



Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Equações diferenciais parciais de segunda ordem que descrevem superfícies pseudoesféricas ou esféricas

por

Jailson Oliveira Dias

Brasília

2024



Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Equações diferenciais parciais de segunda ordem que descrevem superfícies pseudoesféricas ou esféricas

por

Jailson Oliveira Dias¹

Orientador(a): Profa. Dra. Ketí Tenenblat

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília como parte dos requisitos para obtenção do grau de DOUTOR em Matemática.

Brasília

2024

¹O autor contou com apoio financeiro da CAPES e do CNPq durante a elaboração deste trabalho.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me dar forças e por me ajudar a caminhar nessa longa estrada repleta de desafios.

A minha mãe, Lucineide Bispo de Oliveira, agradeço por me ensinar a ler. Além disso, quero agradecer de forma especial pelo apoio de pessoas como Magno Ernesto Cavalcante, Alaide Dias Ferraz, Vera Lúcia Araújo, Maria das Neves, Fabiane Moraes e Roque Santos, os quais me deram muita força nessa caminhada.

Agradeço a minha orientadora, Ketí Tenenblat, por toda a atenção e aos membros da banca, Tarcísio Castro, Diego Catalano e Gregório Pacelli, pelas dicas e sugestões.

Agradeço aos professores Luiz Alberto de Oliveira Silva, Fausto Assunção de Brito Lira, Gilberto da Silva Pina, Maria Amélia de Pinho Barbosa, Benedito Leandro Neto, Antonio Andrade do Espírito Santo, Genilson Melo, Alex Carrazedo, Igor dos Santos, Eleni Cerqueira, Karla Torres, Neusa Correia, Elenita, Avani Rios Magalhães, Adriana Reis, Cosme Geraldo, Raimundo Correia, Norai Romeu, Bolívar, Maria do Amparo, Eva Castanharo e Sandra Sinara Cerqueira por toda a atenção.

Quero também agradecer pelo apoio de Jefferson Araújo, Wállace John Pereira, Adalberto Oliveira, Mabel Santana, Jéssica Almeida, Raquel Oliveira, Christe Héliida, Matheus Andrade Ribeiro de Moura Horácio, Felipe Quintino, Fernanda Caixeta, Marta Chagas, Deusanira, Rejane, Willem Carneiro, Saulo Rodrigo Medrado, Rodrigo Marrocos, Jucileide dos Santos, Alancoc Alencar, Filipe Kelmer Alves, Cid Ferraz Machado, Romulo Diaz, Leonardo Melo, Júlio Christian, Iago Cesar, Lucca Geraldês, Elen Geraldês, Rafael Meira, Thiago Guimarães, Edson, Celina e Brás.

Enfim, quero agradecer ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo financiamento durante a elaboração deste trabalho.

Resumo

Consideramos uma classe de equações diferenciais parciais de segunda ordem que descrevem superfícies pseudoesféricas ou superfícies esféricas. Fornecemos uma classificação para essas equações e, como aplicação, damos uma série de exemplos, dentre os quais destacamos a equação de Hunter-Saxton, que tem a sua origem ligada ao estudo de cristais líquidos nemáticos, e a equação short pulse, que é caracterizada por descrever a propagação de pulsos ultracurtos em fibras ópticas. Além disso, mostramos que, para o caso genérico, uma classe de equações de onda não lineares estudada por Calogero descreve superfícies pseudoesféricas.

Palavras-chave: equações diferenciais parciais; superfícies pseudoesféricas; superfícies esféricas; equações diferenciais de segunda ordem.

Abstract

We consider a class of second-order partial differential equations that describe pseudospherical surfaces or spherical surfaces. We provide a classification for these equations and, as an application, we give a series of examples, among which we highlight the Hunter-Saxton equation, which has its origin linked to the study of nematic liquid crystals, and the short pulse equation, which is characterized by describing the propagation of ultrashort pulses in optical fibers. Moreover, we show that, for the generic case, a class of nonlinear wave equations studied by Calogero describes pseudospherical surfaces.

Keywords: partial differential equations; pseudospherical surfaces; spherical surfaces; second-order differential equations.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	6
1.1 Formas diferenciais em $\mathbb{R}^2$	6
1.2 Fundamentos e notações	9
2 Uma classe de equações diferenciais que descrevem superfícies pseudo-esféricas ou superfícies esféricas	22
2.1 Lema de caracterização	22
2.2 Resultados de classificação	23
2.3 Exemplos	29
3 Demonstrações dos resultados	38
3.1 Demonstração do Lema 2.1	38
3.2 Lemas auxiliares	42
3.3 Demonstração do Teorema 2.1	51
3.4 Demonstração do Teorema 2.2	55
3.5 Demonstração do Teorema 2.3	57
3.6 Demonstração do Teorema 2.4	57
3.7 Demonstração do Teorema 2.5	66
3.8 Demonstração do Corolário 2.1	77

Introdução

Os pesquisadores Gardner, Greene, Kruskal e Miura [10] publicaram um artigo versando sobre um problema de Cauchy para a equação Korteweg-de Vries (KdV) no ano de 1967. Essa publicação, junto com o artigo de Zakharov e Shabat [29], teve como consequência o surgimento do que conhecemos atualmente como o método do espalhamento inverso. Ablowitz, Kaup, Newell e Segur [1] desempenharam um papel importante no estudo desse método e isso, por sua vez, serviu como um estímulo para que Sasaki [24], em 1979, introduzisse uma interpretação geométrica para algumas equações em termos de superfícies pseudoesféricas. Em 1986, Chern e Tenenblat [8], inspirados pela observação feita por Sasaki [24], introduziram um estudo sistemático para investigar quais equações diferenciais de determinada classe tinham a propriedade de descrever superfícies pseudoesféricas.

Uma equação diferencial parcial $\mathcal{E}$, para uma função real $u = u(x, t)$, descreve *superfícies pseudoesféricas* se existe um sistema de 1-formas $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, dado por

$$\omega_1 = f_{11}dx + f_{12}dt, \quad \omega_2 = f_{21}dx + f_{22}dt, \quad \omega_3 = f_{31}dx + f_{32}dt, \quad (1)$$

onde f_{ij} , com $i \in \{1, 2, 3\}$ e $j \in \{1, 2\}$, são funções de x , t , u e um número finito de suas derivadas parciais, com respeito a x e t , tais que as equações de estrutura de uma superfície com curvatura gaussiana $K = -1$,

$$d\omega_1 = \omega_3 \wedge \omega_2, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3, \quad d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_2, \quad (2)$$

com $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$ são satisfeitas se, e somente se, u é uma solução de $\mathcal{E}$. Observamos que $\omega_3 := \omega_{12}$ é a conexão de Levi-Civita da correspondente métrica, a qual está definida no domínio de uma solução genérica u de $\mathcal{E}$ por

$$I = \omega_1^2 + \omega_2^2. \quad (3)$$

Chern e Tenenblat [8] iniciaram o estudo com as equações da seguinte classe:

$$u_t = F(u, u_x, \dots, \partial_x^k u). \quad (4)$$

Exibir as funções f_{ij} , com $i \in \{1, 2, 3\}$ e $j \in \{1, 2\}$, mencionadas na definição de

equações que descrevem superfícies pseudoesféricas, pode constituir uma tarefa extremamente difícil. Dessa forma, Chern e Tenenblat [8] impuseram as hipóteses de que $f_{ij} = f_{ij}(u, u_x, \dots, \partial_x^k u)$ e $f_{21} = \eta$, com η sendo um parâmetro real. Eles forneceram teoremas de caracterização que contêm exemplos importantes de equações que descrevem superfícies pseudoesféricas, dentre as quais podemos destacar a equação de Burgers, a equação KdV e a equação mKdV. Observamos que a classe estudada em [8] é mais ampla que o problema tratado por Ablowitz, Kaupp, Newel e Segur [1], onde f_{11} e f_{31} não devem depender do parâmetro η .

É sobremodo importante salientar que existem maneiras alternativas de caracterizar as equações que descrevem superfícies pseudoesféricas. Por exemplo, as equações de estrutura (2) são equivalentes à condição de integrabilidade do sistema linear

$$\begin{pmatrix} dv^1 \\ dv^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_2 & \omega_1 - \omega_3 \\ \omega_1 + \omega_3 & -\omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

onde $v^i = v^i(x, t)$. Ademais, considerando X e T funções suaves a valores em $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ dadas por

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_{21} & f_{11} - f_{31} \\ f_{11} + f_{31} & -f_{21} \end{pmatrix}, \quad T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_{22} & f_{12} - f_{32} \\ f_{12} + f_{32} & -f_{22} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

podemos, mediante o uso da notação $V := (v^1, v^2)^T$, reescrever (5) como o problema linear

$$\frac{\partial V}{\partial x} = XV, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = TV, \quad (7)$$

com condição de integrabilidade dada por

$$D_t X - D_x T + [X, T] = 0, \quad (8)$$

onde D_t e D_x são os operadores derivadas totais com respeito a t e x , respectivamente. Ademais, por uma computação simples é possível mostrar que (8) é equivalente a (2).

A partir do pioneirismo evidenciado por [8], outros pesquisadores deram continuidade ao estudo de outras classes de equações diferenciais no intuito de investigar se elas descreviam superfícies pseudoesféricas. Essas equações, além de serem a condição de integrabilidade de um problema linear associado, podem apresentar propriedades importantes tais como transformações de Bäcklund e infinitas leis de conservação.

Em 1987, Jorge e Tenenblat [12] classificaram equações diferenciais do tipo

$$u_{tt} = F(u, u_x, u_{xx}, u_t), \quad (9)$$

com a condição de que $f_{ij} = f_{ij}(u, u_x, u_{xx}, u_t)$ e $f_{21} = \eta$. Nesse trabalho, Jorge e Tenen-

blat [12] forneceram exemplos importantes de equações que descrevem superfícies pseudoesféricas, dentre as quais se destaca a equação de Liouville.

Em 1989, Rabelo [20] caracterizou as equações diferenciais do tipo

$$u_{xt} = F(u, u_x, \dots, \partial_x^k u), \quad (10)$$

com a condição de que $f_{ij} = f_{ij}(u, u_x, \dots, \partial_x^k u)$ e $f_{21} = \eta$, com η sendo um parâmetro real. Nesse trabalho, Rabelo forneceu exemplos importantes de equações que descrevem superfícies pseudoesféricas, como a equação tratada por Konno e Sanuki [15] e a equação cúbica de Rabelo, mais conhecida atualmente como equação short pulse. Além disso, Rabelo [20] analisou condições para que uma classe de equações de onda não lineares, tratada por Calogero em [2], descrevesse superfícies pseudoesféricas.

Em 1995, Kamran e Tenenblat [13] generalizaram [8], pois consideraram a equação (4), com a condição de que $f_{ij} = f_{ij}(u, u_x, \dots, \partial_x^k u)$, sem impor mais nenhuma condição adicional. Em 1998, Reyes [23], em certo sentido, também fez uma generalização de [8], pois ele considerou a classe

$$u_t = F(x, t, u, u_x, \dots, \partial_x^k u),$$

com a condição de que $f_{ij} = f_{ij}(x, t, u, u_x, \dots, \partial_x^k u)$ e $f_{21} = \eta$, com η sendo um parâmetro real. Inspirados nesse trabalho, Catalano e Silva [4] obtiveram uma classificação de equações da forma

$$u_t = A(x, t, u) u_{xx} + B(x, t, u, u_x), \quad A \neq 0,$$

com a condição de que $f_{21} = \eta$, com η sendo um parâmetro real.

Com exceção de [13], em todos os trabalhos citados até aqui, bem como [21] e [22] foi utilizada a condição de que $f_{21} = \eta$. Gomes [19], no entanto, trouxe uma condição inovadora nas funções f_{ij} , que foi a seguinte:

$$f_{p1} = \mu_p f_{11} + \eta_p, \quad \mu_p, \eta_p \in \mathbb{R}, p \in \{2, 3\}. \quad (11)$$

Ele classificou equações diferenciais parciais de quinta ordem do tipo

$$u_t = u_{xxxxx} + G(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, u_{xxxx}), \quad (12)$$

com a condição (11). Nesse trabalho, Gomes [19] forneceu exemplos importantes de equações que descrevem superfícies pseudoesféricas, como a equação de Sawada-Kotera, a equação de Kaup-Kupershmidt e a equação KdV de quinta ordem. A condição (11) foi posteriormente usada em alguns trabalhos, a exemplo de [7] e [26].

O conceito de equação diferencial que descreve superfícies esféricas, por sua vez, passou

a ser estudado com o advento de um trabalho publicado em 2002 por Ding e Tenenblat [9], o qual versou a respeito de sistemas de equações diferenciais que descrevem superfícies de curvatura constante não nula. A classe estudada por eles trouxe exemplos importantes, como a equação não linear de Schrödinger e o modelo ferromagnético de Heisenberg.

Uma equação diferencial parcial $\mathcal{E}$, para uma função real $u = u(x, t)$, descreve *superfícies esféricas* se existe um sistema de 1-formas $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, dado por (1), onde f_{ij} , com $i \in \{1, 2, 3\}$ e $j \in \{1, 2\}$, são funções de x, t, u e um número finito de suas derivadas parciais, com respeito a x e t , tais que as equações de estrutura de uma superfície com curvatura gaussiana $K = 1$,

$$d\omega_1 = \omega_3 \wedge \omega_2, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3, \quad d\omega_3 = -\omega_1 \wedge \omega_2,$$

com $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$ são satisfeitas se, e somente se, u é uma solução de $\mathcal{E}$. Observamos que $\omega_3 := \omega_{12}$ é a conexão de Levi-Civita da correspondente métrica.

Seguindo a mesma linha de [9], Castro e Tenenblat [26] classificaram equações diferenciais do tipo

$$u_t = u_{xxt} + \lambda u u_{xxx} + G(u, u_x, u_{xx}), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (13)$$

com a condição (11), tendo o intuito de saber se essa classe continha equações que descreviam superfícies pseudoesféricas ou superfícies esféricas. Nesse trabalho, Castro e Tenenblat [26] forneceram exemplos importantes de equações que descrevem superfícies pseudoesféricas, como a equação de Camassa-Holm e a equação de Degasperis-Procesi.

Kelmer e Tenenblat [14] classificaram sistemas de equações diferenciais que descrevem superfícies pseudoesféricas ou superfícies esféricas. Eles investigaram a seguinte classe de sistemas de equações:

$$\begin{cases} u_{xt} = F(u, u_x, v, v_x), \\ v_{xt} = G(u, u_x, v, v_x), \end{cases}$$

com a condição de que ao menos uma das funções f_{11}, f_{21} ou f_{31} fosse um parâmetro real. Nesse trabalho, Kelmer e Tenenblat [14] forneceram exemplos importantes de sistemas de equações que descrevem superfícies pseudoesféricas ou superfícies esféricas, dentre eles se destacam as generalizações de sistema do tipo Pohlmeier-Lund-Regge e o sistema sem dispersão acoplado Konno-Oono.

Outros trabalhos além dos citados anteriormente que tratam a respeito de classificação de equações diferenciais parciais que descrevem superfícies pseudoesféricas ou superfícies esféricas são [5] e [6]. Nesses trabalhos há uma série de exemplos que possuem aplicações, um deles é a equação de astigmatismo constante que, de acordo com [6], descreve tanto superfícies pseudoesféricas quanto superfícies esféricas.

De modo geral, os trabalhos descritos anteriormente contêm resultados de classificação que apresentam uma infinidade de equações diferenciais, que são determinadas em termos de certas funções arbitrárias. Escolhas especiais dessas funções fornecem os exemplos importantes que descrevem certos fenômenos físicos.

O presente trabalho versará sobre o estudo de equações diferenciais parciais de segunda ordem do tipo

$$u_{xt} = F(u, u_x, u_{xx}) \quad (14)$$

que descrevem superfícies pseudoesféricas ou superfícies esféricas. O estudo da classe descrita em (14), em sua generalidade, é extremamente difícil. Em virtude disso, consideraremos uma hipótese adicional no problema linear, a qual consistirá em supor $f_{ij} = f_{ij}(u, u_x, u_{xx})$, com

$$f_{21} = \mu f_{11}, \quad \mu \in \mathbb{R} - \{0\}. \quad (15)$$

No Capítulo 1 deste trabalho, apresentaremos alguns conceitos preliminares para o entendimento do estudo de equações do tipo (14) na teoria de Cartan-Kähler [3].

No capítulo 2, apresentaremos os resultados de classificação que foram obtidos no nosso estudo e, em seguida, faremos uma aplicação desses resultados para obter exemplos de equações que descrevem superfícies pseudoesféricas, bem como exemplos de equações que descrevem superfícies esféricas. Dos exemplos obtidos no estudo, os que se destacam no cenário atual em questão de aplicação são a equação de Hunter-Saxton, a equação short pulse e uma classe de equações de onda não lineares tratada por Calogero em [2], que foi investigada no caso genérico neste trabalho.

Conforme veremos neste trabalho, com a condição (15), a equação de Hunter-Saxton, que tem a sua origem ligada ao estudo de cristais líquidos nemáticos [11], descreve superfícies pseudoesféricas, enquanto que a equação short pulse, que é caracterizada por descrever a propagação de pulsos ultracurtos em fibras ópticas [25], descreve superfícies esféricas. Além disso, mostraremos que a classe de equações de onda não lineares, estudada por Calogero em [2], descreve superfícies pseudoesféricas no caso genérico.

O capítulo 3, por sua vez, foi reservado para as demonstrações dos resultados obtidos neste trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

Com a finalidade de tornar a teoria das equações diferenciais parciais que descrevem superfícies pseudoesféricas ou superfícies esféricas mais acessível, introduziremos, neste capítulo, todas as ferramentas essenciais, as quais servirão para fomentar todo o desenvolvimento do trabalho e, para tal, trataremos de exibir aqui algumas definições básicas, proposições e observações importantes que serão utilizadas ao longo de todo o trabalho.

Na Seção 1.1, introduziremos a noção de formas diferenciais num aberto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$, na Seção 1.2 serão tratados os conceitos e notações essenciais para o entendimento do trabalho de modo geral.

1.1 Formas diferenciais em $\mathbb{R}^2$

Para iniciar a nossa abordagem, consideremos o conjunto de todas as aplicações lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$. Esse conjunto é usualmente denotado por $(\mathbb{R}^2)^*$ e recebe o nome de espaço dual do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$. Não é difícil verificar que esse conjunto, com as operações usuais de funções, é um espaço vetorial. Além disso, dada uma base arbitrária $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, definimos uma base $\{\phi_1, \phi_2\}$ de $(\mathbb{R}^2)^*$ por

$$\phi_i(e_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

com $i, j \in \{1, 2\}$. A base $\{\phi_1, \phi_2\}$ é denominada base dual da base $\{e_1, e_2\}$.

Nesta seção, denotaremos por $p = (x, t)$ um ponto qualquer em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e indicaremos a base canônica de $\mathbb{R}^2$ mediante a notação $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right\}$, sendo que $\frac{\partial}{\partial x} = (1, 0)$ e $\frac{\partial}{\partial t} = (0, 1)$. Além disso, usaremos também x e t para representar as projeções de $U \subset \mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ na primeira e segunda coordenadas, respectivamente. Evidentemente as funções projeções x e t são diferenciáveis para cada $p \in U$ e é uma computação imediata verificar que o conjunto $\{dx_p, dt_p\}$, formado pelas diferenciais de x

e t em p , é uma base dual da base canônica de $\mathbb{R}^2$. Como consequência disso, resulta que para um vetor $v = v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial t}$ de $\mathbb{R}^2$, devemos ter $dx_p(v) = v_1$ e $dt_p(v) = v_2$.

No que se segue, introduziremos a definição de 1-forma num aberto de $\mathbb{R}^2$.

Definição 1.1.1. *Uma 1-forma em um aberto U de $\mathbb{R}^2$ é uma aplicação ω que, para cada $p \in U$, associa $\omega_p \in (\mathbb{R}^2)^*$.*

De acordo com a Definição 1.1.1, para cada $p \in U$, temos um funcional linear associado $\omega_p \in (\mathbb{R}^2)^*$. Por conseguinte, tendo em vista que $\{dx_p, dt_p\}$ forma uma base dual da base canônica de $\mathbb{R}^2$, temos

$$\omega_p = a(p)dx_p + b(p)dt_p, \quad (1.1)$$

em que $a, b : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções reais, isto é, para cada $p \in U$, tem-se $a(p), b(p) \in \mathbb{R}$. No caso em que as funções a e b são diferenciáveis em U , dizemos que ω é uma 1-forma diferencial.

No que se segue, definiremos alguns objetos envolvendo 1-formas. Para tal, sejam ω e φ 1-formas definidas num subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^2$. Daí, considerando $p \in U$, denominamos a aplicação $(\omega\varphi)_p : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $(\omega\varphi)_p(v_1, v_2) = \omega_p(v_1)\varphi_p(v_2)$, como sendo o produto tensorial de ω e φ . É evidente que tal aplicação é bilinear, pois ω e φ são aplicações lineares; agora no que rege a soma de 1-formas, considerando as 1-formas ω e φ anteriores, define-se, para cada $p \in U$, a soma delas como $(\omega + \varphi)_p = \omega_p + \varphi_p$, enquanto que o produto de uma 1-forma θ , definida em $U \subset \mathbb{R}^2$, por uma função real f , também definida em $U \subset \mathbb{R}^2$, é dado por $(f\theta)_p = f(p)\theta_p$, seja qual for $p \in U$. Consequentemente, se escrevermos $\omega = a_1dx + b_1dt$, $\varphi = a_2dx + b_2dt$ e $\theta = adx + bdt$, teremos $\omega + \varphi = (a_1 + a_2)dx + (b_1 + b_2)dt$, enquanto que $f\theta = afdx + bfdt$.

Para 1-formas ω, φ e θ quaisquer e uma função real f , definidas em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, é válido que

$$\begin{aligned} (\omega + \varphi)\theta &= \omega\theta + \varphi\theta, \\ \theta(\varphi + \omega) &= \theta\varphi + \theta\omega, \\ (f\omega)\varphi &= \omega(f\varphi) = f\omega\varphi. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Uma demonstração das propriedades evidenciadas em (1.2) pode ser encontrada em [27].

Agora, com a finalidade de introduzir a definição de 2-forma em um aberto de $\mathbb{R}^2$, considere o conjunto

$$\Lambda^2(\mathbb{R}^2)^* := \{B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; B \text{ é uma aplicação bilinear e alternada}\}. \quad (1.3)$$

O conjunto, definido em (1.3), com operações usuais, constitui um espaço vetorial. Dizer que B é uma aplicação alternada significa que tal aplicação muda de sinal quando permutamos seus argumentos, ou seja, $B(v_1, v_2) = -B(v_2, v_1)$ para quaisquer $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$.

Supondo que φ_1 e φ_2 são 1-formas definidas num subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^2$, obtemos um elemento $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \Lambda^2(\mathbb{R}^2)^*$, definido como se segue:

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(v_1, v_2) = \det(\varphi_i(v_j)), \quad i, j \in \{1, 2\}, \quad (1.4)$$

ou seja,

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(v_1, v_2) = \varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2) - \varphi_2(v_1)\varphi_1(v_2). \quad (1.5)$$

Evidentemente (1.5) se trata de uma expressão bilinear alternada. Além disso, é importante ainda mencionar que, como consequência de (1.5), decorre que

$$dx \wedge dx = 0, \quad dt \wedge dt = 0, \quad dx \wedge dt = -dt \wedge dx. \quad (1.6)$$

O objeto, introduzido em (1.4), recebe o nome de produto exterior de 1-formas. Note que, em particular, $dx_p \wedge dt_p \in \Lambda^2(\mathbb{R}^2)^*$. Essa expressão será denotada simplesmente por $(dx \wedge dt)_p$ no que se segue. Tendo isso em mente, estamos aptos a introduzir a definição de 2-forma num subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$.

Definição 1.1.2. *Uma 2-forma em um aberto U de $\mathbb{R}^2$ é uma aplicação ω que, para cada $p \in U$, associa $\omega_p \in \Lambda^2(\mathbb{R}^2)^*$.*

De acordo com a Definição 1.1.2, para cada $p \in U$, temos uma aplicação bilinear alternada associada $\omega_p \in \Lambda^2(\mathbb{R}^2)^*$. Por conseguinte, tendo em vista que $(dx \wedge dt)_p$ forma uma base para $\omega_p \in \Lambda^2(\mathbb{R}^2)^*$, temos

$$\omega_p = a(p)(dx \wedge dt)_p, \quad (1.7)$$

em que $a : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é função real, isto é, para cada $p \in U$, tem-se $a(p) \in \mathbb{R}$. No caso em que a função a é diferenciável em U , dizemos que ω é uma 2-forma diferencial.

A proposição a seguir trata a respeito de algumas propriedades de 1-formas em um aberto de $\mathbb{R}^2$.

Proposição 1.1.3. *Sejam ω , θ e κ 1-formas diferenciais definidas num aberto U de $\mathbb{R}^2$. Então*

$$1. \quad \omega \wedge (\theta + \kappa) = \omega \wedge \theta + \omega \wedge \kappa.$$

$$2. \quad (\theta + \kappa) \wedge \omega = \theta \wedge \omega + \kappa \wedge \omega.$$

$$3. \quad (f\omega) \wedge \theta = \omega \wedge (f\theta) = f\omega \wedge \theta.$$

Ao leitor interessado na demonstração desta proposição, sugerimos uma rápida consulta em [27].

A seguir, daremos alguns exemplos.

Exemplo 1.1. *Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto. Se $f(x, t)$ é uma função diferenciável de classe C^∞ de U em $\mathbb{R}$, então a aplicação $df : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$, que para cada $p \in U$ associa a diferencial de f em p , df_p , é uma 1-forma diferencial, com $df_p = f_x(p)dx_p + f_t(p)dt_p$.*

Exemplo 1.2. *A aplicação φ dada por*

$$\varphi = -\frac{t}{x^2 + t^2}dx + \frac{x}{x^2 + t^2}dt, \quad (1.8)$$

definida no aberto $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, é uma 1-forma.

Agora definiremos a diferencial exterior de uma 1-forma diferencial.

Definição 1.1.4. *Seja $\omega = adx + bdt$ uma 1-forma diferencial. A diferencial exterior de ω , indicada por $d\omega$, é definida por*

$$d\omega = da \wedge dx + db \wedge dt.$$

Observe que a diferencial exterior de uma 1-forma resulta numa 2-forma.

Supondo que $a(x, t)$ e $b(x, t)$ são funções diferenciáveis de classe C^∞ , resulta do uso do Exemplo 1.1 que $da = a_x dx + a_t dt$ e $db = b_x dx + b_t dt$. Mesclando isso com a propriedade (1.6) e a Definição 1.1.4, poderemos concluir que se $\omega = adx + bdt$, com $a(x, t)$ e $b(x, t)$ funções diferenciáveis de classe C^∞ , então

$$d\omega = (b_x - a_t) dx \wedge dt. \quad (1.9)$$

Exemplo 1.3. *Considere a 1-forma $\omega = xtdx + (x^2 + t^2)dt$ definida em $\mathbb{R}^2$. Pelo uso da fórmula (1.9), com $a = xt$ e $b = x^2 + t^2$, obteremos a 2-forma $d\omega = xdx \wedge dt$.*

Exemplo 1.4. *Considere as 1-formas $\omega = tdx + xdt$ e $\varphi = xdx + tdt$ definidas em $\mathbb{R}^2$. Pelo uso de (1.6), obteremos a 2-forma $\omega \wedge \varphi = (t^2 - x^2)dx \wedge dt$.*

1.2 Fundamentos e notações

Os conceitos de formas diferenciais em um aberto de $\mathbb{R}^2$, abordados na seção anterior, podem naturalmente ser estendidos ao $\mathbb{R}^n$ e ainda, de forma mais geral, a uma variedade diferenciável n -dimensional M . Com objetivo de estabelecer o uso da teoria de Cartan-Kähler [3], para o estudo de equações diferenciais parciais do tipo $u_{xt} = F(u, u_x, u_{xx})$, estenderemos tais conceitos.

Inicialmente definiremos o conceito de k -forma em um aberto de $\mathbb{R}^n$ e em seguida estenderemos a definição para uma variedade diferenciável n -dimensional M e, com esses objetos definidos, trataremos de algumas proposições importantes. Com isso em mente,

poderemos finalmente relacionar tais conceitos com o estudo de equações diferenciais parciais do tipo $u_{xt} = F(u, u_x, u_{xx})$, mediante a Proposição 1.2.9.

Para iniciar a nossa abordagem, semelhantemente ao que foi feito na seção anterior, consideremos o conjunto de todas as aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$. Esse conjunto é usualmente denotado por $(\mathbb{R}^n)^*$ e recebe o nome de espaço dual do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Não é difícil verificar que esse conjunto, com as operações usuais de funções, é um espaço vetorial. Além disso, dada uma base arbitrária $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, definimos uma base $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ de $(\mathbb{R}^n)^*$ por

$$\phi_i(e_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

com $i, j \in \{1, \dots, n\}$. A base $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ é denominada base dual da base $\{e_1, \dots, e_n\}$. Agora se denotarmos por $p = (x_1, \dots, x_n)$ um ponto qualquer em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, denotarmos a base canônica de $\mathbb{R}^n$ por $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$, em que $\frac{\partial}{\partial x_1} = (1, 0, \dots, 0, 0)$, $\frac{\partial}{\partial x_2} = (0, 1, \dots, 0, 0)$, $\dots$, $\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} = (0, 0, \dots, 1, 0)$, $\frac{\partial}{\partial x_n} = (0, 0, \dots, 0, 1)$, e indicarmos $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, como sendo a aplicação que associa a cada ponto de $\mathbb{R}^n$ a sua i -ésima coordenada, então evidentemente essa aplicação será diferenciável em $p \in U$ e, além disso, constitui uma computação direta a demonstração de que o conjunto composto pelas diferenciais das aplicações x_i em p , $\{(dx_1)_p, \dots, (dx_n)_p\}$, forma uma base dual da base canônica de $\mathbb{R}^n$. Como consequência disso, resulta que para um vetor $v = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ de $\mathbb{R}^n$, devemos ter $(dx_1)_p(v) = v_1, \dots, (dx_n)_p(v) = v_n$.

