Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Limitações para os autovalores de Laplace em domínios de $\mathbb{R}^n$ e em subvariedades da esfera unitária

por

Leonardo Gomes

Brasília
Julho de 2007

Introdução

Dentre os vários problemas matemáticos existentes com aplicações físicas apresentamos neste trabalho o problema do autovalor para o Laplaciano

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \qquad \text{em } \Omega, \\ u\,|_{\Omega} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

onde $\Omega \in \mathbb{R}^n$ é aberto conexo e limitado, e λ um número real chamado o autovalor de Dirichlet. O estudo deste problema, chamado também às vezes de Problema da Membrana fixa (para $n = 2$ o problema modela a vibração de uma membrana com extremidades fixas), torna-se importante pois sabe-se que existe uma proporcionalidade entre estes autovalores e o quadrado da autofrequência da membrana, além de as autofunções u que satisfazem (1) descreverem o comportamento desta membrana. A partir daí faz sentido investigar a respeito de limitações para estes autovalores.

Desta forma, em 1956 Payne-Pólya-Weinberger [13] (PPW) provaram para o problema (1) (para $n = 2$), a desigualdade

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq \frac{2}{k} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

a qual para o caso geral ($n \geq 2$) fica

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq \frac{4}{nk} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Em 1980, Hile e Protter provaram em [10] (prova original) uma desigualdade mais forte do que a de PPW, a saber

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda_{k+1} - \lambda_i} \geq \frac{nk}{4} \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

a qual chamaremos de desigualdade de HP. É fácil ver que substituindo λ_i do denominador da desigualdade de HP obteremos a desigualdade de PPW, logo $PPW \Rightarrow HP$.

A procura de melhores limitações, em 1991, Yang [15] deduziu uma desigualdade mais forte do que as de PPW e HP:

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left(\lambda_{k+1} - \lambda_i \left(1 + \frac{4}{n} \right) \right) \leq 0 \qquad \text{para } k = 1, 2, \ldots.$$

Embora Yang nunca tenha publicado a sua prova original, os métodos utilizados por ele para tal prova foram publicados por [9]. Observando então a desigualdade de Yang, implicada por ela teremos o que chamamos de a segunda desigualdade de Yang (Yang 2), e que é dada por

$$\lambda_{k+1} \leq \frac{1}{k} \left(1 + \frac{4}{n} \right) \sum_{i=1}^{k} \lambda_i, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Por isso denotamos às vezes a desigualdade de Yang por (Yang 1).
Pouco tempo depois, utilizando de seus métodos, Yang obteve resultados semelhantes para domínios e hipersuperfícies contidos na esfera unitária.

Naturalmente a dissertação está organizada seguindo a ordem cronológica com que as desigualdades foram sendo provadas. No Capítulo 1 apresentamos alguns conceitos e resultados acerca de autovalores que serão utilizados durante todo o trabalho. No Capítulo 2, exibimos uma prova para as desigualdades de Hile-Protter e Yang conforme [1], finalizando com a justificativa da implicação da desigualdade de HP em Yang 1. Para o Capítulo 3 consideramos um problema um pouco mais geral do que o problema do autovalor de Laplace. Em particular consideraremos os operadores de Schödinger: $-\Delta + V(x)$ com $V \geq 0$ tal que $-\Delta u + V(x)u = \rho\lambda u$ em $\Omega \in \mathbb{R}^n$ com $\rho \geq 0$, onde V e ρ são funções reais definidas em Ω. Provaremos então a desigualdade de Yang para este caso obtendo uma extensão para a desigualdade de Yang provada no Capítulo 2, ou seja, teremos uma generalização para as limitações do autovalor de Laplace. Por fim, no Capítulo 4 apresentamos a prova da estensão destes resultados para domínios contidos em $\mathbb{S}^n$ com condições de fronteira de Dirichlet e para hipersuperfícies mínimas em $\mathbb{S}^{n+1}$, de acordo com os métodos de Asbaugh [1].

Referências Bibliográficas

[1] Asbaugh,M.S., *Universal eigenvalue bounds of Payne-Polya-Weinberguer, Hile-Protter and H.C.Yang*, Proc. Indian Acad. Sci.(Math.Sci.) **112**, 3-30 (2002).

[2] Asbaugh,M.S., Benguria,R.D., *More bounds on eigenvalue ratios for Dirichlet Laplacians in n dimensions*, SIAM J. Math. Anal. **24**, 1622-1651 (1993).

[3] Brands,J.J.A.M., *Bounds for the ratios of the first three membrane eigenvalues*, Arch. Rational Mech. Anal. **16**, 256-258 (1964).

[4] Brezis,H., *Analyse Fonctionele: Theorie et applications.* Paris Masson (1987).

[5] Brickel,F.,Clark,R.S., *Diferentiable Manifolds*, Van Nostrand Reinhold Co., London (1970) chap.3.

[6] Carmo,M.P., *Geometria Riemanniana*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, sexta edição (2002).

[7] Chavel,I., *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, New York: Academic Press (1984).

[8] Cheng,Q-M., Yang,H.C., *Estimates on eigenvalues of Laplacian*, Math. Ann. **331**, 445-460 (2005).

[9] Cheng,Q-M., Yang,H.C., *Bounds on eigenvalues of Dirichlet Laplacian*, Math. Ann. **337**, 159-175 (2007).

[10] Hile,G.N., Protter,M.H., *Inequalities for eigenvalues of the Laplacian*, Indiana Univ. Math. J.**29**, 523-538 (1980).

[11] Leung,P.F., *On the consecutive eigenvalues of the Laplacian of a compact minimal submanifold in a sphere*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) **50**, 409-416 (1991).

[12] Lima,E.L., *Curso de Análise vol. 2*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, sexta edição (2000).

[13] Payne,L., Polya,G. and Weinberger,H., *On the ratio of consecutive eigenvalues*, J. Math. Phys. **35**, 289-298 (1956).

[14] Takahashi,T., *Minimal imersions of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan, **18**, 380-385 (1996).

[15] Yang,H.C., *Estimates of the difference beween consecutive eigenvalues*, (1995) preprint (revision of International Centre for Theoretical Physics preprint IC/91/60, Trieste, Italy, April 1991).