

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA – UNB**  
**FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS EM ENGENHARIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA**

**IDENTIFICAÇÃO DE DANOS EM VIGAS UTILIZANDO  
PARÂMETROS MODAIS E FUSÃO DE DADOS BAYESIANA**

**GIOVANNA FUJIMURA SOARES**

**ORIENTADOR: PROF. DR. SERGIO HENRIQUE DA SILVA CARNEIRO**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA – UNB  
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS EM ENGENHARIA

**IDENTIFICAÇÃO DE DANOS EM VIGAS UTILIZANDO  
PARÂMETROS MODAIS E FUSÃO DE DADOS BAYESIANA**

**GIOVANNA FUJIMURA SOARES**

ORIENTADOR: PROF. DR. SERGIO HENRIQUE DA SILVA CARNEIRO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA  
PUBLICAÇÃO: 119A/2026

BRASÍLIA/DF, JANEIRO DE 2026

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA – UNB  
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS EM ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS  
DA ENGENHARIA

**IDENTIFICAÇÃO DE DANOS EM VIGAS UTILIZANDO  
PARÂMETROS MODAIS E FUSÃO DE DADOS BAYESIANA**

GIOVANNA FUJIMURA SOARES

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE.

APROVADA POR:

PROF. DR. SERGIO HENRIQUE DA SILVA CARNEIRO  
ORIENTADOR - UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA/FCTE

PROFA. DRA. POLLIANA CÂNDIDA OLIVEIRA MARTINS  
EXAMINADOR - UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA/FCTE

PROF. DR. ISRAEL JORGE CÁRDENAS NUÑEZ  
EXAMINADOR - UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO

**Relatório (ata) de defesa de dissertação assinado eletronicamente pela banca avaliadora, via Sistema Eletrônico de Informações - SEI, documento nº 13637909, processo nº 23106.122378/2025-47.**

BRASÍLIA/DF, JANEIRO DE 2026

## FICHA CATALOGRÁFICA

SOARES, GIOVANNA F.

Identificação de Danos em Vigas Utilizando Parâmetros Modais e Fusão de Dados Bayesiana [Distrito Federal], 2025.

74p., 210 × 297 mm (FCTE, Mestrado em Integridade de Materiais da Engenharia, 2026).

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília.

Faculdade de Ciências e Tecnologias em Engenharia

1. Vibrações

2. Análise modal

3. *Structural Health Monitoring*

4. Identificação de danos

I. FCTE/UnB.

II. Título (série)

## REFERÊNCIA

SOARES, GIOVANNA F. (2026). Identificação de Danos em Vigas Utilizando Parâmetros Modais e Fusão de Dados Bayesiana. Dissertação de mestrado em Integridade de Materiais da Engenharia, Publicação 119A/2026, Programa de Pós-Graduação, Faculdade de Ciências e Tecnologias em Engenharia, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 74p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Giovanna Fujimura Soares

TÍTULO: Identificação de Danos em Vigas Utilizando Parâmetros Modais e Fusão de Dados Bayesiana

GRAU: Mestre

ANO: 2026

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

---

[giovannafujimura@gmail.com](mailto:giovannafujimura@gmail.com)

Brasília, DF – Brasil

*"Viver não é necessário; o que é necessário é criar."*

Fernando Pessoa

*Aos meus pais, José Roberto e Marisa,  
que sempre me incentivaram a sonhar.*

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente a Deus, que com certeza sem Ele eu não estaria aqui, e nada disso teria sido possível.

Aos meus pais José Roberto e Marisa, que sempre permitiram que eu tivesse mais que o necessário pra eu alcançar meus objetivos. Ao meu marido Gustavo, que sempre acompanhou meus sonhos. Ao meu irmão Matheus, que embarcou primeiro na loucura acadêmica e sempre me foi uma inspiração. Ao meu orientador Professor Sergio Carneiro, que acreditou no meu potencial e foi um guia fundamental pra que este trabalho nascesse e fosse até o final. Aos meus amigos, que tanto me ouviram falar sobre este projeto.

