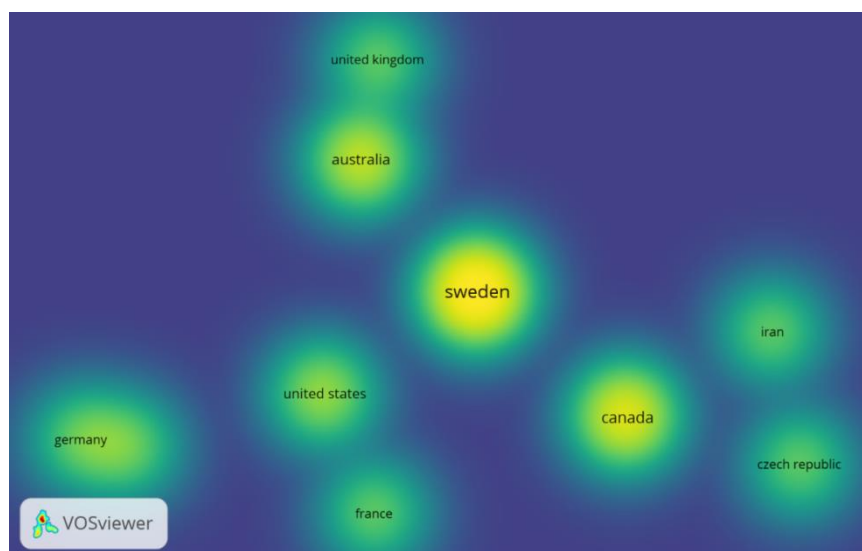


Figura 2.14: Mapa da rede de produção científica mais citadas, ligadas ao tema “Integral de Stokes” e Geoide”.
Fonte: Base de dados *Web of Science* e *Scopus*.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

Para atingir os objetivos propostos, de realizar uma abordagem metodológica para a modelagem e estimativa das massas laterais topográficas, das altitudes ortométricas e das alturas geoidais no Brasil, esta pesquisa está dividida em três etapas principais.

A primeira etapa trata-se do desenvolvimento e análise de um modelo de densidade lateral topográfica, com suas respectivas incertezas, para o Brasil. Neste contexto, foi utilizado um mapa geológico do Brasil, publicado por Bizzi et al. (2003), e disponibilizado pelo Serviço Geológico do Brasil (CPRM), na escala de 1:2.500.000 (CPRM), no qual agrupa o território brasileiro em 16 Classes e 815 unidades litológicas diferentes, constituídas por 369 diferentes tipos de rochas. De posse de tais informações e por meio de pesquisa bibliográfica, foram realizados agrupamentos entre tipos de rocha por um processo de generalização e estimados os valores de densidade e de suas incertezas na geração de um modelo. Por fim, este modelo foi comparado com o modelo global mais atual, publicado por Sheng et al. (2019), onde as diferenças foram evidenciadas e analisadas.

A segunda etapa trata da estimativa de altitudes ortométricas e das alturas geoidais, juntamente com as respectivas incertezas, para as estações da Rede Altimétrica de Alta Precisão (RAAP) do Brasil, cujas informações foram disponibilizadas pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Para isto, foram selecionadas estações cujos valores de altitude geométrica, altitude normal, número do geopotencial e gravidade observada, juntamente as incertezas, fossem conhecidos. Também, foram utilizados modelos digitais de terreno provenientes do *Shuttle Radar Topography Mission* – SRTM (3 arc-segundos de resolução espacial), disponibilizado pelo *United States Geological Survey* (USGS), e valores de densidade constante e variável, este último definido por meio do modelo desenvolvido na primeira etapa, com as respectivas incertezas. De posse das informações, foram estimados e analisados os resultados com as respectivas incertezas, utilizando os métodos de Helmert e Mader e os valores de densidade constante e variável na estimativa de altitudes ortométricas e alturas geoidais.

A terceira etapa volta-se para a análise e avaliação das influências de variáveis em modelo geoidal, considerando dados de gravidade terrestre disponibilizados pela Agência Nacional do Petróleo (ANP) e pelo IBGE, valores de densidade constante e variável (este

último definido por modelo desenvolvido na primeira etapa), modelos digitais de terreno com diferentes resoluções espaciais, modelos do geopotencial global desenvolvidos por diferentes fontes de informação e com maiores graus e ordens (até 2190), disponibilizados pelo *International Centre for Global Earth Models* (ICGEM), e diferentes métodos de truncamento da função de Stokes. Os modelos geoidais foram desenvolvidos para o estado de São Paulo motivado por ter maior quantidade de dados gravimétricos, maior número de estações altimétricas e maior contraste de densidade definido pelo modelo gerado na primeira etapa. Por meio da análise dos resultados, foi identificado o comportamento de cada fonte de informação e realizado o entendimento sobre a influência de cada uma delas no desenvolvimento de um modelo geoidal rigoroso.

Para manipulação de dados espaciais foram utilizados o software ArcGis® e para o desenvolvimento dos cálculos, foram utilizadas rotinas computacionais desenvolvidas pelo orientador (Prof. Dr. Giuliano Sant’Anna Marotta) em ambiente MATLAB®.

O detalhamento, tanto da metodologia, quanto dos resultados e discussões, é apresentado nos capítulos que se seguem.

4 DESENVOLVIMENTO DE MODELO DE DENSIDADE LATERAL TOPOGRÁFICA PARA O BRASIL

Danilo Fernandes de Medeiros^a, Giuliano Sant'Anna Marotta^a, Elder Yokoyama^a, Isadora Bordignon Franz^a, Reinhardt A. Fuck^a

^a Instituto de Geociências, Universidade de Brasília, Brasília – DF, Brazil. email: danilofmedeiros@yahoo.com.br; marotta@unb.br; eyokoyama@unb.br; isadorafranz2310@gmail.com; reinhardt@unb.br

Publicado: *Journal of South American Earth Sciences*, Volume 110, October 2021.

RESUMO

A comunidade científica comumente adota a realidade simplificada ao estabelecer modelos para representar a Terra. Nesse sentido, principalmente devido à falta de modelos confiáveis de distribuição de massa, uma densidade média tem sido adotada para representar as massas topográficas da crosta para diversas aplicações, tanto em geofísica quanto em geodésia. Diante do exposto e dos desafios associados ao tema, este estudo se propõe a desenvolver um modelo de distribuição da densidade lateral de massas topográficas para o Brasil (LTD_Brazil) associada às suas incertezas, considerando informações de mapas geológicos e valores de densidade aparente de tipos de rochas. Os resultados da modelagem indicam uma densidade média de 2.459 kg/m³, variando de 1.625 a 3.400 kg/m³, com desvios-padrão variando de 8 a 351 kg/m³. No entanto, este valor de densidade média sofre grande influência de grandes bacias sedimentares fanerozóicas (bacias do Amazonas / Solimões / Acre, Alto Tapajós, Parecis, Parnaíba e Paraná), localizadas na área de estudo.

Palavras-chave: Densidade, Geodésia, Geologia, Geofísica, Litologias.

4.1 INTRODUÇÃO

Atualmente, a maioria dos modelos de distribuição de densidade local, regional e global são determinados indiretamente pela inversão dos dados sísmicos e gravitacionais (Bear et al., 1995; Kozlovskaya et al. 2004; Wang et al., 2011; Toughmalani e Saibi, 2015), que, devido à baixa resolução espacial, não são os mais adequados para uso em muitos problemas relacionados à geodésia e geofísica.

Para alguns problemas envolvendo o conhecimento da distribuição de massa topográfica (por exemplo, determinação de anomalias de gravidade, geóide rigoroso e altura ortométrica), mapas geológicos associados a dados de densidade de rocha têm sido usados, mesmo com limitações, como uma alternativa para o desenvolvimento e melhoria de lateral (2D) modelos de densidade topográfica. Esta questão foi amplamente debatida na comunidade científica, conforme observado em estudos locais e regionais conduzidos no Canadá (Martinec 1993; Pagiatakis e Armenakis, 1999; Huang et al., 2001), Austrália (Featherstone, 2001), Hungria (Rózsa, 2002), Nova Zelândia (Tenzer e Vaníček, 2003), Suécia (Sjöberg, 2004), Irã (Kiamehr, 2006) e Brasil (Marotta et al., 2019). Além desses estudos, Sheng et al. (2019) desenvolveu um modelo de densidade topográfica lateral em escala global.

Uma vez que os modelos de massas topográficas exigiriam mapas geológicos 3D associados a dados de densidade aparente *in situ* de cada ocorrência / tipo de rocha, e considerando que isso ainda não é possível devido ao seu alto custo operacional, logístico e tecnológico, em escala global ou regional, este estudo propõe uma alternativa para melhorar a modelagem da distribuição de massa topográfica lateral para o Brasil.

Neste estudo, desenvolvemos um banco de dados contendo valores médios para cada tipo de rocha a partir de testes de densidade aparente *in situ*, extraídos de referências bibliográficas, combinados com informações espaciais de ocorrências de tipos de rocha por unidade litológica. Essas informações foram utilizadas para desenvolver modelos de densidade topográfica lateral, que por sua vez, foram analisados considerando as províncias estruturais brasileiras e avaliados por meio de uma comparação com o valor de densidade tradicionalmente adotado (2670 kg/m^3) para a crosta terrestre (Hinze, 2003; Hofmann-Wellenhof e Moritz, 2006) e com um modelo global desenvolvido por Sheng et al. (2019).

4.2 MODELO DE DENSIDADE TOPOGRÁFICA LATERAL PARA O BRASIL

A plataforma Sul-americana é definida como a porção continental estável da placa litosférica sul-americana não afetada pelos sistemas orogênicos do Caribe e dos Andes, durante o Fanerozóico (Almeida et al., 2000). De acordo com Almeida et al. (2000), o embasamento da plataforma consiste em crostas continentais arqueanas e proterozóicas que foram amalgamadas durante três eventos orogênicos principais: (I) Paleoproterozóico, (II) Mesoproterozóico Tardio e (III) Brasileiro-Pan-Africano, este último responsável pelo arranjo dos núcleos cratônicos e sistemas orogênicos que ocorreram no Neoproterozóico-Phanerozóico. Cerca de 75% da Plataforma Sul-americana está subjacente ao território brasileiro.

A Plataforma Sul-americana é composta por 7 crátons (cráton Amazônico, São Francisco, Luís Alves, São Luís e Rio de La Plata, além dos crátons / blocos Paranapanema e Parnaíba, subjacentes às bacias do Paraná e Parnaíba), delimitados por três sistemas orogênicos, nomeadamente as províncias estruturais do Tocantins, Mantiqueira e Borborema (por exemplo, Almeida et al., 1981, 2000; Cordani et al., 2003). Além de crátons e sistemas orogênicos, a Plataforma Sul-americana compreende várias grandes bacias intracratônicas fanerozóicas: Acre, Solimões, Amazonas, Parecis, Paraná e Parnaíba (por exemplo, Pedreira et al., 2003)

A constituição geotectônica da Plataforma Sul-americana também pode ser dividida em 15 províncias estruturais (Santos, 2003) e, incluindo a Bacia do Alto Tapajós (Toczeck et al., 2019), 16 foram adotadas neste estudo (Figura 4.1).

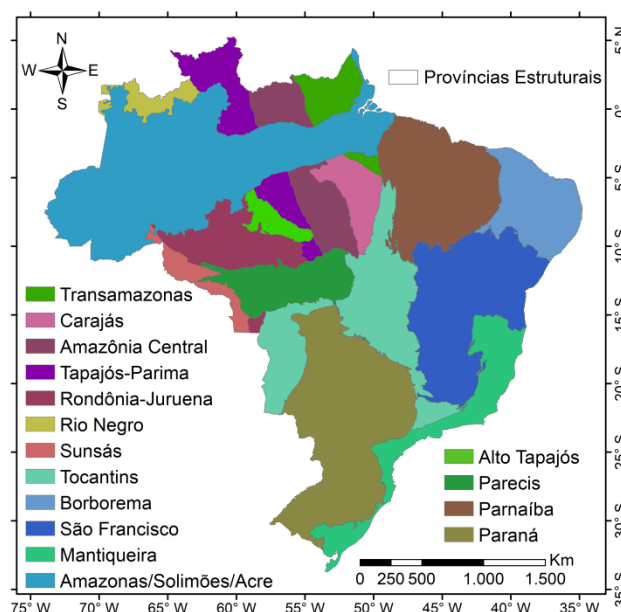


Figura 4.1: Províncias estruturais do Brasil. Fonte: CPRM (2003) modificado.

O Mapa Geológico do Brasil, desenvolvido por Bizzi et al. (2003) e disponibilizado pelo Serviço Geológico do Brasil (CPRM), na escala 1:2.500.000, agrupa o território brasileiro da Plataforma Sul-americana em 16 Classes (Figura 4.2) e 815 unidades litológicas diferentes, denominadas Litotipo I, que tem 369 rochas diferentes.

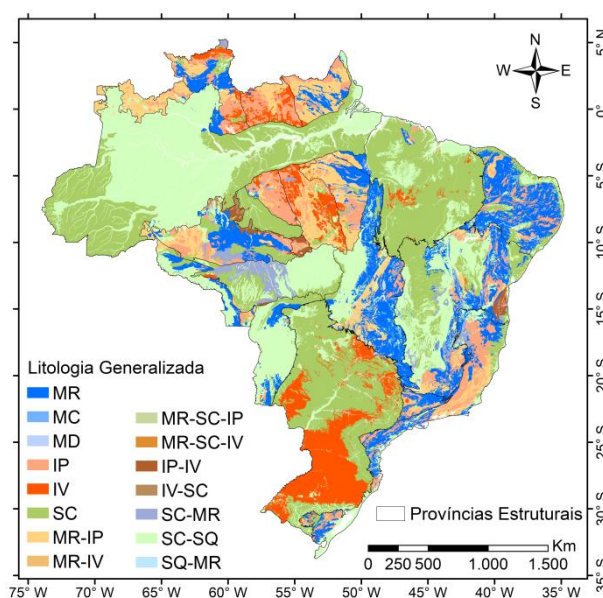


Figura 4.2: Litologia generalizada em classes, ilustrando os limites das províncias Estruturais definidas para o Brasil. Classes: MR – Metamórfica (Metamorfismo Regional); MC – Metamórfica (Metamorfismo de Contato); MD – Metamórfica (Metamorfismo Dinâmico); IP – Ígneas (Plutônicas); IV – Ígneas (Vulcânicas); SC – Sedimentar (Clástica) e SQ – Sedimentar (Química).

Com base nos dados litoestratigráficos considerados (Litótipo I), a metodologia de desenvolvimento do modelo de densidade topográfica lateral para o Brasil foi dividida em três etapas. Em primeiro lugar, as densidades e incertezas foram estimadas para cada tipo de rocha contida nas informações litoestratigráficas; em seguida, foram estimados os valores de densidade e incertezas para as unidades litoestratigráficas; e finalmente, foi desenvolvido um modelo de densidade topográfica lateral e suas incertezas, para o Brasil, e os resultados foram comparados com valores de referência e o modelo global mais recente desenvolvido por Sheng et al. (2019).

4.2.1 Estimativa de valores de densidade para as rochas

As densidades e incertezas para cada tipo de rocha, contidas nas informações litoestratigráficas consideradas Bizzi et al. (2003), foram estimadas a partir de revisões bibliográficas.

Como os valores de densidade encontrados para um mesmo tipo de rocha variam consideravelmente, associados principalmente à estrutura mineralógica, grau de alteração, porosidade e profundidade de ocorrência, utilizamos o máximo possível diferentes referências bibliográficas. Porém, foi necessário adotar um processo de generalização devido à falta de valores de densidade para alguns tipos de rochas. Neste caso, consideramos um único valor de densidade para um tipo de rocha, seja ela ácida ou básica (por exemplo, granulito ácido e básico foram considerados granulitos). Em outros casos, atribuímos os valores de densidade às rochas considerando variações no grau de alteração e as afinidades geoquímico-mineralógicas entre essas e outras rochas cujas densidades têm um valor ou intervalo conhecido (por exemplo, gabro de hornblenda era considerado gabro). Para tanto, foram utilizadas as associações consideradas por Winter (2001).

Após o processo de generalização, e considerando informações adquiridas em referências bibliográficas distintas, foram estimados valor médio e desvio-padrão para cada tipo de rocha.

Quando a incerteza para um tipo de rocha não foi encontrada, ela foi calculada (Equação 1) assumindo uma distribuição normal para as densidades com um nível de confiança de 95% (Vaniček e Krakiwsky, 1986).

$$\sigma = \frac{\rho_{max} - \rho_{min}}{2 \cdot \sqrt{\xi \chi^2_{(1,0.95)}}} \quad (1)$$

onde, ρ_{max} e ρ_{min} são valores máximo e mínimo de densidade da rocha e $\xi \chi^2_{(1,0.95)}$ o valor de qui-quadrado unidimensional para um nível de confiança de 95%

4.2.2 Estimativa da densidade para unidades litoestratigráficas

Preliminarmente, as unidades litoestratigráficas foram identificadas no mapa geológico, sendo que cada unidade citada apresenta arranjos variados quanto à quantidade e tipo de rocha. Portanto, após identificar esses arranjos e estimar a densidade para cada tipo de rocha, os valores de densidade foram estimados para cada unidade litoestratigráfica. Neste caso específico, como o número total de amostras de cada tipo de rocha e o perfil litoestratigráfico presente em cada unidade não são conhecidos, assumimos a mesma espessura de camada para os tipos de rocha dentro de cada unidade litoestratigráfica.

Os valores de densidade resultantes para as unidades litoestratigráficas ($\bar{\rho}$) foram calculados usando a média (Equação 2). Para o cálculo do desvio padrão associado ao arranjo ($\bar{\sigma}$), foi utilizada a propagação das incertezas (Equação 3).

$$\bar{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^n (\rho_n)}{n} \quad (2)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_n^2}}{(n)} \quad (3)$$

onde ρ e σ são os valores de densidade e desvio padrão associado a cada tipo de rocha, respectivamente, e n é o número de ocorrência de rochas na unidade litoestratigráficas, identificadas no mapa em estudo.

4.2.3 Modelos de densidade lateral topográfica e de incertezas para o Brasil

O modelo de densidade topográfica lateral (LTD_Brazil) com espaçamento de grade de 30 segundos de arco foi desenvolvido usando ArcGis-Pro e rotinas computacionais desenvolvidas a partir do Visual Basic for Application. As rotinas computacionais foram usadas para atribuir os valores de densidade e incerteza para cada tipo de rocha. ArcGis-Pro foi usado para atribuir as informações geradas para cada litótipo em uma grade regular de pontos e para gerar o modelo proposto.

O modelo desenvolvido foi analisado avaliando-se primeiramente os valores de densidade e desvios-padrão para o Brasil considerando as províncias geológicas. Posteriormente, o modelo foi comparado com um modelo global (UNB_TopoDensT com espaçamento de grade de 30 segundos de arco), desenvolvido por Sheng et al. (2019), para analisar as variações entre os valores estimados. É importante saber que Sheng et al. (2019) utilizou 15 litologias principais extraídas do Modelo Global Litosférico (GLiM), produzido por Hartmann e Moosdorf (2012), que divide a litosfera em básica, intermediária e ácida vulcânica; plutônico básico, intermediário e ácido; sedimentos não consolidados, siliciclásticos, mistos e carbonáticos; bem como sedimentos metamórficos, piroclásticos e evaporíticos; gelo e geleiras e corpos d'água na terra.

Para analisar o valor médio de densidade comumente adotado para crosta terrestre, um valor único de densidade topográfica lateral média ($\bar{\rho}_A$) também foi computado para a área de estudo, conforme apresentado por Sheng et al.(2019):

$$\bar{\rho}_A = \frac{\sum_{i=1}^N \bar{\rho}(\lambda_i, \phi_i) \cdot H(\lambda_i, \phi_i)}{\sum_{i=1}^N H(\lambda_i, \phi_i)} \quad (4)$$

$\bar{\rho}_A$ é o valor de densidade extraído do LTD_Brasil e H é a altura extrato de valor de um modelo de terreno digital (DTM). λ_i e ϕ_i são as coordenadas de longitude e latitude, respectivamente, para cada ponto contido em LTD_Brasil. The Shuttle Radar Topography Mission – SRTM (3 segundos de arco espaçamento da grade), fornecido pelo United States Geological Survey (USGS), reamostrados usando o método do vizinho mais próximo para LTD_Brasil espaçamento da grade, foi usado para extrair os valores de H.

4.3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados da pesquisa propõem um modelo de densidade topográfica lateral para o Brasil, incluindo valores consolidados de densidades e incertezas definidas para cada tipo de rocha utilizado para desenvolver este modelo (Tabela 4.1).

A Tabela 4.1 apresenta os dados adquiridos e tratados de diferentes referências bibliográficas (tipo de rocha, ρ_{max} , ρ_{min}) e o valor de densidade (ρ) com sua incerteza (σ) definida e / ou calculada para cada tipo de rocha, de acordo com a metodologia descrita.

Tabela 4.1: Valor de densidade média das rochas e desvios padrão associados por tipo de rocha.