Agora no que se segue, definamos o seguinte conjunto:

$$\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* := \{B : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; B \text{ é uma aplicação k-linear e alternada}\}. \quad (1.10)$$

O conjunto, definido em (1.10), com operações usuais, constitui um espaço vetorial. Dizer que B é uma aplicação alternada significa que tal aplicação muda de sinal na medida em que permutamos dois de seus argumentos consecutivamente. Além do que foi mencionado anteriormente, o produto exterior das 1-formas $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ é definido como se segue:

$$(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)(v_1, \dots, v_k) := \det(\varphi(v_j)), \quad i, j \in \{1, \dots, n\}. \quad (1.11)$$

Tendo em vista que a aplicação, definida em (1.11), é k-linear alternada, temos, consequentemente, $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$. Como caso particular disso, concluímos que, para $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}$, com $j_1 < \dots < j_k$, temos $(dx_{j_1})_p \wedge \dots \wedge (dx_{j_k})_p \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$, onde $x_{j_i} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a aplicação que associa a cada ponto de $\mathbb{R}^n$ a sua j_i -coordenada. Agora, para dar seguimento, o conjunto $\{(dx_{j_1})_p \wedge \dots \wedge (dx_{j_k})_p : j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}, \text{ com } j_1 <$

$\cdots < j_k\}$, que é uma base para $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$, será denotado simplesmente por $\{(dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k})_p : j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}, \text{ com } j_1 < \cdots < j_k\}$. Com isso, estamos aptos para definição de k-forma em um aberto de $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.2.1. *Uma k-forma em um aberto U de $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação ω que, para cada $p \in U$, associa $\omega_p \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$.*

De acordo com a Definição 1.2.1, para cada $p \in U$, temos uma aplicação multilinear alternada associada $\omega_p \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$. Por conseguinte, tendo em vista que $\{(dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k})_p : j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}, \text{ com } j_1 < \cdots < j_k\}$ forma uma base para $\omega_p \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$, temos

$$\omega(p) = \sum_{j_1 < \cdots < j_k} a_{j_1 \dots j_k} (dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k})_p, \quad (1.12)$$

em que $a_{j_1 \dots j_k}$ são funções definidas em um conjunto aberto U de $\mathbb{R}^n$. No caso em que as funções $a_{j_1 \dots j_k}$ são diferenciáveis em U , dizemos que ω é uma k-forma diferencial. Ademais, uma notação alternativa para (1.12) é $\omega = \sum_J a_J dx_J$, com $J = (j_1, \dots, j_k)$, sendo que $j_1 < \cdots < j_k, j_l \in \{1, \dots, n\}$.

Agora para dar seguimento à teoria, seja M uma variedade diferenciável n-dimensional. Para $p \in M$, considere $T_p M$ o espaço tangente a M em p . De forma análoga ao exposto antes, definamos o seguinte conjunto:

$$\Lambda^k(T_p M)^* := \{B : T_p M \times \cdots \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}; B \text{ é uma aplicação k-linear e alternada}\}. \quad (1.13)$$

Com os elementos expostos anteriormente, estamos aptos ao entendimento das definições que se seguem.

Definição 1.2.2. *Seja M uma variedade n-dimensional. Uma k-forma ω é a escolha, para cada $p \in M$, de um elemento $\omega(p)$ de $\Lambda^k(T_p M)^*$.*

Definição 1.2.3. *Uma k-forma diferencial ω em uma variedade diferenciável n-dimensional M é uma k-forma tal que, em algum sistema de coordenadas, possui representação diferenciável.*

Daqui para frente, denotaremos o espaço vetorial das k-formas diferenciais na variedade M por $\Omega^k(M)$. Para $k = 0$, temos tão somente o conjunto $\Omega^0(M)$, formado por todas as funções $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis ou 0-formas na variedade M .

Num contexto mais geral do que estamos trabalhando aqui, existe o conceito de produto exterior de funções multilineares alternadas, isto é, dadas uma função k-linear alternada $B : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ fatores}} \rightarrow \mathbb{R}$ e uma função l-linear alternada $L : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{l \text{ fatores}} \rightarrow \mathbb{R}$ em um espaço vetorial V , o produto exterior de B e L é definido e indicado como se segue:

$$(B \wedge L)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\text{sgn} \sigma) B(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) L(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}), \quad (1.14)$$

sendo S_{k+l} o grupo formado por todas as permutações dos elementos do conjunto $\{1, \dots, k+l\}$. A função $B \wedge L : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k+l \text{ fatores}} \rightarrow \mathbb{R}$, dada em (1.14), é $(k+l)$ -linear alternada em V . Para o leitor interessado em saber mais aspectos da teoria, recomendamos, sobretudo, [16], [17] e [28].

Com o que foi tratado no parágrafo anterior, estamos aptos a definir o conceito de produto exterior de formas diferenciais em uma variedade conforme se segue.

Definição 1.2.4. *Sejam ω e φ , respectivamente, uma k -forma e uma l -forma, definidas em uma variedade n -dimensional M . Definimos o produto exterior $\omega \wedge \varphi$ delas como sendo a $(k+l)$ -forma em M dada por*

$$(\omega \wedge \varphi)(p) := \omega(p) \wedge \varphi(p),$$

seja qual for $p \in M$.

A seguir, definiremos a diferencial exterior e o pullback de uma k -forma por uma aplicação.

Definição 1.2.5. *Seja $\omega \in \Omega^k(M)$. Supondo que ω é localmente dada por $\omega = \sum a_I dx_I$, com $I = (i_1, \dots, i_k)$, sendo que $i_1 < \dots < i_k$, $i_l \in \{1, \dots, n\}$, definimos a diferencial exterior de ω por*

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I.$$

Definição 1.2.6. *Sejam M e N variedades de dimensão finita e $f : M \rightarrow N$ uma função diferenciável. Se ω é uma k -forma em N , definimos a k -forma $f^*\omega$ em M por:*

1. $f^*\omega = \omega \circ f$, se $k = 0$,
2. $(f^*\omega)(p)(v_1, \dots, v_k) := \omega(f(p))(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k))$, se $k > 0$, sendo $p \in M$ e $v_1, \dots, v_k \in T_p M$.

A k -forma $f^*\omega$, definida anteriormente, recebe o nome de “pullback” de ω por f . Na proposição seguinte, apresentaremos algumas de suas propriedades.

Proposição 1.2.7. *Sejam M e N variedades de dimensão finita e $f : M \rightarrow N$ uma função diferenciável. Então vale as seguintes propriedades:*

1. $f^*(\omega + c\varphi) = f^*(\omega) + cf^*(\varphi)$, sendo $\omega, \varphi \in \Omega^k(M)$ e $c \in \mathbb{R}$.

2. $f^*(\omega \wedge \varphi) = f^*(\omega) \wedge f^*(\varphi)$, sendo $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\varphi \in \Omega^l(M)$.

3. $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$, sendo $\omega \in \Omega^k(M)$.

Para mais detalhes da Proposição (1.2.7), recomendamos [28] e [18].

A seguir apresentamos a definição de superfícies pseudoesféricas (respectivamente superfícies esféricas).

Definição 1.2.8. *Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto munido de uma métrica riemanniana $\mathbf{g}$. Se U tem curvatura gaussiana constante igual a -1 (respectivamente 1), dizemos que U é uma superfície pseudoesférica (respectivamente esférica).*

Se U é um aberto de $\mathbb{R}^2$, então munir U de uma métrica riemanniana $\mathbf{g}$ de modo que ele seja uma superfície pseudoesférica (respectivamente esférica) é equivalente a dizer que U admite um referencial local ortonormal $\{e_1, e_2\}$, de modo que o correferencial $\{\omega_1, \omega_2\}$ e a forma de conexão ω_3 , usualmente denotada por ω_{12} , satisfazem as equações de estrutura

$$\begin{cases} d\omega_1 = \omega_3 \wedge \omega_2, \\ d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3, \\ d\omega_3 = \delta\omega_1 \wedge \omega_2, \\ \omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0, \end{cases}$$

em que $\delta = 1$ (respectivamente $\delta = -1$).

Conforme estabelecido na introdução, estamos interessados em estudar as equações diferenciais do tipo

$$u_{xt} = F(u, u_x, u_{xx}), \quad (1.15)$$

com funções f_{ij} dependendo de u, u_x, u_{xx} e

$$f_{21} = \mu f_{11}, \quad \mu \in \mathbb{R} - \{0\}. \quad (1.16)$$

Ao longo deste trabalho, usaremos a seguinte notação:

$$z_0 := u, \quad z_1 := u_x, \quad z_2 := u_{xx}. \quad (1.17)$$

Com a notação (1.17), a equação (1.15) será reescrita como

$$z_{1,t} = F(z_0, z_1, z_2), \quad (1.18)$$

e as funções f_{ij} serão funções que dependem de z_0, z_1 e z_2 , cumprindo (1.16). Além disso, para uma função $f = f(z_0, z_1, \dots, z_k)$, com $k \geq 1$, e uma função $g = g(z_i)$, $i \in \{0, 1, \dots, k\}$, usaremos as seguintes notações:

$$f_{z_i} = \frac{\partial f}{\partial z_i},$$

para todo $i \in \{0, 1, \dots, k\}$;

$$g_{z_i} = \frac{\partial g}{\partial z_i},$$

para todo $i \in \{1, \dots, k\}$;

$$g' = \frac{\partial g}{\partial z_0}.$$

Agora, conforme o uso da teoria de Cartan-Kähler [3] na equação (1.18), bem como a notação introduzida em (1.17), temos a seguir uma proposição que relaciona soluções da equação (1.15) com variedades integrais de sistemas diferenciais exteriores.

Proposição 1.2.9. *Sejam $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^5$ um aberto com coordenadas (x, t, z_0, z_1, z_2) e $\mathcal{I}$ o ideal em $\tilde{U}$ gerado pelas formas*

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= dz_0 \wedge dt - z_1 dx \wedge dt, & \Pi_1 &= dz_1 \wedge dt - z_2 dx \wedge dt, \\ \Pi_2 &= dz_2 \wedge dx \wedge dt, & \Pi_3 &= dz_1 \wedge dx + F dx \wedge dt, \end{aligned} \quad (1.19)$$

em que $F : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável que depende de z_0, z_1 e z_2 .

(A) $\mathcal{I}$ é fechado por diferenciação exterior, isto é, $d\mathcal{I} \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}}$.

(B) Seja $u : U \rightarrow \mathbb{R}$, com U aberto de $\mathbb{R}^2$, uma função suave. Se u é uma solução de

$$u_{xt} = F(u, u_x, u_{xx}), \quad (1.20)$$

então a aplicação $\phi : U \rightarrow \tilde{U}$, dado por $\phi(x, t) = (x, t, z_0(x, t), z_1(x, t), z_2(x, t))$, com $z_0 = u$, $z_{i+1} = z_{i,x}$, $i \in \{0, 1\}$, define uma variedade integral de $\mathcal{I}$.

(C) Reciprocamente qualquer variedade bidimensional integral de $\mathcal{I}$, $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^5$, com V aberto em $\mathbb{R}^2$, dada por $\psi(p, q) = (x(p, q), t(p, q), z_0(p, q), z_1(p, q), z_2(p, q))$, com dx e dt linearmente independentes, determina uma solução local da equação

$$z_{1,t} = F(z_0, z_1, z_2). \quad (1.21)$$

Demonstração. **Item A.** Com efeito, observe que

$$\begin{aligned}
d\Pi_0 &= -dz_1 \wedge dx \wedge dt = dz_1 \wedge dt \wedge dx \\
&= (dz_1 \wedge dt - z_2 dx \wedge dt) \wedge dx \\
&= \Pi_1 \wedge dx,
\end{aligned}$$

$$d\Pi_1 = -dz_2 \wedge dx \wedge dt = -\Pi_2,$$

$$d\Pi_2 = 0,$$

$$\begin{aligned}
d\Pi_3 &= dF \wedge dx \wedge dt \\
&= (F_{z_0} dz_0 + F_{z_1} dz_1 + F_{z_2} dz_2) \wedge dx \wedge dt \\
&= F_{z_0} dz_0 \wedge dx \wedge dt + F_{z_1} dz_1 \wedge dx \wedge dt + F_{z_2} dz_2 \wedge dx \wedge dt \\
&= -F_{z_0} dz_0 \wedge dt \wedge dx - F_{z_1} dz_1 \wedge dt \wedge dx + F_{z_2} \Pi_2 \\
&= -F_{z_0} (dz_0 \wedge dt - z_1 dx \wedge dt) \wedge dx - F_{z_1} (dz_1 \wedge dt - z_2 dx \wedge dt) \wedge dx + F_{z_2} \Pi_2 \\
&= -F_{z_0} \Pi_0 \wedge dx - F_{z_1} \Pi_1 \wedge dx + F_{z_2} \Pi_2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$d\Pi_0 = \Pi_1 \wedge dx, \quad d\Pi_1 = -\Pi_2, \quad d\Pi_2 = 0,$$

$$d\Pi_3 = -F_{z_0} \Pi_0 \wedge dx - F_{z_1} \Pi_1 \wedge dx + F_{z_2} \Pi_2$$

e, com isso, provamos (A).

Item B. Suponha que u seja uma solução de (1.20). Vamos mostrar que ϕ define uma variedade integral de $\mathcal{I}$, em suma, mostraremos que

$$\phi^* \Pi_0 = 0, \quad \phi^* \Pi_1 = 0, \quad \phi^* \Pi_2 = 0, \quad \phi^* \Pi_3 = 0.$$

Com efeito, tendo em vista que $\phi^* dx = dx$ e que $\phi^* dt = dt$, obtemos, mediante o uso das propriedades tratadas na Proposição 1.2.7, o seguinte:

$$\begin{aligned}
\phi^* \Pi_0 &= \phi^*(dz_0 \wedge dt - z_1 dx \wedge dt) \\
&= \phi^*(dz_0) \wedge dt - \phi^* z_1 dx \wedge dt \\
&= d(\phi^* z_0) \wedge dt - \phi^* z_1 dx \wedge dt \\
&= d(z_0 \circ \phi) \wedge dt - (z_1 \circ \phi) dx \wedge dt \\
&= du \wedge dt - u_x dx \wedge dt \\
&= (u_x dx + u_t dt) \wedge dt - u_x dx \wedge dt \\
&= u_x dx \wedge dt - u_x dx \wedge dt \\
&= (u_x - u_x) dx \wedge dt \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi^* \Pi_1 &= \phi^*(dz_1 \wedge dt - z_2 dx \wedge dt) \\
&= \phi^*(dz_1) \wedge dt - \phi^* z_2 dx \wedge dt \\
&= d(\phi^* z_1) \wedge dt - \phi^* z_2 dx \wedge dt \\
&= d(z_1 \circ \phi) \wedge dt - (z_2 \circ \phi) dx \wedge dt \\
&= du_x \wedge dt - u_{xx} dx \wedge dt \\
&= (u_{xx} dx + u_{xt} dt) \wedge dt - u_{xx} dx \wedge dt \\
&= u_{xx} dx \wedge dt - u_{xx} dx \wedge dt \\
&= (u_{xx} - u_{xx}) dx \wedge dt \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi^* \Pi_2 &= \phi^*(dz_2 \wedge dx \wedge dt) \\
&= \phi^*(dz_2) \wedge dx \wedge dt \\
&= d(\phi^* z_2) \wedge dx \wedge dt \\
&= d(z_2 \circ \phi) \wedge dx \wedge dt \\
&= du_{xx} \wedge dx \wedge dt \\
&= (u_{xxx} dx + u_{xxt} dt) \wedge dx \wedge dt \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi^*\Pi_3 &= \phi^*(dz_1 \wedge dx + Fdx \wedge dt) \\
&= \phi^*(dz_1) \wedge dx + \phi^*(F)dx \wedge dt \\
&= d(\phi^*z_1) \wedge dx + (F \circ \phi)dx \wedge dt \\
&= d(z_1 \circ \phi) \wedge dx + (F \circ \phi)dx \wedge dt \\
&= du_x \wedge dx + (F \circ \phi)dx \wedge dt \\
&= (u_{xx}dx + u_{xt}dt) \wedge dx + (F \circ \phi)dx \wedge dt \\
&= (-u_{xt} + (F \circ \phi))dx \wedge dt.
\end{aligned}$$

Como u é solução de (1.20), por hipótese, temos $-u_{xt} + (F \circ \phi) = 0$, donde $\phi^*\Pi_3 = 0$.

Item C. Para $i = 0, 1, 2, 3$, temos $\psi^*\Pi_i = 0$, pois ψ é integral em $\mathcal{I}$. Observe também que

$$\begin{aligned}
dx \wedge dt &= (x_p dp + x_q dq) \wedge (t_p dp + t_q dq) \\
&= (x_p t_q - x_q t_p) dp \wedge dq \\
&= \det J \left(\frac{(x, t)}{(p, q)} \right) dp \wedge dq,
\end{aligned}$$

isto é, $dx \wedge dt = \det J \left(\frac{(x, t)}{(p, q)} \right) dp \wedge dq$. Como dx e dt são linearmente independentes, temos $\det J \left(\frac{(x, t)}{(p, q)} \right) \neq 0$ em V . Com isso, existem abertos W e $\tilde{W}$ de $\mathbb{R}^2$, com $W \ni (x, t)$ e $\tilde{W} \ni (p, q)$, $\tilde{W} \subset V$, tal que $h : W \rightarrow \tilde{W}$ é um difeomorfismo cumprindo $h(x, t) = (p, q)$. Definamos então $\tilde{\psi} : W \rightarrow \mathbb{R}^5$ de modo que $\tilde{\psi}(x, t) = (\psi \circ h)(x, t)$. Como ψ é integral em $\mathcal{I}$, concluímos que $\tilde{\psi}$ é integral em $\mathcal{I}$. Daí, pelo uso das propriedades tratadas na Proposição 1.2.7, obteremos

$$\begin{aligned}
0 &= \tilde{\psi}^* \Pi_0 \\
&= \tilde{\psi}^*(dz_0 \wedge dt - z_1 dx \wedge dt) \\
&= \tilde{\psi}^*(dz_0) \wedge dt - \tilde{\psi}^* z_1 dx \wedge dt \\
&= d(\tilde{\psi}^* z_0) \wedge dt - \tilde{\psi}^* z_1 dx \wedge dt \\
&= d(z_0 \circ \tilde{\psi}) \wedge dt - (z_1 \circ \tilde{\psi}) dx \wedge dt \\
&= dz_0 \wedge dt - z_1 dx \wedge dt \\
&= (z_{0,x} dx + z_{0,t} dt) \wedge dt - z_1 dx \wedge dt \\
&= z_{0,x} dx \wedge dt - z_1 dx \wedge dt \\
&= (z_{0,x} - z_1) dx \wedge dt.
\end{aligned}$$

Como dx e dt são linearmente independentes, concluimos que $z_1 = z_{0,x}$.

$$\begin{aligned}
0 &= \tilde{\psi}^* \Pi_1 \\
&= \tilde{\psi}^*(dz_1 \wedge dt - z_2 dx \wedge dt) \\
&= \tilde{\psi}^*(dz_1) \wedge dt - \tilde{\psi}^* z_2 dx \wedge dt \\
&= d(\tilde{\psi}^* z_1) \wedge dt - \tilde{\psi}^* z_2 dx \wedge dt \\
&= d(z_1 \circ \tilde{\psi}) \wedge dt - (z_2 \circ \tilde{\psi}) dx \wedge dt \\
&= dz_1 \wedge dt - z_2 dx \wedge dt \\
&= (z_{1,x} dx + z_{1,t} dt) \wedge dt - z_2 dx \wedge dt \\
&= z_{1,x} dx \wedge dt - z_2 dx \wedge dt \\
&= (z_{1,x} - z_2) dx \wedge dt.
\end{aligned}$$

Como dx e dt são linearmente independentes, concluimos que $z_2 = z_{1,x}$.

$$\begin{aligned}
0 &= \tilde{\psi}^* \Pi_2 \\
&= \tilde{\psi}^*(dz_2 \wedge dx \wedge dt) \\
&= \tilde{\psi}^*(dz_2) \wedge dx \wedge dt \\
&= d(\tilde{\psi}^* z_2) \wedge dx \wedge dt \\
&= d(z_2 \circ \tilde{\psi}) \wedge dx \wedge dt \\
&= dz_2 \wedge dx \wedge dt \\
&= (z_{2,x} dx + z_{2,t} dt) \wedge dx \wedge dt \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \tilde{\psi}^* \Pi_3 \\
&= \tilde{\psi}^*(dz_1 \wedge dx + F dx \wedge dt) \\
&= \tilde{\psi}^*(dz_1) \wedge dx + \phi^*(F) dx \wedge dt \\
&= d(\tilde{\psi}^* z_1) \wedge dx + (F \circ \tilde{\psi}) dx \wedge dt \\
&= d(z_1 \circ \tilde{\psi}) \wedge dx + (F \circ \tilde{\psi}) dx \wedge dt \\
&= dz_{1,x} \wedge dx + (F \circ \tilde{\psi}) dx \wedge dt \\
&= (z_{1,x} dx + z_{1,t} dt) \wedge dx + (F \circ \tilde{\psi}) dx \wedge dt \\
&= (-z_{1,t} + (F \circ \tilde{\psi})) dx \wedge dt.
\end{aligned}$$

Como dx e dt são linearmente independentes, concluímos que $z_{1,t} = F \circ \tilde{\psi}$, donde $\tilde{\psi}$ define uma solução local de (1.21) e, conseqüentemente, ψ define uma solução local de (1.21). $\square$

No que se segue, usaremos a teoria de Cartan-Kähler [3] para descrever quando a equação diferencial parcial (1.18) descreve superfícies pseudoesféricas ou superfícies esféricas. Para isso, considere o ideal $\mathcal{J}$ em $\tilde{U}$, gerado pelas formas diferenciais

$$\Omega_1 = d\omega_1 - \omega_3 \wedge \omega_2, \quad \Omega_2 = d\omega_2 - \omega_1 \wedge \omega_3, \quad \Omega_3 = d\omega_3 - \delta\omega_1 \wedge \omega_2, \quad (1.22)$$

em que $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $\delta = 1$ (respectivamente $\delta = -1$) e $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$.

Na definição a seguir, $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^5$ é um conjunto aberto, com coordenadas (x, t, z_0, z_1, z_2) e $F : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável que depende de z_0, z_1 e z_2 .

Definição 1.2.10. *Sejam $\mathcal{J}$ o ideal em $\tilde{U}$ gerado pelas formas dadas em (1.22) e $\mathcal{I}$ o ideal em $\tilde{U}$ gerado pelas formas dadas por (1.19) da Proposição 1.2.9. A equação diferencial parcial (1.18) descreve superfícies pseudoesféricas (respectivamente superfícies esféricas) se existem funções reais suaves $f_{ij} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$, com $i \in \{1, 2, 3\}$ e $j \in \{1, 2\}$, tais que $\mathcal{J} = \mathcal{I}$.*

A seguir introduziremos mais uma proposição, a qual tem uma importância fundamental quanto ao aspecto métrico no que rege o estudo de equações diferenciais que descrevem superfícies pseudoesféricas (respectivamente superfícies esféricas).

Proposição 1.2.11. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ e $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^5$ conjuntos abertos. Suponha que*

$$u_{xt} = F(u, u_x, u_{xx}) \quad (1.23)$$

descreva superfícies pseudoesféricas (respectivamente superfícies esféricas) com funções $f_{ij} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, 3\}$ e $j \in \{1, 2\}$. Então, para cada solução $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ de

(1.23), a aplicação $\phi : U \rightarrow \tilde{U}$, dada por $\phi(x, t) = (x, t, u(x, t), u_x(x, t), u_{xx}(x, t))$, define uma métrica riemanniana em U , dada por $(\phi^*\omega_1)^2 + (\phi^*\omega_2)^2$, com curvatura gaussiana constante igual -1 (respectivamente 1).

Demonstração. Seja $u = u(x, t)$ uma solução de (1.23). Pela Proposição 1.2.9, item (B), temos $\phi^*\Pi_i = 0$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, em U . Agora, uma vez que (1.23) descreve superfícies pseudoesféricas (respectivamente superfícies esféricas), concluímos, mediante o uso da definição, que $\phi^*\Omega_i = 0$, $i \in \{1, 2, 3\}$, em U , com $\delta = 1$ (respectivamente $\delta = -1$). Isso somado ao uso das propriedades tratadas na Proposição 1.2.7, terá como consequência

$$\begin{aligned} d(\phi^*\omega_1) &= \phi^*\omega_3 \wedge \phi^*\omega_2 \\ d(\phi^*\omega_2) &= \phi^*\omega_1 \wedge \phi^*\omega_3 \\ d(\phi^*\omega_3) &= \delta\phi^*\omega_1 \wedge \phi^*\omega_2 \end{aligned} \tag{1.24}$$

em U .

Por outro lado, tendo em vista que $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$ em $\tilde{U}$, concluímos, conforme o uso adequado da Proposição 1.2.7, que $\phi^*\omega_1 \wedge \phi^*\omega_2 \neq 0$ em U . De fato, $\phi^*\omega_1 \wedge \phi^*\omega_2 = \phi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) \neq 0$, pois $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$ em $\tilde{U}$.

Das considerações anteriores, podemos concluir que $\{\phi^*\omega_1, \phi^*\omega_2\}$ é um correferencial móvel em U , com forma de conexão $\phi^*\omega_3$ em U . Assim, U é uma superfície pseudoesférica (respectivamente esférica) com métrica em U , definida naturalmente por $(\phi^*\omega_1)^2 + (\phi^*\omega_2)^2$. $\square$

Fazendo o abuso de notação $\phi^*\omega_i := \omega_i$, podemos reescrever (1.24) meramente como

$$d\omega_1 = \omega_3 \wedge \omega_2, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3, \quad d\omega_3 = \delta\omega_1 \wedge \omega_2, \tag{1.25}$$

em que $\delta = 1$ (respectivamente $\delta = -1$) em U . Além disso, mediante o abuso de notação mencionado, a expressão $(\phi^*\omega_1)^2 + (\phi^*\omega_2)^2$ pode ser reescrita como $\omega_1^2 + \omega_2^2$.

Com o uso da construção feita até aqui e a identificação de “ $\phi^*\omega_i$ ” com “ ω_i ”, estamos aptos a tratar, por uma via equivalente àquela versada na Definição 1.2.10, o que significa uma equação diferencial parcial, no nosso contexto, descrever superfícies pseudoesféricas (respectivamente superfícies esféricas). Então no que se segue, trataremos de uma definição equivalente à Definição 1.2.10.

Na definição seguinte, assumiremos, de maneira implícita, que as funções f_{ij} são tais que $i \in \{1, 2, 3\}$ e $j \in \{1, 2\}$.

Definição 1.2.12. *Uma equação diferencial parcial dada por (1.15) descreve superfícies pseudoesféricas (respectivamente superfícies esféricas) se existem funções f_{ij} dependentes de u , u_x e u_{xx} , tais que as 1-formas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $i \in \{1, 2, 3\}$, satisfazem as equações de estrutura*

$$\begin{cases} d\omega_1 = \omega_3 \wedge \omega_2, \\ d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3, \\ d\omega_3 = \delta\omega_1 \wedge \omega_2, \\ \omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0, \end{cases}$$

com $\delta = 1$ (respectivamente -1) se, e somente se, u é solução da equação (1.15).

A construção feita anteriormente nos permite dizer que a Definição 1.2.12 e a Definição 1.2.10 são equivalentes.

Capítulo 2

Uma classe de equações diferenciais que descrevem superfícies pseudoesféricas ou superfícies esféricas

Na seção 2.1, apresentamos o lema de caracterização, na seção 2.2, são exibidos os teoremas de classificação. Eles são os resultados centrais deste trabalho. Por fim na seção 2.3, fornecemos alguns exemplos. Além disso, em todos os resultados deste capítulo, até mesmo quando não for mencionado, estaremos sempre trabalhando com funções definidas em conjuntos abertos e conexos.

2.1 Lema de caracterização

A seguir, trataremos do lema de caracterização, o qual se consolida por ser o lema mais importante, visto que ele será usado, mesmo que de maneira indireta, nos demais resultados. Nele assumiremos que as funções f_{ij} são tais que $i \in \{1, 2, 3\}$ e $j \in \{1, 2\}$.