À CAPES e à Universidade de Brasília, que apoiaram financeiramente o projeto. A todas as professoras e professores do Programa de Pós Graduação em Integridade de Materiais que de algum modo contribuíram na pesquisa. E a todos aqueles que ainda acreditam no desenvolvimento da ciência no Brasil.

## RESUMO

O monitoramento da saúde estrutural (*Structural Health Monitoring* – SHM) é um dos procedimentos de maior importância ao longo da vida de um sistema, pois a verificação de existência de falhas, trincas ou partes defeituosas permite uma manutenção antes que ocorram falhas catastróficas. Para tal, diversos métodos podem ser aplicados, sendo alguns dos mais amplamente estudados e utilizados os métodos baseados em testes vibracionais e parâmetros modais das estruturas. Neste trabalho, dois parâmetros são analisados: variações nos valores de frequências naturais entre estruturas danificadas e não danificadas e diferença da curvatura dos modos de vibração. Além disso, aplica-se um método de fusão de dados baseado na teoria bayesiana para maior eficácia na localização dos danos. Ruído branco é introduzido para simular variações geradas por medições experimentais. São analisadas duas vigas metálicas com materiais de diferente rigidez, sendo a análise realizada dentro do regime linear. Para cada viga, dois modelos diferentes de danos são apresentados. Ainda, para cada um desses modelos, são apresentados alguns casos com danos em localizações e intensidades variáveis, bem como mudanças nas condições de apoio, contemplando os casos biengastado, engastado-livre e livre-livre. Os resultados obtidos foram promissores na detecção e localização do dano para diversos dos casos analisados, indicando que os métodos são aplicáveis em diversas condições e demonstrando seu grande potencial.

Palavras-chave: Identificação de dano, análise modal, *structural health monitoring*, fusão de dados bayesiana, diferença de curvatura modal.

## **ABSTRACT**

Structural Health Monitoring (SHM) is one of the most important procedures regarding the life of a system. The assessment of defects, cracks or imperfections leads to maintenance procedures before catastrophic failure occurs. A variety of methods can be employed, one of the most widely studied and applied being vibration-based methods combined with measurements of modal parameters. In the present work, two parameters will be considered: variations in natural frequencies between damaged and undamaged structures, and mode curvature difference. Furthermore, we applied a data fusion method based on bayesian probability to further improve the accuracy of damage detection. We introduced white noise in order to simulate the uncertainties regarding experimental measurements. We considered two metallic beams with two materials of different stiffness, the analysis considering a linear behavior. For each beam, two different models of damage are presented. Additionally, for each of these models, we considered a variety of damage cases with changing locations and severities, as well as alternating support types (clamped-clamped, clamped-free and free-free). The results are promising in regards to damage detection and location for various considered cases, which indicates that the methods are applicable in various conditions and showing the method's potential.

**Keywords:** Damage detection, modal analysis, structural health monitoring, bayesian data fusion, curvature mode difference.