Tipo de Rocha	ρ (kg/m ³)	σ (kg/m ³)	ρ_{min} (kg/m ³)	ρ_{max} (kg/m ³)	Número de Amostras	Fonte
Ácido meta-vulcânico	2.671	27	-	-	39	Gendzwill (1969)
Xisto de Actinolite	2.850	60	2.760	2.980	19	Smithson (1971)
Anfibolito	2.892	115	3.100	2.630	62	Tenzer et al. (2011)
Andesite	2.565	170	1.560	2.990	418	Tenzer et al. (2011)
Anortosito	2.850	130	2.580	3.280	64	Subrahmanyam and Verma (1981)
Argilita	2.067	235	1.520	2.420	15	Tenzer et al. (2011)
Basalto	2.768	162	1.780	3.060	340	Tenzer et al. (2011)
Breccia	2.291	295	1.540	3.000	118	Tenzer et al. (2011)
Calcrete	1.701**	262**	1.233	1.958	9	Lionjanga et al. (1987)
Carbonatita	2.950	210	2.640	3.710	88	Eshaghi et al. (2019)
Charnoquita	2.990	150	2.670	3.410	124	Subrahmanyam and Verma (1981)
Chert	2.564	162	2.240	2.740	11	Tenzer et al. (2011)
Argila	2.067	171	1.920	2.450	9	Tenzer et al. (2011)
Conglomerado	2.570	159	2.110	3.000	118	Tenzer et al. (2011)
Carbonato Cristalino	2.484	211	2.273	2.695	156	Sheng et. al. (2019)
Dacite	2.402	175	1.940	2.700	79	Tenzer et al. (2011)
Diabase	2.970	100	2.660	3.230	328	Eshaghi et al. (2019)
Diorite	2.797	119	2.430	3.160	186	Tenzer et al. (2011)
Dolomite	2.844	1	2.843	2.845	3	Birch (1960)
Dunite	3.377	185	3.255	3.777	15	Birch (1960)
Evaporite	2.695	278	2.417	2.973	11	Sheng et al. (2019)
Gabbro	2.884	147	2.260	3.340	236	Tenzer et al. (2011)
Gneisse	2.812	179	1.830	3.150	149	Tenzer et al. (2011)
Formação de minério de manganês	3.000	0**	-	-	1	Scarpelli et al. (2017)

Tipo de Rocha	ρ (kg/m ³)	σ (kg/m ³)	ρ_{min} (kg/m ³)	ρ_{max} (kg/m ³)	Número de Amostras	Fonte
Granito	2.640	77	2.330	2.940	288	Tenzer et al. (2011)
Granodiorito	2.681	70	2.530	2.940	53	Tenzer et al. (2011)
Granulito	2.765	332	2.530	3.000	2	Tenzer et al. (2011)
Cascalho	2.309	266	2.580	1.870	9	Tenzer et al. (2011)
Greywacke	2.639	100	2.090	2.940	469	Tenzer et al. (2011)
Hornfels	2.800	143	2.590	3.080	22	Tenzer et al. (2011)
Ignimbrite	2.125	247	1.240	2.620	916	Tenzer et al. (2011)
Jaspilite	3.400	191*	2.970	3.720	-	Pereira (2017)
Komatiite	2.910	51*	2.810	3.010	344	Eshaghi et al. (2019)
Lamprófiro	2.910	177	2.650	3.390	15	Tenzer et al. (2011)
Laterita	1.625*	217*	1.200	2.050	-	Okogbue et al. (2020)
Lignite	1.390	204	1.210	1.670	6	Tenzer et al. (2011)
Calcário	2.484	211	1.890	3.010	156	Tenzer et al. (2011)
Mármore	2.716	117	2.510	3.140	22	Tenzer et al. (2011)
Metabasalto	3.000	48*	2.950	3.140	-	Trčková (2005)
Metadiorito	2.986	72	-	-	282	Gendzwill (1969)
Metagabbro	2.986	72	-	-	282	Gendzwill (1969)
Metalimestone	2.790	110	2.600	3.260	120	Smithson (1971)
Metamórfico	2.768	131	2.637	2.899	789	Sheng et al. (2019)
Metasandstone	2.605	65	2.680	2.430	17	Salimun et al. (2018)
Metasiltstone	2.739**	15**	2.771	2.716	18	Li et al. (2012)
Metavulcânico	2.955	124	2.760	3.150	11	Tenzer et al. (2011)
Mica Xisto	2.800	30	2.750	2.850	20	Smithson (1971)
Migmatita	3.010	87*	2.840	3.180	-	Eshaghi et al. (2019)
Monzodiorito	2.750*	51*	2.650	2.850	-	Scoates (2000)
Monzogranito	2.690*	15*	2.660	2.720	13	Columbu et al. (2015)
Monzonita	2.617	48	2.540	2.700	21	Langenheim et al. (2004)
Mylonite	2.757	91	2.620	2.930	11	Tenzer et al. (2011)
Norite	2.978	3	2.975	2.981	3	Birch (1960)
Turfa	1.400	138*	1.260	1.800	-	Driessen and Rochimah (1976)
Pegmatite	3.070	10	3.050	3.010	-	Ferreira et al. (2005)
Peridotita	3.093	225	2.340	3.340	118	Tenzer et al. (2011)
Fonolito	2.536	70	2.470	2.630	5	Tenzer et al. (2011)

Fosforito	1.132**	33**	1.185	1.092	10	Abduhakimovich and Axrorovich (2018)
-----------	---------	------	-------	-------	----	--------------------------------------

Tipo de Rocha	ρ (kg/m ³)	σ (kg/m ³)	ρ_{min} (kg/m ³)	ρ_{max} (kg/m ³)	Número de Amostras	Fonte
Filito	2.750*	77*	2.600	2.900	-	Garzón et al. (2010)
Plutônica	2.690	90	2.570	2.970	160	Yang et al. (2013)
Piroclástico	1.986	512	1.130	2.350	5	Tenzer et al. (2011)
Piroxenita	3.122	218	2.240	3.330	25	Tenzer et al. (2011)
Quartzito	2.612	73	2.490	2.780	29	Tenzer et al. (2011)
Riolito	2.207	225	1.360	2.740	704	Tenzer et al. (2011)
Areia	2.048	351	1.690	3.220	27	Tenzer et al. (2011)
Arenito	2.463	266	1.510	3.000	968	Tenzer et al. (2011)
Xisto	2.732	115	2.120	3.100	419	Tenzer et al. (2011)
Serpentinite	2.634	219	2.240	3.270	87	Tenzer et al. (2011)
Mica Xisto	2.335	190	1.610	2.730	193	Tenzer et al. (2011)
Siltstone	2.347	283	1.360	2.880	471	Tenzer et al. (2011)
Ardósia	2.750	46*	2.660	2.840	-	Eshaghi et al. (2019)
Sienito	2.719	145	2.440	2.860	15	Tenzer et al. (2011)
Sienogranita	2.666**	108**	2.515	2.823	6	Salas et al. (2006)
Tonalite	2.703	73	2.610	2.860	27	Langenheim et al. (2004)
Traquito	2.591	182	2.170	2.950	31	Tenzer et al. (2011)
Tuff	2.113	289	1.410	2.940	723	Tenzer et al. (2011)
Sedimento não consolidado	2.074	278	1.796	2.351	59	Sheng et al. (2019)
Vulcânico	2.362	471	1.480	3.090	110	Tenzer et al. (2011)

ρ^* representa o valor de densidade média calculado a partir dos valores ρ_{min} e ρ_{max} , ρ^{**} o valor de densidade média calculado a partir de amostras, σ^* o valor de desvio padrão calculado a partir da Equação 1.

Após definir o valor de densidade para cada tipo de rocha, os valores de densidade para as unidades litoestratigráficas foram computadas e o modelo LTD_Brasil (Fig. 4.3) com sua incerteza (Fig. 4.4), o qual foi desenvolvido com resolução de 30 segundos de arco.

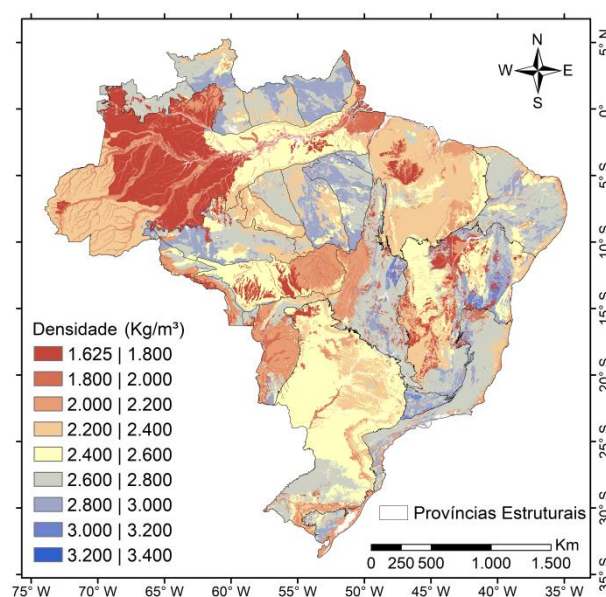


Figura 4.3: Modelo de densidade lateral topográfica brasileira LTD_Brazil.

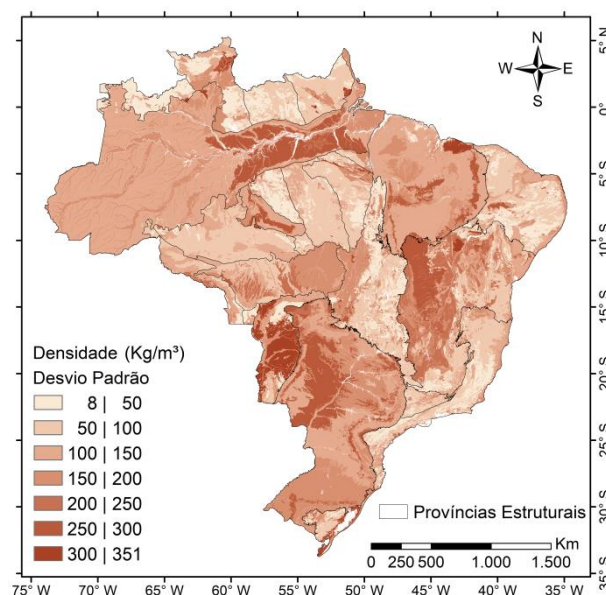


Figura 4.4: Modelo das incertezas associadas LTD_Brazil.

Historicamente, o valor de densidade de 2.670 kg/m^3 é adotado para a crosta terrestre, conforme apresentado em Hofmann-Wellenhof e Moritz (2006). Entretanto, o LTD_Brazil apresenta 2.459 kg/m^3 de densidade topográfica lateral média, variando de 1.625 a 3.400 kg/m^3 (Figura 4.3), com desvios-padrão variando de 8 a 351 kg/m^3 (Figura 4.4).

Dada a dimensão territorial brasileira e as variações litoestratigráficas, as Figuras 4.1 e 4.4 indicam valores médios significativamente mais baixos para as províncias de Amazonas / Solimões / Acre, Alto Tapajós, Parecis, Parnaíba e Paraná. Essas cinco

províncias são formadas principalmente por bacias sedimentares fanerozóicas (Bizzi et al., 2003), consistindo em rochas mais porosas em comparação com as rochas das outras províncias. No entanto, em comparação com as outras províncias sedimentares, o Paraná, também uma bacia sedimentar fanerozóica, apresenta valores de densidade ligeiramente superiores, que foram interpretados como resultantes do maior volume de rochas magmáticas do Cretáceo associadas a ela (Piccirillo et al., 1988). Além dos menores valores de densidade associados às províncias formadas por bacias sedimentares Fanerozóicas, as províncias Transamazonas e Carajás, das idades Arqueano/Paleoproterozóico, apresentam os maiores valores de densidade, que foram atribuídos à concentração de rochas de maior grau metamórfico, como as associadas com cinturão de pedras verdes e domínios de granulito (Bizzi et al., 2003).

O modelo estimado neste estudo (LTD_Brazil) foi comparado com o modelo UNB_TopoDensT desenvolvido por Sheng et al. (2019), e as diferenças são mostradas nas Figuras 4.5 e 4.6.

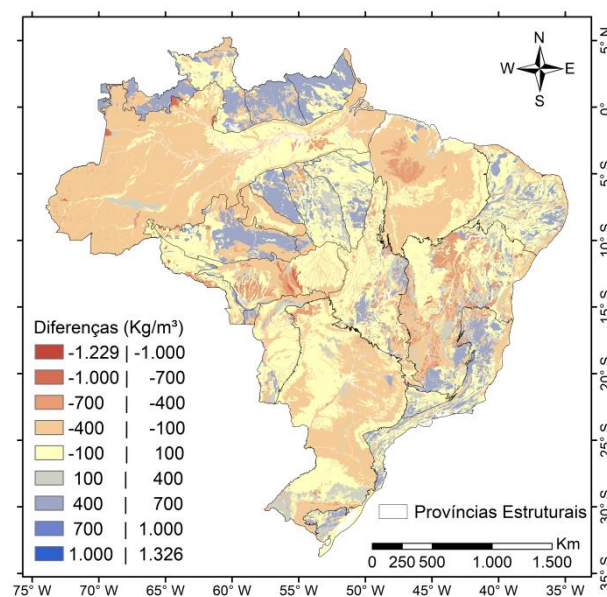


Figura 4.5 : Diferenças de densidade entre os modelos LTD_Brazil e UNB_TopoDensT.

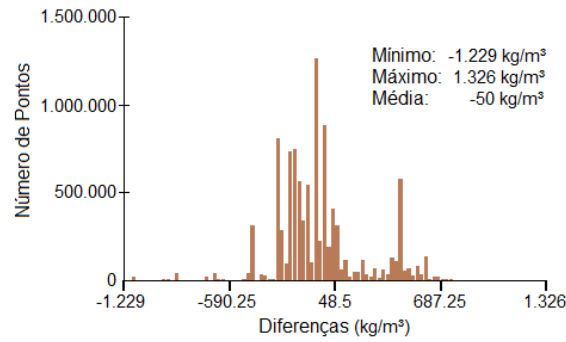


Figura 4.6: Distribuição das diferenças de densidade entre os modelos LTD_Brazil e UNB_TopoDensT.

As diferenças entre os modelos LTD_Brazil e UNB_TopoDensT variaram de -1.229 a 1.326 kg/m^3 com valor médio de -50 kg/m^3 (Figuras 4.5 e 4.6). No entanto, as principais diferenças variaram de aproximadamente -500 a 600 kg/m^3 . Com esses resultados, é possível sugerir que as diferenças se justificam pelo maior detalhamento das unidades litológicas, consideradas nesta pesquisa, em comparação com as 15 principais litologias extraídas do GLiM e utilizadas por Sheng et al. (2019).

Para identificar as regiões em que as diferenças entre os modelos (Figura 4.5) foram significativas, os desvios padrão das diferenças foram calculados (Figura 4.7) e os resultados foram comparados. Após a comparação dos resultados, a Figura 4.8 mostra as regiões em que as diferenças entre os modelos LTD_Brazil e UNB_TopoDensT foram maiores que os respectivos desvios-padrão, com nível de confiança de 99%.

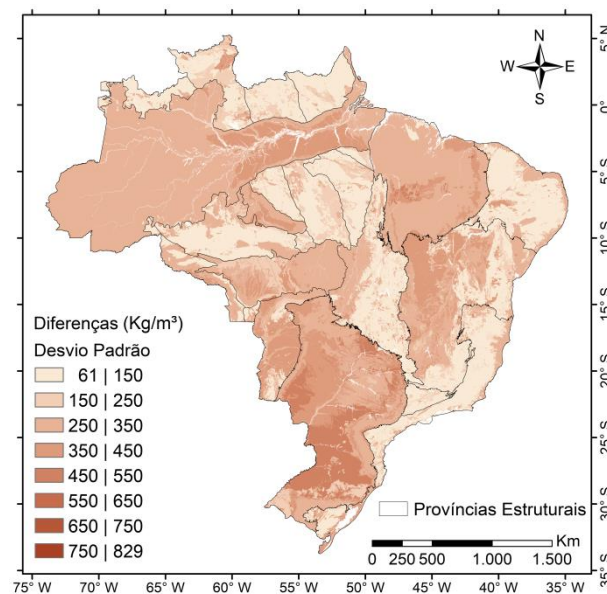


Figura 4.7: Incerteza das diferenças de densidade entre os modelos LTD_Brazil e UNB_TopoDensT.

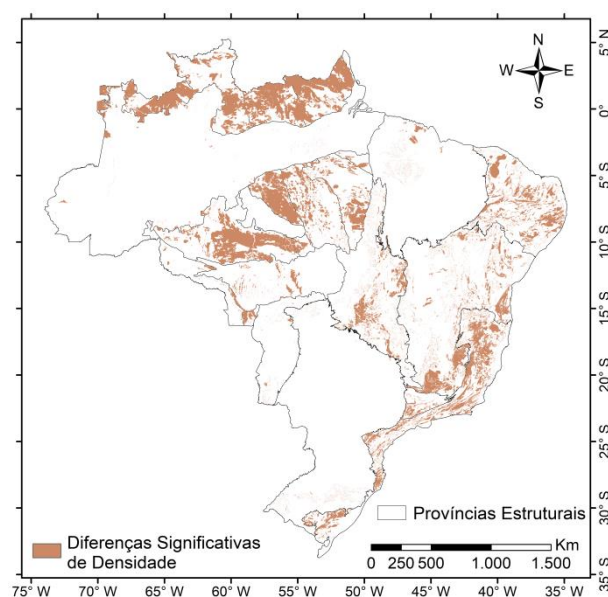


Figura 4.8: Diferenças significativas de densidade entre os modelos LTD_Brazil e UNB_TopoDensT.

Conforme mostrado na Figura 4.8, as diferenças significativas na densidade entre os modelos LTD_Brazil e UNB_TopoDensT estão localizadas principalmente em regiões de rochas metamórficas e ígneas (Figura 4.2). Rochas sedimentares também foram encontradas, mas em regiões de fronteira das unidades litológicas, provavelmente devido à diferença de escala ou mapas usados como referência.

A partir da análise realizada neste estudo, considera-se que o modelo LTD_Brazil é consistente com as informações litológicas utilizadas como referência. Em relação às diferenças significativas encontradas entre os modelos LTD_Brazil e UNB_TopoDensT, sugerimos que este estudo utilizou um maior detalhamento para o desenvolvimento de um modelo de densidade regional. Consequentemente, sugere-se que o modelo LTD_Brazil pode ser usado como referência para o Brasil e pode ser complementado pelo modelo UNB_TopoDensT para estudos em escala global.

4.4 CONCLUSÃO

O estudo desenvolveu e avaliou um modelo de densidade topográfica lateral (LTD_Brazil). Este modelo foi desenvolvido em formato de grade, contendo informações sobre a densidade de massa topográfica com resolução espacial de 800 m x 800 m. Além disso, o modelo foi baseado em dados de densidade rochosa obtidos por meio de ampla

revisão bibliográfica e dados litológicos extraídos de um mapa geológico na escala 1: 2.500.000 fornecido pela CPRM.

Uma análise cuidadosa dos resultados desta pesquisa mostra que, para o Brasil, a densidade média é de 2.459 kg/m³ (LTD_Brasil), diferente do valor (2.670 kg/m³) comumente usados para a crosta terrestre. Porém, este valor de densidade média tem grande influência de grandes bacias sedimentares fanerozóicas (bacias do Amazonas / Solimões / Acre, Alto Tapajós, Parecis, Parnaíba e Paraná), localizadas na área de estudo.

Os resultados do modelo estimado foram comparados com os relatados para o modelo UNB_TopoDens, para identificar as diferenças observadas espacialmente. Os resultados sugerem que as diferenças observadas estão possivelmente associadas ao maior detalhamento das unidades litológicas e à diferença de escala ou mapas utilizados como referência, considerados nesta pesquisa, em comparação com o modelo global.

Do ponto de vista geológico, os valores modelados evidenciam a separação entre as bacias fanerozóicas, de composição predominantemente sedimentar, e as demais províncias que agregam rochas metamórficas e ígneas. Além disso, os dados também mostram que as províncias mais antigas têm valores de densidade média mais elevados em comparação com outras províncias.

Por fim, o aprimoramento do modelo utilizado para determinar a distribuição da densidade de massa topográfica no Brasil deve ser sempre um estudo em evolução e contínuo que promova o detalhamento de mapas geológicos e a expansão do banco de dados de densidade *in situ*.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CPRM (Companhia de Pesquisa de Recursos Minerais) pelo fornecimento do mapa litológico, à UnB (Universidade de Brasília), ao DNIT (Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes), ao INCTET (465613/2014-4) e à FAPDF (0193.001230/2016) pelo suporte técnico e financeiro para realização da pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Abdulahakimovich, D.N.; Axrorovich, T.I. (2018) Using active sludges of cleaning facilities for obtaining the organomineral nitrophosphoric polymicroelement fertilizer enhanced by phosphorus. *International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology*, 5(5), 5725-5732.
- Almeida, F.F.M.; Brito Neves, B.B.; Carneiro C.D.R. (2000) The origin and evolution of the South American platform. *Earth-Science Reviews.*, 50(1-2): 77-111.
- Almeida, F.F.M.; Hasui, Y.; Brito Neves, B.B., Fuck, R.A. (1981). Brazilian structural provinces: An introduction. *Earth Sciences Reviews* 17, 1-21.
- Bear, G.W.; Al-Shukri, H.J.; Rudman, A.J. (1995). Linear inversion of gravity data for 3-D density distributions. *GEOPHYSICS* 60 (5), 1354–1364. <https://doi.org/10.1190/1.1443871>.
- Birch, F. (1960). The Velocity of Compressional Waves in Rocks to 10 Kilobars, Part 1. *Jour. Geophys. Res.* 65, 1083-1102.
- Bizzi, L.A.; Schobbenhaus, C.; Vidotti, R.M., Gonçalves, J.H. (2003). *Geologia, Tectônica e Recursos Minerais do Brasil: texto, mapas e SIG.*, Brasília: CPRM – Serviço Geológico do Brasi, 2003.
- Columbu, S.; Cruciani, G.; Fancello, D.; Franceschelli, M.; Musumeci, G. (2015). Petrophysical properties of a granite-protomylonite-ultramylonite sequence: insight from the Monte Grighini shear zone, central Sardinia, Italy. *European Journal of Mineralogy*, 27, p. 471 - 486. DOI: 10.1127/ejm/2015/0027-2447
- Cordani, U.G.; Brito-Neves, B.B.; D'Agrella-Filho, M.S. (2003). From Rodinia to Gondwana: a review of the available evidence from South America. *Gondwana* , 6(2), 275-284.
- Driessen, P.M.; Rochimah, L.(1976). The physical properties of lowland peats from Kalimantan and their significance for land suitability appraisal. In: *Research on peat and podzolic soils in Indonesia and their potential for agriculture*. Soil Research Institute, Bogor, Indonesia.
- Eshaghi, E.; Smith, R. S.; Ayer, J. (2019). Petrophysical characterisation (i.e. density and magnetic susceptibility) of major rock units within the Abitibi Greenstone Belt:

Laurentian University Mineral Exploration Research Centre, publication number MERC-ME-2019-144.