Lema 2.1. *Considere $U \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e conexo e $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável que depende de z_0, z_1 e z_2 . Uma equação diferencial parcial do tipo $z_{1,t} = F(z_0, z_1, z_2)$ descreve superfícies pseudoesféricas (caso $\delta = 1$) ou superfícies esféricas (caso $\delta = -1$), com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $i \in \{1, 2, 3\}$, em que $f_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis que dependem de z_0, z_1 e z_2 , com a condição $f_{21} = \mu f_{11}$, $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$, se, e somente se,*

$$f_{i1,z_0} = f_{i1,z_2} = 0, \quad i \in \{1, 3\}; \quad (2.1)$$

$$f_{i2,z_2} = 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}; \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}
& -f_{11,z_1}F + \sum_{l=0}^1 f_{12,z_l}z_{l+1} - f_{31}f_{22} + \mu f_{11}f_{32} = 0, \\
& -\mu f_{11,z_1}F + \sum_{l=0}^1 f_{22,z_l}z_{l+1} - f_{11}f_{32} + f_{31}f_{12} = 0,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
& -f_{31,z_1}F + \sum_{l=0}^1 f_{32,z_l}z_{l+1} + \delta f_{11}(\mu f_{12} - f_{22}) = 0. \\
& (1 + \mu^2)f_{11,z_1}^2 + f_{31,z_1}^2 \neq 0,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$f_{11}(\mu f_{12} - f_{22}) \neq 0 \tag{2.5}$$

em U .

O Lema 2.1 nos dá uma série de informações sobre as funções f_{ij} como, por exemplo, a expressão (2.1) nos diz que $f_{i1} = f_{i1}(z_1)$, $i \in \{1, 3\}$, isto é, as funções f_{i1} , $i \in \{1, 3\}$, dependem apenas de z_1 , enquanto que a expressão (2.2) nos diz que $f_{i2} = f_{i2}(z_0, z_1)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, ou seja, as funções f_{i2} , $i \in \{1, 2, 3\}$, dependem apenas de z_0 e z_1 . A priori, mesclando as duas informações supracitadas junto com a hipótese geral de que $f_{21} = \mu f_{11}$, $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$, podemos tão somente deduzir de antemão que as funções f_{ij} de modo geral independem de z_2 .

As expressões, dadas em (2.3), por sua vez, mostram como as funções f_{ij} , que são os coeficientes das 1-formas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $i \in \{1, 2, 3\}$, estão relacionadas com a equação diferencial $z_{1,t} = F(z_0, z_1, z_2)$.

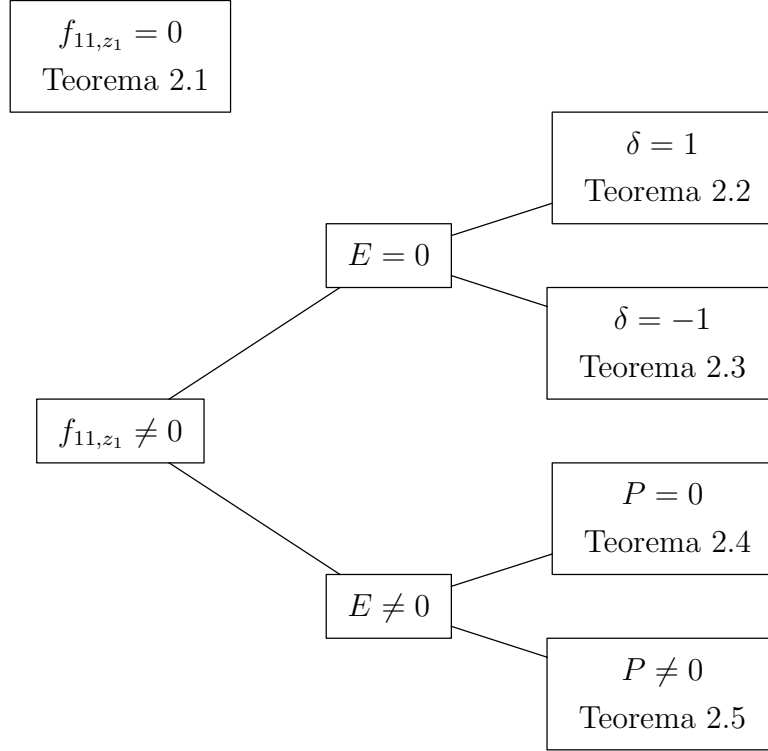
2.2 Resultados de classificação

Nesta seção, exibiremos os resultados obtidos. A demonstração deles se encontram, em detalhes, no Capítulo 3.

Ao longo deste trabalho, usaremos a seguinte notação:

$$E = \begin{vmatrix} f_{11,z_1} & f_{31,z_1} \\ f_{11} & f_{31} \end{vmatrix}, \quad P = \begin{vmatrix} f_{31,z_1 z_1} & f_{11,z_1 z_1} \\ f_{31,z_1} & f_{11,z_1} \end{vmatrix}. \tag{2.6}$$

Esquemáticamente, os resultados de classificação estão divididos em cinco teoremas conforme o diagrama a seguir:



O Teorema 2.1 fornece as equações $z_{1,t} = F(z_0, z_1, z_2)$ e as funções f_{ij} associadas no caso em que $f_{11,z_1} = 0$, em um conjunto aberto e conexo.

Teorema 2.1. *Considere uma equação diferencial parcial do tipo $z_{1,t} = F(z_0, z_1, z_2)$ que descreve superfícies pseudoesféricas (caso $\delta = 1$) ou superfícies esféricas (caso $\delta = -1$), com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt, i \in \{1, 2, 3\}$, tais que as funções f_{ij} satisfazem (2.1)-(2.5) e $f_{21} = \mu f_{11}$, $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$. Então $f_{11,z_1} = 0$, em um conjunto aberto e conexo, se, e somente se, a equação diferencial é dada por*

$$z_{1,t} = (\phi'' + c^2\phi) z_2 + (\phi''' + c^2\phi') z_1^2 - \delta\gamma^2\phi',$$

onde $c, \gamma \in \mathbb{R} - \{0\}$; $\phi = \phi(z_0)$ é uma função diferenciável tal que $\phi''(\phi'' + c^2\phi) \neq 0$ e as funções f_{ij} associadas são dadas por

$$\begin{aligned} f_{11} &= \frac{\sigma\gamma}{\sqrt{1+\mu^2}}, & f_{12} &= c(-\mu\phi' + c\phi) f_{11}, \\ f_{21} &= \mu f_{11}, & f_{22} &= c(\phi' + \mu c\phi) f_{11}, \\ f_{31} &= cz_1, & f_{32} &= c(\phi'' + c^2\phi) z_1, \end{aligned}$$

sendo $\sigma = \pm 1$.

O Teorema 2.2 fornece as equações $z_{1,t} = F(z_0, z_1, z_2)$ e as funções f_{ij} associadas no caso em que $f_{11,z_1} \neq 0$ e $E = 0$, em um conjunto aberto e conexo.

Teorema 2.2. *Considere uma equação diferencial parcial do tipo $z_{1,t} = F(z_0, z_1, z_2)$ que descreve superfícies pseudoesféricas ($\delta = 1$), com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt, i \in \{1, 2, 3\}$, tais que as funções f_{ij} satisfazem (2.1)-(2.5) e $f_{21} = \mu f_{11}, \mu \in \mathbb{R} - \{0\}$. Então $f_{11,z_1} \neq 0$ e $E = 0$, em um conjunto aberto e conexo, se, e somente se, a equação diferencial é dada por*

$$z_{1,t} = \frac{1}{h_{z_1}} (l_{z_1} z_2 + l_{z_0} z_1 + bh),$$

onde $b \in \mathbb{R} - \{0\}$; $h = h(z_1)$ e $l = l(z_0, z_1)$ são funções diferenciáveis tais que $h_{z_1 z_1} \neq 0$ e $l_{z_1} \neq 0$ e as funções f_{ij} são dadas por

$$\begin{aligned} f_{11} &= h, & f_{12} &= l + \frac{\sigma \sqrt{\mu^2 + 1}}{\mu} b, \\ f_{21} &= \mu h, & f_{22} &= \mu l, \\ f_{31} &= \sigma \sqrt{\mu^2 + 1} h, & f_{32} &= \sigma \sqrt{\mu^2 + 1} l + \frac{b}{\mu}, \end{aligned}$$

sendo $\sigma = \pm 1$.

O Teorema 2.3 é um resultado de inexistência.

Teorema 2.3. *Não existe equação diferencial parcial do tipo $z_{1,t} = F(z_0, z_1, z_2)$ que descreve superfícies esféricas ($\delta = -1$), com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt, i \in \{1, 2, 3\}$, tais que as funções f_{ij} satisfazem (2.1)-(2.5), com $f_{21} = \mu f_{11}, \mu \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f_{11,z_1} \neq 0$ e $E = 0$, em um conjunto aberto e conexo.*

O Teorema 2.4 fornece as equações $z_{1,t} = F(z_0, z_1, z_2)$ e as funções f_{ij} associadas no caso em que $f_{11,z_1} \neq 0$, $E \neq 0$ e $P = 0$, em um conjunto aberto e conexo.

Teorema 2.4. *Considere uma equação diferencial parcial do tipo $z_{1,t} = F(z_0, z_1, z_2)$ que descreve superfícies pseudoesféricas (caso $\delta = 1$) ou superfícies esféricas (caso $\delta = -1$), com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt, i \in \{1, 2, 3\}$, tais que as funções f_{ij} satisfazem (2.1)-(2.5) e $f_{21} = \mu f_{11}, \mu \in \mathbb{R} - \{0\}$. Então $f_{11,z_1} E \neq 0$ e $P = 0$, em um conjunto aberto e conexo, se, e somente se, a equação diferencial é dada por*

$$z_{1,t} = (\phi'' + \beta\phi) z_2 + (\phi''' + \beta\phi') z_1^2 - \delta\beta\theta\phi',$$

onde $\theta > 0$, $\beta \neq 0$; $\phi = \phi(z_0)$ é uma função diferenciável tal que $\phi''(\phi'' + \beta\phi) \neq 0$ e as funções f_{ij} são dadas por

$$\begin{aligned}
f_{21} &= \mu f_{11}, & f_{31} &= c f_{11} + \frac{\sigma \sqrt{\beta \tilde{b}}}{k}, & f_{11} &= \frac{\sigma \beta}{k \sqrt{\beta \tilde{b}}} (k z_1 - c), \\
f_{12} &= \frac{\sigma \beta}{\sqrt{\beta \tilde{b}}} \left[(\phi'' + \beta \phi) z_1 + \frac{\sigma \mu \sqrt{\beta \tilde{b}}}{k} \phi' - \frac{c \beta}{k} \phi \right], \\
f_{22} &= \frac{\sigma \beta}{\sqrt{\beta \tilde{b}}} \left[\mu (\phi'' + \beta \phi) z_1 - \frac{\sigma \sqrt{\beta \tilde{b}}}{k} \phi' - \frac{\mu c \beta}{k} \phi \right], \\
f_{32} &= \frac{\sigma \beta}{\sqrt{\beta \tilde{b}}} \left[c (\phi'' + \beta \phi) z_1 - \frac{\delta \beta (\mu^2 + 1)}{k} \phi \right],
\end{aligned}$$

onde $k = \tilde{\sigma} \sqrt{\frac{\mu^2 + 1}{\theta}}$, $\tilde{b} = c^2 - \delta (\mu^2 + 1)$; c é tal que $\beta \tilde{b} > 0$; $\sigma = \pm 1$ e $\tilde{\sigma} = \pm 1$.

O Teorema 2.5 fornece as equações $z_{1,t} = F(z_0, z_1, z_2)$ e as funções f_{ij} associadas no caso em que $E \neq 0$ e $P \neq 0$. Uma fato importante a mencionar é que conforme o diagrama do início da seção, teríamos que incluir a hipótese de que $f_{11,z_1} \neq 0$ no enunciado do Teorema 2.5, mas isso foi omitido, visto que $P \neq 0$, por si só, já acarreta $f_{11,z_1} \neq 0$.

Teorema 2.5. *Considere uma equação diferencial parcial do tipo $z_{1,t} = F(z_0, z_1, z_2)$ que descreve superfícies pseudoesféricas (caso $\delta = 1$) ou superfícies esféricas (caso $\delta = -1$), com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $i \in \{1, 2, 3\}$, tais que as funções f_{ij} satisfazem (2.1)-(2.5) e $f_{21} = \mu f_{11}$, $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$. Então $EP \neq 0$ se, e somente se, a equação diferencial com as correspondentes funções f_{ij} são de um dos tipos (I) e (II) a seguir.*

(I) A equação diferencial possui a forma

$$\begin{aligned}
z_{1,t} &= \left\{ \frac{\mu}{(\mu^2 + 1)(h_{z_1}l - hl_{z_1})} \left[b + \frac{ll_{z_1} - \delta(\mu^2 + 1)hh_{z_1}}{z_1} \right] \zeta + \frac{c}{\mu} \right\} z_2 \\
&\quad + \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left[\frac{bz_1^2 + l^2 - \delta(\mu^2 + 1)h^2}{h_{z_1}l - hl_{z_1}} \right] \zeta',
\end{aligned}$$

sendo $b \in \mathbb{R} - \{0\}$, $c \in \mathbb{R}$ e $h = h(z_1)$, $l = l(z_1)$ e $\zeta = \zeta(z_0)$ funções diferenciáveis não constantes que satisfazem as equações

$$\frac{z_1(h_{z_1}l_{z_1z_1} - h_{z_1z_1}l_{z_1})}{(h_{z_1}l - hl_{z_1})^2} = -\frac{1}{b} \left[\frac{ll_{z_1} - \delta(\mu^2 + 1)hh_{z_1}}{z_1(h_{z_1}l - hl_{z_1})} \right]_{,z_1}, \quad (2.7)$$

$$\zeta'' - b\zeta = 0 \quad (2.8)$$

e as desigualdades

$$(h_{z_1}l - hl_{z_1})(h_{z_1}l_{z_1z_1} - h_{z_1z_1}l_{z_1}) \neq 0, \quad (2.9)$$

$$\frac{\mu}{(\mu^2 + 1)(h_{z_1}l - hl_{z_1})} \left[b + \frac{ll_{z_1} - \delta(\mu^2 + 1)hh_{z_1}}{z_1} \right] \zeta + \frac{c}{\mu} \neq 0. \quad (2.10)$$

Neste caso, as correspondentes funções f_{ij} são dadas por

$$\begin{aligned} f_{11} &= h, & f_{21} &= \mu h, & f_{31} &= l, \\ f_{12} &= \frac{\mu}{(\mu^2 + 1)(h_{z_1}l - hl_{z_1})} \left\{ bz_1h_{z_1} + \frac{h[ll_{z_1} - \delta(\mu^2 + 1)hh_{z_1}]}{z_1} \right\} \zeta + \frac{\mu^2\zeta'}{\mu^2 + 1} + \frac{ch}{\mu}, \\ f_{22} &= \frac{\mu^2}{(\mu^2 + 1)(h_{z_1}l - hl_{z_1})} \left\{ bz_1h_{z_1} + \frac{h[ll_{z_1} - \delta(\mu^2 + 1)hh_{z_1}]}{z_1} \right\} \zeta - \frac{\mu\zeta'}{\mu^2 + 1} + ch, \\ f_{32} &= \frac{\mu}{(\mu^2 + 1)(h_{z_1}l - hl_{z_1})} \left\{ bz_1l_{z_1} + \frac{l[ll_{z_1} - \delta(\mu^2 + 1)hh_{z_1}]}{z_1} \right\} \zeta + \frac{cl}{\mu}. \end{aligned}$$

(II) A equação diferencial possui a forma

$$z_{1,t} = \left[W + \frac{\mu m}{(\mu^2 + 1)(h_{z_1}l - hl_{z_1})} \right] z_2 + \frac{\mu(mz_0 + a)(kz_1h + l)}{(\mu^2 + 1)h_{z_1}}, \quad (2.11)$$

onde

$$W = \frac{\mu k}{\mu^2 + 1} \left(\frac{m}{2} z_0^2 + az_0 + c \right) - \left[\frac{\mu m}{\mu^2 + 1} \int \frac{z_1(h_{z_1}l_{z_1z_1} - h_{z_1z_1}l_{z_1})}{(h_{z_1}l - hl_{z_1})^2} dz_1 + \frac{\eta}{\mu} \right], \quad (2.12)$$

sendo $a, m \in \mathbb{R}$ tais que $a^2 + m^2 \neq 0$; $k, c, \eta \in \mathbb{R}$ e $h = h(z_1)$ e $l = l(z_1)$ são funções diferenciáveis não constantes tais que

$$[l^2 - \delta(\mu^2 + 1)h^2]_{,z_1} = 2kz_1(h_{z_1}l - hl_{z_1}), \quad (2.13)$$

$$(h_{z_1}l - hl_{z_1})(h_{z_1}l_{z_1z_1} - h_{z_1z_1}l_{z_1}) \neq 0, \quad (2.14)$$

$$W + \frac{\mu m}{(\mu^2 + 1)(h_{z_1}l - hl_{z_1})} \neq 0. \quad (2.15)$$

Neste caso, as correspondentes funções f_{ij} são dadas por

$$f_{11} = h, \quad f_{31} = l, \quad f_{21} = \mu h, \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}
f_{12} &= hW + \frac{\mu m z_1 h_{z_1}}{(\mu^2 + 1)(h_{z_1} l - h l_{z_1})} + \frac{\mu^2 (m z_0 + a)}{\mu^2 + 1}, \\
f_{22} &= \mu \left[hW + \frac{\mu m z_1 h_{z_1}}{(\mu^2 + 1)(h_{z_1} l - h l_{z_1})} \right] - \frac{\mu (m z_0 + a)}{\mu^2 + 1}, \\
f_{32} &= lW + \frac{\mu m z_1 l_{z_1}}{(\mu^2 + 1)(h_{z_1} l - h l_{z_1})}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Agora no que se segue, apresentaremos um corolário do Teorema 2.5.

Corolário 2.1. *Considere uma equação diferencial parcial do tipo $z_{1,t} = F(z_0, z_1, z_2)$ que descreve superfícies pseudoesféricas (caso $\delta = 1$) ou superfícies esféricas (caso $\delta = -1$), com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt, i \in \{1, 2, 3\}$, tais que as funções f_{ij} satisfazem (2.1)-(2.5), $f_{21} = \mu f_{11}$, $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$, e $EP \neq 0$. Se a equação $z_{1,t} = F(z_0, z_1, z_2)$ e as funções f_{ij} são dadas pelo tipo (II) do Teorema 2.5, sendo (2.13), (2.14) e (2.15) satisfeitas, então $k = 0$ se, e somente se, a equação diferencial possui a forma*

$$z_{1,t} = \left\{ \frac{\sigma \mu m}{\nu} \left[\frac{\sqrt{T}}{(\mu^2 + 1) h_{z_1}} - \delta \int \frac{z_1 h_{z_1}}{\sqrt{T}} dz_1 \right] - \frac{\eta}{\mu} \right\} z_2 + \frac{\sigma \mu (m z_0 + a) \sqrt{T}}{(\mu^2 + 1) h_{z_1}},$$

onde $a, m \in \mathbb{R}$ são tais que $a^2 + m^2 \neq 0$; $\nu \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\sigma = \pm 1$ e $h = h(z_1)$ é uma função diferenciável tal que

$$h_{z_1} \neq 0, \quad T := \delta (\mu^2 + 1) h^2 + \nu > 0, \tag{2.18}$$

$$\frac{\sigma \mu m}{\nu} \left[\frac{\sqrt{T}}{(\mu^2 + 1) h_{z_1}} - \delta \int \frac{z_1 h_{z_1}}{\sqrt{T}} dz_1 \right] - \frac{\eta}{\mu} \neq 0.$$

Neste caso, as funções f_{ij} associadas são dadas por

$$\begin{aligned}
f_{11} &= h, & f_{31} &= \sigma \sqrt{T}, & f_{21} &= \mu h, \\
f_{12} &= - \left[\frac{\sigma \delta \mu m}{\nu} \int \frac{z_1 h_{z_1}}{\sqrt{T}} dz_1 + \frac{\eta}{\mu} \right] h + \frac{\sigma \mu m z_1 \sqrt{T}}{\nu (\mu^2 + 1)} + \frac{\mu^2 (m z_0 + a)}{\mu^2 + 1}, \\
f_{22} &= \mu \left\{ - \left[\frac{\sigma \delta \mu m}{\nu} \int \frac{z_1 h_{z_1}}{\sqrt{T}} dz_1 + \frac{\eta}{\mu} \right] h + \frac{\sigma \mu m z_1 \sqrt{T}}{\nu (\mu^2 + 1)} \right\} - \frac{\mu (m z_0 + a)}{\mu^2 + 1}, \\
f_{32} &= -\sigma \sqrt{T} \left[\frac{\sigma \delta \mu m}{\nu} \int \frac{z_1 h_{z_1}}{\sqrt{T}} dz_1 + \frac{\eta}{\mu} \right] + \frac{\delta \mu m z_1 h}{\nu}.
\end{aligned}$$

Nos resultados enunciados nesta seção, pode ocorrer eventualmente a situação em que

$$u_{xt} = D_x G, \quad (2.19)$$

para alguma escolha das funções arbitrárias. Neste caso, (2.19) se reduz a uma equação de primeira ordem, que não constitui o nosso objeto de estudo e deve ser abordado de forma diferente.

Observação 2.2.1. *A notação D_x que aparece na expressão (2.19) está denotando a derivada total em x .*

2.3 Exemplos

Nesta seção, forneceremos alguns exemplos que mostram a aplicabilidade dos teoremas tratados na seção anterior. Utilizaremos a notação clássica de equações diferenciais do Exemplo 2.1 ao Exemplo 2.15, mediante a correspondência estabelecida em (1.17). No Exemplo 2.16, não será usada a notação clássica, pois é menos prática para os nossos propósitos de generalidade. Por fim, exibiremos outros exemplos com o uso do Exemplo 2.16.

Exemplo 2.1. *A equação de Hunter-Saxton*

$$u_{xt} = -uu_{xx} - \frac{u_x^2}{2} \quad (2.20)$$

descreve superfícies pseudoesféricas. Com efeito, se considerarmos

$$h(u_x) = m_1 u_x^2 e^{\frac{2b}{u_x}}, \quad l(u, u_x) = -uh + m_2,$$

com $m_1, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $m_2 \in \mathbb{R}$, na classe descrita pelo Teorema 2.2, teremos a equação (2.20) com funções f_{ij} associadas

$$\begin{aligned} f_{11} &= m_1 u_x^2 e^{\frac{2b}{u_x}}, & f_{12} &= -u f_{11} + m_2 + \frac{\sigma \sqrt{\mu^2 + 1}}{\mu} b, \\ f_{21} &= \mu f_{11}, & f_{22} &= \mu (-u f_{11} + m_2), \\ f_{31} &= \sigma \sqrt{\mu^2 + 1} f_{11}, & f_{32} &= \sigma \sqrt{\mu^2 + 1} (-u f_{11} + m_2) + \frac{b}{\mu}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

sendo $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $\sigma = \pm 1$.

Exemplo 2.2. *A equação cúbica de Rabelo, também conhecida como equação Short Pulse,*

$$u_{xt} = \frac{u^2}{2} u_{xx} + u u_x^2 + u \quad (2.22)$$

descreve superfícies esféricas. Com efeito, se considerarmos $\phi(u) = \frac{u^2}{2} - 1$, $c = 1$, $\gamma = 1$, $\sigma = 1$ e $\delta = -1$ na classe descrita pelo Teorema 2.1, teremos a equação (2.22) com funções f_{ij} associadas

$$\begin{aligned} f_{11} &= \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 1}}, & f_{12} &= \left(-\mu u + \frac{u^2}{2} - 1\right) f_{11}, \\ f_{21} &= \mu f_{11}, & f_{22} &= \left[u + \mu \left(\frac{u^2}{2} - 1\right)\right] f_{11}, \\ f_{31} &= u_x, & f_{32} &= \frac{u^2}{2} u_x, \end{aligned} \quad (2.23)$$

com $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Exemplo 2.3. Considerando $\phi(u) = \frac{u^2 + u - 1}{2}$, $c = \sqrt{2}$, $\gamma = 1$ e $\sigma = 1$ na classe descrita pelo Teorema 2.1, teremos a equação

$$u_{xt} = (u^2 + u) u_{xx} + (2u + 1) u_x^2 - \delta \left(u + \frac{1}{2}\right), \quad (2.24)$$

a qual descreve superfícies pseudoesféricas (caso $\delta = 1$) ou superfícies esféricas (caso $\delta = -1$) com funções f_{ij} dadas por

$$\begin{aligned} f_{11} &= \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 1}}, & f_{12} &= \left[u^2 + u - 1 - \frac{\sqrt{2}\mu(2u + 1)}{2}\right] f_{11}, \\ f_{21} &= \mu f_{11}, & f_{22} &= \left[\mu(u^2 + u - 1) + \frac{\sqrt{2}(2u + 1)}{2}\right] f_{11}, \\ f_{31} &= \sqrt{2}u_x, & f_{32} &= \sqrt{2}(u^2 + u) u_x, \end{aligned}$$

com $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Observação 2.3.1. Note que as equações (2.20), (2.22) e (2.24) podem também ser reescritas, respectivamente, como

$$(u_t + uu_x)_x = \frac{1}{2}u_x^2, \quad u_{xt} = \frac{1}{6}(u^3)_{,xx} + u, \quad u_{xt} = \left(\frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{2}u^2\right)_{,xx} - \delta \left(u + \frac{1}{2}\right).$$

Exemplo 2.4. Considerando $\phi(u) = u - \cos(u)$, $\beta = 1$, $\theta = 1$, $\tilde{\sigma} = 1$, $\delta = -1$, $c = 0$ e $\sigma = 1$ na classe descrita pelo Teorema 2.4, teremos a equação

$$u_{xt} = uu_{xx} + u_x^2 + \sin(u) + 1,$$

a qual descreve superfícies esféricas com funções f_{ij} dadas por

$$\begin{aligned}
f_{21} &= \mu f_{11}, & f_{31} &= 1, & f_{11} &= \frac{u_x}{\sqrt{\mu^2 + 1}}, \\
f_{12} &= \frac{uu_x + \mu(\sin(u) + 1)}{\sqrt{\mu^2 + 1}}, \\
f_{22} &= \frac{\mu uu_x - (\sin(u) + 1)}{\sqrt{\mu^2 + 1}}, \\
f_{32} &= u - \cos(u),
\end{aligned}$$

com $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Exemplo 2.5. Considerando $h(u_x) = u_x^2$ e $l(u, u_x) = u^2 u_x^2$ na classe descrita pelo Teorema 2.2, obteremos a equação

$$u_{xt} = u^2 u_{xx} + u u_x^2 + \frac{b}{2} u_x, \quad (2.25)$$

com $b \in \mathbb{R} - \{0\}$, a qual descreve superfícies pseudoesféricas com funções f_{ij} dadas por

$$\begin{aligned}
f_{11} &= u_x^2, & f_{12} &= u^2 u_x^2 + \frac{\sigma \sqrt{\mu^2 + 1}}{\mu} b, \\
f_{21} &= \mu u_x^2, & f_{22} &= \mu u^2 u_x^2, \\
f_{31} &= \sigma \sqrt{\mu^2 + 1} u_x^2, & f_{32} &= \sigma \sqrt{\mu^2 + 1} u^2 u_x^2 + \frac{b}{\mu},
\end{aligned}$$

com $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $\sigma = \pm 1$.