## SUMÁRIO

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                                      | <b>1</b>  |
| 1.1      | Contextualização . . . . .                             | 1         |
| 1.2      | Motivação e Justificativa . . . . .                    | 3         |
| 1.3      | Objetivos . . . . .                                    | 5         |
| 1.3.1    | Objetivos gerais . . . . .                             | 5         |
| 1.3.2    | Objetivos específicos . . . . .                        | 5         |
| 1.4      | Síntese da metodologia . . . . .                       | 5         |
| 1.5      | Estrutura do trabalho . . . . .                        | 6         |
| <b>2</b> | <b>Revisão Bibliográfica</b>                           | <b>7</b>  |
| 2.1      | Identificação de danos por parâmetros modais . . . . . | 7         |
| 2.1.1    | Frequências naturais . . . . .                         | 8         |
| 2.1.2    | Diferença de curvatura modal . . . . .                 | 10        |
| 2.2      | Fusão de dados na identificação de danos . . . . .     | 11        |
| <b>3</b> | <b>Fundamentação Teórica</b>                           | <b>13</b> |
| 3.1      | Análise modal . . . . .                                | 13        |
| 3.2      | Efeito dos danos nas frequências naturais . . . . .    | 16        |
| 3.3      | Método da diferença de curvatura modal . . . . .       | 18        |
| 3.4      | Fusão de dados bayesiana . . . . .                     | 21        |
| 3.4.1    | Determinação das Funções de Posição de Dano . . . . .  | 22        |
| <b>4</b> | <b>Metodologia</b>                                     | <b>24</b> |
| 4.1      | Modelagem de dano . . . . .                            | 25        |
| 4.2      | Modelagem de análise por frequência . . . . .          | 26        |
| 4.2.1    | Modelos numéricos . . . . .                            | 26        |
| 4.2.2    | Modelo experimental . . . . .                          | 29        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 4.3      | Modelagem para análise por curvatura modal . . . . .  | 30        |
| 4.4      | Modelagem de ruído experimental . . . . .   | 31        |
| <b>5</b> | <b>Resultados e Discussões</b>  | <b>32</b> |
| 5.1      | Resultados da análise da frequência . . . . .   | 33        |
| 5.1.1    | Modelo 1 biengastado . . . . .  | 33        |
| 5.1.2    | Modelo 1 engastado-livre . . . . .  | 33        |
| 5.1.3    | Modelo 1 livre-livre . . . . .  | 33        |
| 5.1.4    | Modelo 2 biengastado . . . . .  | 41        |
| 5.1.5    | Modelo 2 engastado-livre . . . . .  | 41        |
| 5.1.6    | Modelo 2 livre-livre . . . . .  | 41        |
| 5.1.7    | Modelo experimental . . . . .   | 48        |
| 5.2      | Resultados da análise da curvatura modal . . . . .  | 52        |
| 5.2.1    | Modelo 1 engastado-livre . . . . .  | 52        |
| 5.2.2    | Modelo 2 engastado-livre . . . . .  | 55        |
| <b>6</b> | <b>Conclusão</b>  | <b>58</b> |
| 6.1      | Discussão . . . . .   | 58        |
| 6.2      | Recomendações para trabalhos futuros . . . . .  | 59        |
| 6.3      | Trabalhos originados a partir desta dissertação . . . . .   | 59        |
|          | <b>Lista de Referências</b>   | <b>60</b> |
|          | <b>Apêndice A – Resultados adicionais de identificação de dano por diferença de curvatura modal</b> | <b>66</b> |

## LISTA DE TABELAS

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 3.1 | Modos de vibração de vigas (adaptado de Inman (2014)) . . . . .   | 22 |
| 4.1 | Quadro resumo de todos os casos de dano analisados. . . . .   | 25 |
| 4.2 | Definição dos casos de dano para os modelos numéricos e análise por frequências naturais. . . . .   | 29 |
| 4.3 | Definição dos casos de dano para o modelo experimental e análise por frequências naturais (Adaptados de Khiem e Toan, 2014). . . . .        | 30 |
| 4.4 | Definição dos casos de dano para os modelos numéricos e análise por diferença de curvatura modal (Adaptados de Khiem e Toan, 2014). . . . . | 30 |
| A.1 | Definição dos casos extras para a identificação de dano por diferença de curvatura modal (Adaptados de Khiem e Toan, 2014). . . . .         | 66 |