- Featherstone, W.E.E.; Tziavos, I.N. (2001). First results of Using Digital Density Data in Gravimetric Geoid Computation in Australia. In: Sideris M.G. (eds) Gravity, Geoid and Geodynamics 2000. International Association of Geodesy Symposia., 123. Springer, Berlin, Heidelberg.
- Ferreira, A.C.M.; Ferreira, V.P.; Soares, D.R.; Vilarroel-Leo, H.S. (2005). Chemical and mineralogical characterization of elbaïtes from the Alto Quixaba pegmatite, Seridó province, NE Brazil. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, 77(4), 729-743. <https://doi.org/10.1590/S0001-37652005000400011>.
- Garzón, E.; Sánchez-Soto, P.J.; Romero, E. (2010). Physical and geotechnical properties of clay phyllites, *Applied Clay Science*, Volume 48, Issue 3, Pages 307-318. <https://doi.org/10.1016/j.clay.2009.12.022>.
- Gendzwill, D.J. (1969). Densities of Precambrian rocks of the Amisk Lake - Flin Flon area. A detailed study. *Canadian Journal of Earth Sciences*, 6, 1227-1243.
- Hartmann, J.; Moosdorf, N. (2012). The new global lithological map database GLiM: A representation of rock properties at the Earth surface, *Geochem. Geophys. Geosyst.*, 13, Q12004, 1-37.
- Hinze, W.J. (2003). Bouguer reduction density, Why 2.67: *Geophysics.*, 68, 1559–1560.
- Hofmann-Wellenhof B.; Moritz, H. (2006). *Physical geodesy*. 2^a Ed. Wien: Springer.
- Huang, J.; Vaníček, P.; Pagiatakis, S.D.; Brink, W. (2001). Effect of topographical density on geoid in the Canadian Rocky Mountains. *Journal of Geodesy.*, 74, n. 11/12, 805-815.
- Kiamehr, R. (2006). The impact of lateral density variation model in the determination of precise gravimetric geoid in mountainous areas: a case study of Yran. *Geophysic Journal International.*, 167, 521-527.
- Kozlovskaya, E.; Elo, S.; Hjelt, S.; Yliniemi, J.; Pirttijärvi, M. (2004). 3-D density model of the crust of southern and central Finland obtained from joint interpretation of the SVEKALAPKO crustal P-wave velocity models and gravity data. *Geophysical Journal International*, 158 (3), 827-848, doi: 10.1111/j.1365-246X.2004.02363.x.
- Langenheim, V.E.; Jachens, R.C.; Morton, D.M.; Kistler, R.W.; Matti, J.C. (2004). Geophysical and isotopic mapping of preexisting crustal structures that influenced

- the location and development of the San Jacinto fault zone, southern California. *GSA Bulletin*; 116 (9-10): 1143–1157. doi: <https://doi.org/10.1130/B25277.1>.
- Li, D.; Wong, L.N.Y.G.L.; Zhang, X. (2012). Influence of water content and anisotropy on the strength and deformability of low porosity meta-sedimentary rocks under triaxial compression, *Engineering Geology*, 126, 46-66.
- Lionjanga, A.V.; Toole, T.; Newill D. (1987). The development of specifications for the use of low-grade caicretes in lightly trafficked roads in Botswana. *Transportation Research Record* 1106, Volume 1. Washington DC: Transportation Research Board, National Research Council, 281-304.
- Marotta, G.S.; Almeida, M.A.; Chuerubim, M.L. (2019). Análise da Influência do Valor de Densidade na Estimativa do Modelo Geoidal Local para o Distrito Federal, Brasil. *Revista Brasileira de Cartografia*, 71(4), 1089-1113.
- Martinec, Z. (1993). Effect of lateral density variations of topographical masses in view of improving geoid model accuracy over Canada. Contract report for Geodetic Survey of Canada, Ottawa, Canada.
- Okogbue, C.O.; Aghamelu, O.P. (2020). Magaji, S. Assessment of Quality of Some Laterites in Northeastern Nigeria by Multivariate Analysis of their Geotechnical Index Properties. *Natural Resources Research*, 29, 3015–3033. <https://doi.org/10.1007/s11053-020-09632-4.2020>.
- Pedreira, A.J.; Lopes, R.C.; Vasconcelos A.M.; Bahia, R.B. (2003). Bacias sedimentares Paleozóicas e Meso-Cenozóicas interiores. In: Bizzi LA, Schobbenhaus C, Vidotti RM, Gonçalves JH (eds) *Geology, Tectonics and Mineral Resources of Brazil*. Serviço Geológico – CPRM, Brasília, 55–85.
- Piccirillo, E.M.; Comin-Chiaramonti, P., Melfi, A.J., Stolfa, D., Bellieni, G., Marques, L.S., Giaretta, A., Nardy, A.J.R., Pinese, J.P.P., Raposo, M.I.B., Roisenberg, A. (1988). Petrochemistry of Continental Flood Basalt-Rhyolite Suites and Related Intrusive from the Paraná Basin (Brazil). In: Piccirilo E.M., Melfi A.J. (Eds.). *The Mesozoic Flood Volcanism of the Paraná Basin: Petrogenetic and Geophysical Aspects*. São Paulo, Instituto Astronômico e Geofísico, Universidade de São Paulo. 107-156.
- Pagiatakis, S.D.; Armenakis, C. (1999). Gravimetric geoid modelling with GIS, *International Geoid Service Bulletin.*, 8, 105–112.

- Pereira, H. S. (2017). Integração de Dados Geológicos, Geoquímicos, Espectrorradiométricos e de Propriedades Físicas de Rochas: Estudo de Caso do Corpo N5S Província Mineral de Carajás., Master's Thesis. Universidade de Brasília.
- Rózsa, S. (2002). Local geoid determination using surface densities. *Periodica Polytechnica Ser. Civ. Eng.*, 46 (2) , 205-212.
- Salas, H.T.; Nalini, H.A.; Mendes, J.C. (2006). Radioactivity dosage evaluation of Brazilian ornamental granitic rocks based on chemical data, with mineralogical and lithological characterization. *Environ Geol* 49, 520–526. <https://doi.org/10.1007/s00254-005-0066-3>
- Salimun, N.; Abdul, A.G.; Mohd.; K., A. (2018). Correlation of seismic velocity and density of metasandstone from Kati Formation, Seri Iskandar, Perak, Malaysia. *Bulletin of the Geological Society of Malaysia*, 65, 131 – 134.
- Santos, J.O.S. (2003). Geotectônica dos escudos das Guianas e Brasil-Central. In: Bizzi, L.A., Schobbenhaus, C., Vidotti, R.M., Gonçalves, J.H. (Eds.), *Geologia, Tectônica e Recursos Minerais do Brasil*. CPRM, Brasília, 169-226.
- Scarpelli, W.; Horikava, É. H. (2017). Gold, iron and manganese in central Amapá, Brazil. *Brazilian Journal of Geology*, 47(4), 703-721. <https://doi.org/10.1590/2317-4889201720170114>.
- Scoates, J.S. (2000). The Plagioclase–Magma Density Paradox Re-examined and the Crystallization of Proterozoic Anorthosites, *Journal of Petrology*, 41 (5), 627–649, <https://doi.org/10.1093/petrology/41.5.627>.
- Sheng, M.B.; Shaw, C.; Vanícek, P.; Kingdon, R.W.; Santos, M.; Foroughi, I. (2019). Formulation and validation of a global laterally varying topographical density model, *Tectonophysics*, doi.or/10.1016.j.tecto.2019.04.005.
- Smithson, S.B. (1971). Densities of metamorphic rocks. *Geophysics* 36:690-694.
- Sjöberg, L.E. (2004). The effect on the geoid of lateral density variations. *Journal of Geodesy*, 78, 34-39.
- Subrahmanyam, C.; Verma, R.K. (1981). Densities and Magnetic Susceptibilities of Precambrian Rocks of Different Metamorphic Grade (Southern Indian Shield). *Journal of Geophysics*, 49 (1), 101-7.

- Tenzer, R.; Sirguey, P.; Rattenbury, M.; Nicolson, J. (2011). A digital rock density map of New Zealand, *Computer & Geosciences.*, 37, 1181-1191.
- Tenzer, R.; Vaníček, P. (2003). Correction to Helmert's orthometric height due to actual lateral variation of topographical density. *Revista Brasileira de Cartografia.*, 55(02), 44-47.
- Toczeck, A.; Schmitt, R.S.; Braga, M.A.S.; Miranda, F.P. (2019). Tectonic evolution of the Paleozoic Alto Tapajós intracratonic basin - A case study of a fossil rift in the Amazon Craton. *Journal of South American Earth Sciences*, 94, 102225.
- Toushmalani, R.; Saibi, H. (2015). 3D gravity inversion using Tikhonov regularization. *Acta Geophys* 63 (4), 1044–1065. <https://doi.org/10.1515/acgeo-2015-0029>.
- Trčková, J., 2005. Physical, mechanical and deformational properties of metabasalts, amphibolites and gneisses from ksdb-3 compared with surface analogues. *Acta Geodynamica et Geomaterialia.*, 2, 4 (140), 39-47.
- Vaníček, P.; Krakiwsky, E.J., 1986. *Geodesy the Concepts*. 2nd ed. Amsterdam, North Holland.
- Wang, X.; Fang, J.; Hsu, H. (2011). Three-dimensional crustal density distribution beneath North China by sequential inversion of local earthquake traveltimes and gravity anomaly. *Earthquake Science*, 24, 135–141. <https://doi.org/10.1007/s11589-010-0778-7>
- Winter, J.D. (2001). *An introduction to Igneous and Metamorphic Petrology*. New Jersey: Prentice-Hall.
- Yang, T.; Gao, J.; Gu, Z.; Dagva, B.; Tserenpil, B. (2013). Petrophysical Properties (Density and Magnetization) of Rocks from the Suhbaatar-Ulaanbaatar-Dalandzadgad Geophysical Profile in Mongolia and Their Implications. *The Scientific World Journal*, 2013, 791918. <https://doi.org/10.1155/2013/791918>

5 ALTITUDE ORTOMÉTRICA, NORMAL E ALTURA GEOIDAL NO CONTEXTO DA REDE ALTIMÉTRICA BRASILEIRA

Danilo Fernandes de Medeiros¹, Giuliano Sant'Anna Marotta¹, Carlos Alberto Moreno Chaves², George Sand Leão Araújo de França².

¹ Universidade de Brasília, Instituto de Geociências, Brasília – Distrito Federal, Brasil.
e-mail: danilofmedeiros@yahoo.com.br; marota@unb.br, georgesand@unb.br

² Universidade de São Paulo, Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas, São Paulo – São Paulo, Brasil. E-mail: carlos.chaves@iag.usp.br

Publicado: *Bulletin of Geodetic Sciences*. 28 (01), 2022

RESUMO

O uso extensivo de posicionamento GNSS, combinado com a importância de alturas geoidais precisas para transformação entre as altitudes geométricas e ortométricas, traz à tona a discussão sobre a influência das incertezas dos dados e uso de valores de densidade variável nessas estimativas. Nesse sentido, analisamos a influência da distribuição da densidade das massas topográficas e a incerteza dos dados no cálculo das altitudes ortométricas e alturas geoidais em estações da Rede Altimétrica de Alta Precisão do Brasil, considerando os métodos de Helmert e Mader. Para isso, usamos 569 estações cujos valores de altitudes geométricas e normais, gravidade e números geopotenciais são conhecidos. Os resultados indicam que as altitudes ortométricas são mais sensíveis aos valores de densidade em maiores altitudes, nos métodos de Helmert e Mader. Além disso, verificamos que as altitudes normais e ortométricas apresentam diferenças significativas para as estações analisadas, considerando a alta correlação entre as altitudes, que fornecem pequenos valores de incerteza. No entanto, nossas análises mostram que o uso do método de Mader, juntamente com valores de densidade variável, fornece resultados mais rigorosos, ou mais confiáveis.

Palavras Chaves: Densidade; Geiodes; Altitude Normal; Altitude Ortométrica; Incertezas

5.1 INTRODUÇÃO

As obras de engenharias, estudos hidrodinâmicos e/ou hidrológicos são elementos localizáveis no espaço que necessitam de referenciais altimétricos e planimétricos adequados. Segundo Sánchez e Freitas (2016), os países da América do Sul atualmente não possuem um único sistema de referência vertical e, portanto, cada país tem seu próprio *datum* vertical associado a uma superfície plana obtida de um ou mais registros de marégrafos.

Visando a unificação dos sistemas altimétricos, o Sistema de Referência Geocêntrico para as Américas (SIRGAS) em harmonia com a resolução N° 1/2015 da Associação Internacional de Geodésia (IAG, 2015), que dispõe sobre o Sistema Internacional de Referência para Altitudes (IHRF/IHRF), vem reunindo esforços para definição de um sistema de referência vertical para as Américas, o qual estabeleceu a escolha de altitudes científicas, normal ou ortométricas, para referenciar o sistema vertical, apesar da recomendação da adoção da altitude normal.

Diante da possibilidade de escolhas de diferentes altitudes científicas, observa-se que diferentes países vêm adotando altitudes científicas distintas, como altitude ortométrica na Argentina (IGNA, 2017) e altitude normal juntamente com números do geopotencial no Brasil (IBGE, 2018).

Quanto à escolha de qual a altitude científica é mais adequada para adoção de um referencial vertical, há grandes discussões junto à comunidade científica. De um lado, considera-se correto utilizar uma superfície equipotencial vinculada ao campo de gravidade da Terra (o geóide), e a utilização de altitude ortométrica. Por outro lado, devido à impossibilidade de conhecer, com precisão, a distribuição da densidade das massas topográficas, considera-se prudente utilizar uma superfície convencional que se aproxima do geóide (o quase-geóide), e a utilização de altitude normal.

Devido ao problema exposto, diversas pesquisas (Tenzer et al., 2006; Flury e Rummel, 2009; Ferreira et al., 2011; Albarici et al., 2018; Sjöberg, 2018; Tocho et al., 2020) vêm trabalhando no aprimoramento do cálculo da separação geóide e quase-geóide (SGQ). Junto a estes estudos, a utilização de modelos de densidade lateral das massas topográficas mais detalhados vem proporcionando melhores precisões nas estimativas de

altitudes ortométricas e, conseqüentemente, no cálculo mais rigoroso da SGQ (Pick et al., 1973; Vaniček et al., 2003).

Diante do exposto, este estudo tem objetivo de analisar a influência da distribuição da densidade das massas topográficas e suas incertezas no cálculo das altitudes ortométricas e alturas geoidais em estações da Rede Altimétrica de Alta Precisão (RAAP), usando o método de Helmert (Helmert 1890) quanto o método de Mader (Mader 1954). As estações fazem parte do Sistema Geodésico Brasileiro (SGB) e são mantidas pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

5.2 ALTITUDES NORMAIS, ORTOMÉTRICAS, E ALTURAS GEOIDAIS

Segundo Torge (1991), o número do geopotencial (C) é para descrever o comportamento das massas no campo gravitacional. No entanto, contraria a demanda por um sistema de altitude que funcione na unidade métrica. Nesse caso, a altitude física (H_F) pode ser apresentada pela seguinte expressão (Heiskanen e Moritz, 1967; Torge, 1991):

$$C = W_0 - W_P = - \int_0^P dW = \int_0^P g \cdot dH \cong \sum_{i=1}^n \bar{g}_i \cdot \Delta H_i \quad (1)$$

$$H_F = \frac{C}{G} \quad (2)$$

W_0 e W_P representam os potenciais de gravidade no nível do geoide e do ponto (P), respectivamente; g e $\bar{g}$ representam o campo de gravidade terrestre e o valor médio de gravidade, respectivamente; ΔH a diferença de altitude; e G o valor particular de gravidade.

Drewes et al. (2002) mostraram que o tipo de altitude, a superfície de referência, a realização e a manutenção do sistema de referência são apresentadas como principais tópicos para a definição do sistema de referência vertical, para o SIRGAS, e recomendaram a introdução de dois tipos de altitudes, geométrica (h) e normal (H_N). Neste contexto, pela Equação 2, H_N é definida considerando o valor médio da gravidade normal ($\bar{\gamma}$) ao longo da vertical (Figura 5.1). Nesta condição, H_N é medida ao longo da

direção denominada vertical normal e, por não considerar a Terra real, se refere ao quase-geóide e não ao geóide.

Segundo Heiskanen e Moritz (1967), IBGE (2018) e Marotta (2020), tem-se:

$$H_N = \frac{c}{\bar{\gamma}} \quad (3)$$

$$\bar{\gamma} = \gamma_0 \cdot \left[1 - \frac{H_N}{a} \cdot (1 + f + m - 2 \cdot f \cdot \text{sen}^2 \varphi) + \left(\frac{H_N}{a} \right)^2 \right] \quad (4)$$

$$\gamma_0 = \gamma_a \cdot \frac{1 + k \cdot \text{sen}^2 \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi}} \quad (5)$$

$$k = \frac{b\gamma_b - a\gamma_a}{a\gamma_a} \quad (6)$$

$$m = \frac{\omega^2 \cdot a^2 \cdot b}{GM} \quad (7)$$

φ representa a latitude geodésica; a , b , e e f representam os semieixos maior e menor, a primeira excentricidade e o achatamento, respectivamente; γ_a , γ_b e γ_0 representam gravidade normal no equador, no polo e no ponto considerado, respectivamente; e ω e GM representam a velocidade angular e a constante gravitacional geocêntrica. Todos os parâmetros apresentados estão associados ao elipsoide de referência adotado.

Considerando o geóide como referência na Equação 2, tem-se a altitude ortométrica (H) como definição, e o valor médio da gravidade ($\bar{g}$) medida ao longo da linha de prumo (Figura 5.1). Isto gera a necessidade de conhecer os valores da gravidade no interior da Terra com precisão, porém, ainda não é possível por causa da dificuldade de se estimar a distribuição da densidade no interior da Terra com precisão (Marotta, 2020).

$$H = \frac{c}{\bar{g}} \quad (8)$$

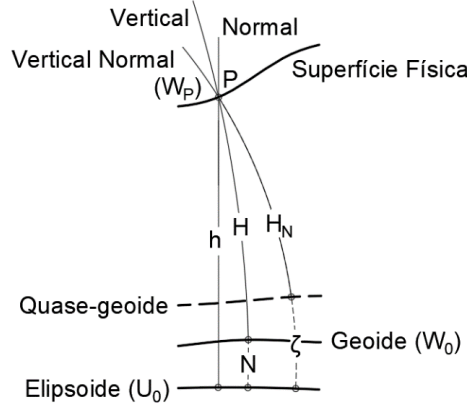


Figura 5.1: Altitudes geométrica (h), ortométrica (H), normal (H_N), juntamente com altura geoidal (N) e anomalia de altura (ζ), no ponto P . U_0 representa o potencial normal, e W_0 e W_P os potenciais de gravidade no nível do geoide e do ponto (P), respectivamente.

Apesar da dificuldade de determinar valores de H pelos motivos expostos e considerando a importância em se utilizar o geoide como referência, algumas abordagens foram desenvolvidas (Helmert, 1890; Niethammer, 1932; Ramsayer, 1953 e 1954; e Mader, 1954), as quais se baseiam em hipóteses para estimativa do valor médio de gravidade ao longo da linha de prumo.

Dentre as diferentes abordagens, as desenvolvidas por Helmert (1890) e Mader (1954) vêm sendo amplamente empregadas.

A altitude ortométrica de Helmert (H_H) assume a hipótese de que a gravidade varia linearmente com a altitude. Neste caso, aplicam-se as reduções simplificadas de Poincaré-Prey (Heiskanen e Moritz, 1967; Torge, 1991) na estimativa do valor médio de gravidade ao longo da linha de prumo ($\bar{g}_H$).

$$\bar{g}_H = g - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial H} H - 2\pi G \rho H \quad (9)$$

onde $\frac{\partial g}{\partial H} H$ pode ser estimado conforme apresentado por Featherstone e Dentith (1997) e Marotta e Vidotti (2017).

$$-\frac{\partial g}{\partial H} H \approx -\frac{\partial \gamma}{\partial h} H = \frac{2\gamma_0}{a} H [1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi] - \frac{3\gamma_0 H^2}{a^2} \quad (10)$$

g representa a gravidade observada no ponto de interesse; $\frac{\partial \gamma}{\partial h}$ o gradiente linear vertical da gravidade normal; G é a constante gravitacional universal; ρ é a densidade; H a altitude ortométrica; φ a latitude geodésica; a e f o semieixo maior e o achatamento do elipsoide de referência; m é representado pela Equação 7; e γ_0 a gravidade normal no ponto considerado.

Cabe ressaltar que a redução de Poincaré-Prey aplica uma série de simplificações com respeito às massas externas ao geóide e negligência a rugosidade do terreno residual (Santos et al., 2006).

A altitude ortométrica de Mader (H_M) incorpora em H_H correções do efeito do terreno (Mader, 1954; Heiskanen e Moritz, 1967; Dennis e Featherstone, 2003) definidos na superfície topográfica (C_{Tp}) e no geóide (C_{Tg}), para estimativa de valores de valores médios de gravidade mais realistas ($\bar{g}_M$).

$$\bar{g}_M = g - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial h} H - 2\pi G \rho H + \frac{(C_{Tp} - C_{Tg})}{2} \quad (11)$$

Segundo Hwang e Hsiao (2003), C_{Tp} e C_{Tg} é dado por:

$$C_{Tp} = G \iint_E \int_{z=H_p}^H \frac{\rho(x,y,z)(z-H_p)}{\left[\sqrt{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 + (z-H_p)^2} \right]^3} dx dy dz \quad (12)$$

$$C_{Tg} = G \iint_E \int_{z=H_p}^H \frac{\rho(x,y,z)z}{\left[\sqrt{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 + z^2} \right]^3} dx dy dz \quad (13)$$

E representa a área de integração; ρ a densidade no ponto de integração; e x, y as coordenadas planimétricas e z e H_p as altitudes ortométricas dos pontos de integração e dos pontos de cálculo (P). Flury e Rummel (2009) destacam que, apesar de $\bar{g}_M$ incorporar aproximação rigorosa para a atração topográfica em ambas as extremidades da linha de prumo, na superfície e no geóide, as mudanças não lineares entre elas são negligenciadas.

Conhecidos os valores de h , H e H_N , e considerando a anomalia de altura (ζ), a altura geoidal (N) pode ser estimada por meio de uma relação algébrica (Equações 14 e 15) apresentada por Heiskanen e Moritz (1967) e Sjöberg (2010).

$$h \cong H + N \quad (14)$$

$$h \cong H_N + \zeta \quad (15)$$

onde,

$$\zeta - N = \Delta H H_N = H - H_N \quad (16)$$

Dentro das relações apresentadas para estimativa de H e N , verifica-se a densidade, ρ , como uma propriedade física que influencia na variação do campo de gravidade da Terra, está diretamente associada aos resultados alcançados. De acordo com Flury e Rummel (2009) e Hinze (2003), a variação de ρ , considerando as massas topográficas, pode variar entre 10 à 20% do valor médio de densidade (2.670 kg/m³) historicamente adotado por diversos trabalhos, pois é influenciada pela profundidade, composição mineralógica e eventos geológicos que alteram a estratificação das camadas de rocha no interior da Terra.

Apesar da dificuldade de se desenvolver modelos tridimensionais, muitos estudos vêm sendo desenvolvidos para estimativa e uso de modelos de distribuição lateral de densidade de massas topográficas cada vez mais confiáveis (Martinec et al., 1995; Pagiatakis e Armenakis, 1999; Kuhn, 2000; Huang et al., 2001; Tziavos e Featherstone, 2001; Rózsa, 2002; Sjöberg, 2004; Kiamehr, 2006; Tenzer et al., 2011; Marotta et al., 2019; Sheng et. al., 2019). Esses modelos, globais, regionais ou locais, têm sido desenvolvidos principalmente por meio de mapas geológicos combinados com valores de densidade aparente de rochas ou dos seus arranjos, coletados em campo.

Conhecendo-se as formulações apresentadas e considerando um dado conjunto de informações para procedimento de cálculo, torna-se possível a propagação e análise das incertezas (σ), usando a Lei geral de propagação de variância. Por consequência,

conhecidos os valores e as incertezas de H_N , g e ρ , e desconsiderando outras fontes de incertezas, por exemplo, é possível avaliar influência destes na estimativa de H e N e as diferenças entre H e H_N , denominada por ΔHH_N , expressa a seguir:

$$\sigma_H = \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial H_N}\right)^2 \sigma_{H_N}^2 + \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial g}\right)^2 \sigma_g^2 + \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial \rho}\right)^2 \sigma_\rho^2} \quad (17)$$

$$\sigma_{\Delta HH_N} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta HH_N}{\partial H}\right)^2 \sigma_H^2 + \left(\frac{\partial \Delta HH_N}{\partial H_N}\right)^2 \sigma_{H_N}^2} \quad (18)$$

$$\sigma_N = \sqrt{\left(\frac{\partial N}{\partial H}\right)^2 \sigma_H^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial h}\right)^2 \sigma_h^2} \quad (19)$$

Para estimar σ_H , $\sigma_{\Delta HH_N}$ e σ_N , usamos as Equações (16) e (14), onde é obtida por combinando as Equações (3) e (8):

$$H = \frac{\bar{y}H_N}{\bar{g}} \quad (20)$$

Onde H e $\bar{g}$ assumem formulações associadas completas apresentadas para os métodos de Helmert e Mader. O termo σ_{H,H_N}^2 é calculado usando a seguinte equação (21):

$$\sigma_{H,H_N}^2 = \left(\frac{\partial H}{\partial H_N}\right)^2 \sigma_{H_N}^2 \quad (21)$$

5.3 H , ΔHH_N e N no contexto da Rede Altimétrica de Alta precisão do Brasil (RAAP)

Desde 2018 e de acordo com recomendações apresentadas por Drewes et al. (2002), o Brasil tem adotado H_N juntamente com C (IBGE, 2018) como definição para sua RAAP. No entanto, considera-se que H e ΔHH_N são muito importantes não só para

estabelecer as relações entre os diferentes tipos de altitudes, mas também para apoiar o desenvolvimento de outros modelos, tais como os modelos de geóide. Assim, este estudo inclui a utilização de dados RAAP, que são fornecidos pelo IBGE; dois modelos de densidade lateral das massas topográficas (30 arc-segundos de resolução espacial), o LTD_Brazil, de Medeiros et al. (2021), e o UNB_TopoDensT, de Sheng et al. (2019); e o Modelo de Elevação Digital (DEM), do Shuttle Missão de Topografia Radar - SRTM, com 30 arc-segundos de resolução espacial (Farr et al. 2007).