Exemplo 2.6. Considerando $h(u_x) = u_x$ no Corolário 2.1, obtemos a equação

$$u_{xt} = -\gamma u_{xx} + \frac{\sigma \mu (mu + a) \sqrt{\delta (\mu^2 + 1) u_x^2 + \nu}}{\mu^2 + 1},$$

com $a, m \in \mathbb{R}$ tais que $a^2 + m^2 \neq 0$; $\mu, \nu, \gamma \in \mathbb{R} - \{0\}$; $\delta = \pm 1$ e $\sigma = \pm 1$, a qual descreve superfícies pseudoesféricas (caso $\delta = 1$) ou superfícies esféricas (caso $\delta = -1$) com funções f_{ij} dadas por

$$\begin{aligned}
f_{11} &= u_x, & f_{31} &= \sigma \sqrt{\delta (\mu^2 + 1) u_x^2 + \nu}, & f_{21} &= \mu u_x, \\
f_{12} &= -\gamma u_x + \frac{\mu^2 (mu + a)}{\mu^2 + 1}, \\
f_{22} &= -\mu \gamma u_x - \frac{\mu (mu + a)}{\mu^2 + 1}, \\
f_{32} &= -\left[\sigma \gamma \sqrt{\delta (\mu^2 + 1) u_x^2 + \nu} + \frac{\mu m}{\mu^2 + 1} \right],
\end{aligned}$$

com

$$\delta (\mu^2 + 1) u_x^2 + \nu > 0,$$

Exemplo 2.7. Considerando $\delta = -1$, $\nu = \mu^2 + 1$, $\sigma = 1$, $m = \frac{\sqrt{\mu^2 + 1}}{\mu}$, $\gamma = -1$ e $a = 0$ no Exemplo 2.6, obtemos a equação

$$u_{xt} = u_{xx} + u\sqrt{1 - u_x^2},$$

a qual descreve superfícies esféricas com funções f_{ij} dadas por

$$f_{11} = u_x, \quad f_{31} = \sqrt{\mu^2 + 1}\sqrt{1 - u_x^2}, \quad f_{21} = \mu u_x,$$

$$f_{12} = u_x + \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}}u,$$

$$f_{22} = \mu u_x - \frac{u}{\sqrt{\mu^2 + 1}},$$

$$f_{32} = \sqrt{\mu^2 + 1}\sqrt{1 - u_x^2} - \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 1}},$$

com

$$u_x^2 < 1, \quad \mu \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Exemplo 2.8. Considerando $h(u_x) = \sinh(u_x)$, $\delta = 1$, $\nu = \mu^2 + 1$, $\sigma = 1$ e $a = 0$ no Corolário 2.1, obtemos a equação

$$u_{xt} = - \left[\mu m \theta^3 \left(\frac{u_x^2}{2} - 1 \right) + \gamma \right] u_{xx} + \mu m \theta u,$$

com $\mu, m \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\theta = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 1}}$ e $\gamma \in \mathbb{R}$, a qual descreve superfícies pseudoesféricas com funções f_{ij} associadas dadas por

$$f_{11} = \sinh(u_x), \quad f_{31} = \frac{\cosh(u_x)}{\theta}, \quad f_{21} = \mu \sinh(u_x),$$

$$f_{12} = - \left(\frac{\mu m \theta^3}{2} u_x^2 + \gamma \right) \sinh(u_x) + \mu m \theta^3 u_x \cosh(u_x) + \mu^2 m \theta^2 u,$$

$$f_{22} = \mu \left[- \left(\frac{\mu m \theta^3}{2} u_x^2 + \gamma \right) \sinh(u_x) + \mu m \theta^3 u_x \cosh(u_x) \right] - \mu m \theta^2 u,$$

$$f_{32} = - \frac{1}{\theta} \left(\frac{\mu m \theta^3}{2} u_x^2 + \gamma \right) \cosh(u_x) + \mu m \theta^2 u_x \sinh(u_x).$$

Exemplo 2.9. Considerando $\phi(u) = \frac{e^u}{2}$, $\beta = 1$, $\theta = 1$, $\tilde{\sigma} = 1$, $\sigma = 1$ e $\delta = 1$ na classe descrita pelo Teorema 2.4, teremos a equação

$$u_{xt} = e^u \left(u_{xx} + u_x^2 - \frac{1}{2} \right),$$

a qual descreve superfícies pseudoesféricas com funções f_{ij} dadas por

$$\begin{aligned} f_{21} &= \mu f_{11}, & f_{31} &= c f_{11} + \frac{\sqrt{\tilde{b}}}{k}, & f_{11} &= \frac{1}{k\sqrt{\tilde{b}}} (k u_x - c), \\ f_{12} &= \frac{e^u}{\sqrt{\tilde{b}}} \left(u_x + \frac{\mu\sqrt{\tilde{b}} - c}{2k} \right), \\ f_{22} &= \frac{e^u}{\sqrt{\tilde{b}}} \left[\mu u_x - \left(\frac{\sqrt{\tilde{b}} + \mu c}{2k} \right) \right], \\ f_{32} &= \frac{e^u}{\sqrt{\tilde{b}}} \left[c u_x - \left(\frac{\mu^2 + 1}{2k} \right) \right], \end{aligned}$$

onde $k = \sqrt{\mu^2 + 1}$, $\tilde{b} = c^2 - (\mu^2 + 1)$, com $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $c \in \mathbb{R} - [-\sqrt{\mu^2 + 1}, \sqrt{\mu^2 + 1}]$.

Exemplo 2.10. Considerando $h(u_x) = -e^{-u_x}$ e $l(u, u_x) = e^u u_x$ na classe descrita pelo Teorema 2.2, obteremos a equação

$$u_{xt} = e^{u+u_x} (u_{xx} + u_x^2) - b,$$

com $b \in \mathbb{R} - \{0\}$, a qual descreve superfícies pseudoesféricas com funções f_{ij} dadas por

$$\begin{aligned} f_{11} &= -e^{-u_x}, & f_{12} &= e^u u_x + \frac{\sigma\sqrt{\mu^2 + 1}}{\mu} b, \\ f_{21} &= -\mu e^{-u_x}, & f_{22} &= \mu e^u u_x, \\ f_{31} &= -\sigma\sqrt{\mu^2 + 1} e^{-u_x}, & f_{32} &= \sigma\sqrt{\mu^2 + 1} e^u u_x + \frac{b}{\mu}, \end{aligned}$$

com $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $\sigma = \pm 1$.

Exemplo 2.11. Considerando $\phi(u) = u^2 - 2$, $\delta = -1$, $\gamma = 3$, $c = 1$ e $\sigma = -1$ na classe descrita pelo Teorema 2.1, teremos a equação

$$u_{xt} = u^2 u_{xx} + 2u u_x^2 + 18u, \quad (2.26)$$

a qual descreve superfícies esféricas com funções f_{ij} dadas por

$$\begin{aligned}
f_{11} &= \frac{-3}{\sqrt{\mu^2 + 1}}, & f_{12} &= (-2\mu u + u^2 - 2) f_{11}, \\
f_{21} &= \mu f_{11}, & f_{22} &= [2u + \mu(u^2 - 2)] f_{11}, \\
f_{31} &= u_x, & f_{32} &= u^2 u_x,
\end{aligned}$$

com $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Exemplo 2.12. Considerando $h(u_x) = -e^{-\sinh(u_x)}$, $l(u, u_x) = b(u + u_x)$, $b \in \mathbb{R} - \{0\}$, e $\sigma = 1$ na classe descrita pelo Teorema 2.2, obteremos a equação

$$u_{xt} = \frac{b [e^{\sinh(u_x)} (u_{xx} + u_x) - 1]}{\cosh(u_x)},$$

a qual descreve superfícies pseudoesféricas com funções f_{ij} dadas por

$$\begin{aligned}
f_{11} &= -e^{-\sinh(u_x)}, & f_{12} &= b \left(u + u_x + \frac{\sqrt{\mu^2 + 1}}{\mu} \right), \\
f_{21} &= -\mu e^{-\sinh(u_x)}, & f_{22} &= b\mu(u + u_x), \\
f_{31} &= -\sqrt{\mu^2 + 1} e^{-\sinh(u_x)}, & f_{32} &= b \left[\sqrt{\mu^2 + 1} (u + u_x) + \frac{1}{\mu} \right],
\end{aligned}$$

com $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Exemplo 2.13. Considerando $\phi(u) = \frac{\cosh(u)}{2}$, $c = 0$, $\theta = 1$, $\beta = 1$, $\tilde{\sigma} = 1$, $\sigma = 1$ e $\delta = -1$ na classe descrita pelo Teorema 2.4, teremos a equação

$$u_{xt} = \cosh(u)u_{xx} + \sinh(u) \left(u_x^2 + \frac{1}{2} \right),$$

a qual descreve superfícies esféricas com funções f_{ij} dadas por

$$\begin{aligned}
f_{21} &= \mu f_{11}, & f_{31} &= 1, & f_{11} &= \frac{u_x}{\sqrt{\mu^2 + 1}}, \\
f_{12} &= \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \left(\cosh(u)u_x + \frac{\mu \sinh(u_x)}{2} \right), \\
f_{22} &= \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \left(\mu \cosh(u)u_x - \frac{\sinh(u_x)}{2} \right), \\
f_{32} &= \frac{\cosh(u_x)}{2},
\end{aligned}$$

sendo $\gamma = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 1}}$ e $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Exemplo 2.14. Considerando $h(u_x) = u_x^2$, $l(u, u_x) = e^{u_x^2}$, $b = 2$ e $\sigma = 1$ na classe descrita pelo Teorema 2.2, obteremos a equação

$$u_{xt} = e^{u_x^2} u_{xx} + u_x,$$

a qual descreve superfícies pseudoesféricas com funções f_{ij} dadas por

$$\begin{aligned} f_{11} &= u_x^2, & f_{12} &= e^{u_x^2} + \frac{2\sqrt{\mu^2 + 1}}{\mu}, \\ f_{21} &= \mu f_{11}, & f_{22} &= \mu e^{u_x^2}, \\ f_{31} &= \sqrt{\mu^2 + 1} f_{11}, & f_{32} &= \sqrt{\mu^2 + 1} e^{u_x^2} + \frac{2}{\mu}, \end{aligned}$$

com $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Exemplo 2.15. Considerando $l(u, u_x) = (\arctg(u) + \pi)(\arctg(u_x) + e)$, em que $\pi \cong 3,14$ e $e \cong 2,71$; $h(u_x) = e^{u_x}$ e $\sigma = 1$ na classe descrita pelo Teorema 2.2, obteremos a equação

$$u_{xt} = \frac{1}{e^{u_x}} \left[\left(\frac{\arctg(u) + \pi}{1 + u_x^2} \right) u_{xx} + \left(\frac{\arctg(u_x) + e}{1 + u^2} \right) u_x + b e^{u_x} \right],$$

a qual descreve superfícies pseudoesféricas com funções f_{ij} dadas por

$$\begin{aligned} f_{11} &= e^{u_x}, & f_{12} &= (\arctg(u) + \pi)(\arctg(u_x) + e) + \frac{\sqrt{\mu^2 + 1}}{\mu} b, \\ f_{21} &= \mu f_{11}, & f_{22} &= \mu (\arctg(u) + \pi)(\arctg(u_x) + e), \\ f_{31} &= \sqrt{\mu^2 + 1} f_{11}, & f_{32} &= \sqrt{\mu^2 + 1} (\arctg(u) + \pi)(\arctg(u_x) + e) + \frac{b}{\mu}, \end{aligned}$$

com $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$.

No exemplo que se segue, consideraremos uma classe de equações de onda não lineares

$$u_{xt} + u u_{xx} + G(u_x) = 0, \quad (2.27)$$

a qual foi estudada por Calogero [2]. Mediante o uso de (1.17), podemos reescrever a equação (2.27) como

$$z_{1,t} + z_0 z_2 + G(z_1) = 0. \quad (2.28)$$

Exemplo 2.16. Se $G \neq 0$, a classe de equações de onda não lineares (2.28) descreve superfícies pseudoesféricas. Com efeito, se considerarmos

$$h(z_1) = m_1 e^{\int \frac{z_1 - b}{G} dz_1}, \quad l(z_0, z_1) = -z_0 h + m_2,$$

com $m_1, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $m_2 \in \mathbb{R}$, na classe descrita pelo Teorema 2.2, teremos a equação (2.28) com funções f_{ij} associadas

$$\begin{aligned}
f_{11} &= m_1 e^{\int \left(\frac{z_1-b}{G}\right) dz_1}, & f_{12} &= -z_0 f_{11} + m_2 + \frac{\sigma \sqrt{\mu^2 + 1}}{\mu} b, \\
f_{21} &= \mu f_{11}, & f_{22} &= \mu (-z_0 f_{11} + m_2), \\
f_{31} &= \sigma \sqrt{\mu^2 + 1} f_{11}, & f_{32} &= \sigma \sqrt{\mu^2 + 1} (-z_0 f_{11} + m_2) + \frac{b}{\mu},
\end{aligned} \tag{2.29}$$

sendo $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $\sigma = \pm 1$.

Usaremos o Exemplo 2.16 para construir alguns exemplos conforme se segue.

Exemplo 2.17. Se considerarmos $G(z_1) = \frac{z_1 - b}{\cosh(z_1)}$, $b \in \mathbb{R} - \{0\}$, em (2.28) e (2.29), obteremos, respectivamente, a equação diferencial

$$z_{1,t} + z_0 z_2 + \frac{z_1 - b}{\cosh(z_1)} = 0, \tag{2.30}$$

e funções f_{ij} dadas por

$$\begin{aligned}
f_{11} &= m_1 e^{\sinh(z_1)+c}, & f_{12} &= -z_0 f_{11} + m_2 + \frac{\sigma \sqrt{\mu^2 + 1}}{\mu} b, \\
f_{21} &= \mu f_{11}, & f_{22} &= \mu (-z_0 f_{11} + m_2), \\
f_{31} &= \sigma \sqrt{\mu^2 + 1} f_{11}, & f_{32} &= \sigma \sqrt{\mu^2 + 1} (-z_0 f_{11} + m_2) + \frac{b}{\mu},
\end{aligned} \tag{2.31}$$

com $\mu, m_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$; $c, m_2 \in \mathbb{R}$ e $\sigma = \pm 1$. Portanto a equação (2.30) descreve superfícies pseudoesféricas com funções f_{ij} dadas por (2.31).

Na notação clássica, podemos concluir que a equação diferencial

$$u_{xt} + u u_{xx} + \frac{u_x - b}{\cosh(u_x)} = 0$$

descreve superfícies pseudoesféricas com funções f_{ij} associadas

$$\begin{aligned}
f_{11} &= m_1 e^{\sinh(u_x)+c}, & f_{12} &= -u f_{11} + m_2 + \frac{\sigma \sqrt{\mu^2 + 1}}{\mu} b, \\
f_{21} &= \mu f_{11}, & f_{22} &= \mu (-u f_{11} + m_2), \\
f_{31} &= \sigma \sqrt{\mu^2 + 1} f_{11}, & f_{32} &= \sigma \sqrt{\mu^2 + 1} (-u f_{11} + m_2) + \frac{b}{\mu},
\end{aligned}$$

com $b, \mu, m_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$; $c, m_2 \in \mathbb{R}$ e $\sigma = \pm 1$.

Exemplo 2.18. Se considerarmos $G(z_1) = \frac{z_1^2}{2}$ em (2.28) e (2.29), obteremos, respectivamente, a equação

$$z_{1,t} + z_0 z_2 + \frac{z_1^2}{2} = 0, \tag{2.32}$$

e funções f_{ij} dadas por

$$\begin{aligned}
f_{11} &= m_1 e^c z_1^2 e^{\frac{2b}{z_1}}, & f_{12} &= -z_0 f_{11} + m_2 + \frac{\sigma \sqrt{\mu^2 + 1}}{\mu} b, \\
f_{21} &= \mu f_{11}, & f_{22} &= \mu (-z_0 f_{11} + m_2), \\
f_{31} &= \sigma \sqrt{\mu^2 + 1} f_{11}, & f_{32} &= \sigma \sqrt{\mu^2 + 1} (-z_0 f_{11} + m_2) + \frac{b}{\mu},
\end{aligned} \tag{2.33}$$

com $b, \mu, m_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$; $c, m_2 \in \mathbb{R}$ e $\sigma = \pm 1$. Portanto a equação (2.32) descreve superfícies pseudoesféricas com funções f_{ij} dadas por (2.33).

Considerando $c = 0$ e a notação clássica (1.17), no Exemplo 2.18, obtemos a mesma configuração do Exemplo 2.1.

Capítulo 3

Demonstrações dos resultados

Neste capítulo, fornecemos as demonstrações dos teoremas de classificação. Inicialmente apresentamos a prova de alguns lemas auxiliares que serão utilizados posteriormente na demonstração dos teoremas mencionados. Além disso, em todas as considerações deste capítulo, até mesmo quando não for mencionado, estaremos sempre trabalhando com funções definidas em conjuntos abertos e conexos.

3.1 Demonstração do Lema 2.1

Nesta seção, apresentamos de maneira breve, a demonstração do lema principal que é o lema de caracterização.

Demonstração. Suponha que a equação diferencial parcial $z_{1,t} = F(z_0, z_1, z_2)$ descreva superfícies pseudoesféricas (caso $\delta = 1$) ou superfícies esféricas (caso $\delta = -1$), com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt, i \in \{1, 2, 3\}$, tais que as funções f_{ij} satisfaçam (2.1)-(2.5) e $f_{21} = \mu f_{11}$, $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$. Da Proposição 1.2.9, obtemos

$$\begin{aligned} dz_0 \wedge dt &= z_1 dx \wedge dt, & dz_1 \wedge dt &= z_2 dx \wedge dt, \\ dz_2 \wedge dx \wedge dt &= 0, & dz_1 \wedge dx &= -F dx \wedge dt. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Além disso,

$$\begin{cases} d\omega_1 = \omega_3 \wedge \omega_2, \\ d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3, \\ d\omega_3 = \delta \omega_1 \wedge \omega_2, \end{cases} \tag{3.2}$$

com $\delta = \pm 1$ e $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$. Ora, o sistema (3.2) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
df_{11} \wedge dx + df_{12} \wedge dt - (f_{31}f_{22} - f_{21}f_{32})dx \wedge dt &= 0, \\
df_{21} \wedge dx + df_{22} \wedge dt - (f_{11}f_{32} - f_{31}f_{12})dx \wedge dt &= 0, \\
df_{31} \wedge dx + df_{32} \wedge dt - \delta(f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12})dx \wedge dt &= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, tendo em vista que $df_{ij} = \sum_{l=0}^2 f_{ij,z_l} dz_l$, a expressão anterior se reescreve como

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^2 f_{11,z_l} dz_l \wedge dx + \sum_{l=0}^2 f_{12,z_l} dz_l \wedge dt - (f_{31}f_{22} - f_{21}f_{32})dx \wedge dt &= 0, \\
\sum_{l=0}^2 f_{21,z_l} dz_l \wedge dx + \sum_{l=0}^2 f_{22,z_l} dz_l \wedge dt - (f_{11}f_{32} - f_{31}f_{12})dx \wedge dt &= 0, \\
\sum_{l=0}^2 f_{31,z_l} dz_l \wedge dx + \sum_{l=0}^2 f_{32,z_l} dz_l \wedge dt - \delta(f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12})dx \wedge dt &= 0.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Por outro lado, como $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$, devemos ter

$$f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12} \neq 0. \tag{3.4}$$

Por hipótese $f_{21} = \mu f_{11}$, $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$, portanto, a expressão (3.4) se reescreve como (2.5).

Além disso, (3.3) se reescreve como

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^2 f_{11,z_l} dz_l \wedge dx + \sum_{l=0}^2 f_{12,z_l} dz_l \wedge dt - (f_{31}f_{22} - \mu f_{11}f_{32})dx \wedge dt &= 0, \\
\sum_{l=0}^2 \mu f_{11,z_l} dz_l \wedge dx + \sum_{l=0}^2 f_{22,z_l} dz_l \wedge dt - (f_{11}f_{32} - f_{31}f_{12})dx \wedge dt &= 0, \\
\sum_{l=0}^2 f_{31,z_l} dz_l \wedge dx + \sum_{l=0}^2 f_{32,z_l} dz_l \wedge dt - \delta f_{11}(f_{22} - \mu f_{12})dx \wedge dt &= 0.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Substituindo (3.1) em (3.5), obteremos

$$\begin{aligned}
& f_{11,z_0} dz_0 \wedge dx + f_{11,z_2} dz_2 \wedge dx + \left(-f_{11,z_1} F + \sum_{l=0}^1 f_{12,z_l} z_{l+1} - f_{31} f_{22} + \mu f_{11} f_{32} \right) dx \wedge dt \\
& + f_{12,z_2} dz_2 \wedge dt = 0, \\
& \mu f_{11,z_0} dz_0 \wedge dx + \mu f_{11,z_2} dz_2 \wedge dx + \left(-\mu f_{11,z_1} F + \sum_{l=0}^1 f_{22,z_l} z_{l+1} - f_{11} f_{32} + f_{31} f_{12} \right) dx \wedge dt \\
& + f_{22,z_2} dz_2 \wedge dt = 0, \\
& f_{31,z_0} dz_0 \wedge dx + f_{31,z_2} dz_2 \wedge dx + \left[-f_{31,z_1} F + \sum_{l=0}^1 f_{32,z_l} z_{l+1} - \delta f_{11} (f_{22} - \mu f_{12}) \right] dx \wedge dt \\
& + f_{32,z_2} dz_2 \wedge dt = 0,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

donde, por independência linear, obtemos (2.1), (2.2) e (2.3). Por fim, para que as equações de (2.3) sejam equivalentes à equação $z_{1,t} = F(z_0, z_1, z_2)$, as funções f_{11,z_1} , $\mu f_{11,z_1}$ e f_{31,z_1} não podem se anular simultaneamente, isto é, a condição (2.4) deve ser satisfeita.

Para mostrar a recíproca, sejam $f_{ij} = f_{ij}(z_0, z_1, z_2)$, com $i \in \{1, 2, 3\}$ e $j \in \{1, 2\}$, funções satisfazendo (2.1)-(2.5) e $f_{21} = \mu f_{11}$, $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$. Com isso, podemos definir localmente $\omega_i = f_{i1} dx + f_{i2} dt$, com $i \in \{1, 2, 3\}$. No que se segue, mostraremos que as equações de estrutura envolvendo essas 1-formas são equivalentes à equação $z_{1,t} = F(z_0, z_1, z_2)$. Com efeito, as equações de estrutura, envolvendo as 1-formas supracitadas, são dadas por

$$\begin{cases} d\omega_1 = \omega_3 \wedge \omega_2, \\ d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3, \\ d\omega_3 = \delta \omega_1 \wedge \omega_2, \end{cases}$$

as quais são equivalentes a

$$\begin{aligned}
df_{11} \wedge dx + df_{12} \wedge dt - (f_{31} f_{22} - f_{21} f_{32}) dx \wedge dt &= 0, \\
df_{21} \wedge dx + df_{22} \wedge dt - (f_{11} f_{j3} - f_{31} f_{12}) dx \wedge dt &= 0, \\
df_{31} \wedge dx + df_{32} \wedge dt - \delta (f_{11} f_{22} - f_{21} f_{12}) dx \wedge dt &= 0.
\end{aligned}$$

Tendo em vista que $f_{21} = \mu f_{11}$, $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$, e $df_{ij} = \sum_{l=0}^2 f_{ij,z_l} dz_l$, a expressão anterior se reescreve como

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^2 f_{11,z_l} dz_l \wedge dx + \sum_{l=0}^2 f_{12,z_l} dz_l \wedge dt - (f_{31}f_{22} - \mu f_{11}f_{32}) dx \wedge dt = 0, \\
& \sum_{l=0}^2 \mu f_{11,z_l} dz_l \wedge dx + \sum_{l=0}^2 f_{22,z_l} dz_l \wedge dt - (f_{11}f_{32} - f_{31}f_{12}) dx \wedge dt = 0, \\
& \sum_{l=0}^2 f_{31,z_l} dz_l \wedge dx + \sum_{l=0}^2 f_{32,z_l} dz_l \wedge dt - \delta f_{11} (f_{22} - \mu f_{12}) dx \wedge dt = 0.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Pelo uso de (2.1) e (2.2), o sistema (3.7) se reduz a

$$\begin{aligned}
& -f_{11,z_1} z_{1,t} + \sum_{l=0}^1 f_{12,z_l} z_{l+1} - f_{31}f_{22} + \mu f_{11}f_{32} = 0, \\
& -\mu f_{11,z_1} z_{1,t} + \sum_{l=0}^1 f_{22,z_l} z_{l+1} - f_{11}f_{32} + f_{31}f_{12} = 0, \\
& -f_{31,z_1} z_{1,t} + \sum_{l=0}^1 f_{32,z_l} z_{l+1} - \delta f_{11} (f_{22} - \mu f_{12}) = 0.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Além disso, de (2.3), obtemos

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^1 f_{12,z_l} z_{l+1} - f_{31}f_{22} + \mu f_{11}f_{32} = f_{11,z_1} F, \\
& \sum_{l=0}^1 f_{22,z_l} z_{l+1} - f_{11}f_{32} + f_{31}f_{12} = \mu f_{11,z_1} F, \\
& \sum_{l=0}^1 f_{32,z_l} z_{l+1} + \delta f_{11} (\mu f_{12} - f_{22}) = f_{31,z_1} F.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Substituindo (3.9) em (3.8), temos

$$\begin{aligned}
& -f_{11,z_1} z_{1,t} + f_{11,z_1} F = 0, \\
& -\mu f_{11,z_1} z_{1,t} + \mu f_{11,z_1} F = 0, \\
& -f_{31,z_1} z_{1,t} + f_{31,z_1} F = 0.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Tendo em vista a validade de (2.4), obtemos, mediante o uso de (3.10), a validade da equação $z_{1,t} = F(z_0, z_1, z_2)$.

Por fim, é imediato que (2.5) acarreta em $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$.

□

3.2 Lemas auxiliares

Nesta seção, apresentamos alguns lemas auxiliares, os quais serão essenciais para a demonstração de alguns dos resultados principais.

Lema 3.1. *Considere uma equação diferencial parcial do tipo $z_{1,t} = F(z_0, z_1, z_2)$ que descreve superfícies pseudoesféricas (caso $\delta = 1$) ou superfícies esféricas (caso $\delta = -1$), com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt, i \in \{1, 2, 3\}$, tais que as funções f_{ij} satisfazem (2.1)-(2.5) e $f_{21} = \mu f_{11}$, $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$. Então $f_{11,z_1} \neq 0$ se, e somente se,*

$$F = \frac{1}{f_{11,z_1}} \left(\frac{f_{22,z_1}z_2 + f_{22,z_0}z_1}{\mu} + \frac{\mu f_{31}\psi' + z_1\psi''}{\mu^2 + 1} \right) \quad (3.11)$$

$$f_{12} = \frac{f_{22}}{\mu} + \psi' \quad (3.12)$$

$$f_{32} = \frac{[(\mu^2 + 1)f_{22} + \mu\psi']f_{31} - \mu^2\psi''z_1}{\mu(\mu^2 + 1)f_{11}}, \quad (3.13)$$

$$Ef_{22,z_0} = \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left\{ \mu z_1 f_{11,z_1} \psi''' - E\psi'' + \frac{\mu f_{11}}{2z_1} [f_{31}^2 - \delta(\mu^2 + 1)f_{11}^2]_{,z_1} \psi' \right\} \quad (3.14)$$

$$Ef_{22,z_1} = \frac{f_{11,z_1}}{f_{11}} \left\{ Ef_{22} + \frac{\mu[\mu(f_{11} - z_1 f_{11,z_1})\psi'' + E\psi']}{\mu^2 + 1} \right\}, \quad (3.15)$$

em que E é definido em (2.6), $f_{22} = f_{22}(z_0, z_1)$ é uma função diferenciável que depende de z_0 e z_1 ; $f_{11} = f_{11}(z_1)$ é função diferenciável que depende de z_1 e $\psi = \psi(z_0)$ é uma função diferenciável que depende de z_0 tal que

$$\psi' \neq 0. \quad (3.16)$$

Demonstração. Tendo em vista que a equação diferencial parcial $z_{1,t} = F(z_0, z_1, z_2)$ descreve superfícies pseudoesféricas (caso $\delta = 1$) ou superfícies esféricas (caso $\delta = -1$), com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt, i \in \{1, 2, 3\}$, tais que as funções f_{ij} satisfazem (2.1)-(2.5) e $f_{21} = \mu f_{11}$, $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$, temos a validade do Lema 2.1. Sendo assim, como $f_{11,z_1} \neq 0$, a primeira equação de (2.3) é equivalente a

$$F = \frac{1}{f_{11,z_1}} \left(\sum_{l=0}^1 f_{12,z_l} z_{l+1} + \mu f_{11} f_{32} - f_{31} f_{22} \right). \quad (3.17)$$

Além disso, as duas últimas equações de (2.3) são equivalentes a

$$\begin{aligned}
-\mu^2 f_{11,z_1} F + \mu \sum_{l=0}^1 f_{22,z_l} z_{l+1} + \mu (f_{31} f_{12} - f_{11} f_{32}) &= 0, \\
-\mu f_{11,z_1} f_{31,z_1} F + \mu \sum_{l=0}^1 f_{11,z_1} f_{32,z_l} z_{l+1} + \delta \mu f_{11} (\mu f_{12} - f_{22}) f_{11,z_1} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Substituindo (3.17) nas duas equações de (3.18), obteremos

$$\sum_{l=0}^1 \mu (f_{22,z_l} - \mu f_{12,z_l}) z_{l+1} - \mu (\mu^2 + 1) f_{11} f_{32} + (\mu^2 f_{22} + \mu f_{12}) f_{31} = 0, \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^1 \mu (f_{32,z_l} f_{11,z_1} - f_{12,z_l} f_{31,z_1}) z_{l+1} + \delta f_{11} (\mu^2 f_{12} - \mu f_{22}) f_{11,z_1} \\
+ (\mu f_{31} f_{22} - \mu^2 f_{11} f_{32}) f_{31,z_1} = 0.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Diferenciando (3.19) e (3.20), com respeito a z_2 , obtemos, respectivamente,

$$f_{22,z_1} - \mu f_{12,z_1} = 0, \tag{3.21}$$

$$f_{32,z_1} f_{11,z_1} - f_{12,z_1} f_{31,z_1} = 0. \tag{3.22}$$

Substituindo (3.21) e (3.22), respectivamente, nas equações (3.19) e (3.20), obteremos

$$\mu (f_{22,z_0} - \mu f_{12,z_0}) z_1 - \mu (\mu^2 + 1) f_{11} f_{32} + (\mu^2 f_{22} + \mu f_{12}) f_{31} = 0, \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
(\mu f_{32,z_0} f_{11,z_1} - \mu f_{12,z_0} f_{31,z_1}) z_1 + \delta f_{11} (\mu^2 f_{12} - \mu f_{22}) f_{11,z_1} \\
+ (\mu f_{31} f_{22} - \mu^2 f_{11} f_{32}) f_{31,z_1} = 0.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Observe que (3.21) e (3.22) equivalem a

$$\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ f_{31,z_1} & -f_{11,z_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{12,z_1} \\ f_{32,z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{22,z_1} \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{bmatrix} f_{12,z_1} \\ f_{32,z_1} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\mu f_{11,z_1}} \begin{bmatrix} -f_{11,z_1} & 0 \\ -f_{31,z_1} & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{22,z_1} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Com isso, temos

$$f_{12,z_1} = \frac{f_{22,z_1}}{\mu}, \quad (3.25)$$

$$f_{32,z_1} = \frac{f_{31,z_1}}{\mu f_{11,z_1}} f_{22,z_1}. \quad (3.26)$$

Integrando a expressão (3.25), com respeito a z_1 , obtemos

$$f_{12} = \frac{f_{22}}{\mu} + \tilde{\psi}, \quad (3.27)$$

com $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(z_0)$ sendo uma função diferenciável dependente de z_0 , que por conta de (2.5), é tal que $\tilde{\psi} f_{11} \neq 0$, donde $\tilde{\psi} \neq 0$. Agora, em virtude da arbitrariedade de $\tilde{\psi}$, existe uma função diferenciável $\psi = \psi(z_0)$ de z_0 tal que $\tilde{\psi} = \psi'$. Com isso, reescrevemos (3.27) conforme (3.12), com $\psi' \neq 0$.