## LISTA DE FIGURAS

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1.1 | Fotografia da aeronave com parte da fuselagem arrancada. Fonte: AEROIN (2020) . . . . .   | 4  |
| 3.1 | Ilustração do elemento de viga sob flexão. Adaptado de Hibbeler (2010). . . . .   | 19 |
| 4.1 | Fluxograma do processo de detecção de dano proposto. . . . .  | 24 |
| 4.2 | Ilustração da viga utilizada nas análises com definição das respectivas dimensões. . . . .  | 26 |
| 4.3 | Ilustração da malha utilizada no modelo. . . . .  | 26 |
| 4.4 | Parâmetros de qualidade da malha de assimetria (4.4a) e razão de aspecto (4.4b). . . . .  | 27 |
| 4.5 | Primeiro modelo de viga com dano modelado através da diminuição local da rigidez (4.5a) e um detalhe do dano inserido (4.5b). . . . . | 28 |
| 4.6 | Segundo modelo de viga com dano modelado através de um corte passante (4.6a) e um detalhe do dano (4.6b). . . . .                     | 28 |
| 4.7 | Detalhe da malha com o dano representado como diminuição da rigidez (4.7a) e inserido mecanicamente (4.7b). . . . .                   | 29 |
| 5.1 | Fluxograma resumo dos casos analisados para cada um dos métodos. . . . .  | 32 |
| 5.2 | Localização de danos para o modelo 1 biengastado por análise das frequências sem consideração de ruído. . . . .                       | 34 |
| 5.3 | Localização de danos para o modelo 1 biengastado por análise das frequências com adição de ruído. . . . .                             | 35 |
| 5.4 | Localização de danos para o modelo 1 engastado-livre por análise das frequências sem consideração de ruído. . . . .                   | 36 |
| 5.5 | Localização de danos para o modelo 1 engastado-livre por análise das frequências com adição de ruído. . . . .                         | 37 |
| 5.6 | Localização de danos para o modelo 1 livre-livre por análise das frequências sem consideração de ruído. . . . .                       | 39 |
| 5.7 | Localização de danos para o modelo 1 livre-livre por análise das frequências com adição de ruído. . . . .                             | 40 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 5.8  | Localização de danos para o modelo 2 biengastado por análise das frequências sem consideração de ruído. . . . .                                | 42 |
| 5.9  | Localização de danos para o modelo 2 biengastado por análise das frequências com adição de ruído. . . . .                                      | 43 |
| 5.10 | Localização de danos para o modelo 2 engastado-livre por análise das frequências sem consideração de ruído. . . . .                            | 44 |
| 5.11 | Localização de danos para o modelo 2 engastado-livre por análise das frequências com adição de ruído. . . . .                                  | 45 |
| 5.12 | Localização de danos para o modelo 2 livre-livre por análise das frequências sem consideração de ruído. . . . .                                | 46 |
| 5.13 | Localização de danos para o modelo 2 livre-livre por análise das frequências com adição de ruído. . . . .                                      | 47 |
| 5.14 | Localização do dano para o modelo experimental, casos S1 a S5, por análise das frequências sem consideração de ruído. . . . .                  | 49 |
| 5.15 | Localização do dano para o modelo experimental, casos S6 a S10, por análise das frequências sem consideração de ruído. . . . .                 | 50 |
| 5.16 | Localização do dano para o modelo experimental, casos S11 a S15, por análise das frequências sem consideração de ruído. . . . .                | 51 |
| 5.17 | Localização do dano para o modelo 1 por análise de diferença de curvatura modal sem consideração de ruído. . . . .                             | 53 |
| 5.18 | Localização do dano para o modelo 1 por análise de diferença de curvatura modal com adição de ruído. . . . .                                   | 54 |
| 5.19 | Localização do dano para o modelo 2 por análise de diferença de curvatura modal sem consideração de ruído. . . . .                             | 56 |
| 5.20 | Localização do dano para o modelo 2 por análise de diferença de curvatura modal com adição de ruído. . . . .                                   | 57 |
| A.1  | Localização do dano para o modelo 1 para os casos extras S4-S9 da análise de diferença de curvatura modal sem consideração de ruído. . . . .   | 67 |
| A.2  | Localização do dano para o modelo 1 para os casos extras S10-S14 da análise de diferença de curvatura modal sem consideração de ruído. . . . . | 68 |
| A.3  | Localização do dano para o modelo 1 para os casos extras S4-S9 da análise de diferença de curvatura modal com adição de ruído. . . . .         | 69 |
| A.4  | Localização do dano para o modelo 1 para os casos extras S10-S14 da análise de diferença de curvatura modal com adição de ruído. . . . .       | 70 |
| A.5  | Localização do dano para o modelo 2 para os casos extras S4-S9 da análise de diferença de curvatura modal sem consideração de ruído. . . . .   | 71 |