Quanto à RAAP, foram utilizadas 569 estações cujos valores de $h \pm \sigma_h$, $H_N \pm \sigma_{H_N}$, C e g (Figura 5.2). Para computar g para cada estação, $H \pm \sigma_H$ e $\Delta HH_N \pm \sigma_{\Delta HH}$, foram estimados considerando os valores de $\rho \pm \sigma_\rho$ constante e variável (LTD_Brazil e modelos UNB_TopoDensT) para os métodos de Helmert e Mader. Também, para estimativa de valores de $C_{Tp} \pm \sigma_{Tp}$ e $C_{Tg} \pm \sigma_{Tg}$ adotado na aplicação do método de Mader, foram utilizados dados de altitude extraídos do MDT e raio de integração de até 167 km. Já para os valores observados de g , foi adotado o valor de 0,01 mGal como incerteza para todas as estações utilizadas, considerando a resolução do tipo de gravímetro mais utilizado no Brasil e na América Latina (Amarante e Trabanco 2016), o gravímetro Lacoste e Romberg modelo G.

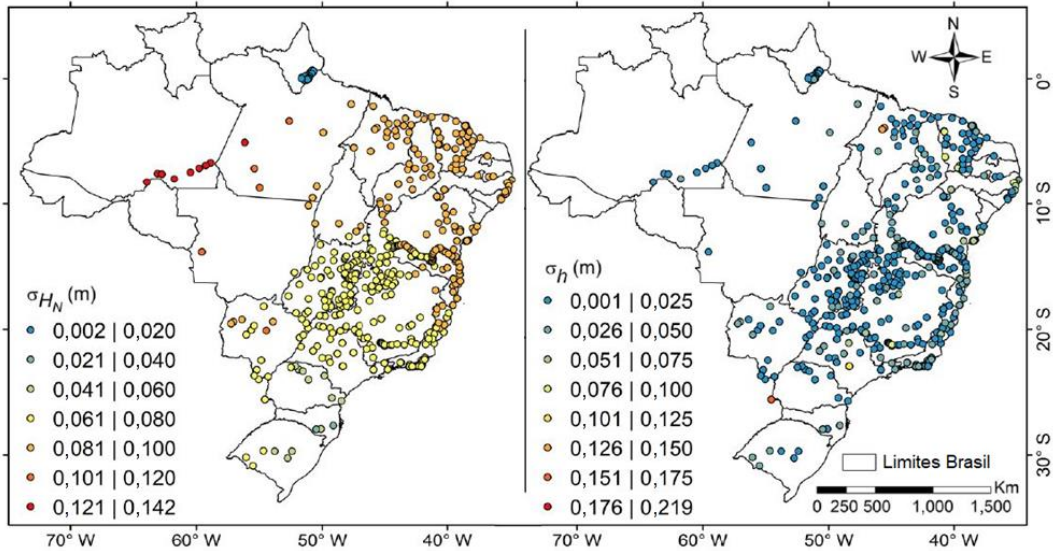


Figura 5.2: Estações da RAAP e distribuição dos valores de σ_{H_N} e σ_h associados aos valores de H_N e h utilizados neste estudo.

Em relação à densidade constante, $\rho \pm \sigma_\rho$, foi adotado um valor médio de $2.670 \pm 800 \text{ kg/m}^3$, conforme apresentado por Hinze (2003) e Sheng et al. (2019). Também,

para densidade variável, $\rho \pm \sigma_\rho$, foram adotados valores variáveis definidos pelo modelo LTD_Brazil para a área de estudos (Brasil), seguido do modelo UNB_TopoDensT para obtenção de valores em regiões que extrapolam a área de estudos (Figura 5.3). Além disso, para a região oceânica, assumimos $H = 0$ m para o nível médio do mar e um valor de densidade da água do mar de $1030 \pm 0 \text{ kg/m}^3$ (García-Abdeslem 2020).

A motivação do uso de dois modelos de densidade lateral das massas topográficas, juntamente com suas incertezas, pode ser justificada por suposições de que o LTD_Brazil é mais detalhado que o UNB_TopoDensT. O LTD_Brazil foi desenvolvido com base no mapa geológico do Brasil, na escala de 1:2.500.000 (Bizzi et al., 2003), no qual foram considerados 815 unidades litológicas e 78 diferentes tipos de rocha, agrupados dos 369 tipos originalmente identificados. Já o UNB_TopoDensT foi desenvolvido considerando 15 unidades litológicas principais extraídas do Modelo de Litosfera Global (GLiM).

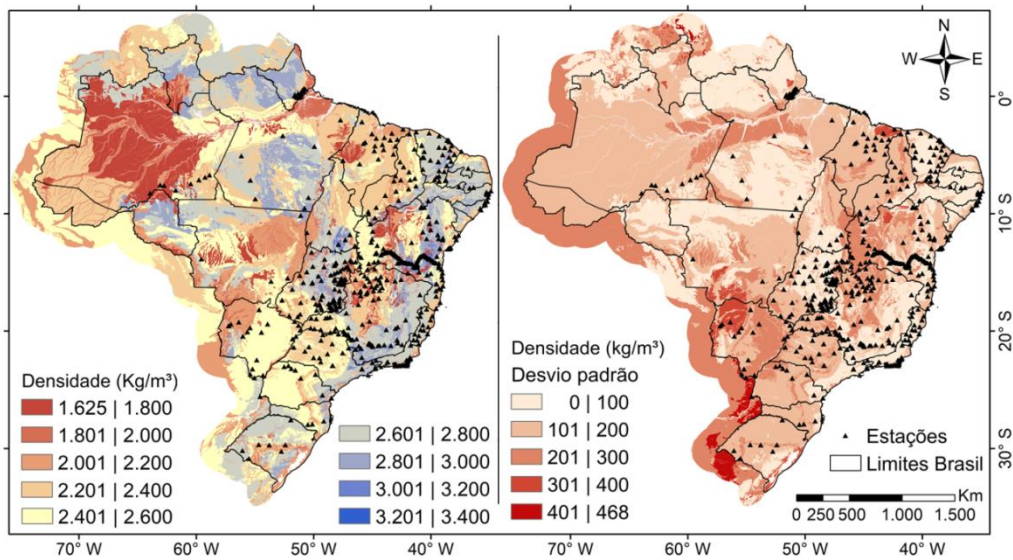


Figura 5.3: Estações da RAAP selecionadas e valores de densidade lateral das massas topográficas, juntamente com suas incertezas, segundo modelos LTD_Brazil (para o Brasil) e UNB_TopoDensT (regiões que extrapolam a área de estudos - Brasil).

Após estimativa dos valores de $H \pm \sigma_H$ e $\Delta HH_N \pm \sigma_{\Delta HH_N}$ para os pontos selecionados da RAAP, foram realizadas análises da sensibilidade dos resultados em relação aos dados utilizados ($H_N \pm \sigma_{H_N}$) e estimados ($H_H \pm \sigma_{H_H}$ e $H_M \pm \sigma_{H_M}$), com propósito de identificar a presença de diferenças significativas. E após estimativas e análises citadas, foram estimados valores de $N \pm \sigma_N$ para as estações utilizadas neste trabalho.

5.4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para comparar a diferença entre os valores estimados de H e σ_H , usando os métodos de Helmert e Mader, para valores de densidade constante e variável, na Figura 5.4 analisamos os valores estimados de ΔHH_N e $\sigma_{\Delta HH_N}$ dos métodos Helmert e Mader.

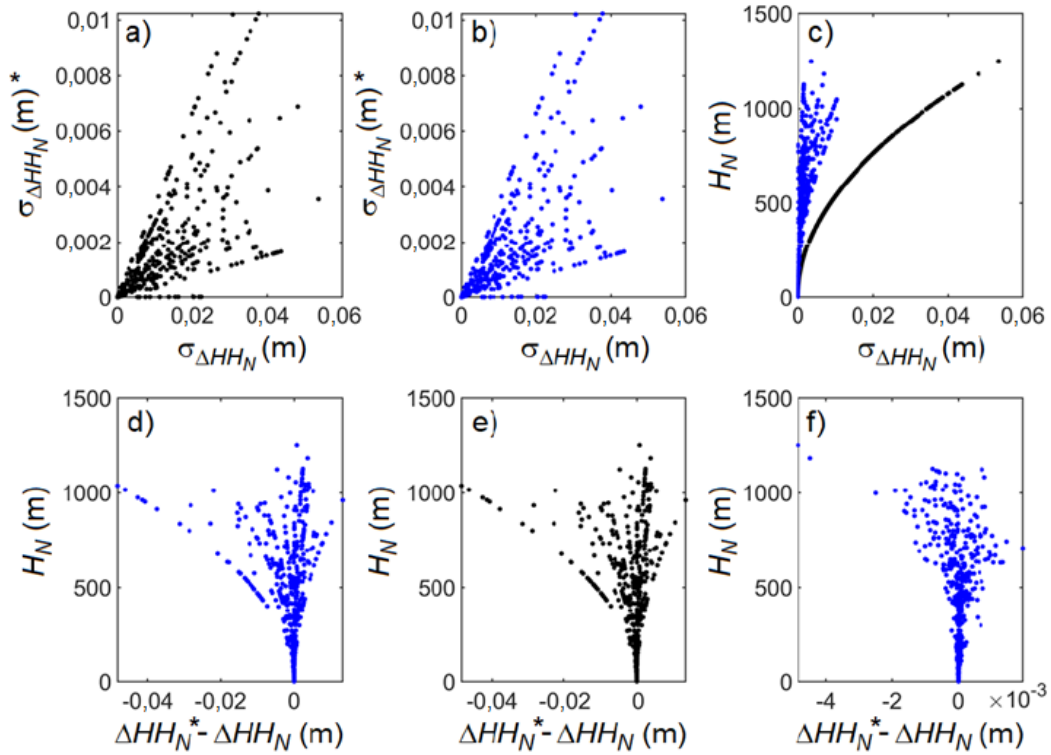


Figura 5. 4: $\sigma_{\Delta HH_N}$ distribuição de valor considerando: a) $H_{H \rho(con)} - H_N$ (eixo horizontal) e $H_{H \rho(var)} - H_N$ (eixo vertical). b) $H_{M \rho(con)} - H_N$ (eixo horizontal) e $H_{M \rho(var)} - H_N$ (eixo vertical). c) $\sigma_{\Delta HH_N}$ versus H_N distribuição de valor considerando $H_{H \rho(con)} - H_N$ (cor preta) e $H_{H \rho(var)} - H_N$ (cor azul). ΔHH_N diferença de valores versus H_N . d) $H_{M \rho(var)} - H_N$ e $H_{M \rho(con)} - H_N$. e) $H_{H \rho(var)} - H_N$ e $H_{H \rho(con)} - H_N$. f) $H_{M \rho(var)} - H_N$ e $H_{H \rho(con)} - H_N$. *Individualizando os valores de H para estimar ΔHH_N

A partir dos resultados apresentados nas Figuras 5.4d e 5.4e, é possível verificar que os valores de diferença de ΔHH_N são sensíveis aos valores de ρ em altitudes maiores nos métodos de Helmert e Mader (Figura 5.4f) usado para valores estimados de H . Além disso, analisando as Figuras 5.4a, 5.4b e 5.4c, considera-se que as incertezas apresentam o mesmo comportamento para ambos os métodos, e os menores valores são apresentados para os valores das variáveis de

ρ . Também, é importante comentar que as incertezas mostradas na Figura 5.4c são fortemente influenciadas pela alta correlação, ou valores de covariância elevados, entre H_N e H .

Para corroborar nossas análises a partir dos resultados apresentados na Figura 5.4, a Figura 5.5 mostra a dispersão de ΔHH_N versus H_N , em que observamos que a maior discrepância entre os métodos utilizados ocorre nas maiores altitudes.

A partir dos resultados alcançados (Figuras 5.4 e 5.5), podemos sugerir que as diferenças significativas estão localizadas principalmente em regiões com grandes altitudes e variações de relevo. Isso ocorre porque a quantidade de massas topográficas acima da superfície geoidal, associada às altitudes, é usada para calcular o valor médio da gravidade ao longo do fio de prumo. Consequentemente, quanto maior a quantidade de massas topográficas, maior é a diferença entre $\bar{g}$ (Equações 8 a 13) e $\bar{\gamma}$ (Equações 3 e 4). Além disso, é importante considerar que as incertezas estimadas nesta pesquisa são em grande parte influenciado pelas incertezas das altitudes normais (Figura 5.2), que são estimadas pelo IBGE. Portanto, uma mudança de incertezas de um novo reajuste da RAAP pelo IBGE provavelmente influenciará os resultados.

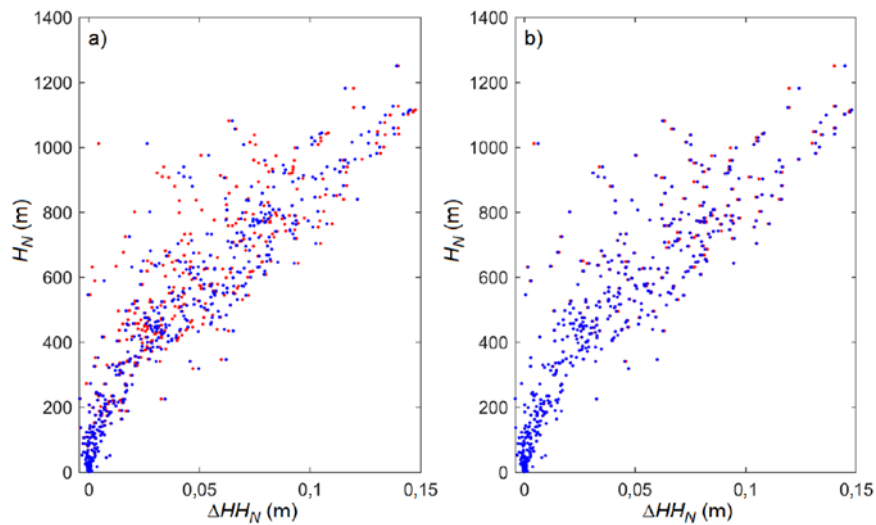


Figura 5.5: Dispersão dos valores de ΔHH_N em relação aos valores de H_N , considerando: a) $H_M \rho_{(var)}$ (cor vermelha), $H_M \rho_{(var)}$ (cor azul). b) $H_H \rho_{(var)}$ (cor vermelha), $H_H \rho_{(var)}$ (cor azul).

Apesar da semelhança entre os resultados alcançados, temos de salientar que $H_M \rho_{(var)}$ envolve uma formulação mais rigorosa, uma vez que leva em conta os termos de correção do terreno. Portanto, nas Figuras 5.6, 5.7 e 5.8 apresenta-se a distribuição

espacial de $\Delta HH_N \pm \sigma_{\Delta HH_N}$, H e $N \pm \sigma_N$, respectivamente, considerando $H_N \pm \sigma_{H_N}$, $H_M \rho_{(var)} \pm \sigma_{H_M \rho_{(var)}}$ e $h \pm \sigma_h$ para todas as estações.

Como os valores de $\sigma_{H_M \rho_{(var)}}$ estão muito próximos de σ_{H_N} (diferenças menores que 1 mm), assume-se que a distribuição espacial de $\sigma_{H_M \rho_{(var)}}$ pode ser representada pela Figura 5.2.

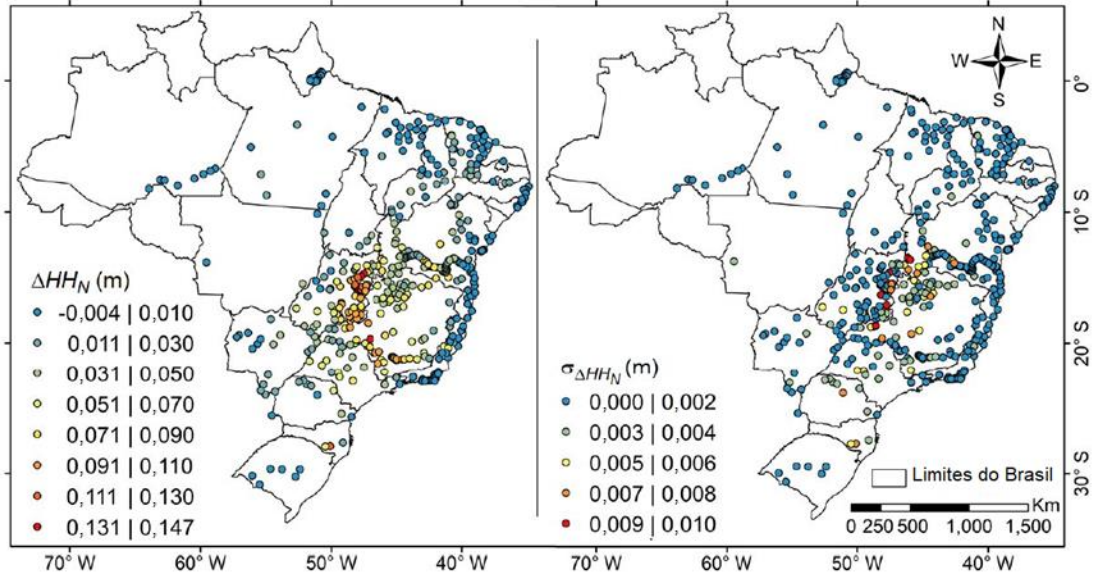


Figura 5.6: $\Delta HH_N \pm \sigma_{\Delta HH_N}$ estimados por meio de valores de $H_N \pm \sigma_{H_N}$ e $H_M \rho_{(var)} \pm \sigma_{H_M \rho_{(var)}}$.

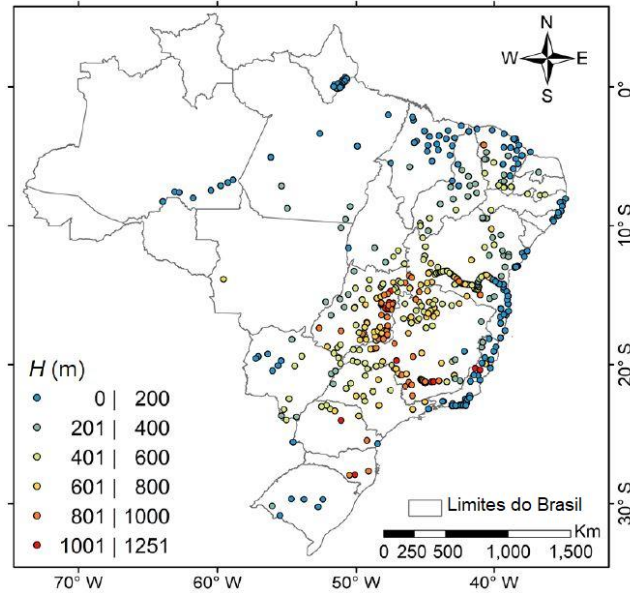


Figura 5.7: Distribuição espacial $H_M \rho_{(var)}$.

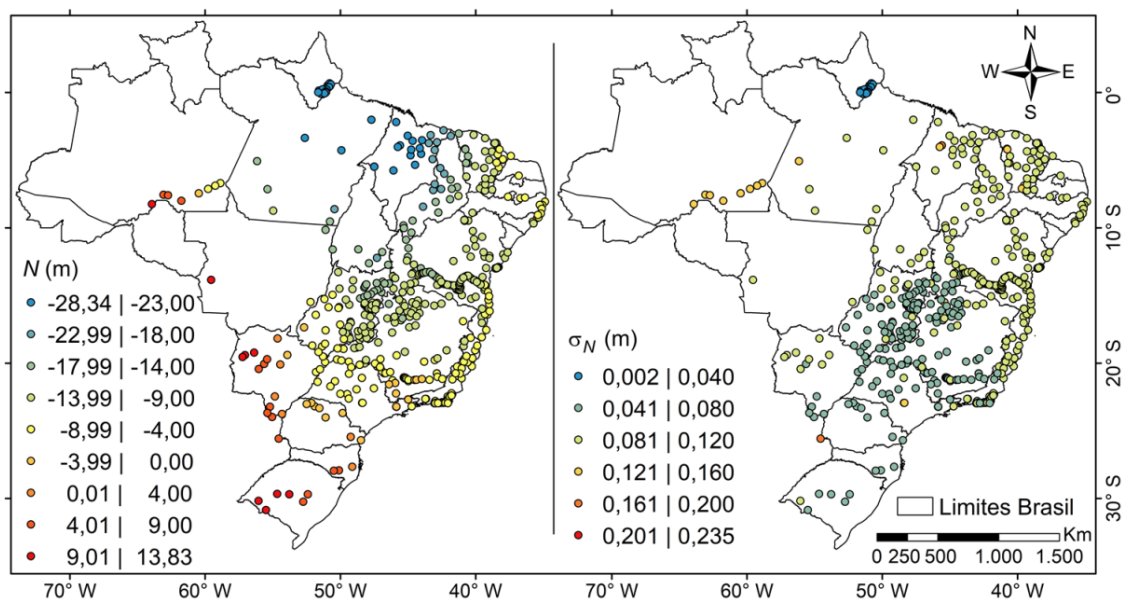


Figura 5.8: Distribuição espacial de $N \pm \sigma_N$ computed using $h \pm \sigma_h$ and $H_{M\rho(var)} \pm \sigma_{H_{M\rho(var)}}$.

A partir dos resultados apresentados nas Figuras 5.6, 5.7, 5.2 e 5.8, observa-se uma grande influência das incertezas das altitudes normais em nossas estimativas. As incertezas das altitudes normais são menores para as estações RAAP mais próximas do *datum* vertical de Imbituba e Santana, definidos para o SGB. Aqui, é importante mencionar que o *datum* vertical de Santana é utilizado apenas para estações localizadas próximas ou ao norte do rio Amazonas, enquanto o *datum* vertical de Imbituba é utilizado para todas as demais estações localizadas no território brasileiro.

Por fim, ao analisar a Figura 5.6, que mostra diferenças entre H e H_N maiores do que a estimada incerteza, é possível sugerir que as altitudes são estatisticamente diferentes considerado nível de confiança de 1σ , ou 68,3%.