Substituindo a equação (3.12) nas equações (3.23) e (3.24), obteremos, respectivamente,

$$-\mu^2 z_1 \psi'' - \mu (\mu^2 + 1) f_{11} f_{32} + [(\mu^2 + 1) f_{22} + \mu \psi'] f_{31} = 0, \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} & \mu z_1 f_{11,z_1} f_{32,z_0} - \mu^2 f_{11} f_{31,z_1} f_{32} - z_1 f_{31,z_1} f_{22,z_0} + \mu f_{31} f_{31,z_1} f_{22} \\ & - \mu z_1 f_{31,z_1} \psi'' + \delta \mu^2 f_{11} f_{11,z_1} \psi' = 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Ora, como $f_{11} \neq 0$, concluímos que a equação (3.28) fornece

$$f_{32} = \frac{[(\mu^2 + 1) f_{22} + \mu \psi'] f_{31} - \mu^2 \psi'' z_1}{\mu (\mu^2 + 1) f_{11}},$$

o que prova a veracidade de (3.13).

Agora, no que se segue, obteremos (3.11). Com efeito, substituindo (3.12) e (3.13) em (3.17), temos

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{f_{11,z_1}} \left\{ \frac{f_{22,z_1} z_2 + f_{22,z_0} z_1}{\mu} + \psi'' z_1 + \frac{[(\mu^2 + 1) f_{22} + \mu \psi'] f_{31} - \mu^2 \psi'' z_1}{\mu^2 + 1} - f_{31} f_{22} \right\} \\ &= \frac{1}{f_{11,z_1}} \left[\frac{f_{22,z_1} z_2 + f_{22,z_0} z_1}{\mu} + \frac{(\mu^2 + 1) \psi'' z_1 + (\mu^2 + 1) f_{31} f_{22} + \mu f_{31} \psi' - \mu^2 \psi'' z_1 - (\mu^2 + 1) f_{31} f_{22}}{\mu^2 + 1} \right] \\ &= \frac{1}{f_{11,z_1}} \left(\frac{f_{22,z_1} z_2 + f_{22,z_0} z_1}{\mu} + \frac{\mu f_{31} \psi' + \psi'' z_1}{\mu^2 + 1} \right), \end{aligned}$$

que prova (3.11).

Por outro lado, diferenciando (3.13), com respeito a z_0 e a z_1 , obteremos

$$f_{32,z_0} = \frac{[(\mu^2 + 1) f_{22,z_0} + \mu \psi'''] f_{31} - \mu^2 \psi''' z_1}{\mu (\mu^2 + 1) f_{11}}, \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} f_{32,z_1} &= \frac{f_{11} f_{31} f_{22,z_1} + (f_{11} f_{31,z_1} - f_{11,z_1} f_{31}) f_{22}}{\mu f_{11}^2} \\ &+ \frac{(f_{11} f_{31,z_1} - f_{11,z_1} f_{31}) \psi' + \mu (z_1 f_{11,z_1} - f_{11}) \psi''}{(\mu^2 + 1) f_{11}^2}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Substituindo (3.13) e (3.30) em (3.29), obteremos

$$\begin{aligned} z_1 f_{11,z_1} \left\{ \frac{[(\mu^2 + 1) f_{22,z_0} + \mu \psi'''] f_{31} - \mu^2 \psi''' z_1}{(\mu^2 + 1) f_{11}} \right\} - \mu f_{11} f_{31,z_1} \left\{ \frac{[(\mu^2 + 1) f_{22} + \mu \psi'] f_{31} - \mu^2 \psi'' z_1}{(\mu^2 + 1) f_{11}} \right\} \\ - z_1 f_{31,z_1} f_{22,z_0} + \mu f_{31} f_{31,z_1} f_{22} - \mu z_1 f_{31,z_1} \psi'' + \delta \mu^2 f_{11,z_1} f_{11} \psi' = 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Multiplicando (3.32) por $(\mu^2 + 1) f_{11}$, membro a membro, e simplificando a expressão resultante, obteremos

$$\begin{aligned} (\mu^2 + 1) (f_{11,z_1} f_{31} - f_{11} f_{31,z_1}) z_1 f_{22,z_0} - \mu^2 z_1^2 f_{11,z_1} \psi''' + \mu (f_{11,z_1} f_{31} - f_{11} f_{31,z_1}) z_1 \psi'' \\ - \mu^2 f_{11} [f_{31,z_1} f_{31} - \delta (\mu^2 + 1) f_{11} f_{11,z_1}] \psi' = 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Comparando (3.26) com (3.31), obteremos

$$\begin{aligned} (\mu^2 + 1) f_{11} (f_{11} f_{31,z_1} - f_{11,z_1} f_{31}) f_{22,z_1} + (\mu^2 + 1) (f_{31} f_{11,z_1} - f_{31,z_1} f_{11}) f_{11,z_1} f_{22} = \\ \mu^2 f_{11,z_1} (z_1 f_{11,z_1} - f_{11}) \psi'' + \mu (f_{31,z_1} f_{11} - f_{11,z_1} f_{31}) f_{11,z_1} \psi'. \end{aligned} \quad (3.34)$$

As equações (3.33) e (3.34) podem ser reescritas, respectivamente, como

$$\begin{aligned} (\mu^2 + 1) \begin{vmatrix} f_{11,z_1} & f_{31,z_1} \\ f_{11} & f_{31} \end{vmatrix} z_1 f_{22,z_0} - \mu^2 z_1^2 f_{11,z_1} \psi''' + \mu \begin{vmatrix} f_{11,z_1} & f_{31,z_1} \\ f_{11} & f_{31} \end{vmatrix} z_1 \psi'' \\ - \frac{\mu^2 f_{11}}{2} [f_{31}^2 - \delta (\mu^2 + 1) f_{11}^2]_{,z_1} \psi' = 0, \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} - (\mu^2 + 1) f_{11} \begin{vmatrix} f_{11,z_1} & f_{31,z_1} \\ f_{11} & f_{31} \end{vmatrix} f_{22,z_1} + (\mu^2 + 1) \begin{vmatrix} f_{11,z_1} & f_{31,z_1} \\ f_{11} & f_{31} \end{vmatrix} f_{11,z_1} f_{22} = \\ \mu^2 f_{11,z_1} (z_1 f_{11,z_1} - f_{11}) \psi'' - \mu \begin{vmatrix} f_{11,z_1} & f_{31,z_1} \\ f_{11} & f_{31} \end{vmatrix} f_{11,z_1} \psi'. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Usando a definição de E dada em (2.6), podemos reescrever (3.35) e (3.36), respectivamente, como

$$(\mu^2 + 1) z_1 E f_{22, z_0} - \mu^2 z_1^2 f_{11, z_1} \psi''' + \mu z_1 E \psi'' - \frac{\mu^2 f_{11}}{2} [f_{31}^2 - \delta (\mu^2 + 1) f_{11}^2]_{, z_1} \psi' = 0, \quad (3.37)$$

$$-(\mu^2 + 1) f_{11} E f_{22, z_1} + (\mu^2 + 1) E f_{11, z_1} f_{22} = \mu^2 f_{11, z_1} (z_1 f_{11, z_1} - f_{11}) \psi'' - \mu E f_{11, z_1} \psi'. \quad (3.38)$$

Por fim, as equações (3.37) e (3.38) podem ser reescritas, respectivamente, como

$$E f_{22, z_0} = \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left\{ \mu z_1 f_{11, z_1} \psi''' - E \psi'' + \frac{\mu f_{11}}{2 z_1} [f_{31}^2 - \delta (\mu^2 + 1) f_{11}^2]_{, z_1} \psi' \right\}$$

$$E f_{22, z_1} = \frac{f_{11, z_1}}{f_{11}} \left\{ E f_{22} + \frac{\mu [\mu (f_{11} - z_1 f_{11, z_1}) \psi'' + E \psi']}{\mu^2 + 1} \right\},$$

que correspondem justamente às equações (3.14) e (3.15). □

Lema 3.2. *Considere uma equação diferencial parcial do tipo $z_{1,t} = F(z_0, z_1, z_2)$ que descreve superfícies pseudoesféricas (caso $\delta = 1$) ou superfícies esféricas (caso $\delta = -1$), com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1} dx + f_{i2} dt$, $i \in \{1, 2, 3\}$, tais que as funções f_{ij} satisfazem (2.1)-(2.5) e $f_{21} = \mu f_{11}$, $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$. Então $f_{11, z_1} \neq 0$ e $E = 0$, em um conjunto aberto e conexo, se, e somente se, $\delta = 1$ e*

$$z_{1,t} = \frac{1}{f_{11, z_1}} \left(\frac{f_{22, z_1} z_2 + f_{22, z_0} z_1}{\mu} + \frac{\sigma \mu a}{\sqrt{\mu^2 + 1}} f_{11} \right),$$

$$f_{32} = \sigma \sqrt{\mu^2 + 1} \left(\frac{f_{22}}{\mu} + \frac{a}{\mu^2 + 1} \right), \quad (3.39)$$

$$f_{31} = \sigma \sqrt{\mu^2 + 1} f_{11},$$

$$f_{12} = \frac{f_{22}}{\mu} + a, \quad (3.40)$$

sendo $a \neq 0$ e $\sigma = \pm 1$.

Demonstração. Como $f_{11, z_1} \neq 0$, temos a validade das expressões (3.11)-(3.16) do Lema 3.1. Agora, como $E = 0$, em um conjunto aberto e conexo, por hipótese, temos $\left(\frac{f_{31}}{f_{11}} \right)_{, z_1} = 0$, em um conjunto aberto e conexo, donde, por integração, com respeito a z_1 , obteremos

$$f_{31} = k f_{11}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (3.41)$$

Substituindo (3.41) em (3.11) e (3.13)-(3.15) e tendo em vista que $z_{1,t} = F$, obteremos, respectivamente,

$$z_{1,t} = \frac{1}{f_{11,z_1}} \left(\frac{f_{22,z_1} z_2 + f_{22,z_0} z_1}{\mu} + \frac{\mu k f_{11} \psi' + z_1 \psi''}{\mu^2 + 1} \right), \quad (3.42)$$

$$f_{32} = \frac{k [(\mu^2 + 1) f_{22} + \mu \psi'] f_{11} - \mu^2 \psi'' z_1}{\mu (\mu^2 + 1) f_{11}}, \quad (3.43)$$

$$\frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left\{ z_1 f_{11,z_1} \psi''' + \frac{f_{11} [k^2 f_{11}^2 - \delta (\mu^2 + 1) f_{11}^2]_{,z_1}}{2 z_1} \psi' \right\} = 0, \quad (3.44)$$

$$\frac{\mu^2 f_{11,z_1} (f_{11} - z_1 f_{11,z_1})}{(\mu^2 + 1) f_{11}} \psi'' = 0. \quad (3.45)$$

As equações (3.44) e (3.45) podem ser reescritas, respectivamente, como

$$f_{11,z_1} \{ z_1^2 \psi''' + [k^2 - \delta (\mu^2 + 1)] f_{11}^2 \psi' \} = 0, \quad (3.46)$$

$$\frac{f_{11,z_1} (f_{11} - z_1 f_{11,z_1})}{f_{11}} \psi'' = 0. \quad (3.47)$$

Usando a hipótese de que $f_{11,z_1} \neq 0$, podemos reescrever as equações (3.46) e (3.47), respectivamente, como

$$z_1^2 \psi''' + [k^2 - \delta (\mu^2 + 1)] f_{11}^2 \psi' = 0, \quad (3.48)$$

$$(f_{11} - z_1 f_{11,z_1}) \psi'' = 0. \quad (3.49)$$

A equação (3.49) sugere a ocorrência de dois casos, a saber, $\psi'' \neq 0$ ou $\psi'' = 0$, em um conjunto aberto e conexo, no entanto, apenas o último ocorre. Com efeito, se o caso em que $\psi'' \neq 0$ ocorresse, como consequência de (3.49), teríamos $f_{11} - z_1 f_{11,z_1} = 0$, em um conjunto aberto e conexo, donde

$$f_{11} = c z_1, \text{ com } c \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad (3.50)$$

pois $f_{11,z_1} \neq 0$. Substituindo (3.50) em (3.42), obteríamos

$$z_{1,t} = \frac{1}{c} \left[\frac{f_{22,z_1} z_2 + f_{22,z_0} z_1}{\mu} + \left(\frac{\mu k c \psi' + \psi''}{\mu^2 + 1} \right) z_1 \right]. \quad (3.51)$$

Ora, mas observe que a expressão (3.51) pode ser reescrita como

$$z_{1,t} = \frac{1}{c} \frac{d}{dx} \left(\frac{f_{22}}{\mu} + \frac{\mu k c \psi + \psi'}{\mu^2 + 1} \right). \quad (3.52)$$

Portanto, integrando (3.52), membro a membro, com respeito a x , teríamos

$$z_{0,t} = \frac{1}{c} \left(\frac{f_{22}}{\mu} + \frac{\mu k c \psi + \psi'}{\mu^2 + 1} \right) + \tilde{c},$$

com $\tilde{c}$ sendo uma constante. Ora, mas observe que essa última equação se configura como sendo do tipo $z_{0,t} = F(z_0, z_1)$, a qual não constitui o nosso objeto de estudo. Por essa razão não pode ocorrer $\psi'' \neq 0$ em (3.49). Suponhamos então que $\psi'' = 0$, em um conjunto aberto e conexo. Com isso, temos

$$\psi' = a, \text{ para algum } a \in \mathbb{R}. \quad (3.53)$$

Ora, mas em virtude de (3.16), temos $a \neq 0$. Consequentemente, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$. Substituindo (3.53) nas expressões (3.42), (3.43) e (3.12), teremos, respectivamente,

$$z_{1,t} = \frac{1}{f_{11,z_1}} \left(\frac{f_{22,z_1} z_2 + f_{22,z_0} z_1}{\mu} + \frac{a \mu k f_{11}}{\mu^2 + 1} \right) \quad (3.54)$$

$$f_{32} = k \left(\frac{f_{22}}{\mu} + \frac{a}{\mu^2 + 1} \right), \quad (3.55)$$

$$f_{12} = \frac{f_{22}}{\mu} + a.$$

Além disso, (3.48) se reduz a

$$k^2 - \delta (\mu^2 + 1) = 0, \quad (3.56)$$

pois $a f_{11}^2 \neq 0$. Porém a equação (3.56) acarreta que $\delta = 1$ e

$$k = \sigma \sqrt{\mu^2 + 1}, \quad (3.57)$$

com $\sigma = \pm 1$. Substituindo (3.57) em (3.54), (3.55) e (3.41), obtemos, respectivamente,

$$z_{1,t} = \frac{1}{f_{11,z_1}} \left(\frac{f_{22,z_1} z_2 + f_{22,z_0} z_1}{\mu} + \frac{\sigma \mu a}{\sqrt{\mu^2 + 1}} f_{11} \right),$$

$$f_{32} = \sigma \sqrt{\mu^2 + 1} \left(\frac{f_{22}}{\mu} + \frac{a}{\mu^2 + 1} \right),$$

$$f_{31} = \sigma \sqrt{\mu^2 + 1} f_{11},$$

com $a \neq 0$ e $\sigma = \pm 1$.

□

Antes de prosseguirmos com o próximo lema, introduziremos a seguinte notação:

$$Q = f_{31}^2 - \delta (\mu^2 + 1) f_{11}^2. \quad (3.58)$$

Tendo isso em mente, o resultado auxiliar a ser abordado é o que se segue.

Lema 3.3. *Nas condições do Lema 3.1, se $E \neq 0$, então (3.14) e (3.15) equivalem ao sistema*

$$\begin{cases} f_{22,z_0} = \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left(\frac{\mu z_1 f_{11,z_1}}{E} \psi''' - \psi'' + \frac{\mu f_{11} Q_{z_1}}{2 z_1 E} \psi' \right), \\ f_{22,z_1} = \frac{f_{11,z_1}}{f_{11}} \left\{ f_{22} + \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left[\mu \left(\frac{f_{11} - z_1 f_{11,z_1}}{E} \right) \psi'' + \psi' \right] \right\} \end{cases} \quad (3.59)$$

Além disso, a condição de integrabilidade de (3.59) é dada por

$$\frac{z_1 P}{E^2} \frac{\psi'''}{\psi'} = -\frac{1}{2} \left(\frac{Q_{z_1}}{z_1 E} \right)_{,z_1} \quad (3.60)$$

em que E e P são definidas em (2.6) e Q é dada por (3.58).

Demonstração. Como $E \neq 0$, podemos dividir as equações (3.14) e (3.15), membro a membro por E , obtendo o sistema de equações

$$\begin{cases} f_{22,z_0} = \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left\{ \frac{\mu z_1 f_{11,z_1}}{E} \psi''' - \psi'' + \frac{\mu f_{11} [f_{31}^2 - \delta (\mu^2 + 1) f_{11}^2]_{,z_1}}{2 z_1 E} \psi' \right\}, \\ f_{22,z_1} = \frac{f_{11,z_1}}{f_{11}} \left\{ f_{22} + \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left[\mu \left(\frac{f_{11} - z_1 f_{11,z_1}}{E} \right) \psi'' + \psi' \right] \right\}. \end{cases} \quad (3.61)$$

Primeiro, observe que, com a notação (3.58), a primeira equação do sistema (3.61) se reescreve como a primeira equação do sistema (3.59). Para obter a condição de integrabilidade do sistema mencionado, observe que, diferenciando a primeira equação de (3.59), com respeito a z_1 , temos

$$f_{22,z_0 z_1} = \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left\{ \mu \left[\frac{(f_{11,z_1} + z_1 f_{11,z_1 z_1}) E - E_{z_1} z_1 f_{11,z_1}}{E^2} \right] \psi''' + \frac{\mu}{2} \left[\frac{f_{11,z_1} Q_{z_1}}{z_1 E} + f_{11} \left(\frac{Q_{z_1}}{z_1 E} \right)_{,z_1} \right] \psi' \right\},$$

isto é

$$f_{22,z_0 z_1} = \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left\{ \left[\frac{(f_{11,z_1} + z_1 f_{11,z_1 z_1}) E - E_{z_1} z_1 f_{11,z_1}}{E^2} \right] \psi''' + \frac{1}{2} \left[\frac{f_{11,z_1} Q_{z_1}}{z_1 E} + f_{11} \left(\frac{Q_{z_1}}{z_1 E} \right)_{,z_1} \right] \psi' \right\}. \quad (3.62)$$

Por outro lado, observe que

$$\begin{aligned}
(f_{11,z_1} + z_1 f_{11,z_1 z_1}) E - E_{z_1} z_1 f_{11,z_1} &= (f_{11,z_1} + z_1 f_{11,z_1 z_1}) (f_{11,z_1} f_{31} - f_{31,z_1} f_{11}) \\
&- (f_{11,z_1 z_1} f_{31} - f_{11} f_{31,z_1 z_1}) z_1 f_{11,z_1} \\
&= f_{11,z_1} (f_{11,z_1} f_{31} - f_{31,z_1} f_{11}) \\
&+ z_1 (f_{11,z_1 z_1} f_{11,z_1} f_{31} - f_{11,z_1 z_1} f_{31,z_1} f_{11} - f_{11,z_1} f_{11,z_1 z_1} f_{31} \\
&\quad + f_{11,z_1} f_{11} f_{31,z_1 z_1}) \\
&= f_{11,z_1} E + z_1 f_{11} P.
\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$(f_{11,z_1} + z_1 f_{11,z_1 z_1}) E - E_{z_1} z_1 f_{11,z_1} = f_{11,z_1} E + z_1 f_{11} P. \quad (3.63)$$

Consequentemente, mediante o uso de (3.63), podemos reescrever (3.62) como

$$f_{22,z_0 z_1} = \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left\{ \left(\frac{f_{11,z_1}}{E} + \frac{z_1 f_{11} P}{E^2} \right) \psi''' + \frac{1}{2} \left[\frac{f_{11,z_1} Q_{z_1}}{z_1 E} + f_{11} \left(\frac{Q_{z_1}}{z_1 E} \right)_{,z_1} \right] \psi' \right\}.$$

Por outro lado, diferenciando a segunda equação de (3.59), com respeito a z_0 , temos

$$f_{22,z_1 z_0} = \frac{f_{11,z_1}}{f_{11}} \left\{ f_{22,z_0} + \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left[\mu \left(\frac{f_{11} - z_1 f_{11,z_1}}{E} \right) \psi''' + \psi'' \right] \right\} \quad (3.64)$$

Substituindo a primeira equação do sistema (3.59) em (3.64), temos

$$\begin{aligned}
f_{22,z_1 z_0} &= \frac{f_{11,z_1}}{f_{11}} \left\{ \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left(\frac{\mu z_1 f_{11,z_1}}{E} \psi''' - \psi'' + \frac{\mu f_{11} Q_{z_1}}{2 z_1 E} \psi' \right) + \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left[\mu \left(\frac{f_{11} - z_1 f_{11,z_1}}{E} \right) \psi''' + \psi'' \right] \right\} \\
&= \frac{\mu f_{11,z_1}}{(\mu^2 + 1) f_{11}} \left[\frac{\mu z_1 f_{11,z_1}}{E} \psi''' - \psi'' + \frac{\mu f_{11} Q_{z_1}}{2 z_1 E} \psi' + \mu \left(\frac{f_{11} - z_1 f_{11,z_1}}{E} \right) \psi''' + \psi'' \right] \\
&= \frac{\mu f_{11,z_1}}{(\mu^2 + 1) f_{11}} \left(\frac{\mu f_{11} Q_{z_1}}{2 z_1 E} \psi' + \frac{\mu f_{11}}{E} \psi''' \right) \\
&= \frac{\mu f_{11,z_1}}{\mu^2 + 1} \left(\frac{\mu Q_{z_1}}{2 z_1 E} \psi' + \frac{\mu}{E} \psi''' \right) \\
&= \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left(\frac{f_{11,z_1} Q_{z_1}}{2 z_1 E} \psi' + \frac{f_{11,z_1}}{E} \psi''' \right),
\end{aligned}$$

isto é,

$$f_{22,z_1 z_0} = \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left(\frac{f_{11,z_1}}{E} \psi''' + \frac{f_{11,z_1} Q_{z_1}}{2 z_1 E} \psi' \right).$$

Por conseguinte, $f_{22,z_0 z_1} = f_{22,z_1 z_0}$ se, e somente se,

$$\frac{\mu^2 f_{11}}{\mu^2 + 1} \left[\frac{z_1 P}{E^2} \psi''' + \frac{1}{2} \left(\frac{Q_{z_1}}{z_1 E} \right)_{,z_1} \psi' \right] = 0.$$

Mas como $\frac{\mu^2 f_{11}}{\mu^2 + 1} \neq 0$, a última equação é equivalente a

$$\frac{z_1 P}{E^2} \psi''' + \frac{1}{2} \left(\frac{Q_{z_1}}{z_1 E} \right)_{,z_1} \psi' = 0. \quad (3.65)$$

Por fim, uma vez que estamos nas condições do Lema (3.1), temos a validade de (3.16) assegurada e, com isso, a equação (3.65) é equivalente a (3.60). □

3.3 Demonstração do Teorema 2.1

Demonstração. Como $f_{11,z_1} = 0$, em um conjunto aberto e conexo, temos

$$f_{11} = \alpha, \quad (3.66)$$

sendo α uma constante real. Substituindo (3.66) em (2.3)-(2.5) do Lema 2.1, obteremos

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^1 f_{12,z_l} z_{l+1} - f_{31} f_{22} + \mu \alpha f_{32} &= 0, \\ \sum_{l=0}^1 f_{22,z_l} z_{l+1} - \alpha f_{32} + f_{31} f_{12} &= 0, \\ -f_{31,z_1} F + \sum_{l=0}^1 f_{32,z_l} z_{l+1} + \delta \alpha (\mu f_{12} - f_{22}) &= 0, \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$f_{31,z_1} \neq 0,$$

$$\alpha (\mu f_{12} - f_{22}) \neq 0. \quad (3.68)$$

Como $f_{31,z_1} \neq 0$, a terceira equação de (3.67) pode ser reescrita como

$$F = \sum_{l=0}^1 \frac{f_{32,z_l}}{f_{31,z_1}} z_{l+1} + \frac{\delta \alpha (\mu f_{12} - f_{22})}{f_{31,z_1}}, \quad (3.69)$$

sendo $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$, em virtude de (3.68). Por outro lado, diferenciando as duas primeiras equações de (3.67), com respeito a z_2 , obteremos

$$f_{12,z_1} = 0, \quad (3.70)$$

$$f_{22,z_1} = 0. \quad (3.71)$$

Substituindo (3.70) e (3.71), respectivamente, na primeira e segunda equações de (3.67), obtemos

$$f_{12,z_0}z_1 - f_{31}f_{22} + \mu\alpha f_{32} = 0, \quad (3.72)$$

$$f_{22,z_0}z_1 - \alpha f_{32} + f_{31}f_{12} = 0. \quad (3.73)$$

As equações (3.72) e (3.73) são equivalentes a

$$\begin{bmatrix} -f_{22} & \mu\alpha \\ f_{12} & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{31} \\ f_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{12,z_0}z_1 \\ -f_{22,z_0}z_1 \end{bmatrix}, \text{ sendo } \begin{vmatrix} -f_{22} & \mu\alpha \\ f_{12} & -\alpha \end{vmatrix} \neq 0,$$

em virtude de (3.68). Por conseguinte,

$$\begin{bmatrix} f_{31} \\ f_{32} \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha(f_{22} - \mu f_{12})} \begin{bmatrix} \alpha & \mu\alpha \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{12,z_0}z_1 \\ f_{22,z_0}z_1 \end{bmatrix},$$

donde

$$\frac{f_{31}}{z_1} = \frac{(f_{12} + \mu f_{22})_{,z_0}}{f_{22} - \mu f_{12}}, \quad (3.74)$$

$$f_{32} = \left[\frac{f_{12}f_{12,z_0} + f_{22}f_{22,z_0}}{\alpha(f_{22} - \mu f_{12})} \right] z_1. \quad (3.75)$$

Pelo uso de (3.74), (3.70) e (3.71), temos

$$f_{31} = cz_1, \quad (3.76)$$

sendo que $c \neq 0$, pois $f_{31,z_1} \neq 0$. Além disso,

$$(f_{12} + \mu f_{22})_{,z_0} = c(f_{22} - \mu f_{12}). \quad (3.77)$$

Portanto, definindo $\psi = \psi(z_0)$ tal que $\psi = \alpha(f_{12} + \mu f_{22})$, obteremos da equação (3.77) o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} f_{22} - \mu f_{12} = \frac{\psi'}{\alpha c}, \\ \mu f_{22} + f_{12} = \frac{\psi}{\alpha}, \end{cases} \quad (3.78)$$

sendo que $\psi' \neq 0$, em virtude de (3.77), (3.68) e de termos $c \neq 0$. Além disso, mediante o uso da primeira equação do sistema (3.78), podemos reescrever de antemão a expressão

(3.75) como

$$f_{32} = \frac{c(f_{12}f_{12,z_0} + f_{22}f_{22,z_0})z_1}{\psi'},$$

o que é equivalente a

$$f_{32} = \frac{c}{\psi'} \left(\frac{f_{12}^2 + f_{22}^2}{2} \right)_{,z_0} z_1. \quad (3.79)$$

Além disso, o sistema (3.78) pode ser reescrito em termos matriciais como

$$\begin{bmatrix} 1 & -\mu \\ \mu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{22} \\ f_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\psi'}{\alpha c} \\ \frac{\psi}{\alpha} \end{bmatrix},$$

sendo

$$\begin{vmatrix} 1 & -\mu \\ \mu & 1 \end{vmatrix} = 1 + \mu^2 \neq 0.$$

Consequentemente, temos

$$\begin{bmatrix} f_{22} \\ f_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{c\alpha(1+\mu^2)} \begin{bmatrix} \psi' + \mu c\psi \\ -\mu\psi' + c\psi \end{bmatrix}, \quad (3.80)$$

donde

$$f_{22}^2 = \frac{(\psi')^2 + 2\mu c\psi\psi' + \mu^2 c^2 \psi^2}{c^2 \alpha^2 (1 + \mu^2)^2},$$

$$f_{12}^2 = \frac{\mu^2 (\psi')^2 - 2\mu c\psi\psi' + c^2 \psi^2}{c^2 \alpha^2 (1 + \mu^2)^2}.$$

Assim,

$$\frac{f_{12}^2 + f_{22}^2}{2} = \frac{(\psi')^2 + c^2 \psi^2}{2c^2 \alpha^2 (1 + \mu^2)}. \quad (3.81)$$

Diferenciando (3.81), com respeito a z_0 , teremos

$$\left(\frac{f_{12}^2 + f_{22}^2}{2} \right)_{,z_0} = \frac{(\psi'' + c^2 \psi) \psi'}{c^2 \alpha^2 (1 + \mu^2)}. \quad (3.82)$$