|     |  |    |
|-----|--|----|
| A.6 | Localização do dano para o modelo 2 para os casos extras S10-S14 da análise de diferença de curvatura modal sem consideração de ruído. . . . . | 72 |
| A.7 | Localização do dano para o modelo 2 para os casos extras S4-S9 da análise de diferença de curvatura modal com adição de ruído. . . . .         | 73 |
| A.8 | Localização do dano para o modelo 2 para os casos extras S10-S14 da análise de diferença de curvatura modal com adição de ruído. . . . .       | 74 |

## LISTA DE NOMENCLATURAS E ABREVIACOES

|              |  |
|--------------|--|
| <b>Anac</b>  | Agncia Nacional de Aviação Civil                        |
| <b>ANN</b>   | <i>Artificial Neural Network</i>                         |
| <b>CFRP</b>  | <i>Carbon Fiber Reinforced Plastics</i>                  |
| <b>CMD</b>   | <i>Curvature Mode Difference</i>                         |
| <b>DPF</b>   | <i>Damage Position Function</i>                          |
| <b>DT</b>    | <i>Decision Tree</i>                                     |
| <b>EASA</b>  | <i>European Union Aviation Safety Agency</i>             |
| <b>FAA</b>   | <i>Federal Aviation Administration</i>                   |
| <b>FLS</b>   | <i>Fuzzy Logic System</i>                                |
| <b>FRF</b>   | <i>Frequency Response Function</i>                       |
| <b>GDL</b>   | Grau de Liberdade  |
| <b>IGA</b>   | <i>Immune Genetic Algorithm</i>                          |
| <b>MCUIE</b> | <i>Modal Curvature Utility Information Entropy</i>       |
| <b>MEF</b>   | Método dos Elementos Finitos                             |
| <b>MSDBI</b> | <i>Mode Shape Derivative-Based Damage Identification</i> |
| <b>NDE</b>   | <i>Nondestructive Damage Evaluation</i>                  |
| <b>NTSB</b>  | <i>National Transportation Safety Board</i>              |
| <b>PNN</b>   | <i>Probabilistic Neural Network</i>                      |
| <b>RCPN</b>  | <i>Revised Counter-Propagation Network</i>               |
| <b>RNFC</b>  | <i>Relative Natural Frequency Change</i>                 |
| <b>SFO</b>   | <i>Sunflower Optimization</i>                            |
| <b>SHM</b>   | <i>Structural Health Monitoring</i>                      |
| <b>SVM</b>   | <i>Support Vector Machine</i>                            |
| <b>TLBO</b>  | <i>Teaching-Learning Based Optimization</i>              |

## LISTA DE SÍMBOLOS

|           |   |
|-----------|---|
| $[A]$     | Matriz de variações relativas de rigidez para cada elemento |
| $A_i$     | Hipóteses da probabilidade bayesiana                        |
| $[B]$     | Matriz de derivadas das funções de forma dos elementos      |
| $\{b\}$   | Vetor de forças de corpo                                    |
| $[C]$     | Matriz de amortecimento                                     |
| $C_j$     | Curvatura modal por diferenças finitas                      |
| $[D]$     | Matriz constitutiva   |
| $\{d\}$   | Vetor de deslocamento nodal                                 |
| $E$       | Módulo de rigidez   |
| $E_{ext}$ | Energia potencial das forças externas                       |
| $e$       | Função exponencial  |
| $\{f\}$   | Vetor de forças aplicadas                                   |
| $h$       | Espessura da viga   |
| $[I]$     | Matriz identidade   |
| $[K]$     | Matriz de rigidez   |
| $[K^e]$   | Matriz de rigidez de um único elemento                      |
| $L$       | Comprimento da viga   |
| $[M]$     | Matriz de massa   |
| $P$       | Probabilidade   |
| $r$       | Curva parametrizada   |
| $S$       | Área superficial  |
| $S_m$     | Fontes da probabilidade bayesiana                           |
| $s$       | Forças de superfície  |
| $t$       | Tempo   |
| $U$       | Energia de deformação                                       |
| $V$       | Volume  |
| $v$       | Deflexão da linha elástica                                  |