5.5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, usamos os métodos de Helmert e Mader, assumindo valores de densidade constante e variável, para o cálculo das altitudes ortométricas. Após a análise de incerteza, calculamos as alturas geoidais para 569 estações de a Rede Altimétrica de Alta Precisão do Brasil para que possam ser utilizadas na análise de modelos geoidais estimados por meio de dados gravimétricos e de posição.

Da análise dos resultados apresentados pelas diferenças entre as altitudes ortométricas e normais, é possível verificar que os valores das altitudes ortométricas são mais sensíveis aos valores de densidade em altitudes maiores aplicando os métodos de Helmert e Mader. Além disso, verificou-se que as incertezas têm o mesmo comportamento para ambos os métodos, e os valores mais baixos são apresentados adotando valores de densidade variável.

Por causa das incertezas associadas aos dados utilizados e propagadas para os valores calculados, foram identificadas diferenças entre os valores de altitude ortométricas estimados, porém, não significativas em relação aos métodos e aos valores de densidade empregados.

Ao analisar as diferenças entre os valores de altitude normal e ortométrica, os valores apresentados são superiores às incertezas estimadas para a maioria das estações utilizadas, e é possível sugerir que ambas as altitudes são estatisticamente diferentes quando se considera 1σ , ou um nível de confiança de 68,3%.

Por fim, este estudo ressalta a importância de se considerar as incertezas associadas e a necessidade de aperfeiçoamento de modelos de distribuição das massas topográficas no processo de estimativa de altitudes ortométricas e de definição da superfície geoidal. Isto motivado, principalmente, pela popularização da tecnologia de Sistemas Globais de Navegação por Satélite (GNSS) e a necessidade do uso de altitudes físicas para trabalhos diversos.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à USGS por fornecer o MDT e ao IBGE por fornecer os dados da RAAP utilizados. Agradecem ao DNIT (Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes), ao INCTET (465613/2014-4) e à FAPDF (0193.001230/2016) pelo suporte financeiro para realização da pesquisa.

REFERÊNCIAS

Albarici, F. L.; Guimarães, G. N.; Foroughi, I.; Santos, M.; Trabanco, J. L. A. (2018).
Separação entre Geoide e Quase-Geoide: Análise das Diferenças Entre as Altitudes

- Normal-Ortométrica e Ortométrica Rigorosa. Anuário do Instituto de Geociências - UFRJ., 41, pp. 71-81.
- Bizzi L. A.; Schobbenhaus, C.; Vidotti, R. M.; Gonçalves, J. H. (2003). Geologia, tectônica e recursos minerais do Brasil: texto, mapas e SIG. Serviço Geológico do Brasil - CPRM, 692 p.
- Drewes, H.; Sánchez, L.; Blitzkow, D.; Freitas, S. R. C. (2002). Scientific Foundations of the SIRGAS Vertical Reference System. Vertical Reference System - VeReS, Springer, Berlin, pp. 197-301.
- Dennis, M.; Featherstone, W. (2003). Evaluation of Orthometric and Related Height Systems Using a Simulated Mountain Gravity Field, in I N Tziavos (ed), 3rd Meeting of the International Gravity and Geoid Commission, Thessaloniki, Greece: Ziti Editions, pp. 389-394.
- Featherstone W. E.; Dentith, M.C. (1997). A Geodetic Approach to Gravity Data Reduction for Geophysics. Computers & Geosciences, 23(10), 1063-1070.
- Ferreira, V.G.; Freitas, S. R. C.; Heck, B. (2011). A Separação entre o Geoide e o Quase-Geoide: Uma Análise no Contexto Brasileiro. Revista Brasileira de Cartografia, 63, pp.39-50.
- Flury, J.; Rummel, R. (2009). On the Geoid-Quasigeoid Separation in Mountain Areas. Journal of Geodesy, 83, pp.829-847.
- Heiskanen, W. A.; Moritz, H. (1967). Physical Geodesy, San Francisco: W.H. Freeman and Co.
- Helmert, F. (1890). Die Schwerkraft im Hochgebirge, insbesondere in den Tyroler Alpen. Veröff. Königl. Preuss. Geod. Inst, 1.
- Hinze, W. J. (2003). Bouguer Reduction Density, Why 2.67. Geophysics, 68(5), pp. 1559-1560.
- Huang, J.; Vaníček, P.; Pagiatakis, S. D.; Brink, W. (2001). Effect of Topographical Density on Geoid in the Canadian Rocky Mountains. Journal of Geodesy, 74(11/12), pp. 805-815.
- Hwang, C.; Hsiao, Y. S. (2003). Orthometric Corrections from Leveling, Gravity, Density and Elevation Data: A Case Study in Taiwan. Journal of Geodesy, 77, pp. 279-291.
- IAG - International Association of Geodesy. Resolution nº 1. Prague, July (2015). Available at: < https://iag.dgfi.tum.de/fileadmin/IAG-docs/IAG_Resolutions_2015.pdf>. [accessed: 10 December 2020].

- IGN - Instituto Geográfico Nacional. (2017). Red Nivelación de la República Argentina. Available at: <https://ramsac.ign.gob.ar/posgar07_pg_web/documentos/Informe_Red_de_Nivelacion_de_la_Republica_Argentina.pdf> [accessed: 10 December 2020].
- IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. (2018). Reajustamento da rede altimétrica com números geopotenciais: REALT-2018. Available at: <<https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101594.pdf>> [accessed: 10 December 2020].
- Kiamehr, R. (2006). The Impact of Lateral Density Variation Model in the Determination of Precise Gravimetric Geoid in Mountainous Areas: A Case Study of Yran. *Geophysic Journal International*, 167(9), pp. 521-527.
- Kuhn, M. (2000). Density modelling for geoid determination. *International Association of Geodesy Symposia*, Vol. 123. Sideris (ed.), Gravity, Geoid, and Geodynamics 2000, Springer - Verlag Berlin Heidelberg 2001.
- Mader K. (1954). Die Orthometrische Schwerekorrektion des Präzisions-Nivellements in den Hohen Tauern. *Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen*, Sonderheft 15.
- Marotta, G. S.; Almeida, M. A.; Chuerubim M. L. (2019). Análise da Influência do Valor de Densidade na Estimativa do Modelo Geoidal Local para o Distrito Federal, Brasil. *Revista Brasileira de Cartografia*, 71 (4), pp.1089-1113.
- Marotta, G. S.; Vidotti, R. M. (2017). Development of a Local Geoid Model at the Federal District, Brazil, patch by the Remove-Compute-Restore Technique, Following Helmert's Condensation Method. *Boletim de Ciências Geodésicas*, 23(3), pp. 520-538.
- Martinec, Z.; Vaníček, P.; Mainville, A.; Véronneau, M. (1995). The Effect of Lake Water on Geoidal Height. *Journal of Geodesy*, 20(3), pp. 193-203.
- Niethammer, T. (1932). Nivellement und Schwere als Mittel zur Berechnung wahrer Meereshöhen. Schweizerische Geodätische Kommission, Berne.
- Pagiatakis, S.D.; Armenakis, C. (1999). Gravimetric Geoid Modelling with GIS. *International Geoid Service Bulletin*, 8, pp. 105-112.
- Pick, M.; Pícha, J.; Vyskočil, V. (1973). *Theory of the Earth's Gravity Field*. Elsevier, Amsterdam.

- Ramsayer, K. (1953). Die Schwerereduktion von Nivellements. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe A, Heft 6, München.
- Ramsayer, K. (1954). Vergleich Verschiedener Schwerereduktionen Von Nivellements. Zeitschrift für Vermessungswesen, 79, pp. 140-150.
- Rózsa, S. (2002). Local Geoid Determination Using Surface Densities. Periodica Polytechnica Ser. Civ. Eng., 46 (2), pp. 205-212.
- Santos, M. C.; Vaníček, P.; Featherstone, W. E.; Kingdon, R.; Ellmann, A.; Martin, B. - A.; Kuhn, M.; Tenzer, R. (2006). The Relation Between Rigorous and Helmert's Definitions of Orthometric Heights. Journal of Geodesy, 80(12), p.p. 691-704.
- Sheng, M. B.; Shaw, C.; Vaníček, P.; Kingdon, R. W.; Santos, M.; Foroughi, I. (2019). Formulation and Validation of a Global Laterally Varying Topographical Density Model. Tectonophysics, 762, pp. 45-60.
- SIRGAS – Sistema de Referência Geocêntrico para las Américas. National densifications of SIRGAS. Disponível em: < <http://www.sirgas.org/pt/national-densifications/>>. [accessed: 10 December 2020].
- Sánchez, J. L. C.; Freitas, S. R. (2016). Estudo do Sistema Vertical de Referência do Equador no Contexto da Unificação do Datum Vertical. Boletim de Ciências Geodésicas, 22(2), pp.248-264.
- Sjöberg, L.E. (2018). On the Geoid and Orthometric Height vs. Quasigeoid and Normal Height. Journal of Geodetic Science, 8(1), pp.115-120.
- Sjöberg L. (2010) A Strict Formula for Geoid-to-Quasigeoid Separation. Journal of Geodesy, 84(11), pp. 699-702.
- Sjöberg, L. E. (2004). The Effect on the Geoid of Lateral Density Variations. Journal of Geodesy, 78 (1/2), pp. 34-39.
- Tenzer, R.; Novák, P.; Moore, P.; Kuhn, M.; Vaníček, P. (2006). Explicit Formula for the GeoidQuasigeoid Separation. Studia Geophysica et Geodaetica, 50, pp. 607-618.
- Tenzer, R.; Sirguey, P.; Rattenbury, M.; Nicolson, J. (2011). A Digital Rock Density Map of New Zealand, Cumputer & Geosciences, 37(8), pp. 1181-1191.
- Tocho, C. N.; Antokoletz, E. D.; Piñón, D. A. (2020). Towards the Realization of the International Height Reference Frame (IHRF) in Argentina. International Association of Geodesy Symposia.
- Tziavos I. N.; Featherstone, W. E. (2001). First Results of Using Digital Density Data in Gravimetric Geoid Computation in Australia. In: Sideris M.G. (eds) Gravity, Geoid

and Geodynamics 2000. International Association of Geodesy Symposia, 123. Springer, Berlin, Heidelberg.

Torge, W. (1991). Geodesy. 2nd ed. Berlin; New York: de Gruyter.

Vaníček, P.; Santos, M.S.; Tenzer, R.; Navarro, A.H. (2003). Algunos Aspectos Sobre Alturas Ortométricas y Normales. Revista Cartográfica, 76/77, pp. 79-86.

6 AVALIAÇÃO DA INFLUÊNCIA DE VARIÁVEIS EM MODELO GEOIDAL PARA O ESTADO DE SÃO PAULO

Danilo Fernandes de Medeiros, Giuliano Sant’Anna Marotta, Gabriel do Nascimento Guimaraes.

RESUMO

Alturas geoidais inconsistentes podem proporcionar incertezas que acarretam a limitação da sua utilização. Por consequência, a comunidade científica vem convergindo esforços para desenvolver modelos geoidais mais rigorosos com a finalidade de melhorar a precisão das estimativas de altitudes ortométricas considerando o posicionamento pelo GNSS. Nesse sentido, como forma de contribuir para o tema citado, esta pesquisa buscou avaliar a influência do uso de diferentes valores de densidade lateral das massas topográficas, dos Modelos Digitais de Terreno (MDT) com resoluções espaciais distintas, de diferentes Modelos Globais do Geopotencial e de diferentes métodos de truncamento do núcleo de Stokes na estimativa de alturas geoidais, com propósito de subsidiar e orientar a elaboração de desenvolvimento de modelos mais rigorosos. E pelo exposto, foi possível sugerir pela análise realizada que o truncamento do núcleo de Stokes e o Modelo Global do Geopotencial podem interferir de forma significativa no desenvolvimento de modelos geoidais, ao passo que os valores de densidade lateral das massas topográficas, seguido da resolução dos MDT adotado, não proporcionam diferenças significativas. Contudo, ressalta-se que para modelos geoidais locais há de se considerar a necessidade de uma análise criteriosa dos dados utilizados a fim de se obter resultados mais coerentes com os estimados por outras técnicas.

Palavras-chave: Alturas Geoidais, Densidade, Modelos Digitais de Terreno, Modelos Globais do Geopotencial, Modificador do Núcleo de Stokes.

6.1 INTRODUÇÃO

Alturas geoidais inconsistentes podem proporcionar incertezas que acarretam a limitação da sua utilização, principalmente no que concerne aos projetos e obras de engenharia destinados ao desenvolvimento de infraestrutura, tais como construção de barragens, hidrovias, ferrovias, rodovias, redes de drenagem, de esgotamento sanitário, etc. E diante desta problemática, diversas pesquisas vêm sendo desenvolvidas, considerando a análise de sensibilidade das diferentes fontes de informação utilizadas na busca de aperfeiçoamento das estimativas das alturas geoidais mais rigorosas por meio de dados gravimétricos.

Dentre as pesquisas, considera-se de grande importância as que envolvem o estudo da variação lateral da densidade das massas topográficas (Martinec et al., 1995; Featherstone e Tziavos, 2001; Huang et al., 2001; Rózsa, 2002; Tenzer e Vanícek, 2003; Sjöberg, 2004; Kiamehr, 2006; Marotta et al., 2019; Albarici et al., 2019; Sheng et al., 2019; Medeiros et al., 2021), dos diferentes Modelos Digitais de Terreno (Tziavos et al., 2010; Sampietro et al., 2016), dos diferentes Modelos Globais do Geopotencial (Hirt et al., 2011; Abbak et al., 2012; Odera e Fukuda, 2014; Yakubu et al., 2017; Nicacio et al., 2018; Kim et al., 2020; Lücke et al., 2021), e da modificação do núcleo da função de Stokes (Molodensky et al., 1962; Wong e Gore, 1969; Heck e Grüniger, 1987; Vanícek e Kleusberg, 1987; Vanícek e Sjöberg (1991); Featherstone et al., 1998; Ellmann, 2001; Li e Wang, 2011; Hirt, 2011), pois estas proporcionam melhor entendimento sobre como as diferentes variáveis podem afetar a estimativa das alturas geoidais.

Considerando que as pesquisas citadas foram desenvolvidas, em grande parte, com finalidade de analisar as diferentes fontes de informação de forma individual, e atendo-se à necessidade de melhor compreensão sobre o assunto na busca do entendimento de como cada uma das informações pode afetar a estimativa de alturas geoidais, de forma individual e conjunta, assume-se que este tema é atual e ainda pendente de compreensão. Diante do exposto esta pesquisa busca avaliar a sensibilidade da densidade lateral das massas topográficas (ρ), da resolução dos Modelos Digitais de Terreno (MDT), dos Modelos Globais do Geopotencial (MGG) e dos diferentes métodos de truncamento do núcleo da função de Stokes (S_M) na estimativa de alturas geoidais (N), com propósito de subsidiar e orientar a elaboração de desenvolvimento de modelos geoidais mais rigorosos.

6.2 ESTIMATIVA DE ALTURAS GEOIDAIS

Dentre as técnicas utilizadas para estimativa de alturas geoidais, por meio de dados gravimétricos, a técnica Remove-Calcula-Restaura (RCR) vem sendo amplamente aplicada pela comunidade científica em diversos países, tais como Turquia (Ayhan, 1993), Áustria (Zhang et al., 1998), Canadá (Schwars et al., 1990), Argentina (Piñón et al., 2018), Brasil (Blitzkow et al., 2012; Silva, 2017 e Marotta et al., 2019), Costa Rica (León et al., 2020), etc.

Em síntese, técnica RCR pode ser representada pelas Equações 01 e 02 (Marotta e Vidotti, 2017; Marotta et al., 2019).

$$\Delta g_{RES} = \Delta g_{HEL} - (\Delta g_{GM} + \Delta g_0) \quad (01)$$

$$N = N_{RES} + N_{IE} + (N_{GM} + N_0) \quad (02)$$

Δg_{RES} é a anomalia de gravidade residual; Δg_{HEL} (Equação 03) é a anomalia de gravidade, gerada pelo segundo método de condensação de Helmert (Heiskanen e Moritz, 1985) e calculada de acordo com Marotta e Vidotti (2017); N_{RES} é a altura residual do co-geoide, calculada por meio da Δg_{RES} , utilizando a integral de Stokes (STOKES, 1849) e adotando função núcleo modificada (Wong e Gore, 1969; Vaníček e Kleusberg, 1987; Featherstone et al., 1998); N_{IE} é o efeito indireto primário da topografia, calculado de acordo com Blitzkow et al. (2009) e Marotta et al. (2019); Δg_{MGG} e N_{MGG} são a anomalia gravidade e a altura do co-geoide provenientes de um MGG, respectivamente, considerando baixo grau e ordem dos coeficientes das funções esféricas harmônicas e estimados de acordo com Smith (1998); Δg_0 e N_0 são os termos grau zero na anomalia de gravidade e no co-geoide, respectivamente, calculado de acordo com Kirby e Featherstone (1997).

No cálculo de Δg_{HEL} (Equação 03), Δg_{FA} é a anomalia ar-livre, calculada de acordo com Featherstone e Dentith (1997) por meio de dados de gravidade terrestre observados; C_{ATM} é a correção atmosférica, calculada segundo Kuroishi (1995); e C_T e δ_g são a correção do terreno e o efeito indireto da topografia, calculados segundo Marotta et al. (2019).

$$\Delta g_{HEL} = \Delta g_{FA} + C_{ATM} + C_T + \delta_g \quad (03)$$

Assumindo que os modelos geoidais são representados por meio de grades regulares de dados, tanto Δg_{HEL} quanto Δg_{GM} devem ser representados seguindo a mesma premissa. Portanto, caso Δg_{HEL} não satisfaça tal premissa, a interpolação para uma grade regular de pontos deve ser realizada para posterior cálculo de Δg_{RES} (Equação 01). Neste sentido, uma forma amplamente utilizada para suavizar os efeitos da interpolação é adicionar a correção Bouguer (C_B), (Equação 04) aos dados e, após a interpolação, retirar o valor da correção anteriormente adicionada.

$$C_B = 2\pi G\rho H_p \quad (04)$$

Outra consideração a ser feita está associada aos cálculos de C_T , N_{IE} e δ_g , na qual, a fim de reduzir os efeitos causados por altitudes obtidas por diferentes fontes de dados, opta-se por utilizar dados de uma única fonte, como os provenientes de um MDT.

De posse dos valores de Δg_{RES} , são calculados os valores de N_{RES} (Equação 05), de acordo com Stokes (1849). Porém, ao realizar o cálculo por meio de dados restritos a uma determinada região, é utilizado o núcleo modificado de Stokes (S_M).

$$N_{RES} = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint_{\sigma} \Delta g_{RES} S_M(\psi) d\sigma \quad (05)$$

$S_M(\psi)$ é o núcleo modificado de Stokes em função da distância esférica ψ entre dois pontos de dados; R é o raio médio da Terra; γ_0 é o valor de gravidade normal; e σ denota a superfície de integração.

Por fim, atendidas as condições para aplicação das equações 01 e 02, respectivamente, são definidos os valores de N para a região de interesse. Contudo, cabe ressaltar que diferentes formulações e tipos de dados utilizados podem conduzir a diferentes resultados.

6.3 DESENVOLVIMENTO DOS MODELOS GEOIDAIIS PARA ESTADO DE SÃO PAULO, BRASIL

Como forma de avaliar a sensibilidade de diferentes formulações e tipos de dados utilizados na determinação de valores das alturas geoidais, esta pesquisa buscou

desenvolver e analisar os resultados decorrentes da aplicação de diferentes métodos de truncamento do núcleo da função de Stokes, de diferentes valores utilizados para representar as massas topográficas, de MDT com resolução espacial diferentes, e de diferentes MGG. Para isto, foi definido como área de estudo o estado de São Paulo (Figura 6.1), Brasil, por apresentar contraste no relevo e nas massas topográficas, por possuir região costeira e por possuir maior quantidade de dados de gravidade terrestre quando comparado com outras regiões.

Foram utilizados, neste trabalho: dados de estações gravimétricas terrestre (EGT), disponibilizados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) e pela Agência Nacional do Petróleo (ANP); os MGGs EIGEN-6C4 (Förste, et al., 2014), XGM2019 (Zingerle et al., 2020) e SGG-UGM-2 (Liang et al., 2020) disponibilizados pelo International Centre for Global Earth Models (ICGEM), com grau e ordem dos coeficientes das funções harmônicas esféricas de até 2190, para complementar regiões com ausência de dados gravimétricos terrestre, e de até 300, para definição de Δg_{GM} e N_{GM} (Equações 01 e 02); MDT provenientes do SRTM (Shuttle Radar Topography Mission), disponibilizados pelo United States Geological Survey (USGS), com resolução espacial de 3" e 1" de arco; dados de densidade oriundos do modelo de distribuição lateral das massas topográficas LTD_Brazil, desenvolvido por Medeiros et al. (2020) com resolução de 30" de arco; dados de gravidade sobre o oceano proveniente do modelo DTU17, com resolução espacial de 1' de arco, disponibilizado pela Technical University of Denmark; e núcleo modificado de Stokes definido por Wong e Gore (1969), Vaniček and Kleusberg (1987) e Featherstone et al. (1998).

Os limites nos quais os dados utilizados estão contidos foram de 2,5° para o MDT e modelo de densidade, e 1,5° para o MGG, DTU17 e EGT utilizados, contados a partir dos limites territoriais da área de estudo (Figura 6.1).

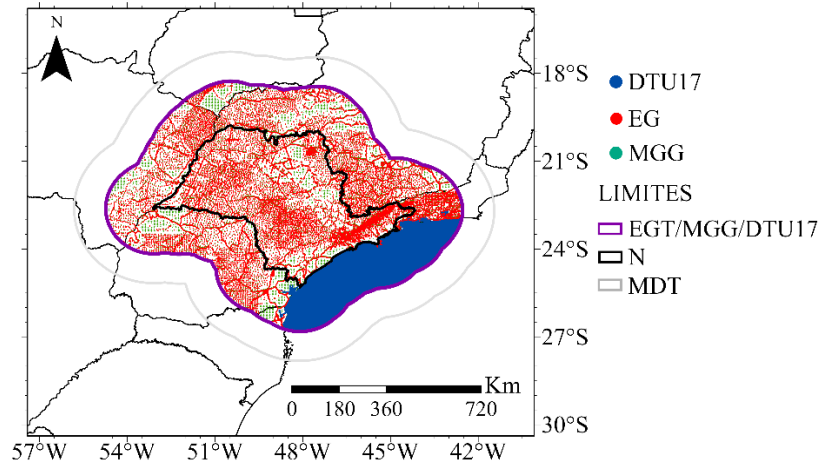


Figura 6.1: Distribuição dos dados de EGT, provenientes de um MGG (grau e ordem até 2190 e livre de maré) e do DTU17. Os limites da área de estudo, dos dados de EGT, MGG e DTU17, e do MDT, são também apresentados.

No desenvolvimento desta pesquisa foi empregada a técnica RCR por meio do pacote de rotinas denominado GRAVTool, desenvolvido em ambiente MATLAB®, cujas formulações são apresentadas por Marotta e Vidotti (2017) e Marotta et al. (2019). As formulações referentes ao núcleo modificado de Stokes são apresentadas por Featherstone (2003) e o desenvolvimento é disponibilizado por uma rotina em linguagem fortran denominada “MODKERN.f”.