Por conseguinte, substituindo (3.82) na expressão (3.79), obteremos

$$f_{32} = \frac{1}{c\alpha^2(1+\mu^2)} (\psi'' + c^2 \psi) z_1. \quad (3.83)$$

Mediante o uso das expressões (3.76) e (3.83), temos

$$\sum_{l=0}^1 \frac{f_{32,z_l}}{f_{31,z_1}} z_{l+1} = \frac{1}{c^2 \alpha^2 (1 + \mu^2)} [(\psi'' + c^2 \psi) z_2 + (\psi''' + c^2 \psi') z_1^2], \quad (3.84)$$

Além disso, mediante uso da primeira equação do sistema (3.78), temos

$$\frac{\delta \alpha (\mu f_{12} - f_{22})}{f_{31,z_1}} = -\frac{\delta \psi'}{c^2}. \quad (3.85)$$

Substituindo (3.84) e (3.85) em (3.69), obteremos

$$F = \frac{1}{c^2 \alpha^2 (1 + \mu^2)} [(\psi'' + c^2 \psi) z_2 + (\psi''' + c^2 \psi') z_1^2] - \frac{\delta \psi'}{c^2}. \quad (3.86)$$

Observe que na expressão (3.86) aparecem três parâmetros, a saber, os parâmetros c , α e μ . Com o objetivo de eliminar o parâmetro μ que aparece na expressão mencionada e torná-la mais simples, considere $\gamma \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $\gamma^2 := \alpha^2 (1 + \mu^2)$. Com isso, temos

$$\alpha = \frac{\sigma \gamma}{\sqrt{1 + \mu^2}}, \quad (3.87)$$

com $\gamma \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $\sigma = \pm 1$. Por conseguinte, a expressão (3.86) se reescreve como

$$F = \frac{1}{c^2 \gamma^2} [(\psi'' + c^2 \psi) z_2 + (\psi''' + c^2 \psi') z_1^2] - \frac{\delta \psi'}{c^2}. \quad (3.88)$$

Tendo em vista a validade das expressões (3.87), (3.76), (3.80), (3.83), (3.88), bem como que $f_{21} = \mu f_{11}$, $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$, e $z_{1,t} = F$, temos a seguinte configuração para a equação e as funções f_{ij} :

$$z_{1,t} = \frac{1}{c^2 \gamma^2} [(\psi'' + c^2 \psi) z_2 + (\psi''' + c^2 \psi') z_1^2] - \frac{\delta \psi'}{c^2}; \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} f_{11} &= \frac{\sigma \gamma}{\sqrt{1 + \mu^2}}, & f_{12} &= \frac{\sigma}{c \gamma \sqrt{1 + \mu^2}} (-\mu \psi' + c \psi), \\ f_{21} &= \mu f_{11}, & f_{22} &= \frac{\sigma}{c \gamma \sqrt{1 + \mu^2}} (\psi' + \mu c \psi), \\ f_{31} &= c z_1, & f_{32} &= \frac{1}{c \gamma^2} (\psi'' + c^2 \psi) z_1, \end{aligned} \quad (3.90)$$

com $\psi = \psi(z_0)$ uma função diferenciável que depende de z_0 , cumprindo $\psi' \neq 0$; $c, \gamma \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\sigma = \pm 1$ e $\delta = \pm 1$. Agora, com o intuito de deixar a equação (3.89) mais simplificada, seja $\phi = \phi(z_0)$ uma função diferenciável que depende de z_0 tal que

$$\phi = \frac{\psi}{c^2 \gamma^2}. \quad (3.91)$$

Note que, uma vez que $\psi' \neq 0$, temos $\phi' \neq 0$. Agora substituindo (3.91) em (3.89) e (3.90), obtemos, respectivamente,

$$z_{1,t} = (\phi'' + c^2\phi) z_2 + (\phi''' + c^2\phi') z_1^2 - \delta\gamma^2\phi', \quad (3.92)$$

e

$$\begin{aligned} f_{11} &= \frac{\sigma\gamma}{\sqrt{1+\mu^2}}, & f_{12} &= \frac{\sigma c\gamma}{\sqrt{1+\mu^2}} (-\mu\phi' + c\phi), \\ f_{21} &= \mu f_{11}, & f_{22} &= \frac{\sigma c\gamma}{\sqrt{1+\mu^2}} (\phi' + \mu c\phi), \\ f_{31} &= c z_1, & f_{32} &= c (\phi'' + c^2\phi) z_1, \end{aligned}$$

com $\phi' \neq 0$, com $\gamma \in \mathbb{R} - \{0\}$, $c \neq 0$ e $\sigma = \pm 1$. Escrevendo f_{12} , f_{21} e f_{22} em termos de f_{11} , obtemos a configuração do enunciado do teorema.

Agora iremos mostrar que $\phi'' \neq 0$. De fato, caso contrário, se $\phi'' = 0$, em um conjunto aberto e conexo, teremos $\phi = az_0 + b$, com $b \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, pois $\phi' \neq 0$. Por conseguinte, a equação (3.92) se reduzirá a

$$z_{1,t} = c^2 [(az_0 + b) z_2 + az_1^2] - \delta\gamma^2 a, \quad a \in \mathbb{R} - \{0\}. \quad (3.93)$$

Ora, mas a expressão (3.93) pode ser reescrita como

$$z_{1,t} = \frac{d}{dx} (c^2 (az_0 + b) z_1 - \delta\gamma^2 ax),$$

que por integração, com respeito a x , membro a membro, fornece

$$z_{0,t} = c^2 (az_0 + b) z_1 - \delta\gamma^2 ax + \tilde{c}, \quad (3.94)$$

sendo $\tilde{c}$ uma constante, todavia, observe que (3.94) recai numa equação do tipo $z_{0,t} = F(x, z_0, z_1)$, que não constitui o tipo de equação que estamos estudando. Como consequência disso, $\phi'' \neq 0$.

Além do que foi provado anteriormente, ϕ deve ser tal que $\phi'' + c^2\phi \neq 0$, pois, se ocorresse $\phi'' + c^2\phi = 0$, teríamos $F_{z_2} = 0$.

A recíproca resulta de uma computação direta.

□

3.4 Demonstração do Teorema 2.2

Demonstração. Considere uma equação diferencial parcial do tipo $z_{1,t} = F(z_0, z_1, z_2)$ que descreve superfícies pseudoesféricas, com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $i \in \{1, 2, 3\}$, tais que as funções f_{ij} satisfazem (2.1)-(2.5) e $f_{21} = \mu f_{11}$, $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$. Então

supondo que $f_{11,z_1} \neq 0$ e $E = 0$, em um conjunto aberto e conexo, temos a validade das expressões de (3.39) e (3.40), mediante o uso do Lema 3.2. Portanto, definindo $h = h(z_1)$, e $l = l(z_0, z_1)$ tais que $f_{11} = h$ e $l := \frac{f_{22}}{\mu}$ nas expressões de (3.39) e (3.40) e lembrando que $f_{21} = \mu f_{11}$, teremos a seguinte configuração:

$$\begin{aligned} z_{1,t} &= \frac{1}{h_{z_1}} \left(l_{z_1} z_2 + l_{z_0} z_1 + \frac{\sigma \mu a}{\sqrt{\mu^2 + 1}} h \right), \\ f_{11} &= h, \quad f_{12} = l + a, \\ f_{21} &= \mu h, \quad f_{22} = \mu l, \\ f_{31} &= \sigma \sqrt{\mu^2 + 1} h, \quad f_{32} = \sigma \sqrt{\mu^2 + 1} \left(l + \frac{a}{\mu^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

Com a finalidade de simplificar essas expressões, seja $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $b = \frac{\sigma \mu a}{\sqrt{\mu^2 + 1}}$.

Consequentemente, teremos $a = \frac{\sigma \sqrt{\mu^2 + 1}}{\mu} b$, donde a configuração anterior se converterá na seguinte:

$$z_{1,t} = \frac{1}{h_{z_1}} (l_{z_1} z_2 + l_{z_0} z_1 + b h) \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} f_{11} &= h, \quad f_{12} = l + \frac{\sigma \sqrt{\mu^2 + 1}}{\mu} b, \\ f_{21} &= \mu h, \quad f_{22} = \mu l, \\ f_{31} &= \sigma \sqrt{\mu^2 + 1} h, \quad f_{32} = \sigma \sqrt{\mu^2 + 1} l + \frac{b}{\mu}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Além disso, h deve satisfazer $h_{z_1 z_1} \neq 0$, do contrário, se $h_{z_1 z_1} = 0$, em um conjunto aberto e conexo, então $h(z_1) = \tilde{a} z_1 + \tilde{b}$, com $\tilde{b} \in \mathbb{R}$ e $\tilde{a} \in \mathbb{R} - \{0\}$, pois $h_{z_1} \neq 0$. Com isso, (3.95) se reduz a

$$z_{1,t} = \frac{l_{z_1} z_2 + l_{z_0} z_1}{\tilde{a}} + b z_1 + \frac{b \tilde{b}}{\tilde{a}}. \quad (3.97)$$

Ora, mas a equação (3.97) pode ser vista como

$$z_{1,t} = \frac{d}{dx} \left(\frac{l}{\tilde{a}} + \tilde{b} z_0 + \frac{\tilde{b} b x}{\tilde{a}} \right). \quad (3.98)$$

Integrando (3.98), membro a membro, com respeito a x , temos

$$z_{0,t} = \frac{l}{\tilde{a}} + \tilde{b} z_0 + \frac{\tilde{b} b x}{\tilde{a}} + c,$$

sendo c uma constante, mas observe que essa última equação se configura como sendo do

tipo $z_{0,t} = F(x, z_0, z_1)$, a qual não constitui o nosso objeto de estudo. Por essa razão, h deve ser tal que $h_{z_1 z_1} \neq 0$. Por outro lado, $l_{z_1} \neq 0$, do contrário, teríamos $F_{z_2} = 0$.

A recíproca resulta de uma computação direta. □

3.5 Demonstração do Teorema 2.3

Demonstração. A não existência de uma equação diferencial parcial do tipo $z_{1,t} = F(z_0, z_1, z_2)$ que descreve superfícies esféricas ($\delta = -1$), com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $i \in \{1, 2, 3\}$, tais que as funções f_{ij} satisfazem (2.1)-(2.5), com $f_{21} = \mu f_{11}$, $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f_{11, z_1} \neq 0$ e $E = 0$, em um conjunto aberto e conexo, resulta do Lema 3.2. □

3.6 Demonstração do Teorema 2.4

Demonstração. Observe que estamos nas condições do Lema 3.1. Portanto, tendo em vista que $E \neq 0$, temos a validade de (3.59) e (3.60) pelo Lema 3.3. Agora, uma vez que $P = 0$, em um conjunto aberto e conexo, e $f_{11, z_1} \neq 0$, temos $\left(\frac{f_{31, z_1}}{f_{11, z_1}}\right)_{, z_1} = 0$, em um conjunto aberto e conexo, donde

$$f_{31} = c f_{11} + a, \quad (3.99)$$

com $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, pois $E \neq 0$ e $c \in \mathbb{R}$. Além disso, como consequência de (3.60), obtemos

$$\frac{1}{2} \left(\frac{Q_{z_1}}{z_1 E} \right)_{, z_1} = 0, \quad (3.100)$$

em um conjunto aberto e conexo, sendo que E e Q estão definidos em (2.6) e (3.58), respectivamente. Integrando (3.100), com respeito a z_1 , temos $\frac{Q_{z_1}}{2z_1 E} = k$, para algum $k \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\frac{Q_{z_1}}{z_1 E} = 2k, \quad (3.101)$$

em que k é uma constante real. Portanto, resulta de (2.6), (3.58) e (3.99) que

$$[c^2 - \delta(\mu^2 + 1)] f_{11} + ac = akz_1.$$

Observe que se $c^2 - \delta(\mu^2 + 1) = 0$, então $c = kz_1$, que só faz sentido se $k = c = 0$, mas isso implica $\delta(\mu^2 + 1) = 0$, que é absurdo, pois $\delta = \pm 1$ e $\mu^2 + 1 > 0$. Logo $c^2 - \delta(\mu^2 + 1) \neq 0$, donde

$$f_{11} = \frac{a(kz_1 - c)}{c^2 - \delta(\mu^2 + 1)}, \quad (3.102)$$

em que $a, k, c \in \mathbb{R} - \{0\}$; $\delta = \pm 1$ e $c^2 - \delta(\mu^2 + 1) \neq 0$. Considerando $m = \frac{a}{c^2 - \delta(\mu^2 + 1)}$, podemos reescrever (3.102) como

$$f_{11} = m(kz_1 - c). \quad (3.103)$$

Substituindo (3.103) em (3.99), temos

$$f_{31} = cm(kz_1 - c) + a. \quad (3.104)$$

No que se segue, com o intuito de obter f_{22} , calcularemos algumas expressões auxiliares, as quais serão substituídas no sistema de equações (3.59). Com efeito, observe que, pelo uso de (3.103) e (3.104), temos as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} f_{11} - z_1 f_{11, z_1} &= m(kz_1 - c) - mkz_1 \\ &= mkz_1 - mc - mkz_1 \\ &= -mc, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \begin{vmatrix} f_{11, z_1} & f_{31, z_1} \\ f_{11} & f_{31} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} km & ckm \\ m(kz_1 - c) & cm(kz_1 - c) + a \end{vmatrix} \\ &= km[cm(kz_1 - c) + a] - cm^2k(kz_1 - c) \\ &= ckm^2(kz_1 - c) + akm - cm^2k^2z_1 + c^2m^2k \\ &= ck^2m^2z_1 - c^2km^2 + akm - cm^2k^2z_1 + c^2m^2k \\ &= akm. \end{aligned}$$

Logo, mediante o uso das últimas igualdades, teremos

$$\frac{z_1 f_{11, z_1}}{E} = \frac{z_1}{a}, \quad \frac{f_{11} - z_1 f_{11, z_1}}{E} = -\frac{c}{ak}. \quad (3.105)$$

Ademais,

$$\frac{f_{11,z_1}}{f_{11}} = \frac{k}{kz_1 - c}. \quad (3.106)$$

Portanto, substituindo as expressões (3.101), (3.103) e (3.106), bem como as expressões de (3.105) no sistema de equações (3.59), obteremos

$$\begin{cases} f_{22,z_0} = \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left[\frac{\mu z_1}{a} \psi''' - \psi'' + \mu k m (k z_1 - c) \psi' \right], \\ f_{22,z_1} = \frac{k}{k z_1 - c} \left[f_{22} + \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left(-\frac{\mu c}{a k} \psi'' + \psi' \right) \right]. \end{cases} \quad (3.107)$$

Integrando a primeira equação de (3.107), com respeito a z_0 , temos

$$f_{22} = \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left[\frac{\mu z_1}{a} \psi'' - \psi' + \mu k m (k z_1 - c) \psi \right] + T, \quad (3.108)$$

sendo $T = T(z_1)$ uma função diferenciável que depende de z_1 . Por outro lado, diferenciando (3.108), com respeito a z_1 , temos

$$f_{22,z_1} = \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left(\frac{\psi''}{a} + k^2 m \psi \right) + T_{z_1}. \quad (3.109)$$

Assim, substituindo (3.108) e (3.109) na segunda equação de (3.107), obteremos

$$\begin{aligned} \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left(\frac{\psi''}{a} + k^2 m \psi \right) + T_{z_1} &= \frac{k}{k z_1 - c} \left\{ \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left[\frac{\mu z_1}{a} \psi'' - \psi' + \mu k m (k z_1 - c) \psi \right] + T \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left(-\frac{\mu c}{a k} \psi'' + \psi' \right) \right\}. \end{aligned}$$

A expressão anterior pode ser reescrita como

$$\frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left(\frac{\psi''}{a} + k^2 m \psi \right) + T_{z_1} = \frac{k}{k z_1 - c} \left\{ \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left[\frac{\mu k z_1}{a k} \psi'' - \psi' + \mu k m (k z_1 - c) \psi - \frac{\mu c}{a k} \psi'' + \psi' \right] + T \right\}. \quad (3.110)$$

Unindo os termos semelhantes da expressão (3.110), temos

$$\frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left(\frac{\psi''}{a} + k^2 m \psi \right) + T_{z_1} = \frac{k}{k z_1 - c} \left\{ \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left[\frac{\mu (k z_1 - c)}{a k} \psi'' + \mu k m (k z_1 - c) \psi \right] + T \right\},$$

que equivale a

$$\frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left(\frac{\psi''}{a} + k^2 m \psi \right) + T_{z_1} = \frac{k}{k z_1 - c} \left\{ \frac{\mu^2 (k z_1 - c)}{\mu^2 + 1} \left(\frac{\psi''}{a k} + k m \psi \right) + T \right\},$$

donde

$$\frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left(\frac{\psi''}{a} + k^2 m \psi \right) + T_{z_1} = \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left(\frac{\psi''}{a} + k^2 m \psi \right) + \frac{k}{kz_1 - c} T.$$

Consequentemente

$$T_{z_1} = \frac{k}{kz_1 - c} T,$$

que por integração, com respeito a z_1 , fornece

$$T = b(kz_1 - c), \quad b \in \mathbb{R}. \quad (3.111)$$

Substituindo (3.111) em (3.108), obteremos

$$f_{22} = \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left[\frac{\mu z_1}{a} \psi'' - \psi' + \mu k m (kz_1 - c) \psi \right] + b(kz_1 - c). \quad (3.112)$$

Observe que a expressão (3.112) pode ser reescrita como

$$f_{22} = \left[\frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left(\frac{\psi''}{a} + m k^2 \psi \right) + b k \right] z_1 - \left[\frac{\mu (\psi' + \mu k m c \psi)}{\mu^2 + 1} + b c \right]. \quad (3.113)$$

De fato,

$$\begin{aligned} f_{22} &= \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left[\frac{\mu z_1}{a} \psi'' - \psi' + \mu k m (kz_1 - c) \psi \right] + b(kz_1 - c) \\ &= \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left[\mu \left(\frac{\psi''}{a} + m k^2 \psi \right) z_1 - \psi' - \mu k m c \psi \right] + b(kz_1 - c) \\ &= \left[\frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left(\frac{\psi''}{a} + m k^2 \psi \right) + b k \right] z_1 - \left[\frac{\mu (\psi' + \mu k m c \psi)}{\mu^2 + 1} + b c \right]. \end{aligned}$$

Com a finalidade de simplificar a expressão (3.113), seja $\phi = \phi(z_0)$ uma função diferenciável definida por $\phi = \frac{\mu \psi}{m k a (\mu^2 + 1)} + \frac{b}{a k^2 m^2 \mu}$. Assim, temos

$$\psi = \frac{m k a (\mu^2 + 1)}{\mu} \phi - \frac{(\mu^2 + 1) b}{k m \mu^2}. \quad (3.114)$$

Com isso, observe que as expressões em (3.113) se reduzem a

$$\begin{aligned} \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left(\frac{\psi''}{a} + m k^2 \psi \right) + b k &= \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left\{ \frac{m k (\mu^2 + 1)}{\mu} \phi'' + m k^2 \left[\frac{m k a (\mu^2 + 1)}{\mu} \phi - \frac{(\mu^2 + 1) b}{k m \mu^2} \right] \right\} + b k \\ &= \mu m k \phi'' + \mu m^2 k^3 a \phi - b k + b k \\ &= \mu m k (\phi'' + m a k^2 \phi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mu(\psi' + \mu kmc\psi)}{\mu^2 + 1} + bc &= \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left\{ \frac{mka(\mu^2 + 1)}{\mu} \phi' + \mu kmc \left[\frac{mka(\mu^2 + 1)}{\mu} \phi - \frac{(\mu^2 + 1)b}{km\mu^2} \right] \right\} + bc \\
&= mka\phi' + \mu acm^2 k^2 \phi - bc + bc \\
&= mka(\phi' + \mu cmk\phi).
\end{aligned}$$

Em síntese, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left(\frac{\psi''}{a} + mk^2\psi \right) + bk &= \mu mk(\phi'' + mak^2\phi), \\
\frac{\mu(\psi' + \mu kmc\psi)}{\mu^2 + 1} + bc &= mka(\phi' + \mu cmk\phi).
\end{aligned} \tag{3.115}$$

Por conseguinte, substituindo as expressões de (3.115) em (3.113), obteremos

$$f_{22} = mk[\mu(\phi'' + mak^2\phi)z_1 - a(\phi' + \mu cmk\phi)]. \tag{3.116}$$

Agora, no que se segue, com o intuito de obter F , calcularemos algumas expressões auxiliares. Com efeito, observe que, diferenciando (3.116), com respeito a z_1 e z_0 , temos, respectivamente,

$$\begin{aligned}
f_{22,z_1} &= mk\mu(\phi'' + mak^2\phi), \\
f_{22,z_0} &= mk[\mu(\phi''' + mak^2\phi')z_1 - a(\phi'' + \mu cmk\phi')],
\end{aligned}$$

donde

$$\frac{f_{22,z_1}z_2 + f_{22,z_0}z_1}{\mu} = mk \left[(\phi'' + mak^2\phi)z_2 + (\phi''' + mak^2\phi')z_1^2 - a \left(\frac{\phi''}{\mu} + cmk\phi' \right) z_1 \right].$$

Por outro lado, observe que, com o uso das expressões (3.104) e (3.114), temos

$$\begin{aligned}
\frac{\mu f_{31}\psi' + z_1\psi''}{\mu^2 + 1} &= \frac{\mu[cm(kz_1 - c) + a] \frac{mka(\mu^2 + 1)}{\mu} \phi' + z_1 \frac{mka(\mu^2 + 1)}{\mu} \phi''}{\mu^2 + 1} \\
&= [cm(kz_1 - c) + a] mka\phi' + z_1 \frac{mka}{\mu} \phi'' \\
&= mk \left[a(a - c^2m)\phi' + a \left(\frac{\phi''}{\mu} + cmk\phi' \right) z_1 \right].
\end{aligned}$$

Consequentemente

$$\frac{f_{22,z_1}z_2 + f_{22,z_0}z_1}{\mu} + \frac{\mu f_{31}\psi' + z_1\psi''}{\mu^2 + 1} = mk [(\phi'' + mak^2\phi)z_2 + (\phi''' + mak^2\phi')z_1^2 + a(a - c^2m)\phi'] . \quad (3.117)$$

Substituindo (3.103) e (3.117) em (3.11), obtemos

$$F = (\phi'' + mak^2\phi)z_2 + (\phi''' + mak^2\phi')z_1^2 + a(a - c^2m)\phi' . \quad (3.118)$$

No que se segue, obteremos as expressões para as funções f_{12} e f_{32} . Com efeito, substituindo (3.114) e (3.116) em (3.12), obteremos

$$f_{12} = mk [(\phi'' + mak^2\phi)z_1 + a(\mu\phi' - cmk\phi)] .$$

Por fim, com o intuito de obter f_{32} , calcularemos algumas expressões auxiliares. Com efeito, observe que, pelo uso de (3.114) e (3.116), temos

$$\begin{aligned} (\mu^2 + 1)f_{22} + \mu\psi' &= (\mu^2 + 1)mk [\mu(\phi'' + mak^2\phi)z_1 - a(\phi' + \mu cmk\phi)] + \mu \frac{mka(\mu^2 + 1)}{\mu} \phi' \\ &= mk(\mu^2 + 1) [\mu(\phi'' + mak^2\phi)z_1 - a(\phi' + \mu cmk\phi) + a\phi'] \\ &= mk(\mu^2 + 1) [\mu(\phi'' + mak^2\phi)z_1 - a\mu cmk\phi] \\ &= mk\mu(\mu^2 + 1) [(\phi'' + mak^2\phi)z_1 - acmk\phi] , \end{aligned}$$

isto é,

$$(\mu^2 + 1)f_{22} + \mu\psi' = mk\mu(\mu^2 + 1) [(\phi'' + mak^2\phi)z_1 - acmk\phi] . \quad (3.119)$$

Por conseguinte, pelo uso de (3.103), (3.114), (3.119) e (3.99), temos

$$\begin{aligned} [(\mu^2 + 1)f_{22} + \mu\psi']f_{31} - \mu^2\psi''z_1 &= mk\mu(\mu^2 + 1) [(\phi'' + mak^2\phi)z_1 - acmk\phi] (cf_{11} + a) \\ &\quad - \mu^2 \frac{mka(\mu^2 + 1)}{\mu} \phi''z_1 \\ &= mk\mu(\mu^2 + 1) \{ [(\phi'' + mak^2\phi)z_1 - acmk\phi] (cf_{11} + a) - a\phi''z_1 \} \\ &= mk\mu(\mu^2 + 1) \{ [(\phi'' + mak^2\phi)z_1 - acmk\phi] cf_{11} \\ &\quad + (mak^2\phi z_1 - acmk\phi)a \} \\ &= mk\mu(\mu^2 + 1) \{ [(\phi'' + mak^2\phi)z_1 - acmk\phi] cf_{11} + a^2kf_{11}\phi \} \\ &= mk\mu(\mu^2 + 1) [c(\phi'' + mak^2\phi)z_1 + ak(a - c^2m)\phi] f_{11} , \end{aligned}$$

isto é,

$$[(\mu^2 + 1) f_{22} + \mu \psi'] f_{31} - \mu^2 \psi'' z_1 = mk\mu (\mu^2 + 1) [c (\phi'' + mak^2 \phi) z_1 + ak (a - c^2 m) \phi] f_{11}. \quad (3.120)$$

Portanto, substituindo (3.120) na expressão de f_{32} , dada em (3.13), temos

$$f_{32} = mk [c (\phi'' + mak^2 \phi) z_1 + ak (a - c^2 m) \phi].$$

Relembrando que $m = \frac{a}{c^2 - \delta (\mu^2 + 1)}$, temos, em resumo, as seguintes expressões para a equação diferencial e as funções f_{ij} associadas:

$$z_{1,t} = \left[\phi'' + \frac{a^2 k^2}{c^2 - \delta (\mu^2 + 1)} \phi \right] z_2 + \left[\phi''' + \frac{a^2 k^2}{c^2 - \delta (\mu^2 + 1)} \phi' \right] z_1^2 - \frac{\delta a^2 (\mu^2 + 1)}{c^2 - \delta (\mu^2 + 1)} \phi', \quad (3.121)$$

$$f_{11} = \frac{a (kz_1 - c)}{c^2 - \delta (\mu^2 + 1)},$$

$$f_{12} = \frac{ak}{c^2 - \delta (\mu^2 + 1)} \left\{ \left[\phi'' + \frac{a^2 k^2}{c^2 - \delta (\mu^2 + 1)} \phi \right] z_1 + a\mu \phi' - \frac{a^2 ck}{c^2 - \delta (\mu^2 + 1)} \phi \right\},$$

$$f_{21} = \frac{\mu a (kz_1 - c)}{c^2 - \delta (\mu^2 + 1)},$$

$$f_{22} = \frac{ak}{c^2 - \delta (\mu^2 + 1)} \left\{ \mu \left[\phi'' + \frac{a^2 k^2}{c^2 - \delta (\mu^2 + 1)} \phi \right] z_1 - a\phi' - \frac{\mu a^2 ck}{c^2 - \delta (\mu^2 + 1)} \phi \right\},$$

$$f_{31} = \frac{ca (kz_1 - c)}{c^2 - \delta (\mu^2 + 1)} + a,$$

$$f_{32} = \frac{ak}{c^2 - \delta (\mu^2 + 1)} \left\{ c \left[\phi'' + \frac{a^2 k^2}{c^2 - \delta (\mu^2 + 1)} \phi \right] z_1 - \frac{\delta ka^2 (\mu^2 + 1)}{c^2 - \delta (\mu^2 + 1)} \phi \right\}, \quad (3.122)$$

em que $a, k \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\delta = \pm 1$; $c \in \mathbb{R}$ é tal que $c^2 - \delta (\mu^2 + 1) \neq 0$ e $\phi = \phi(z_0)$ é uma função diferenciável tal que $\phi' \neq 0$.

No que se segue, utilizaremos alguns procedimentos para eliminar parâmetros da equação (3.121). Inicialmente, introduziremos a seguinte notação:

$$\tilde{b} = c^2 - \delta (\mu^2 + 1). \quad (3.123)$$

Com essa notação, podemos notar que a equação (3.121) e as funções f_{ij} , expressas em (3.122), se reescrevem, respectivamente, como

$$z_{1,t} = \left(\phi'' + \frac{a^2 k^2}{\tilde{b}} \phi \right) z_2 + \left(\phi''' + \frac{a^2 k^2}{\tilde{b}} \phi' \right) z_1^2 - \frac{\delta a^2 (\mu^2 + 1)}{\tilde{b}} \phi', \quad (3.124)$$

$$\begin{aligned}
f_{11} &= \frac{a(kz_1 - c)}{\tilde{b}}, \\
f_{12} &= \frac{ak}{\tilde{b}} \left[\left(\phi'' + \frac{a^2 k^2}{\tilde{b}} \phi \right) z_1 + a\mu\phi' - \frac{a^2 ck}{\tilde{b}} \phi \right], \\
f_{21} &= \frac{\mu a(kz_1 - c)}{\tilde{b}}, \\
f_{22} &= \frac{ak}{\tilde{b}} \left[\mu \left(\phi'' + \frac{a^2 k^2}{\tilde{b}} \phi \right) z_1 - a\phi' - \frac{\mu a^2 ck}{\tilde{b}} \phi \right], \\
f_{31} &= \frac{ca(kz_1 - c)}{\tilde{b}} + a, \\
f_{32} &= \frac{ak}{\tilde{b}} \left[c \left(\phi'' + \frac{a^2 k^2}{\tilde{b}} \phi \right) z_1 - \frac{\delta k a^2 (\mu^2 + 1)}{\tilde{b}} \phi \right].
\end{aligned} \tag{3.125}$$

Definindo $\beta := \frac{a^2 k^2}{\tilde{b}}$, com $\tilde{b}$ dado conforme em (3.123), temos

$$a = \frac{\sigma \sqrt{\beta \tilde{b}}}{k}, \quad \sigma = \pm 1, \tag{3.126}$$

sendo $\beta \tilde{b} > 0$. Observe ainda que

$$\frac{a^2}{\tilde{b}} = \frac{\beta}{k^2}, \quad \frac{a}{\tilde{b}} = \frac{\sigma \beta}{k \sqrt{\beta \tilde{b}}}. \tag{3.127}$$

Consequentemente, substituindo (3.126) e (3.127) em (3.124) e (3.125), obteremos

$$z_{1,t} = (\phi'' + \beta \phi) z_2 + (\phi''' + \beta \phi') z_1 - \frac{\delta \beta (\mu^2 + 1)}{k^2} \phi', \tag{3.128}$$

$$\begin{aligned}
f_{11} &= \frac{\sigma\beta}{k\sqrt{\beta\tilde{b}}} (kz_1 - c), \\
f_{12} &= \frac{\sigma\beta}{\sqrt{\beta\tilde{b}}} \left[(\phi'' + \beta\phi) z_1 + \frac{\sigma\mu\sqrt{\beta\tilde{b}}}{k} \phi' - \frac{c\beta}{k} \phi \right], \\
f_{21} &= \frac{\sigma\mu\beta}{k\sqrt{\beta\tilde{b}}} (kz_1 - c), \\
f_{22} &= \frac{\sigma\beta}{\sqrt{\beta\tilde{b}}} \left[\mu(\phi'' + \beta\phi) z_1 - \frac{\sigma\sqrt{\beta\tilde{b}}}{k} \phi' - \frac{\mu c\beta}{k} \phi \right], \\
f_{31} &= \frac{\sigma c\beta}{k\sqrt{\beta\tilde{b}}} (kz_1 - c) + \frac{\sigma\sqrt{\beta\tilde{b}}}{k}, \\
f_{32} &= \frac{\sigma\beta}{\sqrt{\beta\tilde{b}}} \left[c(\phi'' + \beta\phi) z_1 - \frac{\delta\beta(\mu^2 + 1)}{k} \phi \right].
\end{aligned} \tag{3.129}$$

Definindo $\theta := \frac{u^2 + 1}{k^2}$, temos $k = \tilde{\sigma}\sqrt{\frac{\mu^2 + 1}{\theta}}$, com $\theta > 0$ e $\tilde{\sigma} = \pm 1$. Com isso, a equação (3.128) se reescreve como

$$z_{1,t} = (\phi'' + \beta\phi) z_2 + (\phi''' + \beta\phi') z_1^2 - \delta\beta\theta\phi'. \tag{3.130}$$

As expressões, obtidas em (3.129), podem simplesmente ser reescritas como

$$\begin{aligned}
f_{21} &= \mu f_{11}, & f_{31} &= c f_{11} + \frac{\sigma\sqrt{\beta\tilde{b}}}{k}, & f_{11} &= \frac{\sigma\beta}{k\sqrt{\beta\tilde{b}}} (kz_1 - c), \\
f_{12} &= \frac{\sigma\beta}{\sqrt{\beta\tilde{b}}} \left[(\phi'' + \beta\phi) z_1 + \frac{\sigma\mu\sqrt{\beta\tilde{b}}}{k} \phi' - \frac{c\beta}{k} \phi \right], \\
f_{22} &= \frac{\sigma\beta}{\sqrt{\beta\tilde{b}}} \left[\mu(\phi'' + \beta\phi) z_1 - \frac{\sigma\sqrt{\beta\tilde{b}}}{k} \phi' - \frac{\mu c\beta}{k} \phi \right], \\
f_{32} &= \frac{\sigma\beta}{\sqrt{\beta\tilde{b}}} \left[c(\phi'' + \beta\phi) z_1 - \frac{\delta\beta(\mu^2 + 1)}{k} \phi \right],
\end{aligned}$$

em que $\phi = \phi(z_0)$ é uma função diferenciável tal que $\phi' \neq 0$; $\theta > 0$, $\beta \neq 0$, $\delta = \pm 1$,

$k = \tilde{\sigma} \sqrt{\frac{\mu^2 + 1}{\theta}}$, $\tilde{b} = c^2 - \delta(\mu^2 + 1)$; c é tal que $\beta\tilde{b} > 0$; $\sigma = \pm 1$ e $\tilde{\sigma} = \pm 1$.

Além do que foi provado anteriormente, ϕ deve ser tal que $\phi'' \neq 0$, do contrário, caso seja $\phi'' = 0$, em um conjunto aberto e conexo, então $\phi = \bar{a}z_0 + \bar{b}$, com $\bar{b} \in \mathbb{R}$ e $\bar{a} \in \mathbb{R} - \{0\}$, pois $\phi' \neq 0$. Por conseguinte, a equação (3.130) se reduzirá a

$$z_{1,t} = \beta [(\bar{a}z_0 + \bar{b}) z_2 + \bar{a}z_1^2] - \delta\beta\theta\bar{a}, \quad \bar{a} \in \mathbb{R} - \{0\}. \quad (3.131)$$

Ora, mas a expressão (3.131) pode ser reescrita como

$$z_{1,t} = \frac{d}{dx} (\beta (\bar{a}z_0 + \bar{b}) z_1 - \delta\beta\theta\bar{a}x),$$

que por integração, com respeito a x , membro a membro, fornece

$$z_{0,t} = \beta (\bar{a}z_0 + \bar{b}) z_1 - \delta\beta\theta\bar{a}x + \bar{c}, \quad (3.132)$$

sendo $\bar{c}$ uma constante, mas observe que (3.132) recai numa equação do tipo $z_{0,t} = F(x, z_0, z_1)$, que não constitui o tipo de equação que estamos estudando. Por esse motivo, $\phi'' \neq 0$. Além disso, devemos ter $\phi'' + \beta\phi \neq 0$, do contrário, teríamos $F_{z_2} = 0$.

A recíproca resulta de uma computação direta.

□

3.7 Demonstração do Teorema 2.5

Demonstração. Observe que estamos nas condições do Lema 3.1. Portanto, tendo em vista que $E \neq 0$, temos a validade de (3.59) e (3.60) pelo Lema 3.3. Além disso, uma vez que $P \neq 0$, (3.60) equivale a

$$\frac{\psi'''}{\psi'} = \frac{-\frac{1}{2} \left(\frac{Q_{z_1}}{z_1 E} \right)_{,z_1}}{\frac{z_1 P}{E^2}}. \quad (3.133)$$

Como o membro esquerdo de (3.133) depende apenas de z_0 e o direito depende apenas de z_1 , temos

$$\psi''' = b\psi' \quad (3.134)$$

$$\frac{bz_1 P}{E^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{Q_{z_1}}{z_1 E} \right)_{,z_1}, \quad (3.135)$$

para algum $b \in \mathbb{R}$. Integrando a equação de (3.134), com respeito a z_0 , temos

$$\psi'' = b\psi + m, \quad b, m \in \mathbb{R}. \quad (3.136)$$

Agora resolveremos o sistema (3.59), restrito às condições anteriores. Com efeito, integrando a primeira equação do sistema (3.59), com respeito a z_0 , temos

$$f_{22} = \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left(\frac{\mu z_1 f_{11,z_1}}{E} \psi'' - \psi' + \frac{\mu f_{11} Q_{z_1}}{2 z_1 E} \psi \right) + T, \quad (3.137)$$

em que $T = T(z_1)$ é uma função diferenciável que depende de z_1 . Diferenciando (3.137), com respeito a z_1 , obtemos

$$f_{22,z_1} = \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left\{ \left[\frac{(f_{11,z_1} + z_1 f_{11,z_1 z_1}) E - E_{z_1} z_1 f_{11,z_1}}{E^2} \right] \psi'' + \frac{1}{2} \left[\frac{f_{11,z_1} Q_{z_1}}{z_1 E} + f_{11} \left(\frac{Q_{z_1}}{z_1 E} \right)_{,z_1} \right] \psi \right\} + T_{z_1}. \quad (3.138)$$

Ora, de acordo com (3.63), temos $(f_{11,z_1} + z_1 f_{11,z_1 z_1}) E - z_1 f_{11,z_1} E_{z_1} = f_{11,z_1} E + z_1 f_{11} P$. Substituindo essa relação em (3.138), temos

$$f_{22,z_1} = \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left\{ \left(\frac{f_{11,z_1}}{E} + \frac{z_1 f_{11} P}{E^2} \right) \psi'' + \frac{1}{2} \left[\frac{f_{11,z_1} Q_{z_1}}{z_1 E} + f_{11} \left(\frac{Q_{z_1}}{z_1 E} \right)_{,z_1} \right] \psi \right\} + T_{z_1}. \quad (3.139)$$

Substituindo (3.137) e (3.139) na segunda equação do sistema (3.59), obteremos

$$\begin{aligned} & \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left\{ \left(\frac{f_{11,z_1}}{E} + \frac{z_1 f_{11} P}{E^2} \right) \psi'' + \frac{1}{2} \left[\frac{f_{11,z_1} Q_{z_1}}{z_1 E} + f_{11} \left(\frac{Q_{z_1}}{z_1 E} \right)_{,z_1} \right] \psi \right\} + T_{z_1} = \\ & \frac{f_{11,z_1}}{f_{11}} \left\{ \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left(\frac{\mu z_1 f_{11,z_1}}{E} \psi'' - \psi' + \frac{\mu f_{11} Q_{z_1}}{2 z_1 E} \psi \right) + T + \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left[\mu \left(\frac{f_{11} - z_1 f_{11,z_1}}{E} \right) \psi'' + \psi' \right] \right\}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} & \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left\{ \left(\frac{f_{11,z_1}}{E} + \frac{z_1 f_{11} P}{E^2} \right) \psi'' + \frac{1}{2} \left[\frac{f_{11,z_1} Q_{z_1}}{z_1 E} + f_{11} \left(\frac{Q_{z_1}}{z_1 E} \right)_{,z_1} \right] \psi \right\} + T_{z_1} = \\ & \frac{f_{11,z_1}}{f_{11}} \left\{ \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left[\mu \left(\frac{z_1 f_{11,z_1} + f_{11} - z_1 f_{11,z_1}}{E} \right) \psi'' - \psi' + \psi' + \frac{\mu f_{11} Q_{z_1}}{2 z_1 E} \psi \right] + T \right\}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} & \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left\{ \left(\frac{f_{11,z_1}}{E} + \frac{z_1 f_{11} P}{E^2} \right) \psi'' + \frac{1}{2} \left[\frac{f_{11,z_1} Q_{z_1}}{z_1 E} + f_{11} \left(\frac{Q_{z_1}}{z_1 E} \right)_{,z_1} \right] \psi \right\} + T_{z_1} = \\ & \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left(\frac{f_{11,z_1}}{E} \psi'' + \frac{f_{11,z_1} Q_{z_1}}{2 z_1 E} \psi \right) + \frac{f_{11,z_1}}{f_{11}} T. \end{aligned}$$

Assim, temos

$$T_{z_1} - \frac{f_{11,z_1}}{f_{11}} T = -\frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left[\frac{z_1 P}{E^2} \psi'' + \frac{1}{2} \left(\frac{Q_{z_1}}{z_1 E} \right)_{,z_1} \psi \right] f_{11}. \quad (3.140)$$

Por fim, substituindo (3.135) e (3.136) em (3.140), obteremos

$$T_{z_1} - \frac{f_{11,z_1}}{f_{11}} T = -\frac{\mu^2 m z_1 P f_{11}}{(\mu^2 + 1) E^2}. \quad (3.141)$$

Agora, observe que a equação (3.135) nos sugere os casos $b = 0$ ou $b \neq 0$. Faremos eles separadamente conforme a seguir.

I) O caso em que $b \neq 0$.

Se $b \neq 0$, então (3.135) equivale a

$$\frac{z_1 P}{E^2} = -\frac{1}{2b} \left(\frac{Q_{z_1}}{z_1 E} \right)_{,z_1}. \quad (3.142)$$

Substituindo (3.142) em (3.141), obtemos

$$\left(\frac{T}{f_{11}} \right)_{,z_1} = \frac{\mu^2 m}{2(\mu^2 + 1)b} \left(\frac{Q_{z_1}}{z_1 E} \right)_{,z_1},$$

que por integração com respeito a z_1 , fornece

$$T = \left[\frac{\mu^2 m Q_{z_1}}{2(\mu^2 + 1)b z_1 E} + c \right] f_{11}, \quad c, m \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R} - \{0\}. \quad (3.143)$$

Substituindo (3.143) em (3.137), obteremos

$$f_{22} = \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left(\frac{\mu z_1 f_{11,z_1}}{E} \psi'' - \psi' + \frac{\mu f_{11} Q_{z_1}}{2 z_1 E} \psi \right) + \left[\frac{\mu^2 m Q_{z_1}}{2(\mu^2 + 1)b z_1 E} + c \right] f_{11},$$

que pode ser reescrita como

$$f_{22} = \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left(\frac{\mu z_1 f_{11,z_1}}{E} \psi'' - \psi' \right) + \left[\frac{\mu^2}{2(\mu^2 + 1)} \left(\psi + \frac{m}{b} \right) \frac{Q_{z_1}}{z_1 E} + c \right] f_{11}. \quad (3.144)$$

Pelo uso de (3.136), a expressão (3.144) se reescreve como

$$f_{22} = \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left[\frac{\mu z_1 f_{11,z_1}}{E} (b\psi + m) - \psi' \right] + \left[\frac{\mu^2}{2(\mu^2 + 1)} \left(\psi + \frac{m}{b} \right) \frac{Q_{z_1}}{z_1 E} + c \right] f_{11}, \quad (3.145)$$

com ψ satisfazendo (3.136). Com a finalidade de simplificar (3.145), definamos $\zeta = \zeta(z_0)$

tal que

$$\zeta = \psi + \frac{m}{b}. \quad (3.146)$$

Com isso, primeiro observe que (3.136) se reescreve como

$$\zeta'' - b\zeta = 0. \quad (3.147)$$

Portanto, a expressão (3.145), por sua vez, se reescreve como

$$f_{22} = \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left(\frac{bz_1 f_{11,z_1}}{E} + \frac{f_{11} Q_{z_1}}{2z_1 E} \right) \zeta - \frac{\mu \zeta'}{\mu^2 + 1} + c f_{11}, \quad (3.148)$$

com ζ satisfazendo (3.147).

Agora, no que se segue, com o intuito de obter F , calcularemos algumas expressões auxiliares. Com efeito, observe que, diferenciando (3.148), com respeito a z_1 , temos

$$f_{22,z_1} = \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left\{ b \left[\frac{(f_{11,z_1} + z_1 f_{11,z_1 z_1}) E - z_1 f_{11,z_1} E_{z_1}}{E^2} \right] + \frac{\frac{f_{11,z_1} Q_{z_1}}{z_1 E} + f_{11} \left(\frac{Q_{z_1}}{z_1 E} \right)_{,z_1}}{2} \right\} \zeta + c f_{11,z_1}. \quad (3.149)$$

Substituindo (3.63) em (3.149), temos

$$f_{22,z_1} = \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left\{ b \left(\frac{f_{11,z_1} E + z_1 f_{11} P}{E^2} \right) + \frac{1}{2} \left[\frac{f_{11,z_1} Q_{z_1}}{z_1 E} + f_{11} \left(\frac{Q_{z_1}}{z_1 E} \right)_{,z_1} \right] \right\} \zeta + c f_{11,z_1},$$

que simplificando pode ser reescrito como

$$f_{22,z_1} = \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left\{ f_{11,z_1} \left(\frac{b}{E} + \frac{Q_{z_1}}{2z_1 E} \right) + f_{11} \left[\frac{bz_1 P}{E^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{Q_{z_1}}{z_1 E} \right)_{,z_1} \right] \right\} \zeta + c f_{11,z_1}. \quad (3.150)$$

Substituindo (3.135) em (3.150) e simplificando a expressão resultante, obtemos

$$f_{22,z_1} = \left[\frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left(\frac{b}{E} + \frac{Q_{z_1}}{2z_1 E} \right) \zeta + c \right] f_{11,z_1}. \quad (3.151)$$

Por outro lado, diferenciando (3.148), com respeito a z_0 , temos

$$f_{22,z_0} = \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left(\frac{bz_1 f_{11,z_1}}{E} + \frac{f_{11} Q_{z_1}}{2z_1 E} \right) \zeta' - \frac{\mu \zeta''}{\mu^2 + 1}. \quad (3.152)$$

Substituindo (3.147) em (3.152), obtemos

$$f_{22,z_0} = \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left(\frac{bz_1 f_{11,z_1}}{E} + \frac{f_{11} Q_{z_1}}{2z_1 E} \right) \zeta' - \frac{b\mu\zeta}{\mu^2 + 1}. \quad (3.153)$$

Além disso, mediante o uso de (3.146) e (3.147), concluímos que

$$\frac{\mu f_{31} \psi' + z_1 \psi''}{\mu^2 + 1} = \frac{\mu f_{31} \zeta' + bz_1 \zeta}{\mu^2 + 1}. \quad (3.154)$$

Substituindo (3.151), (3.153) e (3.154) em (3.11), obteremos

$$F = \left[\frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left(\frac{b}{E} + \frac{Q_{z_1}}{2z_1 E} \right) \zeta + \frac{c}{\mu} \right] z_2 + \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left[\frac{b}{E} z_1^2 + \frac{1}{f_{11,z_1}} \left(\frac{f_{11} Q_{z_1}}{2E} + f_{31} \right) \right] \zeta', \quad (3.155)$$

com ζ satisfazendo (3.147).

No que se segue, obteremos a expressão de f_{12} . Com efeito, mediante o uso da expressão (3.146) e substituição de (3.148) em (3.12), temos

$$f_{12} = \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left(\frac{bz_1 f_{11,z_1}}{E} + \frac{f_{11} Q_{z_1}}{2z_1 E} \right) \zeta + \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \zeta' + \frac{cf_{11}}{\mu}. \quad (3.156)$$

Agora, com o intuito de obter f_{32} , calcularemos algumas expressões auxiliares. Com efeito, observe que, mediante o uso das expressões (3.146) e (3.148), temos

$$\begin{aligned} (\mu^2 + 1) f_{22} + \mu \psi' &= (\mu^2 + 1) \left[\frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left(\frac{bz_1 f_{11,z_1}}{E} + \frac{f_{11} Q_{z_1}}{2z_1 E} \right) \zeta - \frac{\mu \zeta'}{\mu^2 + 1} + cf_{11} \right] + \mu \zeta' \\ &= \mu^2 \left(\frac{bz_1 f_{11,z_1}}{E} + \frac{f_{11} Q_{z_1}}{2z_1 E} \right) \zeta - \mu \zeta' + c(\mu^2 + 1) f_{11} + \mu \zeta' \\ &= \mu^2 \left(\frac{bz_1 f_{11,z_1}}{E} + \frac{f_{11} Q_{z_1}}{2z_1 E} \right) \zeta + c(\mu^2 + 1) f_{11}, \end{aligned}$$

donde

$$\frac{[(\mu^2 + 1) f_{22} + \mu \psi'] f_{31}}{\mu (\mu^2 + 1) f_{11}} = \left[\frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left(\frac{bz_1 f_{11,z_1}}{f_{11} E} + \frac{Q_{z_1}}{2z_1 E} \right) \zeta + \frac{c}{\mu} \right] f_{31}. \quad (3.157)$$

Além disso, com o uso de (3.146) e (3.147), temos

$$\frac{\mu \psi'' z_1}{(\mu^2 + 1) f_{11}} = \frac{\mu bz_1 \zeta}{(\mu^2 + 1) f_{11}}. \quad (3.158)$$

Por outro lado, observe que a expressão que rege f_{32} , que é dada por (3.13), pode ser reescrita como

$$f_{32} = \left[\frac{(\mu^2 + 1) f_{22} + \mu \psi'}{\mu (\mu^2 + 1) f_{11}} \right] f_{31} - \frac{\mu \psi'' z_1}{(\mu^2 + 1) f_{11}}. \quad (3.159)$$

Por conseguinte, substituindo (3.157) e (3.158) em (3.159), obteremos

$$f_{32} = \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left[\frac{b z_1}{f_{11}} \left(\frac{f_{11, z_1} f_{31} - E}{E} \right) + \frac{f_{31} Q_{z_1}}{2 z_1 E} \right] \zeta + \frac{c f_{31}}{\mu}.$$

Relembrando que E é dado por (2.6), temos $f_{11, z_1} f_{31} - E = f_{11} f_{31, z_1}$, donde

$$f_{32} = \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left(\frac{b z_1 f_{31, z_1}}{E} + \frac{f_{31} Q_{z_1}}{2 z_1 E} \right) \zeta + \frac{c f_{31}}{\mu}. \quad (3.160)$$

Agora, no que se segue, definamos

$$f_{11} := h, \quad f_{31} := l, \quad (3.161)$$

com $h = h(z_1)$ e $l = l(z_1)$ sendo funções diferenciáveis que dependem de z_1 . Como consequência da notação estabelecida em (3.161), E e P , definidas em (2.6), e Q , definida em (3.58), se reescrevem, respectivamente, como

$$E = h_{z_1} l - h l_{z_1}, \quad (3.162)$$

$$P = h_{z_1} l_{z_1 z_1} - h_{z_1 z_1} l_{z_1}, \quad (3.163)$$

$$Q = l^2 - \delta (\mu^2 + 1) h^2. \quad (3.164)$$

Como consequência da hipótese de que $EP \neq 0$ e das expressões (3.162) e (3.163), temos

$$(h_{z_1} l - h l_{z_1}) (h_{z_1} l_{z_1 z_1} - h_{z_1 z_1} l_{z_1}) \neq 0. \quad (3.165)$$

Por outro lado, substituindo (3.162), (3.164) e (3.161) em (3.155), (3.156), (3.148) e (3.160), obteremos, respectivamente,

$$\begin{aligned} z_{1,t} = & \left\{ \frac{\mu}{(\mu^2 + 1) (h_{z_1} l - h l_{z_1})} \left[b + \frac{l l_{z_1} - \delta (\mu^2 + 1) h h_{z_1}}{z_1} \right] \zeta + \frac{c}{\mu} \right\} z_2 \\ & + \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left\{ \frac{b z_1^2}{h_{z_1} l - h l_{z_1}} + \frac{h [l l_{z_1} - \delta (\mu^2 + 1) h h_{z_1}]}{h_{z_1} (h_{z_1} l - h l_{z_1})} + \frac{l}{h_{z_1}} \right\} \zeta', \end{aligned} \quad (3.166)$$

$$\begin{aligned}
f_{12} &= \frac{\mu}{(\mu^2 + 1)(h_{z_1}l - hl_{z_1})} \left\{ bz_1 h_{z_1} + \frac{h[ll_{z_1} - \delta(\mu^2 + 1)hh_{z_1}]}{z_1} \right\} \zeta + \frac{\mu^2 \zeta'}{\mu^2 + 1} + \frac{ch}{\mu}, \\
f_{22} &= \frac{\mu^2}{(\mu^2 + 1)(h_{z_1}l - hl_{z_1})} \left\{ bz_1 h_{z_1} + \frac{h[ll_{z_1} - \delta(\mu^2 + 1)hh_{z_1}]}{z_1} \right\} \zeta - \frac{\mu \zeta'}{\mu^2 + 1} + ch, \\
f_{32} &= \frac{\mu}{(\mu^2 + 1)(h_{z_1}l - hl_{z_1})} \left\{ bz_1 l_{z_1} + \frac{l[ll_{z_1} - \delta(\mu^2 + 1)hh_{z_1}]}{z_1} \right\} \zeta + \frac{cl}{\mu}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, observe que

$$\begin{aligned}
\frac{h[ll_{z_1} - \delta(\mu^2 + 1)hh_{z_1}]}{h_{z_1}(h_{z_1}l - hl_{z_1})} + \frac{l}{h_{z_1}} &= \frac{h[ll_{z_1} - \delta(\mu^2 + 1)hh_{z_1}] + l(h_{z_1}l - hl_{z_1})}{h_{z_1}(h_{z_1}l - hl_{z_1})} \\
&= \frac{hll_{z_1} - \delta(\mu^2 + 1)h^2h_{z_1} + h_{z_1}l^2 - hll_{z_1}}{h_{z_1}(h_{z_1}l - hl_{z_1})} \\
&= \frac{l^2 - \delta(\mu^2 + 1)h^2}{h_{z_1}l - hl_{z_1}},
\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{h[ll_{z_1} - \delta(\mu^2 + 1)hh_{z_1}]}{h_{z_1}(h_{z_1}l - hl_{z_1})} + \frac{l}{h_{z_1}} = \frac{l^2 - \delta(\mu^2 + 1)h^2}{h_{z_1}l - hl_{z_1}}. \quad (3.167)$$

Por conseguinte, substituindo (3.167) em (3.166), temos

$$\begin{aligned}
z_{1,t} &= \left\{ \frac{\mu}{(\mu^2 + 1)(h_{z_1}l - hl_{z_1})} \left[b + \frac{ll_{z_1} - \delta(\mu^2 + 1)hh_{z_1}}{z_1} \right] \zeta + \frac{c}{\mu} \right\} z_2 \\
&\quad + \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left[\frac{bz_1^2 + l^2 - \delta(\mu^2 + 1)h^2}{h_{z_1}l - hl_{z_1}} \right] \zeta'.
\end{aligned}$$

Além disso, para assegurar que $F_{z_2} \neq 0$, deve-se ser requerido que

$$\frac{\mu}{(\mu^2 + 1)(h_{z_1}l - hl_{z_1})} \left[b + \frac{ll_{z_1} - \delta(\mu^2 + 1)hh_{z_1}}{z_1} \right] \zeta + \frac{c}{\mu} \neq 0.$$

Por fim, substituindo (3.162), (3.163) e (3.164) em (3.142), temos

$$\frac{z_1(h_{z_1}l_{z_1z_1} - h_{z_1z_1}l_{z_1})}{(h_{z_1}l - hl_{z_1})^2} = -\frac{1}{b} \left[\frac{ll_{z_1} - \delta(\mu^2 + 1)hh_{z_1}}{z_1(h_{z_1}l - hl_{z_1})} \right]_{,z_1}.$$

II) O caso em que $b = 0$.