As constantes utilizadas neste trabalho estão associadas ao elipsoide de referência GRS80 (Geodetic Reference System 1980) e ao potencial de gravidade no nível do geóide adotados, divulgadas por Moritz (1984) e em nota técnica do IERS por Petit e Luzum (2010).

A metodologia utilizada nesta pesquisa, portanto, tratou da estimativa N adotando grade regular de pontos com resolução de $2,5'$, e uso de: ρ constante de 2670 kg/m^3 (Hinze, 2003) e variável (Modelo LTD_Brazil) para cálculo de C_T , N_{IE} , δ_g e C_B ; MDT SRTM com resolução de $3''$ ($\sim 90 \text{ m}$) e $1''$ ($\sim 30 \text{ m}$) de arco; MGG EIGEN-6C4, XGM2019 e SGG-UGM-2 com grau e ordem até 300 para para cálculo de Δg_{MGG} e N_{MGG} ; e $S_M(\psi)$ calculados conforme apresentado por Wong e Gore (1969), Vaniček and Kleusberg (1987) e Featherstone et al. (1998), considerando raio de integração de $1,5^\circ$.

Pelo exposto, foram gerados 36 modelos geoidais adotando a combinação entre os diferentes dados e formulações apresentados (Tabela 6.1).

Tabela 6.1: Modelos Geoidais desenvolvidos adotando a combinação entre os diferentes dados e formulações. N1, N2 e N3 referem-se aos MGG SGG-UGM-2, XGM2019 e EIGEN-6C4, respectivamente; 90 e 30 referem-se aos MDT SRTM com resolução de 3 segundos ($\sim 90 \text{ m}$) e 1 segundo

(~30 m) de arco, respectivamente; WG, VK e EV referem-se à $S_M(\psi)$ considerando Wong e Gore (1969), Vaniček and Kleusberg (1987) e Featherstone et al. (1998), respectivamente; e C e V referem-se ao uso de ρ constante e variável, respectivamente.

Nº	Modelo	Nº	Modelo	Nº	Modelo
1	N1-30-C-WG	13	N2-30-C-WG	25	N3-30-C-WG
2	N1-30-C-VK	14	N2-30-C-VK	26	N3-30-C-VK
3	N1-30-C-EV	15	N2-30-C-EV	27	N3-30-C-EV
4	N1-30-V-WG	16	N2-30-V-WG	28	N3-30-V-WG
5	N1-30-V-VK	17	N2-30-V-VK	29	N3-30-V-VK
6	N1-30-V-EV	18	N2-30-V-EV	30	N3-30-V-EV
7	N1-90-C-WG	19	N2-90-C-WG	31	N3-90-C-WG
8	N1-90-C-VK	20	N2-90-C-VK	32	N3-90-C-VK
9	N1-90-C-EV	21	N2-90-C-EV	33	N3-90-C-EV
10	N1-90-V-WG	22	N2-90-V-WG	34	N3-90-V-WG
11	N1-90-V-VK	23	N2-90-V-VK	35	N3-90-V-VK
12	N1-90-V-EV	24	N2-90-V-EV	36	N3-90-V-EV

Após estimativa dos valores de N conforme exposto na Tabela 6.2, estes foram analisados por meio de estatística descritiva (média - $\bar{x}$, desvio padrão - σ , máximo - max , mínimo - min , diferença média quadrática - DMQ , curtose - $Curt$, assimetria - $Assim$) e da aderência dos modelos, por meio da diferença em relação aos valores de $N_{GNSS/Niv}$ estimados para estações de controle por técnica de posicionamento pelo GNSS/Nivelamento (Figura 6.2).

A aderência dos modelos foi avaliada com base no coeficiente de Nasf e Sutcliffe (1970) - E (Equação 06) e qui-quadrado - χ^2 (Equação 07).

$$E = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (O_i - P)^2}{\sum_{i=1}^n (O_i - \bar{O})^2} \quad (06)$$

$$\chi^2 = \frac{(O - P)^2}{P} \quad (07)$$

O_i é i-ésimo valor observado (O) no modelo, P é o valor pretendido e E é coeficiente de Nasf e Sutcliffe, que quanto mais próximo de 1 melhor a aderência do modelo.

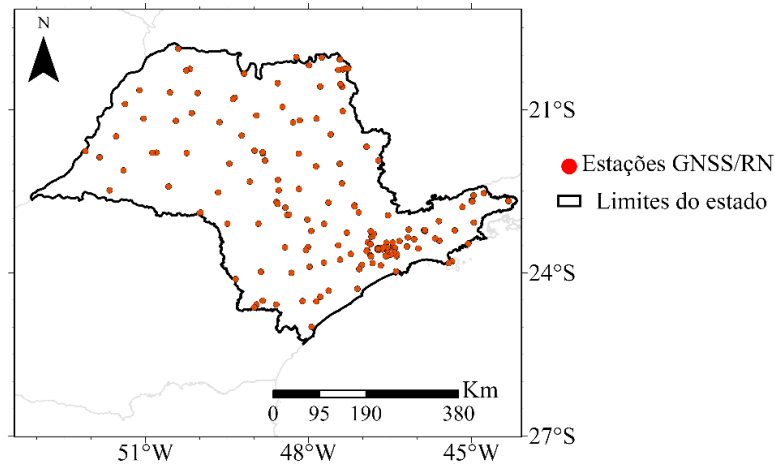


Figura 6.2: Distribuição dos dados de $N_{GNSS/Niv}$.

Por fim, foi realizada a análise da sensibilidade das variáveis utilizadas na estimativa dos valores de N , dispostos na Tabela 1, por meio de álgebra de mapas.

6.3.1 Análise estatística dos resultados considerando as diferenças entre N e $N_{GNSS/Niv}$

Após estimativas dos valores de N e das diferenças com valores de $N_{GNSS/Niv}$, procedeu-se a análise por meio de estatística descritiva (Tabela 6.2), a fim de verificar os modelos que apresentaram melhor aderência aos pontos de controle.

Tabela 6.2: Estatística descritiva das diferenças entre N e $N_{GNSS/Niv}$, incluindo χ^2 e E calculados.

Modelos	$\bar{x}$ (m)	σ (m)	max (m)	min (m)	DMQ (m)	$Curt$	$Assim$ (m)	χ^2	E
N1-30-V-WG	0,192	0,193	0,719	-0,382	0,271	0,496	0,102	3,685	0,980
N1-90-C-WG	0,192	0,193	0,719	-0,381	0,271	0,504	0,100	3,684	0,980
N1-30-C-WG	0,193	0,193	0,720	-0,383	0,272	0,496	0,095	3,713	0,980
N1-90-V-WG	0,193	0,193	0,720	-0,382	0,272	0,504	0,093	3,716	0,980
N2-30-C-WG	0,203	0,186	0,723	-0,317	0,275	0,598	0,057	3,796	0,979
N2-90-C-WG	0,203	0,186	0,723	-0,317	0,275	0,605	0,055	3,800	0,979
N3-30-C-WG	0,204	0,188	0,713	-0,300	0,276	0,566	0,082	3,892	0,979
N2-30-V-WG	0,204	0,187	0,724	-0,318	0,276	0,593	0,051	3,826	0,979
N3-90-C-WG	0,204	0,188	0,713	-0,299	0,276	0,575	0,080	3,896	0,979
N2-90-V-WG	0,205	0,187	0,724	-0,318	0,276	0,600	0,049	3,830	0,979
N3-30-V-WG	0,205	0,188	0,714	-0,301	0,277	0,566	0,076	3,923	0,979
N3-90-V-WG	0,205	0,188	0,714	-0,300	0,277	0,574	0,074	3,926	0,979
N2-90-C-VK	0,127	0,240	0,705	-0,609	0,270	0,587	-0,410	4,284	0,979
N1-90-C-VK	0,130	0,245	0,810	-0,615	0,276	0,654	-0,395	4,756	0,978
N1-90-C-EV	0,129	0,245	0,810	-0,615	0,276	0,654	-0,395	4,757	0,978
N1-30-C-VK	0,131	0,245	0,811	-0,617	0,276	0,673	-0,396	4,752	0,978
N1-30-C-EV	0,131	0,245	0,811	-0,617	0,276	0,673	-0,397	4,752	0,978
N1-90-V-VK	0,131	0,245	0,812	-0,611	0,276	0,643	-0,390	4,760	0,978
N1-90-V-EV	0,131	0,245	0,812	-0,611	0,276	0,643	-0,390	4,760	0,978
N1-30-V-VK	0,132	0,244	0,813	-0,613	0,276	0,663	-0,392	4,755	0,978
N1-30-V-EV	0,132	0,244	0,813	-0,613	0,276	0,663	-0,392	4,756	0,978
N3-90-C-VK	0,134	0,245	0,820	-0,609	0,277	0,687	-0,401	4,808	0,978
N3-90-C-EV	0,134	0,245	0,820	-0,609	0,277	0,687	-0,401	4,809	0,978
N3-30-C-VK	0,135	0,244	0,821	-0,611	0,278	0,706	-0,403	4,805	0,978

Modelos	$\bar{x}$ (m)	σ (m)	max (m)	min (m)	DMQ (m)	$Curt$	$Assim$ (m)	χ^2	E
N3-30-C-EV	0,135	0,244	0,821	-0,611	0,278	0,706	-0,403	4,805	0,978
N3-90-V-VK	0,135	0,244	0,822	-0,605	0,278	0,676	-0,396	4,813	0,977
N3-90-V-EV	0,135	0,244	0,822	-0,605	0,278	0,676	-0,396	4,813	0,977
N3-30-V-VK	0,137	0,244	0,823	-0,607	0,278	0,696	-0,398	4,809	0,977
N3-30-V-EV	0,137	0,244	0,823	-0,607	0,278	0,696	-0,398	4,809	0,977
N2-90-C-EV	0,134	0,246	0,818	-0,609	0,279	0,639	-0,395	4,824	0,977
N2-30-C-VK	0,136	0,246	0,819	-0,611	0,279	0,657	-0,397	4,820	0,977
N2-30-C-EV	0,136	0,246	0,819	-0,611	0,279	0,657	-0,397	4,820	0,977
N2-90-V-VK	0,136	0,246	0,820	-0,605	0,279	0,628	-0,390	4,828	0,977
N2-90-V-EV	0,136	0,246	0,820	-0,605	0,279	0,628	-0,390	4,828	0,977
N2-30-V-VK	0,137	0,245	0,820	-0,607	0,280	0,647	-0,392	4,824	0,977
N2-30-V-EV	0,137	0,245	0,820	-0,607	0,280	0,647	-0,392	4,825	0,977

De acordo com os valores apresentados na Tabela 6.2, sugere-se que o modelo N1-30-V-WG (desenvolvido com MGG SGG-UGM-2, SRTM com resolução de 1" de arco, modelo LDT_Brazil para valores densidade variável e com truncamento do núcleo da função de Stokes por Wong e Gore, (1969) apresentou melhor aderência aos pontos de controle, quando considerados os valores de DMQ , $Curt$, χ^2 e E . Também, ao verificar os valores de σ , max , min e E , foi possível sugerir que os modelos desenvolvidos por meio do truncamento do núcleo da função de Stokes por Wong e Gore (1969) apresentaram melhores resultados, apesar do fato de que os métodos de truncamento propostos por Vaniček and Kleusberg (1987) e Featherstone et al. (1998) apresentaram melhores valores de $\bar{x}$.

Pelo exposto, considera-se que a análise está alinhada aos estudos realizados por Silva et al. (2003), que demonstraram que o uso do truncamento por Wong e Gore (1969) gerou resultados mais aderentes em relação aos 89 pontos de controle utilizados na mesma região de estudos.

Apesar da análise realizada, Featherstone (2003), Li e Wang (2011) e (Aarizou e Rabeh, (2008) sugeriram que a utilização do truncamento do núcleo da função de Stokes promovido por Featherstone et al. (1998) permitiu gerar resultados mais aderentes aos pontos de controle na Austrália, no Alasca e na Argélia, respectivamente. Portanto, pode-se sugerir que a análise realizada é empírica, uma vez que ela pode variar de acordo com a área de estudos.

Ainda tratando do truncamento do núcleo da função de Stokes, não é possível identificar diferenças nos resultados (Tabela 6.2) ao aplicar os métodos propostos por Vaniček and Kleusberg (1987) e Featherstone et al. (1998).

No que tange a adoção de diferentes MGG, MDT valores de densidade, não foi possível identificar padrões de diferenças por meio dos dados apresentados na Tabela 6.2,

podendo-se sugerir que não há variação perceptível entre os diferentes tipos de dados citados, utilizados na estimativa de N .

6.3.2 Análise das diferenças entre os valores de N estimados

Pela dificuldade de identificar a diferença entre os tipos de dados utilizados na estimativa de N , por meio da análise estatística e da utilização de pontos de controle, procedeu-se uma análise das principais diferenças entre os modelos (Tabela 6.1) como forma de englobar toda a região de estudo.

A fim de identificar somente a sensibilidade do uso do núcleo modificado de Stokes na estimativa de N , a Tabela 6.3 apresenta a estatística descritiva das diferenças (ΔN) entre os mesmos modelos que utilizaram diferentes tipos de modificadores, sendo eles o N1-30-V-WG, N1-30-V-VK e o N1-30-V-EV.

A Figura 6.3 mostra a diferença entre o modelo mais aderente aos pontos de controle (N1-30-V-WG), após análise, e o mesmo modelo utilizando outro modificador (N1-30-V-VK), conforme apresentado na Tabela 6.3.

Tabela 6.3: Estatística descritiva das diferenças (ΔN) entre os valores N dos modelos considerando diferentes modificadores do núcleo de Stokes.

ΔN	$\bar{x}$ (m)	σ (m)	max (m)	min (m)
(N1-30-V-WG) – (N1-30-V-VK)	0,012	0,148	0,809	-0,309
(N1-30-V-WG) – (N1-30-V-EV)	0,012	0,148	0,809	-0,309
(N1-30-V-VK) – (N1-30-V-EV)	0,000	0,000	0,000	0,000

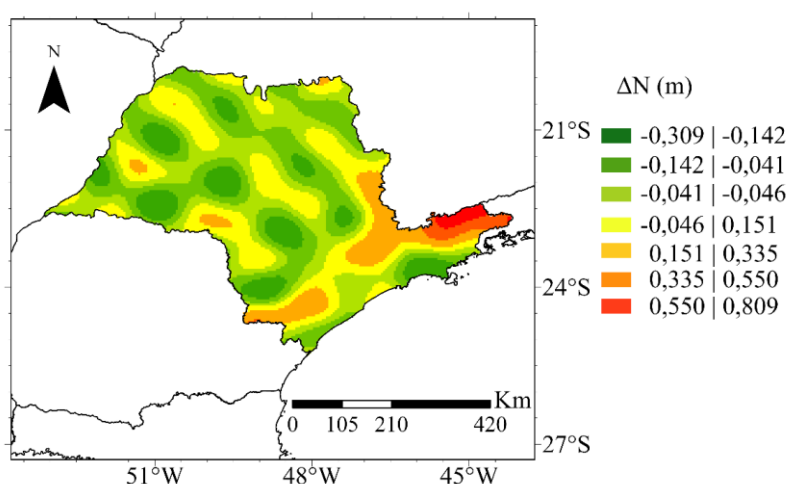


Figura 6.3: Diferença (ΔN) entre os modelos N1-30-V-WG e N1-30-V-EV.

Da análise da Tabela 6.3 e Figura 6.3, verifica-se que os valores de N apresentam grande variação em relação ao tipo de modificador do núcleo de Stokes, chegando a 0,809

m em algumas regiões. Também, conforme valores apresentados na Tabela 3, é possível verificar que os modificadores desenvolvidos por Vaniček and Kleusberg (1987) e Featherstone et. al (1998) são similares para a área de estudo.

Observa-se, na Figura 6.3, que o comportamento das diferenças entre os modelos se mostrou bastante heterogêneo e variável em função da posição geográfica, e tal fato reforça a necessidade de realizar avaliações prévias na escolha do tipo de modificador do núcleo de Stokes, principalmente na estimativa de modelos geoidais locais.

Analisando a sensibilidade nos valores estimados para N por meio da aplicação de diferentes MGG com mesmo grau e ordem dos coeficientes das funções esféricas harmônicas, verifica-se, na Tabela 6.4, diferenças mínimas e máximas de -0,169 m a 0,115 m entre os modelos N2-30-V-WG e N3-30-V-WG.

Atendo-se ao modelo considerado mais aderente aos pontos de controle, a Figura 6.4 apresenta a distribuição espacial das diferenças entre os modelos N1-30-V-WG e o mesmo modelo utilizando MGG distinto (N2-30-V-VK).

Tabela 6.4: Estatística descritiva das diferenças (ΔN) entre os valores N dos modelos considerando os MGG utilizados.

ΔN	$\bar{x}$ (m)	σ (m)	max (m)	min (m)
(N1-30-V-WG) – (N2-30-V-WG)	-0,004	0,030	0,098	-0,111
(N1-30-V-WG) – (N3-30-V-WG)	-0,004	0,026	0,053	-0,094
(N2-30-V-WG) – (N3-30-V-WG)	-0,004	0,034	0,115	-0,169

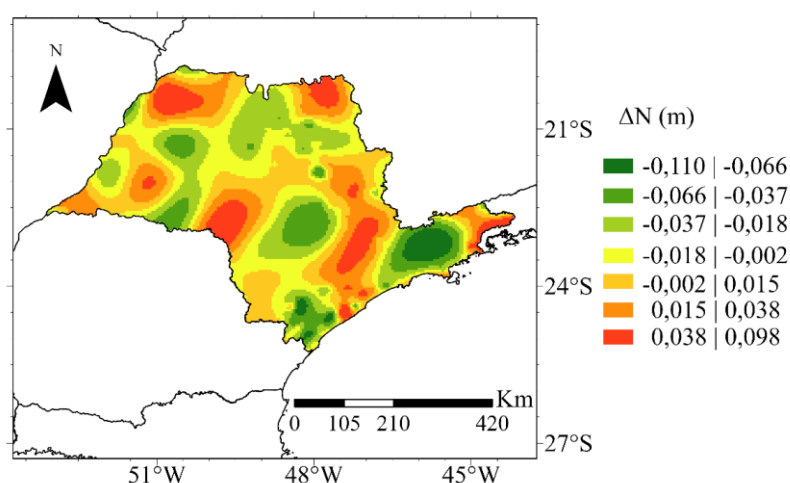


Figura 6.4: ΔN considerando diferença entre modelos N1-30-V-WG e N2-30-V-WG.

Por análise, é possível sugerir que os resultados indicam comportamento heterogêneo quando considerada a distribuição espacial das diferenças causadas pelo uso de MGG diferentes. E por consequência, reforça-se a necessidade de análise prévia na

escolha de um MGG, incluindo grau e ordem de seus coeficientes, que melhor se adequa à região de interesse, seja no âmbito local, regional ou global.

Objetivando avaliar a sensibilidade da resolução dos MDT utilizados, a Tabela 6.5 e Figura 6.5 apresentam as diferenças entre diferentes modelos estimados, evidenciando o modelo considerado mais aderente aos pontos de controle.

Tabela 6.5: Estatística descritiva das diferenças (ΔN) entre os valores N dos modelos considerando os MDT utilizados.

ΔN	$\bar{x}$ (m)	σ (m)	max (m)	min (m)
(N1-30-V-WG) – (N1-90-V-WG)	0,000	0,002	0,112	-0,015

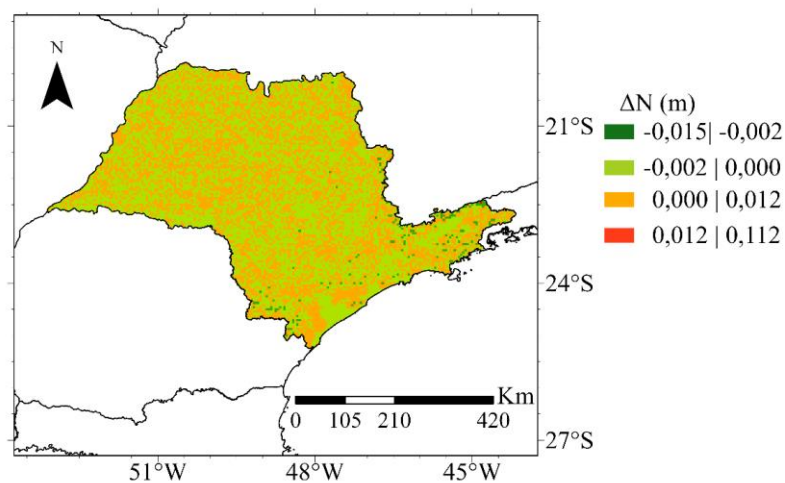


Figura 6.5: ΔN considerando diferença entre modelos N1-30-V-WG e N1-90-V-WG.

Por meio de análise realizada (Tabela 6.5 e Figura 6.5), foi identificado que 99,8% das diferenças encontradas estão compreendidas num intervalo de 0 a ± 8 mm, e as maiores diferenças foram encontradas em regiões com grande variação topográfica. Portanto, pode-se sugerir que as maiores diferenças estão associadas ao tipo de tratamento dado nos diferentes MDT, uma vez que dados vazios podem gerar inconsistências no cálculo da correção do terreno, dos efeitos primário e secundário da topografia e, por fim, no valor de N .

Por fim, buscando identificar a sensibilidade do uso de valores de densidade das massas topográficas na estimativa de N , a Tabela 6.6 e Figura 6.6 apresentam as diferenças entre os mesmos modelos que utilizaram valores de densidade constante e variável, evidenciando o modelo considerado mais aderente aos pontos de controle.

Tabela 6.6: Estatística descritiva das diferenças entre os valores N que consideram um cenário com densidade constante e variável.

ΔN	$\bar{x}$ (m)	σ (m)	max (m)	min (m)
(N1-30-C-WG) – (N1-30-V-WG)	-0,001	0,002	0,027	-0,017

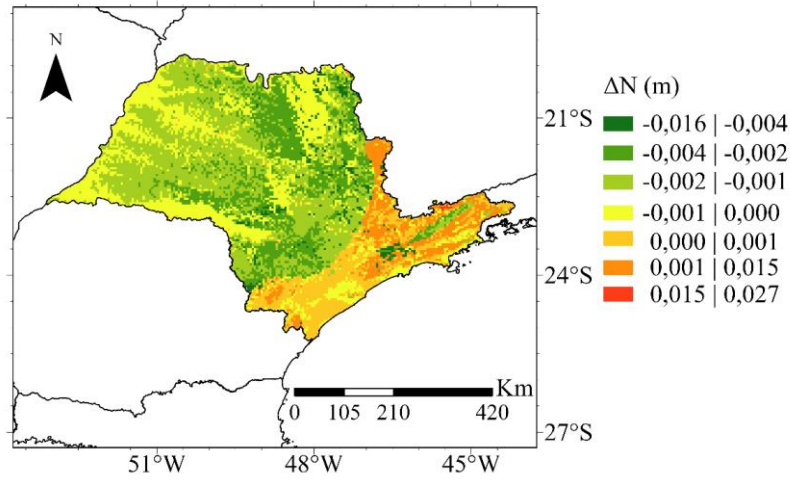


Figura 6.6: ΔN considerando os modelos N1-30-C-WG e N1-30-V-WG, que consideram um cenário com densidade constante e variável.

Por meio da análise da Tabela 6.6, verifica-se que os diferentes modelos apresentam comportamentos semelhantes quanto observado a variação do cenário com densidade constante e variável. Porém, observa-se que os modelos apresentam sensibilidade em relação à densidade, podendo alcançar diferença de até 2,7 cm para a região de estudos. Também, conforme esperado, observou-se (Figura 6.6) que as diferenças mais significativas estão associadas às maiores variações de valor de densidade lateral das massas topográficas da região de estudo, quando comparado valor de densidade constante (2670 kg/m^3) e variável (Figura 6.7).

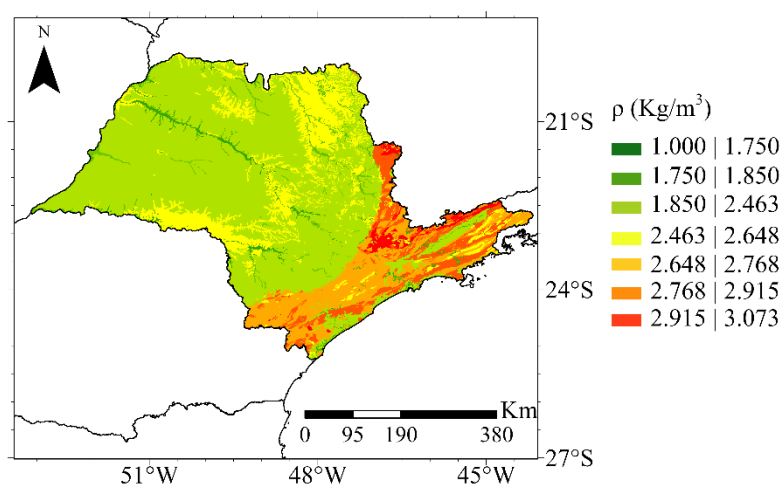


Figura 6.7: Valores de densidade lateral das massas topográfica para estado de São Paulo, extraído de Medeiros et al. (2021).

Pelo exposto, diante das análises realizadas, é possível sugerir que o truncamento do núcleo de Stokes e o MGG podem interferir de forma significativa na estimativa de modelos geoidais, ao passo que os valores de densidade lateral das massas topográficas, seguidos do MDT adotado, não proporcionam diferenças significativas nos valores de N . Porém, sugere-se que todos os dados utilizados e analisados nesta pesquisa devem ser considerados na estimativa de modelos geoidais mais rigorosos.

6.4 CONCLUSÃO

Esta pesquisa evidenciou que as alturas geoidais são significativamente sensíveis ao tipo do modificador da núcleo de Stokes, e que para o estudo de caso realizado, a adoção do método proposto por Wong e Gore (1969) proporcionou resultados mais aderentes aos pontos de controle terrestre para o estado de São Paulo, em contraponto aos estudos realizados na Austrália (Featherstone et al., 2003), Alaska (Li e Wang, 2011) e Argélia (Aarizou e Rabeh, 2008), por exemplo, onde o uso do modificador promovidos por Featherstone et al. (1998) mostraram mais aderentes aos pontos de controle.

Pela análise do uso do MGG, foram identificadas variações também relevantes nas alturas geoidais estimadas, porém, inferiores quando comparadas com a análise envolvendo o núcleo modificado de Stokes.

Os resultados obtidos pela análise da resolução dos MDT não apresentaram diferenças significativas na estimativa das alturas geoidais, corroborando com o estudo

realizado por Orlando et al. (2022), o qual conclui que a melhoria da qualidade do MDT não é proporcional à melhora da resolução espacial do dado.

Em relação ao uso de valores de densidade constante e variável, não foram identificadas diferenças significativas na comparação com os valores das alturas geoidais. Porém, é possível sugerir que o uso de valores de densidade variável, coerentes com a litologia da região de estudos, permite o desenvolvimento de modelos geoidais mais rigorosos.

Por fim, os resultados da presente na pesquisa indicam que todas as variáveis analisadas influenciam na estimativa das alturas geoidais, porém a escolha do tipo do modificador do núcleo da função de Stokes e do MGG proporciona variações mais significativas nos resultados, quando comparados com as variações apresentadas pela adoção de valores de densidade variável e maior resolução do MDT. Portanto, esta pesquisa reforça a importância de verificação prévia, principalmente do MGG e tipo de modificador do núcleo de Stokes, no desenvolvimento de modelos geoidais gravimétricos mais rigorosos.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à UnB (Universidade de Brasília), ao DNIT (Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes), ao INCTET (465613/2014-4) e à FAPDF (0193.001230/2016) pelo suporte técnico e financeiro para realização da pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Aarizou A.; Rabeh N. (2008). Modification du Noyau Intégral de Stokes: Etude des Performances. Bulletin des Sciences Géographiques n° 21.
- Albarici, F. L.; Foroughi, I.; Guimarães, G. N.; Santos, M.; Trabanco, J. (2019). A new perspective for physical heights in Brazil. Boletim de Ciências Geodésicas, v.25.
- Abbak, R. A.; Erol, B.; Ustun, U. (2012). Comparison of the KTH and remove–compute–restore techniques to geoid modelling in a mountainous area, Computers & Geosciences, 48: 31-40.
- Ayhan, M. E. (1993). Geoid determination in Turkey. Bulletin Geodesique, 67, pp.10–22.
- Blitzkow, D.; Matos, A. C. O. C.; Fairhead, J. D.; Pacino, M.C.; Lobianco, M. C. B.; Campos, I. O. (2012). The progress of the geoid model computation for South

- America under GRACE and EGM2008 models. International Association of Geodesy Symposia, vol. 136, 2012. pp. 893-899.
- Ellmann, A. (2001). Least Squares modification of Stokes formula with applications to the Estonian geoid. Royal Institute of Technology, Division of Geodesy, Report No. 1056, Stockholm.
- Featherstone W. E.; Dentith, M.C. (1997). A Geodetic Approach to Gravity Data Reduction for Geophysics. Computers & Geosciences, 23(10), 1063-1070.
- Featherstone, W.E.; Evans J.D.; Olliver, J.G. (1998): A Meissl-modified Vaníček and Kleusberg kernel to reduce the truncation error in gravimetric geoid computations, Journal of Geodesy, 72(3): 154-160.
- Featherstone, W.E.E.; Tziavos, I.N. (2001). First results of Using Digital Density Data in Gravimetric Geoid Computation in Australia. In: Sideris M.G. (eds) Gravity, Geoid and Geodynamics 2000. International Association of Geodesy Symposia., 123. Springer, Berlin, Heidelberg.
- Featherstone, W.E. (2003). Software for computing five existing types of deterministically modified integration kernel for gravimetric geoid determination. Comput Geosci 29(2):183-193.
- Featherstone, W.E., Sideris, M.G. (1998). Modified kernels in spectral geoid determination: first results from Western Australia. In: Forsberg, R., Feissl, M., Dietrich, R. (Eds.), Geodesy on the Move. Springer, Berlin, pp. 188–193.
- Heck, B.; Gr. Uninger, W. (1987). Modification of Stokes's integral formula by combining two classical approaches. Proceedings of the XIX General Assembly of the International Union of Geodesy and Geophysics, Vol. 2. Vancouver, Canada, pp. 309–337.
- Heiskanen, W. A.; Moritz, H. (1985). Geodesia física. Madrid: Instituto Geográfico nacional.
- Hirt, C. (2011). Mean kernels to improve gravimetric geoid determination based on modified Stokes's integration. Computers and Geosciences, Volume 37, Issue 11, p. 1836-1842.
- Huang, J.; Vaníček, P.; Pagiatakis, S. D.; Brink, W. (2001). Effect of topographical density on geoid in the Canadian Rocky Mountains. Journal of Geodesy, 74 (11/12): 805-815.

- Kiamehr, R. (2006). The impact of lateral density variation model in the determination of precise gravimetric geoid in mountainous areas: a case study of Yran. *Geophysical Journal International*, 167(9): 521-527.
- Kim, K.B.; Yun, H.S.; Choi HJ. (2020). Accuracy Evaluation of Geoid Heights in the National Control Points of South Korea Using High-Degree Geopotential Model. *Applied Sciences*, 10(4):1466.
- León, J.G.; Vega Fernández, A.; Sánchez, V.; Salvatierra, J.P.; Kingdon, R.W.; Lücke, O.H. (2020). A regional Stokes-Helmert geoid determination for Costa Rica (GCR-RSH-2020): computation and evaluation, 50 (2): 223-247.
- Li, X.; Wang, Y. (2011). Comparisons of geoid models over Alaska computed with different Stokes' kernel modifications. *Journal of Geodetic Science*, vol. 1, no. 2, pp. 136-142. <https://doi.org/10.2478/v10156-010-0016-1>
- Lücke, O.H.; Vega Fernández, A.; Varela Sánchez; M. et al. (2021). The improvements of the Costa Rican ground-based gravity dataset as result of a comprehensive attribute and spatial assessment of the historical databases. *Appl Geomat* 13, 401–413 (2021). <https://doi.org/10.1007/s12518-021-00356-5>.
- Marotta, G. S.; Almeida, M. A.; Chuerubim, M. L. (2019). Análise da Influência do Valor de Densidade na Estimativa do Modelo Geoidal Local para o Distrito Federal, Brasil. *Revista Brasileira de Cartografia*, 71(4): 1089-1113.
- Marotta, G.S.; Vidotti, R.M. (2017). Development of a Local Geoid Model at the Federal District, Brazil, Patch by the Remove-Compute-Restore Technique, Following Helmert's Condensation Method. *Boletim de Ciências Geodésicas*. vol. 23, n. 3, 2017. pp.524-540.
- Martinec, Z.; Vaníček, P.; Mainville, A.; Véronneau, M. (1995). The effect of lake water on geoidal height. *Journal of Geodesy*, 20(3): 193-203.
- Medeiros, D.F.; Marotta, G.S.A.; Yokoyama, E.; Franz, I.B.; Fuck, R.A. (2021). Developing a lateral topographic density model for Brazil. *Journal of South American Earth Sciences*, 110, 103425.
- Molodensky, M.S.; Eremeev, V.F., Yurkina, M.I. (1962). Methods for study of the external gravitational field and figure of the earth. Translated from the 1960 original, The Israeli Programme for the Translation of Scientific Publications, Jerusalem, Israel, 248pp.

- Moritz, H. (1984). Geodetic Reference System 1980. *Bulletin géodésique*, 58(3), pp. 388-398.
- Nicacio, E.; R. Dalazoana; and S. De Freitas. (2018). "Evaluation of recent combined global geopotential models in Brazil." *J. Geodetic Sci.* 8 (1):72–82. <https://doi.org/10.1515/jogs-2018-0008>.
- Petit, G.; Luzum, B. (2010). IERS Conventions (2010). IERS Technical Note No. 36. Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie
- Piñón, D.A.; Zhang, K. Wu S.; Cimbaro, SR. (2018) A new Argentinean gravimetric geoid model: GEOIDEAR. In *International Association of Geodesy Symposia* (Vol. 147, pp. 53–62). Springer Verlag. https://doi.org/10.1007/1345_2017_267.
- Odera, P.A.; Fukuda, Y. (2014). Improvement of the geoid model over Japan using integral formulae and combination of GGMs. *Earth, Planets and Space*, 66: 22
- Orlando, F.C.; Bias.E.S.; Cereda, JR. A. (2022). SRTM: Para uma melhor Utilização - Conhecendo um pouco mais da qualidade planialtimétrica, da influência da resolução espacial e dos modelos de superfície equipotenciais de referência. *Revista Brasileira de Geografia Física* v.15, n.02 (2022) 1153-1168.
- Rózsa, S. (2002). Local geoid determination using surface densities. *Periodica Polytechnica Ser. Civ. Eng.*, 46(2): 205-212.
- Sampietro, D.; Capponi, M.; Triglione, D. (2016). GTE: a new software for gravitational terrain effect computation: theory and performances. *Pure Applied Geophysics*. 173: 2435-2453.
- Sheng, M.B.; Shaw, C.; Vaníček, P.; Kingdon, R.W.; Santos, M.; Foroughi, I. (2019). Formulation and Validation of a Global Laterally Varying Topographical Density Model. *Tectonophysics*, 762, pp. 45-60.
- Silva, M.A.; Blitzkow, D.; and Lobianco; M.C.B. (2003) A Case Study of Different Modified Kernel Applications in Quasi-Geoid Determination, *Proceedings of the 3rd Meeting of the International Gravity and Geoid Commission*, Thessaloniki, Greece, August 26–30, 2002, 138-143.
- Silva. D. V.R. (2017). Determinação de um Modelo Geoidal Local para o Distrito Federal. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Geociências da Universidade de Brasília. Unb.
- Sjöberg, L. E. (2004). The effect on the geoid of lateral density variations. *Journal of Geodesy*, 78(1/2): 34-39.

- Stokes, G.G. (1849). On the variation of gravity on the surface of the earth. In: Mathematical and Physical Papers 2, 131–171 (from the Trans. of the Cambridge Philos. Soc. Vol. VIII: 672-695, N.Y).
- Tenzer, R.; Vaníček, P. (2003). Correction to Helmert's orthometric height due to actual lateral variation of topographical density. *Revista Brasileira de Cartografia*, 55(2): 44-47.
- Tziavos, I. N.; Featherstone, W. E. (2001). First results of using digital density data in gravimetric geoids computation in Australia. IAG Symposia, GGG2000, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 123: 335-340.
- Tziavos, I. N.; Vergos, G. S.; Grigoriadis, V. N. (2010). Investigation of topographic reductions and aliasing effects on gravity and the geoid over Greece based on various digital terrain models. *Surveys in Geophysics*. 31: 23.
- Vaníček, P.; Kleusberg, A. (1987). The Canadian geoid Stokesian approach. *manuscripta geodaetica* 12 (2), 86–98.
- Vaníček, P.; Sjöberg, L.E. (1991). Reformulation of Stokes's theory for higher than second-degree reference field and modification of integration kernels. *Journal of Geophysical Research—Solid Earth* 96 (B4), 6529–6539.
- Wong, L.; Gore, R. (1969). Accuracy of geoid heights from modified Stokes kernels. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 18, 81–91.
- Yakubu C.I.; Ferreira, V.G.; Asante, C.Y. (2017). Towards the Selection of an Optimal Global Geopotential Model for the Computation of the Long-Wavelength Contribution: A Case Study of Ghana. *Geosciences*. 7(4):113.
- Zhang, K.; Featherstone, W.; Stewart, M.; Dodson, A. (1998). A new gravimetric geoid for Austria. In: Second Continental Workshop on the Geoid. Reports of the Finnish Geodetic Institute, pp. 225-233.
- Zingerle, P.; Pail, R.; Gruber, T. (2020). O modelo de campo de gravidade global combinado XGM2019e. *Journal of Geodesy*, 94: 66.

7 CONCLUSÕES FINAIS

Esta pesquisa foi desenvolvida visando realizar uma abordagem metodológica para a modelagem e estimativa das massas laterais topográficas, das altitudes ortométricas e das alturas geoidais no Brasil, assim como avaliar a influência do uso de valores de densidade lateral das massas topográficas, constante e variável, dos Modelos Digitais de Terreno com resoluções espaciais distintas, de diferentes Modelos Globais do Geopotencial e de diferentes métodos de truncamento do núcleo de Stokes na estimativa de alturas geoidais.

O estudo (Capítulo 4) desenvolveu e avaliou um modelo de densidade topográfica lateral (LTD_Brazil). Este modelo foi desenvolvido em formato de grade, contendo informações sobre a densidade de massa topográfica com resolução espacial de 800 m x 800 m. Além disso, o modelo foi baseado em dados de densidade rochosa obtidos por meio de ampla revisão bibliográfica e dados litológicos extraídos de um mapa geológico na escala 1: 2.500.000 fornecido pela CPRM.

Uma análise cuidadosa dos resultados desta pesquisa mostra que, para o Brasil, a densidade média é de 2.459 kg/m³ (LTD_Brazil), diferente do valor (2.670 kg/m³) comumente usados para a crosta terrestre. Porém, este valor de densidade média tem grande influência de grandes bacias sedimentares fanerozóicas (bacias do Amazonas / Solimões / Acre, Alto Tapajós, Parecis, Parnaíba e Paraná), localizadas na área de estudo.

Do ponto de vista geológico, os valores modelados evidenciam a separação entre as bacias fanerozóicas, de composição predominantemente sedimentar, e as demais províncias que agregam rochas metamórficas e ígneas. Além disso, os dados também mostram que as províncias mais antigas têm valores de densidade média mais elevados em comparação com outras províncias.

O estudo (Capítulo 5), verificou-se que os valores das altitudes ortométricas são mais sensíveis aos valores de densidade em altitudes maiores nos métodos de Helmert e Mader. Além disso, verificou-se que as incertezas têm o mesmo comportamento para ambos os métodos, e os valores mais baixos são apresentados adotando valores de densidade variável.

Por causa das incertezas associadas aos dados utilizados e propagadas para os valores calculados, foram identificadas diferenças entre os valores de altitude ortométricas estimados, porém, não significativas em relação aos métodos e aos valores

de densidade empregados.

Ao analisar as diferenças entre os valores de altitude normal e ortométrica, os valores apresentados são superiores as incertezas estimadas para a maioria das estações utilizadas, o que é possível sugerir que ambas as alturas são estatisticamente diferentes considerando um nível de confiança de 68,3%, ou 1σ .

Nesse contexto, o estudo ressaltar a importância de considerar as incertezas associadas e a necessidade de aperfeiçoamento de modelos de distribuição de massa topográficas no processo de estimativa de altitude ortométricas e de definição da superfície geoidal.

O estudo (Capítulo 6) evidenciou que as alturas geoidais são significativamente sensíveis ao tipo do modificador da núcleo de Stokes, e que para o estudo de caso realizado, a adoção do método proposto por Wong e Gore (1969) proporcionou resultados mais aderentes aos pontos de controle terrestre para o estado de São Paulo, em contraponto aos estudos realizados na Austrália (Featherstone et al., 2003), Alaska (Li e Wang, 2011) e Argélia (Aarizou e Rabeh, 2008), por exemplo, onde o uso do modificador promovidos por Featherstone et al. (1998) mostraram mais aderentes aos pontos de controle.

Pela análise do uso do MGG, foram identificadas variações também relevantes nas alturas geoidais estimadas, porém, inferiores quanto comparadas com o a análise envolvendo o núcleo modificado de Stokes.

Os resultados obtidos pela análise da resolução dos MDT não apresentaram diferenças significativas na estimativa das alturas geoidais, corroborando com o estudo realizado por Orlando et al. (2022), o qual conclui que a melhoria da qualidade do MDT não é proporcional à melhora da resolução espacial do dado.

Em relação ao uso de valores de densidade constante e variável, não foram identificadas diferenças significativas na comparação com os valores das alturas geoidais. Porém, é possível sugerir que o uso de valores de densidade variável, coerentes com a litologia da região de estudos, permite o desenvolvimento de modelos geoidais mais rigorosos.

Assim, os resultados da presente na pesquisa indicam que todas as variáveis analisadas influenciam na estimativa das alturas geoidais, porém a escolha do tipo do modificador do núcleo da função de Stokes e do MGG proporcional variações mais significativas nos resultados, quando comparados com as variações apresentadas pela

adoção de valores densidade variável e maior resolução do MDT. Portanto, esta pesquisa reforça a importância de verificação prévia, principalmente do MGG e tipo de modificador do núcleo de Stokes, no desenvolvimento de modelos geoidais gravimétricos mais rigorosos, contribuindo assim no aperfeiçoamento dos modelos geoidais e consequentemente nas aplicações em diversas áreas da Engenharia, Geodésia e Geofísica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aarizou A.; Rabeh N. (2008). Modification du Noyau Intégral de Stokes: Etude des Performances. Bulletin des Sciences Géographiques n° 21.
- Allister N. A.; Featherstone W.E. (2001). Estimation of Helmert orthometric heights using digital barcode levelling, observed gravity and topographic mass-density data over part of Darling Scarp, Western Australia. *Geom Res Aust* 75:25–52.
- Albarici, F. L.; Foroughi, I.; Guimarães, G. N.; Santos, M.; Trabanco, J. (2019). A new perspective for physical heights in Brazil. *Boletim de Ciências Geodésicas*, 25(1): e2019001.
- Abbak, R. A.; Erol, B.; Ustun, U. (2012). Comparison of the KTH and remove–compute–restore techniques to geoid modelling in a mountainous area, *Computers & Geosciences*, 48: 31–40.
- Abduhakimovich, D.N.; Axrorovich, T.I. (2018). Using active sludges of cleaning facilities for obtaining the organomineral nitrophosphoric polymicroelement fertilizer enhanced by phosphorus. *International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology*, 5(5), 5725–5732.
- Almeida, F.F.M.; Brito Neves, B.B.; Carneiro C.D.R. (2000). The origin and evolution of the South American platform. *Earth-Science Reviews*., 50(1-2): 77–111.
- Almeida, F.F.M.; Hasui, Y., Brito Neves, B.B., Fuck, R.A. (1981). Brazilian structural provinces: An introduction. *Earth Sciences Reviews* 17, 1–21.
- Ayhan, M. E. (1993). Geoid determination in Turkey. *Bulletin Geodesique*, 67, pp.10–22.
- Bear, G.W.; Al-Shukri, H.J.; Rudman, A.J. (1995). Linear inversion of gravity data for 3-D density distributions. *GEOPHYSICS* 60 (5), 1354–1364.
<https://doi.org/10.1190/1.1443871>.
- Birch, F. (1960). The Velocity of Compressional Waves in Rocks to 10 Kilobars, Part 1. *Jour. Geophys. Res.* 65, 1083–1102
- Bizzi, L.A.; Schobbenhaus, C.; Vidotti, R.M.; Gonçalves, J.H. (2003). *Geologia, Tectônica e Recursos Minerais do Brasil: texto, mapas e SIG.*, Brasília: CPRM – Serviço Geológico do Brasil.

- Blitzkow, D.; Matos, A. C. O. C.; Fairhead, J. D.; Pacino, M.C.; Lobianco, M. C. B.; Campos, I. O. (2012). The progress of the geoid model computation for South America under GRACE and EGM2008 models. *International Association of Geodesy Symposia*, vol. 136, 2012. pp. 893-899.
- Columbu, S.; Cruciani, G.; Fancello, D.; Franceschelli, M.; Musumeci, G. (2015). Petrophysical properties of a granite-protomylonite-ultramylonite sequence: insight from the Monte Grighini shear zone, central Sardinia, Italy. *European Journal of Mineralogy*, 27, p. 471 - 486. DOI: 10.1127/ejm/2015/0027-2447.
- Cordani, U.G.; Brito-Neves, B.B.; D'Agrella-Filho, M.S. (2003). From Rodinia to Gondwana: a review of the available evidence from South America. *Gondwana*, 6(2), 275-284.
- Dennis, M.; Featherstone, W., (2003). Evaluation of Orthometric and Related Height Systems Using a Simulated Mountain Gravity Field, in I N Tziavos (ed), 3rd Meeting of the International Gravity and Geoid Commission, Thessaloniki, Greece: Ziti Editions, pp. 389-394.
- Ding, J.; Xu, H.; Zhang, C. (2018). To Evaluate Earth Gravitational Model Using Equigeopotential Character. *Wuhan Daxue Xuebao (Xinxi Kexue Ban)/Geomatics and Information Science of Wuhan University*. 43: 832-839.
- Driessen, P.M.; Rochimah, L. (1976). The physical properties of lowland peats from Kalimantan and their significance for land suitability appraisal. In: *Research on peat and podzolic soils in Indonesia and their potential for agriculture*. Soil Research Institute, Bogor, Indonesia.
- Ellmann, A. (2001). Least Squares modification of Stokes formula with applications to the Estonian geoid. Royal Institute of Technology, Division of Geodesy, Report No. 1056, Stockholm.
- Eshaghi, E.; Smith, R. S.; Ayer, J. (2019). Petrophysical characterisation (i.e. density and magnetic susceptibility) of major rock units within the Abitibi Greenstone Belt: Laurentian University Mineral Exploration Research Centre, publication number MERC-ME-2019-144.
- Featherstone, W.E.E.; Tziavos, I.N. (2001). First results of Using Digital Density Data in Gravimetric Geoid Computation in Australia. In: Sideris M.G. (eds) *Gravity, Geoid and Geodynamics 2000*. International Association of Geodesy Symposia., 123. Springer, Berlin, Heidelberg.