Se $b = 0$, então a equação (3.135) se reescreve simplesmente como $\frac{1}{2} \left(\frac{Q_{z_1}}{z_1 E} \right)_{,z_1} = 0$, em um conjunto aberto e conexo. Integrando essa última expressão com respeito a z_1 , obtemos $\frac{Q_{z_1}}{2z_1 E} = k$, para algum $k \in \mathbb{R}$, donde

$$Q_{z_1} = 2kz_1E, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (3.168)$$

Além disso, resulta da expressão (3.136) que

$$\psi(z_0) = \frac{m}{2}z_0^2 + az_0 + c, \quad (3.169)$$

sendo $c \in \mathbb{R}$ e $a, m \in \mathbb{R}$ tais que $a^2 + m^2 \neq 0$, pois $\psi' \neq 0$. Ademais, a equação (3.141) pode ser reescrita como

$$\left(\frac{T}{f_{11}} \right)_{,z_1} = -\frac{\mu^2 m z_1 P}{(\mu^2 + 1) E^2}.$$

Integrando essa última expressão, com respeito a z_1 , temos $\frac{T}{f_{11}} + \eta = -\frac{\mu^2 m}{\mu^2 + 1} \int \frac{z_1 P}{E^2} dz_1$, $\eta \in \mathbb{R}$, isto é,

$$T = -\left(\frac{\mu^2 m}{\mu^2 + 1} \int \frac{z_1 P}{E^2} dz_1 + \eta \right) f_{11}, \quad \eta \in \mathbb{R}. \quad (3.170)$$

Mediante o uso de (3.170), (3.169) e (3.168), a expressão (3.137) se torna

$$\begin{aligned} f_{22} = & \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left[\frac{\mu m z_1 f_{11,z_1}}{E} - (m z_0 + a) + \mu k \left(\frac{m}{2} z_0^2 + a z_0 + c \right) f_{11} \right] \\ & - \left(\frac{\mu^2 m}{\mu^2 + 1} \int \frac{z_1 P}{E^2} dz_1 + \eta \right) f_{11}. \end{aligned} \quad (3.171)$$

Agora, no que se segue, com o intuito de obter F , calcularemos algumas expressões auxiliares. Com efeito, observe que, diferenciando (3.171), com respeito a z_1 , temos

$$\begin{aligned} f_{22,z_1} = & \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left\{ \mu m \left[\frac{(f_{11,z_1} + z_1 f_{11,z_1 z_1}) E - z_1 f_{11,z_1} E_{z_1}}{E^2} \right] + \mu k \left(\frac{m}{2} z_0^2 + a z_0 + c \right) f_{11,z_1} \right\} \\ & - \left[\frac{\mu^2 m z_1 f_{11} P}{(\mu^2 + 1) E^2} + \left(\frac{\mu^2 m}{\mu^2 + 1} \int \frac{z_1 P}{E^2} dz_1 + \eta \right) f_{11,z_1} \right]. \end{aligned} \quad (3.172)$$

Substituindo (3.63) em (3.172), obtemos

$$\begin{aligned} f_{22,z_1} = & \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left\{ \mu m \left(\frac{f_{11,z_1} E + z_1 f_{11} P}{E^2} \right) + \mu k \left(\frac{m}{2} z_0^2 + a z_0 + c \right) f_{11,z_1} \right\} \\ & - \left[\frac{\mu^2 m z_1 f_{11} P}{(\mu^2 + 1) E^2} + \left(\frac{\mu^2 m}{\mu^2 + 1} \int \frac{z_1 P}{E^2} dz_1 + \eta \right) f_{11,z_1} \right], \end{aligned}$$

ou seja,

$$f_{22,z_1} = \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left[\frac{m f_{11,z_1}}{E} + k \left(\frac{m}{2} z_0^2 + a z_0 + c \right) f_{11,z_1} \right] - \left(\frac{\mu^2 m}{\mu^2 + 1} \int \frac{z_1 P}{E^2} dz_1 + \eta \right) f_{11,z_1},$$

donde

$$f_{22,z_1} = \left\{ \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \left[\frac{m}{E} + k \left(\frac{m}{2} z_0^2 + a z_0 + c \right) \right] - \left(\frac{\mu^2 m}{\mu^2 + 1} \int \frac{z_1 P}{E^2} dz_1 + \eta \right) \right\} f_{11,z_1}. \quad (3.173)$$

Além disso, diferenciando (3.171), com respeito a z_0 , temos

$$f_{22,z_0} = \frac{\mu [\mu k (m z_0 + a) f_{11} - m]}{\mu^2 + 1}. \quad (3.174)$$

Por conseguinte, pelo uso de (3.173) e (3.174), temos

$$\begin{aligned} \frac{f_{22,z_1} z_2 + f_{22,z_0} z_1}{\mu} &= \left\{ \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left[\frac{m}{E} + k \left(\frac{m}{2} z_0^2 + a z_0 + c \right) \right] - \left(\frac{\mu m}{\mu^2 + 1} \int \frac{z_1 P}{E^2} dz_1 + \frac{\eta}{\mu} \right) \right\} f_{11,z_1} z_2 \\ &\quad + \frac{\mu k z_1 (m z_0 + a) f_{11} - m z_1}{\mu^2 + 1}. \end{aligned} \quad (3.175)$$

Por outro lado, com o uso de (3.169), podemos concluir que

$$\frac{\mu f_{31} \psi' + z_1 \psi''}{\mu^2 + 1} = \frac{\mu (m z_0 + a) f_{31} + m z_1}{\mu^2 + 1}. \quad (3.176)$$

Substituindo (3.175) e (3.176) em (3.11), obteremos

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left[\frac{m}{E} + k \left(\frac{m}{2} z_0^2 + a z_0 + c \right) \right] - \left(\frac{\mu m}{\mu^2 + 1} \int \frac{z_1 P}{E^2} dz_1 + \frac{\eta}{\mu} \right) \right\} z_2 \\ &\quad + \frac{\mu (m z_0 + a) (k z_1 f_{11} + f_{31})}{(\mu^2 + 1) f_{11,z_1}}. \end{aligned} \quad (3.177)$$

No que se segue, obteremos a expressão da função f_{12} . Com efeito, substituindo as expressões (3.171) e (3.169) em (3.12), obteremos

$$\begin{aligned} f_{12} &= \frac{1}{\mu^2 + 1} \left[\frac{\mu m z_1 f_{11,z_1}}{E} - (m z_0 + a) + \mu k \left(\frac{m}{2} z_0^2 + a z_0 + c \right) f_{11} \right] \\ &\quad - \left(\frac{\mu m}{\mu^2 + 1} \int \frac{z_1 P}{E^2} dz_1 + \frac{\eta}{\mu} \right) f_{11} + m z_0 + a. \end{aligned} \quad (3.178)$$

Agora, com o intuito de obter f_{32} , calcularemos algumas expressões auxiliares. Com

feito, observe que, mediante o uso das expressões (3.169) e (3.171), temos

$$\begin{aligned}
(\mu^2 + 1) f_{22} + \mu\psi' &= (\mu^2 + 1) \left\{ \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left[\frac{\mu m z_1 f_{11, z_1}}{E} - (m z_0 + a) + \mu k \left(\frac{m}{2} z_0^2 + a z_0 + c \right) f_{11} \right] \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\mu^2 m}{\mu^2 + 1} \int \frac{z_1 P}{E^2} dz_1 + \eta \right) f_{11} \right\} + \mu (m z_0 + a) \\
&= \mu \left[\frac{\mu m z_1 f_{11, z_1}}{E} - (m z_0 + a) + \mu k \left(\frac{m}{2} z_0^2 + a z_0 + c \right) f_{11} \right] \\
&\quad - \left(\mu^2 m \int \frac{z_1 P}{E^2} dz_1 + (\mu^2 + 1) \eta \right) f_{11} + \mu (m z_0 + a) \\
&= \mu \left[\frac{\mu m z_1 f_{11, z_1}}{E} + \mu k \left(\frac{m}{2} z_0^2 + a z_0 + c \right) f_{11} \right] \\
&\quad - \left(\mu^2 m \int \frac{z_1 P}{E^2} dz_1 + (\mu^2 + 1) \eta \right) f_{11} \\
&= \mu (\mu^2 + 1) f_{11} \left\{ \frac{1}{\mu^2 + 1} \left[\frac{\mu m z_1 f_{11, z_1}}{f_{11} E} + \mu k \left(\frac{m}{2} z_0^2 + a z_0 + c \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\mu m}{\mu^2 + 1} \int \frac{z_1 P}{E^2} dz_1 + \frac{\eta}{\mu} \right) \right\},
\end{aligned}$$

donde

$$\frac{(\mu^2 + 1) f_{22} + \mu\psi'}{\mu (\mu^2 + 1) f_{11}} = \frac{1}{\mu^2 + 1} \left[\frac{\mu m z_1 f_{11, z_1}}{f_{11} E} + \mu k \left(\frac{m}{2} z_0^2 + a z_0 + c \right) \right] - \left(\frac{\mu m}{\mu^2 + 1} \int \frac{z_1 P}{E^2} dz_1 + \frac{\eta}{\mu} \right). \quad (3.179)$$

Agora observe que (3.13) pode ser reescrita como

$$f_{32} = \left[\frac{(\mu^2 + 1) f_{22} + \mu\psi'}{\mu (\mu^2 + 1) f_{11}} \right] f_{31} - \frac{\mu\psi'' z_1}{(\mu^2 + 1) f_{11}}. \quad (3.180)$$

Substituindo (3.179) em (3.180), bem como relembrando (3.169), obteremos

$$f_{32} = \left\{ \frac{1}{\mu^2 + 1} \left[\frac{\mu m z_1 f_{11, z_1}}{f_{11} E} + \mu k \left(\frac{m}{2} z_0^2 + a z_0 + c \right) \right] - \left(\frac{\mu m}{\mu^2 + 1} \int \frac{z_1 P}{E^2} dz_1 + \frac{\eta}{\mu} \right) \right\} f_{31} - \frac{\mu m z_1}{(\mu^2 + 1) f_{11}},$$

que pode ser visto também como

$$f_{32} = \left[\frac{\mu k}{\mu^2 + 1} \left(\frac{m}{2} z_0^2 + a z_0 + c \right) - \left(\frac{\mu m}{\mu^2 + 1} \int \frac{z_1 P}{E^2} dz_1 + \frac{\eta}{\mu} \right) \right] f_{31} + \frac{\mu m z_1 f_{11, z_1} f_{31}}{(\mu^2 + 1) f_{11} E} - \frac{\mu m z_1}{(\mu^2 + 1) f_{11}},$$

isto é,

$$f_{32} = \left[\frac{\mu k}{\mu^2 + 1} \left(\frac{m}{2} z_0^2 + a z_0 + c \right) - \left(\frac{\mu m}{\mu^2 + 1} \int \frac{z_1 P}{E^2} dz_1 + \frac{\eta}{\mu} \right) \right] f_{31} + \frac{\mu m}{\mu^2 + 1} \left(\frac{f_{11, z_1} f_{31} - E}{E} \right) \frac{z_1}{f_{11}}.$$

Tendo em vista, portanto, que $f_{11, z_1} f_{31} - E = f_{11} f_{31, z_1}$, a expressão anterior se reescreve tão somente como

$$f_{32} = \left[\frac{\mu k}{\mu^2 + 1} \left(\frac{m}{2} z_0^2 + a z_0 + c \right) - \left(\frac{\mu m}{\mu^2 + 1} \int \frac{z_1 P}{E^2} dz_1 + \frac{\eta}{\mu} \right) \right] f_{31} + \frac{\mu m z_1 f_{31, z_1}}{(\mu^2 + 1) E}. \quad (3.181)$$

Observe que as expressões (3.177), (3.171) e (3.178) podem ser escritas, respectivamente, como

$$F = \left\{ \frac{\mu m}{(\mu^2 + 1) E} + \frac{\mu k}{\mu^2 + 1} \left(\frac{m}{2} z_0^2 + a z_0 + c \right) - \left(\frac{\mu m}{\mu^2 + 1} \int \frac{z_1 P}{E^2} dz_1 + \frac{\eta}{\mu} \right) \right\} z_2 + \frac{\mu (m z_0 + a) (k z_1 f_{11} + f_{31})}{(\mu^2 + 1) f_{11, z_1}}. \quad (3.182)$$

$$f_{22} = \mu \left[\frac{\mu k}{\mu^2 + 1} \left(\frac{m}{2} z_0^2 + a z_0 + c \right) - \left(\frac{\mu m}{\mu^2 + 1} \int \frac{z_1 P}{E^2} dz_1 + \frac{\eta}{\mu} \right) \right] f_{11} + \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left[\frac{\mu m z_1 f_{11, z_1}}{E} - (m z_0 + a) \right], \quad (3.183)$$

$$f_{12} = \left[\frac{\mu k}{\mu^2 + 1} \left(\frac{m}{2} z_0^2 + a z_0 + c \right) - \left(\frac{\mu m}{\mu^2 + 1} \int \frac{z_1 P}{E^2} dz_1 + \frac{\eta}{\mu} \right) \right] f_{11} + \frac{1}{\mu^2 + 1} \left[\frac{\mu m z_1 f_{11, z_1}}{E} + \mu^2 (m z_0 + a) \right]. \quad (3.184)$$

Definindo f_{11} e f_{31} conforme em (3.161), obtemos das definições de E , P e Q dadas, respectivamente, em (2.6) e (3.58), as expressões (3.162), (3.163) e (3.164) e, além disso, temos a veracidade de (3.165), visto que $EP \neq 0$, por hipótese. Substituindo (3.161), (3.162) e (3.163) em (3.182), (3.184), (3.183) e (3.181), obteremos, respectivamente,

$$z_{1,t} = \left\{ \frac{\mu m}{(\mu^2 + 1) (h_{z_1} l - h l_{z_1})} + \frac{\mu k}{\mu^2 + 1} \left(\frac{m}{2} z_0^2 + a z_0 + c \right) - \left[\frac{\mu m}{\mu^2 + 1} \int \frac{z_1 (h_{z_1} l_{z_1 z_1} - h_{z_1 z_1} l_{z_1})}{(h_{z_1} l - h l_{z_1})^2} dz_1 + \frac{\eta}{\mu} \right] \right\} z_2 + \frac{\mu (m z_0 + a) (k z_1 h + l)}{(\mu^2 + 1) h_{z_1}},$$

$$f_{12} = \left\{ \frac{\mu k}{\mu^2 + 1} \left(\frac{m}{2} z_0^2 + a z_0 + c \right) - \left[\frac{\mu m}{\mu^2 + 1} \int \frac{z_1 (h_{z_1} l_{z_1 z_1} - h_{z_1 z_1} l_{z_1})}{(h_{z_1} l - h l_{z_1})^2} dz_1 + \frac{\eta}{\mu} \right] \right\} h + \frac{1}{\mu^2 + 1} \left[\frac{\mu m z_1 h_{z_1}}{h_{z_1} l - h l_{z_1}} + \mu^2 (m z_0 + a) \right],$$

$$f_{22} = \mu \left\{ \frac{\mu k}{\mu^2 + 1} \left(\frac{m}{2} z_0^2 + a z_0 + c \right) - \left[\frac{\mu m}{\mu^2 + 1} \int \frac{z_1 (h_{z_1} l_{z_1 z_1} - h_{z_1 z_1} l_{z_1})}{(h_{z_1} l - h l_{z_1})^2} dz_1 + \frac{\eta}{\mu} \right] \right\} h \\ + \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left[\frac{\mu m z_1 h_{z_1}}{h_{z_1} l - h l_{z_1}} - (m z_0 + a) \right],$$

$$f_{32} = \left[\frac{\mu k}{\mu^2 + 1} \left(\frac{m}{2} z_0^2 + a z_0 + c \right) - \left(\frac{\mu m}{\mu^2 + 1} \int \frac{z_1 (h_{z_1} l_{z_1 z_1} - h_{z_1 z_1} l_{z_1})}{(h_{z_1} l - h l_{z_1})^2} dz_1 + \frac{\eta}{\mu} \right) \right] l \\ + \frac{\mu m z_1 l_{z_1}}{(\mu^2 + 1) (h_{z_1} l - h l_{z_1})}.$$

Considerando $W = \frac{\mu k}{\mu^2 + 1} \left(\frac{m}{2} z_0^2 + a z_0 + c \right) - \left[\frac{\mu m}{\mu^2 + 1} \int \frac{z_1 (h_{z_1} l_{z_1 z_1} - h_{z_1 z_1} l_{z_1})}{(h_{z_1} l - h l_{z_1})^2} dz_1 + \frac{\eta}{\mu} \right]$, podemos reescrever as expressões anteriores como

$$z_{1,t} = \left[W + \frac{\mu m}{(\mu^2 + 1) (h_{z_1} l - h l_{z_1})} \right] z_2 + \frac{\mu (m z_0 + a) (k z_1 h + l)}{(\mu^2 + 1) h_{z_1}},$$

$$f_{12} = h W + \frac{\mu m z_1 h_{z_1}}{(\mu^2 + 1) (h_{z_1} l - h l_{z_1})} + \frac{\mu^2 (m z_0 + a)}{\mu^2 + 1},$$

$$f_{22} = \mu \left[h W + \frac{\mu m z_1 h_{z_1}}{(\mu^2 + 1) (h_{z_1} l - h l_{z_1})} \right] - \frac{\mu (m z_0 + a)}{\mu^2 + 1},$$

$$f_{32} = l W + \frac{\mu m z_1 l_{z_1}}{(\mu^2 + 1) (h_{z_1} l - h l_{z_1})}.$$

Além disso,

$$W + \frac{\mu m}{(\mu^2 + 1) (h_{z_1} l - h l_{z_1})} \neq 0,$$

do contrário, $F_{z_2} = 0$. Por fim, mediante o uso de (3.162) e (3.164), podemos reescrever (3.168) conforme

$$[l^2 - \delta (\mu^2 + 1) h^2]_{,z_1} = 2k z_1 (h_{z_1} l - h l_{z_1}), \quad k \in \mathbb{R}.$$

A recíproca resulta de uma computação direta.

□

3.8 Demonstração do Corolário 2.1

Demonstração. Se $k = 0$, então (2.12) e (2.13) se reduzem a, respectivamente,

$$W = - \left[\frac{\mu m}{\mu^2 + 1} \int \frac{z_1 (h_{z_1} l_{z_1 z_1} - h_{z_1 z_1} l_{z_1})}{(h_{z_1} l - h l_{z_1})^2} dz_1 + \frac{\eta}{\mu} \right], \quad (3.185)$$

$$[l^2 - \delta (\mu^2 + 1) h^2]_{,z_1} = 0, \quad (3.186)$$

em um conjunto aberto e conexo. Integrando a equação (3.186), com respeito a z_1 , temos $l^2 - \delta (\mu^2 + 1) h^2 = \nu$, com ν sendo uma constante real. Assim, temos então

$$l = \sigma \sqrt{\delta (\mu^2 + 1) h^2 + \nu}, \quad \sigma = \pm 1, \quad (3.187)$$

com ν sendo uma constante real, $\delta = \pm 1$ e $h = h(z_1)$ tal que

$$\delta (\mu^2 + 1) h^2 + \nu > 0. \quad (3.188)$$

A desigualdade (3.188) é, de fato, estrita, pois se ocorresse a igualdade $\delta (\mu^2 + 1) h^2 + \nu = 0$, então h seria constante e isso violaria tanto a hipótese de que $h_{z_1} \neq 0$ quanto a hipótese de que $l_{z_1} \neq 0$.

Por outro lado, observe que

$$\begin{aligned} h_{z_1} l - h l_{z_1} &= \sigma h_{z_1} \sqrt{\delta (\mu^2 + 1) h^2 + \nu} - \frac{\sigma \delta (\mu^2 + 1) h^2 h_{z_1}}{\sqrt{\delta (\mu^2 + 1) h^2 + \nu}} \\ &= \sigma \left[\sqrt{\delta (\mu^2 + 1) h^2 + \nu} - \frac{\delta (\mu^2 + 1) h^2}{\sqrt{\delta (\mu^2 + 1) h^2 + \nu}} \right] h_{z_1} \\ &= \sigma \left[\frac{\delta (\mu^2 + 1) h^2 + \nu - \delta (\mu^2 + 1) h^2}{\sqrt{\delta (\mu^2 + 1) h^2 + \nu}} \right] h_{z_1} \\ &= \frac{\sigma \nu h_{z_1}}{\sqrt{\delta (\mu^2 + 1) h^2 + \nu}}, \end{aligned}$$

donde

$$h_{z_1} l - h l_{z_1} = \frac{\sigma \nu h_{z_1}}{\sqrt{\delta (\mu^2 + 1) h^2 + \nu}}. \quad (3.189)$$

Como $h_{z_1} l - h l_{z_1} \neq 0$, devemos ter, na verdade, $\nu \in \mathbb{R} - \{0\}$. Além do exposto anteriormente, observe também que

$$\begin{aligned}
h_{z_1} l_{z_1 z_1} - h_{z_1 z_1} l_{z_1} &= h_{z_1} \left\{ \frac{\sigma \delta (\mu^2 + 1) \nu h_{z_1}^2}{[\delta (\mu^2 + 1) h^2 + \nu]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\sigma \delta (\mu^2 + 1) h h_{z_1 z_1}}{\sqrt{\delta (\mu^2 + 1) h^2 + \nu}} \right\} - h_{z_1 z_1} \left\{ \frac{\sigma \delta (\mu^2 + 1) h h_{z_1}}{\sqrt{\delta (\mu^2 + 1) h^2 + \nu}} \right\} \\
&= \sigma \delta (\mu^2 + 1) \left\{ \frac{\nu h_{z_1}^3}{[\delta (\mu^2 + 1) h^2 + \nu]^{\frac{3}{2}}} + \frac{h h_{z_1} h_{z_1 z_1} - h h_{z_1} h_{z_1 z_1}}{\sqrt{\delta (\mu^2 + 1) h^2 + \nu}} \right\} \\
&= \frac{\sigma \delta (\mu^2 + 1) \nu h_{z_1}^3}{[\delta (\mu^2 + 1) h^2 + \nu]^{\frac{3}{2}}},
\end{aligned}$$

donde

$$h_{z_1} l_{z_1 z_1} - h_{z_1 z_1} l_{z_1} = \frac{\sigma \delta (\mu^2 + 1) \nu h_{z_1}^3}{[\delta (\mu^2 + 1) h^2 + \nu]^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.190)$$

Agora, substituindo (3.189) e (3.190) em (3.185), teremos

$$W = - \left[\frac{\sigma \delta \mu m}{\nu} \int \frac{z_1 h_{z_1}}{\sqrt{\delta (\mu^2 + 1) h^2 + \nu}} dz_1 + \frac{\eta}{\mu} \right]. \quad (3.191)$$

De fato, substituindo (3.189) e (3.190) em (3.185), temos

$$\begin{aligned}
W &= - \left[\frac{\mu m}{\mu^2 + 1} \int \frac{\sigma \delta (\mu^2 + 1) z_1 h_{z_1}}{\nu \sqrt{\delta (\mu^2 + 1) h^2 + \nu}} dz_1 + \frac{\eta}{\mu} \right] \\
&= - \left[\frac{\sigma \delta (\mu^2 + 1) \mu m}{\nu (\mu^2 + 1)} \int \frac{z_1 h_{z_1}}{\sqrt{\delta (\mu^2 + 1) h^2 + \nu}} dz_1 + \frac{\eta}{\mu} \right] \\
&= - \left[\frac{\sigma \delta \mu m}{\nu} \int \frac{z_1 h_{z_1}}{\sqrt{\delta (\mu^2 + 1) h^2 + \nu}} dz_1 + \frac{\eta}{\mu} \right].
\end{aligned}$$

Considerando $T = \delta (\mu^2 + 1) h^2 + \nu$, podemos reescrever as expressões (3.189), (3.187) e (3.191), respectivamente, como

$$h_{z_1} l - h l_{z_1} = \frac{\sigma \nu h_{z_1}}{\sqrt{T}}. \quad (3.192)$$

$$l = \sigma \sqrt{T}, \quad \sigma = \pm 1, \quad (3.193)$$

$$W = - \left[\frac{\sigma \delta \mu m}{\nu} \int \frac{z_1 h_{z_1}}{\sqrt{T}} dz_1 + \frac{\eta}{\mu} \right]. \quad (3.194)$$

Por conseguinte, substituindo as expressões ((3.192)-(3.194)) em (2.11), obteremos

$$z_{1,t} = \left\{ \frac{\sigma\mu m}{\nu} \left[\frac{\sqrt{T}}{(\mu^2 + 1)h_{z_1}} - \delta \int \frac{z_1 h_{z_1}}{\sqrt{T}} dz_1 \right] - \frac{\eta}{\mu} \right\} z_2 + \frac{\mu(mz_0 + a)(kz_1 h + \sigma\sqrt{T})}{(\mu^2 + 1)h_{z_1}},$$

com $T = \delta(\mu^2 + 1)h^2 + \nu$ e $h = h(z_1)$ uma função diferenciável satisfazendo (3.188), com $\delta = \pm 1$ e $\nu \in \mathbb{R} - \{0\}$. Como $k = 0$, a expressão anterior se reduz a

$$z_{1,t} = \left\{ \frac{\sigma\mu m}{\nu} \left[\frac{\sqrt{T}}{(\mu^2 + 1)h_{z_1}} - \delta \int \frac{z_1 h_{z_1}}{\sqrt{T}} dz_1 \right] - \frac{\eta}{\mu} \right\} z_2 + \frac{\sigma\mu(mz_0 + a)\sqrt{T}}{(\mu^2 + 1)h_{z_1}}.$$

Agora, tendo em vista a validade de (2.16), bem como (3.193), temos

$$f_{11} = h, \quad f_{31} = \sigma\sqrt{T}, \quad f_{21} = \mu h.$$

Por outro lado, substituindo as expressões ((3.192)-(3.194)) em (2.17), teremos

$$\begin{aligned} f_{12} &= - \left[\frac{\sigma\delta\mu m}{\nu} \int \frac{z_1 h_{z_1}}{\sqrt{T}} dz_1 + \frac{\eta}{\mu} \right] h + \frac{\sigma\mu m z_1 \sqrt{T}}{\nu(\mu^2 + 1)} + \frac{\mu^2(mz_0 + a)}{\mu^2 + 1}, \\ f_{22} &= \mu \left\{ - \left[\frac{\sigma\delta\mu m}{\nu} \int \frac{z_1 h_{z_1}}{\sqrt{T}} dz_1 + \frac{\eta}{\mu} \right] h + \frac{\sigma\mu m z_1 \sqrt{T}}{\nu(\mu^2 + 1)} \right\} - \frac{\mu(mz_0 + a)}{\mu^2 + 1}, \quad (2.17) \\ f_{32} &= -\sigma\sqrt{T} \left[\frac{\sigma\delta\mu m}{\nu} \int \frac{z_1 h_{z_1}}{\sqrt{T}} dz_1 + \frac{\eta}{\mu} \right] + \frac{\delta\mu m z_1 h}{\nu}. \end{aligned}$$

Ademais como consequência de (2.15) e (3.194), temos

$$\frac{\sigma\mu m}{\nu} \left[\frac{\sqrt{T}}{(\mu^2 + 1)h_{z_1}} - \delta \int \frac{z_1 h_{z_1}}{\sqrt{T}} dz_1 \right] - \frac{\eta}{\mu} \neq 0.$$

A recíproca resulta de uma computação direta.

□

Referências Bibliográficas

- [1] Ablowitz, M. J., Kaup, D. J., Newell, A. C. and Segur, H. “The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems”. Studies in applied mathematics, 53 (1974), 249-315.
- [2] Calogero, F. “A solvable nonlinear wave equation”. Studies in Applied mathematics 70.3 (1984): 189-199.
- [3] Cartan, É. Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques. FeniXX, 1945.
- [4] Catalano Ferraioli, D. and de Oliveira Silva, L. A. “Second order evolution equations which describe pseudospherical surfaces”. Journal of Differential Equations 260.11 (2016): 8072-8108.
- [5] Catalano Ferraioli, D. and Silva, T. C. “A class of third order quasilinear partial differential equations describing spherical or pseudospherical surfaces”. Journal of Differential Equations 379 (2024): 524-568.
- [6] Catalano Ferraioli, D., Silva, T. C. and Tenenblat, T. “A class of quasilinear second order partial differential equations which describe spherical or pseudospherical surfaces”. Journal of Differential Equations 268.11 (2020): 7164-7182.
- [7] Catalano Ferraioli, D. and Ketten Tenenblat. “Fourth order evolution equations which describe pseudospherical surfaces”. Journal of Differential Equations 257.9 (2014): 3165-3199.
- [8] Chern, S.S. and Tenenblat, K. “Pseudospherical surfaces and evolution equations”. Studies in Applied Mathematics 74.1 (1986): 55-83.
- [9] Ding, Q. and Tenenblat, T. “On differential systems describing surfaces of constant curvature”. Journal of Differential Equations 184.1 (2002): 185-214.
- [10] Gardner, Clifford S., et al. “Method for solving the Korteweg-deVries equation”. Physical review letters 19.19 (1967): 1095.

- [11] Hunter, J. K. and Saxton, R. “Dynamics of director fields.” SIAM Journal on Applied Mathematics 51.6 (1991): 1498-1521.
- [12] Jorge, L. P. and K. Tenenblat. “Linear problems associated with evolution equations of the type $u_{tt} = F(u, u_x, u_{xx}, u_t)$ ”. Studies in Applied Mathematics 77.2 (1987): 103-117.
- [13] Kamran, N. and K. Tenenblat. “On differential equations describing pseudo-spherical surfaces”. Journal of Differential Equations 115.1 (1995): 75-98.
- [14] Kelmer, F. and Tenenblat, K. “On a class of systems of hyperbolic equations describing pseudo-spherical or spherical surfaces”. Journal of Differential Equations 339 (2022): 372-394.
- [15] Konno, K. and Sanuki, H. “Bäcklund transformation for equation of motion for nonlinear lattice under weak dislocation potential”. Journal of the Physical Society of Japan 39.1 (1975): 22-24.
- [16] Lima, E. L. Algebra exterior. IMPA, 2009.
- [17] Lima, E. L. Analise real, volume 3: análise vetorial. IMPA, 2010.
- [18] Morita, S. Geometry of differential forms. Vol. 201. American Mathematical Soc., 2001.
- [19] Neto, V. G. “Fifth-order evolution equations describing pseudospherical surfaces”. Journal of Differential Equations 249.11 (2010): 2822-2865.
- [20] Rabelo, M. L. “On equations which describe pseudospherical surfaces”. Studies in Applied Mathematics 81.3 (1989): 221-248.
- [21] Rabelo, M. L. and Tenenblat, K. “On equations of type $u_{xt} = F(u, u_x)$ which describe pseudospherical surfaces”. Journal of mathematical physics 31.6 (1990): 1400-1407.
- [22] Rabelo, M. L. and Tenenblat, K. “A classification of pseudospherical surface equations of type $u_t = u_{xxx} + G(u, u_x, u_{xx})$ ”. Journal of mathematical physics 33.2 (1992): 537-549.
- [23] Reyes, E. G. “Pseudo-spherical surfaces and integrability of evolution equations”. Journal of differential equations 147.1 (1998): 195-230.
- [24] Sasaki, R. “Soliton equations and pseudospherical surfaces”. Nuclear Physics B 154.2 (1979): 343-357.
- [25] Schäfer, T. and Wayne, C. E. “Propagation of ultra-short optical pulses in cubic nonlinear media”. Physica D: Nonlinear Phenomena 196.1-2 (2004): 90-105.

- [26] Silva, T. C. and Tenenblat, K. “Third order differential equations describing pseudospherical surfaces”. *Journal of Differential Equations* 259.9 (2015): 4897-4923.
- [27] Tenenblat, K. *Introdução à geometria diferencial*. Editora Blucher, 2008.
- [28] Tu, Loring W. “Manifolds”. *An Introduction to Manifolds*. New York, NY: Springer New York, 2011. 47-83.
- [29] Zakharov, V. E. and Shabat, A. B. “Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media”. *Sov. Phys. JETP* 34.1 (1972): 62.