- Featherstone, W.E. (2003). Software for computing five existing types of deterministically modified integration kernel for gravimetric geoid determination. *Comput Geosci* 29(2):183-193.
- Featherstone, W.E.; Sideris, M.G. (1998). Modified kernels in spectral geoid determination: first results from Western Australia. In: Forsberg, R., Feissl, M., Dietrich, R. (Eds.), *Geodesy on the Move*. Springer, Berlin, pp. 188–193.
- Freitas, S. R. C.; Blitzkow, D. (1999). Altitudes e geopotencial. *IGeS Bulletin – Special Issue for South America*, 9: 47- 62.
- Ferreira, V. G. F. (2011). Solução do tipo Brovar para o segundo problema de valor de contorno da geodésia com vistas à modernização de sistemas de altitudes. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 171 p.
- Flury, J.; Rummel, R. (2009). On the Geoid-Quasigeoid Separation in Mountain Areas. *Journal of Geodesy*, 83, pp.829-847.
- Garzón, E.; Sánchez-Soto, P.J.; Romero, E. (2010). Physical and geotechnical properties of clay phyllites, *Applied Clay Science*, Volume 48, Issue 3, Pages 307-318. <https://doi.org/10.1016/j.clay.2009.12.022>.
- Gendzwil, D.J.(1969). Densities of Precambrian rocks of the Amisk Lake - Flin Flon area. A detailed study. *Canadian Journal of Earth Sciences*, 6, 1227-1243.
- Guimarães, G. N. 2010. A altimetria e o modelo geoidal no Estado de São Paulo. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 119 p.
- Guimarães, G. N. A.; Matos, A.C.O.C; Blitzkow, D. (2012). An evaluation of recent GOCE geopotential models in Brazil. *Journal of Geodetic Science*, 2(2): 144-155.
- Hartmann, J., Moosdorf, N., (2012). The new global lithological map database GLiM: A representation of rock properties at the Earth surface, *Geochem. Geophys. Geosyst.*, 13, Q12004, 1-37.
- Heck, B.; Uninger, W. (1987). Modification of Stokes's integral formula by combining two classical approaches. *Proceedings of the XIX General Assembly of the International Union of Geodesy and Geophysics*, Vol. 2. Vancouver, Canada, pp. 309–337.
- Heiskanen, W. A.; Moritz, H. (1967). *Physical Geodesy*, San Francisco: W.H. Freeman and Co.
- Helmert, F. (1890). *Die Schwerkraft im Hochgebirge, insbesondere in den Tyroler Alpen*. Veröff. Königl. Preuss. Geod. Inst, 1.

- Heiskanen, W. A.; Moritz, H. (1985). *Geodesia física*. Madrid: Instituto Geográfico nacional.
- Hinze, W. J. (2003). Bouguer reduction density, Why 2.67: *Geophysics*, 68: 1559-1560.
- Hirt, C. (2011). Mean kernels to improve gravimetric geoid determination based on modified Stokes's integration. *Computers and Geosciences*, Volume 37, Issue 11, p. 1836-1842.
- Hofmann-Wellenhof, B.; Moritz, H., (2006). *Physical geodesy*. 2ª Ed. Wien: Springer.
- Huang, J.; Vaníček, P.; Pagiatakis, S. D.; Brink, W. (2001). Effect of topographical density on geoid in the Canadian Rocky Mountains. *Journal of Geodesy*, 74 (11/12): 805-815.
- Hwang, C.; Hsiao, Y. S. (2003). Orthometric corrections from leveling, gravity, density and elevation data: a case study in Taiwan. *Journal of Geodesy* 77: 279-291.
- IGAG - International Association of Geodesy. Resolution nº 1. Prague, July 2015. Available at: < https://iag.dgfi.tum.de/fileadmin/IAG-docs/IAG_Resolutions_2015.pdf>. [accessed: 10 December 2020].
- IGN - Instituto Geográfico Nacional. (2017). Red Nivelación de la República Argentina. Available at: <https://ramsac.ign.gob.ar/posgar07_pg_web/documentos/Informe_Red_de_Nivelacion_de_la_Republica_Argentina.pdf> [accessed: 10 December 2020].
- IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. (2018). Reajustamento da rede altimétrica com números geopotenciais: REALT-2018. Available at: <<https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101594.pdf>> [accessed: 10 December 2020].
- Kiamehr, R. (2006). The impact of lateral density variation model in the determination of precise gravimetric geoid in mountainous areas: a case study of Yran. *Geophysical Journal International*, 167(9): 521-527.
- Kim, K.B.; Yun, H.S.; Choi HJ. (2020). Accuracy Evaluation of Geoid Heights in the National Control Points of South Korea Using High-Degree Geopotential Model. *Applied Sciences*, 10(4):1466.
- Kozlovskaya, E.; Elo, S.; Hjelt, S.; Yliniemi, J.; Pirttijärvi, M. (2004). 3-D density model of the crust of southern and central Finland obtained from joint interpretation of the SVEKALAPKO crustal P-wave velocity models and gravity data. *Geophysical*

- Kuhn, M. (2000). Density modelling for geoid determination. GGG2000, July 31–August 4, 2000, Alberta, Canada.
- Langenheim, V.E.; Jachens, R.C.; Morton, D.M.; Kistler, R.W.; Matti, J.C. (2004). Geophysical and isotopic mapping of preexisting crustal structures that influenced the location and development of the San Jacinto fault zone, southern California. *GSA Bulletin*; 116 (9-10): 1143–1157. doi: <https://doi.org/10.1130/B25277.1>.
- León, J.G.; Vega Fernández, A.; Sánchez, V.; Salvatierra, J.P.; Kingdon, R.W.; Lücke, O.H. 2020. A regional Stokes-Helmert geoid determination for Costa Rica (GCR-RSH-2020): computation and evaluation, 50 (2): 223-247.
- Li, D., wong, L.N.Y.G.L., Zhang, X., (2012). Influence of water content and anisotropy on the strength and deformability of low porosity meta-sedimentary rocks under triaxial compression, *Engineering Geology*, 126, 46-66.
- Li, Y. C.; Sideris, M. G. (1994). Improved gravimetric terrain corrections. *Geophysical Journal International*, 119: 740-752.
- Lionjanga, A.V.; Toole, T.; Newill D. (1987). The development of specifications for the use of low-grade caicretes in lightly trafficked roads in Botswana. *Transportation Research Record* 1106, Volume 1. Washington DC: Transportation Research Board, National Research Council, 281-304.
- Li, X.; Wang, Y. (2011). Comparisons of geoid models over Alaska computed with different Stokes' kernel modifications. *Journal of Geodetic Science*, vol. 1, no. 2, pp. 136-142. <https://doi.org/10.2478/v10156-010-0016-1>.
- Lobianco, M.C.B. (2005). Determinação das alturas do geóide no Brasil. Tese de Doutorado - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 165 p.
- Lücke, O.H.; Vega Fernández, A.; Varela Sánchez; M. et al. (2021). The improvements of the Costa Rican ground-based gravity dataset as a result of a comprehensive attribute and spatial assessment of the historical databases. *Appl Geomat* 13, 401–413 (2021). <https://doi.org/10.1007/s12518-021-00356-5>.
- Mariano, M. A.; Rocha, M.A. (2017). Revisão da Literatura: Apresentação de uma Abordagem Integradora, *J AEDEM International Conference*, Itália, 2017.
- Marotta, G. S.; Almeida, M. A.; Chuerubim, M. L. (2019). Análise da Influência do Valor de Densidade na Estimativa do Modelo Geoidal Local para o Distrito Federal, Brasil. *Revista Brasileira de Cartografia*, 71(4): 1089-1113.

- Marotta, G. S.; Vidotti, R. M. (2017). Development of a Local Geoid Model at the Federal District, Brazil, patch by the Remove-Compute-Restore Technique, Following Helmert's Condensation Method. *Boletim de Ciências Geodésicas*, 23(3), pp. 520-538.
- Martinec, Z. (1993). Effect of lateral density variations of topographical masses in view of improving geoid model accuracy over Canada. Contract report for Geodetic Survey of Canada, Ottawa, Canada.
- Martinec, Z.; Vaníček, P.; Mainville, A.; Véronneau, M. (1995). The effect of lake water on geoidal height. *Journal of Geodesy*, 20(3): 193-203.
- Medeiros, D.F.; Marotta, G.S.; Yokoyama, E.; Franz, I. B.; Fuck, R. A. (2021). Developing a lateral topographic density model for Brazil. *Journal of South American Earth Sciences*, 110, 103425.
- Meissl, P. (1971). Preparations for the numerical evaluation of second-order Molodensky-type formulas. Report 163, Dept Geod Sci & Surv, Ohio State University, Columbus.
- Molodensky, M.S. (1945). Fundamental Problems of Geodetic Gravimetry (in Russian). TRUDY Ts NIIGAİK,42, Geodezizdat, Moscow.
- Molodensky, M.S.; Eremeev, V.F., Yurkina, M.I. (1962). Methods for study of the external gravitational field and figure of the earth. Translated from the 1960 original, The Israeli Programme for the Translation of Scientific Publications, Jerusalem, Israel, 248pp.
- Moritz, H. (1984). Geodetic Reference System 1980. *Bulletin géodésique*, 58(3), pp. 388-398.
- Nicacio, E.; R. Dalazoana; De Freitas, S. (2018). "Evaluation of recent combined global geopotential models in Brazil." *J. Geodetic Sci.* 8 (1):72–82. <https://doi.org/10.1515/jogs-2018-0008>.
- Niethammer, T. (1932). Nivellement und Schwere als Mittel zur Berechnung wahrer Meereshöhen. Schweizerische Geodätische Kommission, Berne.
- Odera, P.A.; Fukuda, Y. (2014). Improvement of the geoid model over Japan using integral formulae and combination of GGMs. *Earth, Planets and Space*, 66: 22.
- Orlando, F.C.; Bias.E.S.; Cereda, JR. A. (2022). SRTM: Para uma melhor Utilização - Conhecendo um pouco mais da qualidade planialtimétrica, da influência da

- resolução espacial e dos modelos de superfície equipotenciais de referência. *Revista Brasileira de Geografia Física* v.15, n.02 (2022) 1153-1168.
- Okogbue, C.O.; Aghamelu, O.P. (2020). Magaji, S. Assessment of Quality of Some Laterites in Northeastern Nigeria by Multivariate Analysis of their Geotechnical Index Properties. *Natural Resources Research*, 29, 3015–3033. <https://doi.org/10.1007/s11053-020-09632-4.2020>.
- Oršulić. B. O; Markovinović. D; Varga. M.; Bašić. T. (2019). The impact of terrestrial gravity data density on geoid accuracy: case study Bilogora in Croatia. *Journal of Surveying Engineering* 146(3): 05020005.
- Pagiatakis, S.D.; Armenakis, C. (1999). Gravimetric geoid modelling with GIS. *International Geoid Service Bulletin*, 8, 105-112.
- Pedreira, A.J.; Lopes, R.C.; Vasconcelos A.M.; Bahia, R.B. (2003). Bacias sedimentares Paleozóicas e Meso-Cenozóicas interiores. In: Bizzi LA, Schobbenhaus C, Vidotti RM, Gonçalves JH (eds) *Geology, Tectonics and Mineral Resources of Brazil*. Serviço Geológico – CPRM, Brasília, 55–85.
- Pereira, H.S. (2017). Integração de Dados Geológicos, Geoquímicos, Espectrorradiométricos e de Propriedades Físicas de Rochas: Estudo de Caso do Corpo N5S Província Mineral de Carajás., Master's Thesis. Universidade de Brasília.
- Petrie, G.; Kennie. T.J.M. (1990). *Terrain modelling in surveying and civil engineering*. Londres: Editora Whittles.
- Piccirillo, E.M.; Comin-Chiaramonti, P.; Melfi, A.J.; Stolfa, D.; Bellieni, G.; Marques, L.S.; Giaretta, A.; Nardy, A.J.R.; Pinese, J.P.P.; Raposo, M.I.B.; Roisenberg, A. (1988). Petrochemistry of Continental Flood Basalt-Rhyolite Suites and Related Intrusive from the Paraná Basin (Brazil). In: Piccirilo E.M., Melfi A.J. (Eds.). *The Mesozoic Flood Volcanism of the Paraná Basin: Petrogenetic and Geophysical Aspects*. São Paulo, Instituto Astronômico e Geofísico, Universidade de São Paulo. 107-156.
- Ramsayer, K. (1953). *Die Schwerereduktion von Nivellements*. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe A, Heft 6, München.
- Ramsayer, K. (1954). Vergleich Verschiedener Schwerereduktionen Von Nivellements. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 79, pp. 140-150.

- Rózsa, S. (2002). Local geoid determination using surface densities. *Periodica Polytechnica Ser. Civ. Eng.*, 46(2): 205-212.
- Salas, H.T.; Nalini, H.A.; Mendes, J.C. (2006). Radioactivity dosage evaluation of Brazilian ornamental granitic rocks based on chemical data, with mineralogical and lithological characterization. *Environ Geol* 49, 520–526. <https://doi.org/10.1007/s00254-005-0066-3>.
- Salimun, N.; Abdul, A.G.; Mohd. K., A. (2018). Correlation of seismic velocity and density of metasandstone from Kati Formation, Seri Iskandar, Perak, Malaysia. *Bulletin of the Geological Society of Malaysia*, 65, 131 – 134.
- Sampietro, D.; Capponi, M.; Triglione, D. (2016). GTE: a new software for gravitational terrain effect computation: theory and performances. *Pure Applied Geophysics*. 173: 2435-2453.
- Sánchez, J. L. C.; Freitas, S. R. (2016). Estudo do Sistema Vertical de Referência do Equador no Contexto da Unificação do Datum Vertical. *Boletim de Ciências Geodésicas*, 22(2), pp.248-264.
- Santos, J.O.S. (2003). Geotectônica dos escudos das Guianas e Brasil-Central. In: Bizzi, L.A., Schobbenhaus, C., Vidotti, R.M., Gonçalves, J.H. (Eds.), *Geologia, Tectônica e Recursos Minerais do Brasil*. CPRM, Brasília, 169-226.
- Santos, M. C.; Vaníček, P.; Featherstone, W. E.; Kingdon, R.; Ellmann, A.; Martin, B. - A.; Kuhn, M.; Tenzer, R. (2006). The Relation Between Rigorous and Helmert's Definitions of Orthometric Heights. *Journal of Geodesy*, 80(12), p.p. 691-704.
- Santos JR, R. L. (2017). Efeito da variação do valor da densidade lateral relacionada à separação geoide-quasegeoidde na região de Porto Alegre-RS - Estudo de Caso. IV Simpósio Brasileiro de Geomática, Presidente Prudente -SP, julho 2017, p. 470-473.
- Scarpelli, W.; Horikava, É.H. (2017). Gold, iron and manganese in central Amapá, Brazil. *Brazilian Journal of Geology*, 47(4), 703-721. <https://doi.org/10.1590/2317-4889201720170114>.
- Scoates, J.S. (2000). The Plagioclase–Magma Density Paradox Re-examined and the Crystallization of Proterozoic Anorthosites, *Journal of Petrology*, 41 (5), 627–649, <https://doi.org/10.1093/petrology/41.5.627>.
- Seeber, G. (2003). *Satellite geodesy: foundations, methods, and applications*. 2. ed. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 589 p.

- Sheng, M. B.; Shaw, C.; Vaníček, P.; Kingdon, R. W.; Santos, M.; Foroughi, I. (2019). Formulation and Validation of a Global Laterally Varying Topographical Density Model. *Tectonophysics*, 762, pp. 45-60.
- Silva, D.V.R. (2017). Determinação de um Modelo Geoidal Local para o Distrito Federal. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Brasília, 76 p.
- SIRGAS – Sistema de Referência Geocéntrico para las Américas. National densifications of SIRGAS. Disponível em: < <http://www.sirgas.org/pt/national-densifications/>>. [accessed: 10 December 2020].
- Sjöberg, L.E., (2018). On the Geoid and Orthometric Height vs. Quasigeoid and Normal Height. *Journal of Geodetic Science*, 8(1), pp.115-120.
- Sjöberg L., (2010) A Strict Formula for Geoid-to-Quasigeoid Separation. *Journal of Geodesy*, 84(11), pp. 699-702.
- Sjöberg, L. E. (2004). The effect on the geoid of lateral density variations. *Journal of Geodesy*, 78(1/2): 34-39.
- Smithson, S.B., (1971). Densities of metamorphic rocks. *Geophysics* 36:690-694.
- Stokes, G.G. (1849). On the variation of gravity on the surface of the earth. In: *Mathematical and Physical Papers* 2, 131–171 (from the *Trans. of the Cambridge Philos. Soc. Vol. VIII: 672-695, N.Y.*).
- Stranska, M. (1986). *Hustotná mapa hornín Západných Karpát na území ČSSR*. Final Report, MS Geofond, Bratislava.
- Subrahmanyam, C.; Verma, R.K.; (1981). Densities and Magnetic Susceptibilities of Precambrian Rocks of Different Metamorphic Grade (Southern Indian Shield). *Journal of Geophysics*, 49 (1), 101-7.
- Tenzer, R.; Novák, P.; Moore, P.; Kuhn, M.; Vaníček, P. (2006). Explicit Formula for the GeoidQuasigeoid Separation. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 50, pp. 607-618.
- Tenzer, R.; Sirguey, P.; Rattenbury, M.; Nicolson, J. (2011). A digital rock density map of New Zealand, *Computer & Geosciences.*, 37, 1181-1191.
- Tenzer, R.; Vaníček, P. (2003). Correction to Helmert's orthometric height due to actual lateral variation of topographical density. *Revista Brasileira de Cartografia.*, 55(02), 44-47.
- Tenzer, R.; Hirt, C.; Claessens, S.; Nova, P. (2015). Spatial and Spectral Representations of the Geoid-to-Quasigeoid Correction, *Surveys in Geophysics*, 36: 627–658.

- Tenzer, R.; Vaníček, P. (2003). Correction to Helmert's orthometric height due to actual lateral variation of topographical density. *Revista Brasileira de Cartografia*, 55(2): 44-47.
- Tenzer, R.; Foroughi, I.; Hirt, C. (2019). How to Calculate Bouguer Gravity Data in Planetary Studies. *Surveys in Geophysics*, 40: 107-132.
- Tocho, C.N.; Antokoletz, E.D.; Piñón, D.A. (2020). Towards the Realization of the International Height Reference Frame (IHRF) in Argentina. *International Association of Geodesy Symposia*.
- Toczeck, A.; Schmitt, R.S.; Braga, M.A.S.; Miranda, F.P. (2019). Tectonic evolution of the Paleozoic Alto Tapajós intracratonic basin - A case study of a fossil rift in the Amazon Craton. *Journal of South American Earth Sciences*, 94, 102225.
- Torge W. (1991). *Geodesy*. 2nd ed. Berlin; New York: de Gruyter.
- Toushmalani, R.; Saibi, H. (2015). 3D gravity inversion using Tikhonov regularization. *Acta Geophys* 63 (4), 1044–1065. <https://doi.org/10.1515/acgeo-2015-0029>.
- Trčková, J. (2005). Physical, mechanical and deformational properties of metabasalts, amphibolites and gneisses from ksdb-3 compared with surface analogues. *Acta Geodynamica et Geomaterialia*., 2, 4 (140), 39-47.
- Trojanowicz, M.; Osada, E.; Karsznia, K. (2020). Precise local quasigeoid modelling using GNSS/levelling height anomalies and gravity data, *Survey Review*, 52(370): 76-83.
- Tziavos, I. N.; Featherstone, W. E. (2001). First results of using digital density data in gravimetric geoids computation in Australia. *IAG Symposia, GGG2000*, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 123: 335-340.
- Tziavos, I. N.; Vergos, G. S.; Grigoriadis, V. N. (2010). Investigation of topographic reductions and aliasing effects on gravity and the geoid over Greece based on various digital terrain models. *Surveys in Geophysic*. 31: 23.
- Vaníček, P.; Santos, M. S.; Tenzer, R.; Navarro, A. H., (2003). Algunos Aspectos Sobre Alturas Ortométricas y Normales. *Revista Cartográfica*, 76/77, pp. 79-86.
- Vaníček, P.; Kleusberg, A. (1987). The Canadian geoid Stokesian approach. *manuscripta geodaetica* 12 (2), 86–98.
- Vaníček, P.; Sjöberg, L.E. (1991). Reformulation of Stokes's theory for higher than second-degree reference field and modification of integration kernels. *Journal of Geophysical Research—Solid Earth* 96 (B4), 6529–6539.

- Wang, Y. M.; Saleh, J.; Li, X. (2021). The US Gravimetric Geoid of 2009 (USGG2009): model development and evaluation. *Journal of Geodesy*, 86: 165-180.
- Winter, J.D. (2001). *An introduction to Igneous and Metamorphic Petrology*. New Jersey: Prentice-Hall.
- Wong L.; Gore, R. (1969). Accuracy of geoid heights from modified Stokes kernels. *Geophys. J. R. astr. Soc*, 18: 81-91.
- Yang, T.; Gao, J.; Gu, Z.; Dagva, B.; Tserenpil, B. (2013). Petrophysical Properties (Density and Magnetization) of Rocks from the Suhbaatar-Ulaanbaatar-Dalandzadgad Geophysical Profile in Mongolia and Their Implications. *The Scientific World Journal*, 2013, 791918. <https://doi.org/10.1155/2013/791918>.
- Yakubu C.I.; Ferreira, V.G.; Asante, C.Y. (2017). Towards the Selection of an Optimal Global Geopotential Model for the Computation of the Long-Wavelength Contribution: A Case Study of Ghana. *Geosciences*. 7(4):113.
- Zhang, K.; Featherstone, W.; Stewart, M.; Dodson, A. (1998). A new gravimetric geoid for Austria. In: *Second Continental Workshop on the Geoid*. Reports of the Finnish Geodetic Institute, pp. 225-233.
- Zingerle, P.; Pail, R.; Gruber, T. (2020). O modelo de campo de gravidade global combinado XGM2019e. *Journal of Geodesy*, 94: 66.