|                |   |
|----------------|---|
| $w$            | Largura da viga   |
| $\{x\}$        | Vetor de deslocamento                                   |
| $\{\dot{x}\}$  | Vetor de velocidade                                     |
| $\{\ddot{x}\}$ | Vetor de aceleração                                     |
| $\Delta$       | Variação  |
| $\delta$       | Variação pequena  |
| $\varepsilon$  | Deformação  |
| $\zeta$        | Local do dano   |
| $\theta$       | Ângulo entre seções transversais de um elemento de viga |
| $\{\eta\}$     | Vetor de função de forma do elemento                    |
| $\kappa$       | Curvatura   |
| $\lambda$      | Frequência natural ao quadrado                          |
| $\mu$          | Densidade do material                                   |
| $\nu$          | Coefficiente de Poisson                                 |
| $\Pi$          | Produtório  |
| $\pi$          | Energia potencial total                                 |
| $\rho$         | Raio de curvatura de um elemento de viga                |
| $\Sigma$       | Somatório   |
| $\sigma$       | Tensão  |
| $\phi$         | Modos de vibração do sistema                            |
| $\omega$       | Frequência natural                                      |
| $\partial$     | Derivada parcial  |

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

Há muito tempo na história já se tem o conhecimento de que a presença de um dano em uma estrutura causa variações nas suas propriedades – utilizar pequenas batidas com as próprias mãos (ou até mesmo com instrumentos) para identificar fragilidades estruturais em objetos de cerâmica, por exemplo, é um método amplamente conhecido. O que não é de grande conhecimento geral, no entanto, é a física por trás deste costume: a presença de um dano afeta a rigidez da estrutura, reduzindo-a localmente, o que influencia seu comportamento vibracional e, conseqüentemente, o som que é emitido pela estrutura.

Com o desenvolvimento de estruturas mais complexas, fez-se necessário o estabelecimento de técnicas mais aprimoradas de detecção de dano, bem como um aprofundamento dos estudos e do conhecimento físico-matemático que compreendesse de maneira mais detalhada o comportamento mecânico dessas estruturas. Tal conhecimento, adicionado ao entendimento das respostas dinâmicas e vibracionais dos sistemas, é imprescindível para a compreensão plena dos fenômenos que possibilitam as análises para detecção de danos. Várias técnicas podem ser empregadas para a identificação, contudo, elas se baseiam majoritariamente na observação de variações do comportamento da estrutura quando na presença de dano em relação ao previsto pela literatura para uma estrutura não danificada.

Desde o início das pesquisas em detecção de danos, é notável o interesse elevado por métodos não destrutivos, isto é, métodos que permitem que o dano seja identificado sem a necessidade de provocar maior deterioração da estrutura – no começo da década de 70, Dune-gan and Tetelman (1971) publicaram estudos relacionando técnicas de emissão acústica com a caracterização de danos estruturais causados pela fragilização por hidrogênio. A indústria aeronáutica, em especial, possui grande interesse nesses métodos de detecção, uma vez que é benéfico para ambos fabricante e cliente a possibilidade de detecção do dano em uma aeronave e eventual realização de manutenção sem que haja a necessidade de inutilização desta – ainda que temporária. A Agência Nacional de Aviação Civil (Anac), agência que regula e fiscaliza as atividades relacionadas à aviação civil no Brasil, estabelece parâmetros de processos de manutenção para garantir a operação continuada segura das aeronaves (Anac, 2025; 2024). Tais parâmetros atuam em conformidade com as medidas internacionais estabelecidas pelo órgão de atuação análoga à Anac nos Estados Unidos – a *Federal Aviation Administration* (FAA) – e na Europa – com a *European Union Aviation Safety Agency* (EASA). Dentre as normas e procedimentos estabelecidos, algumas técnicas para inspeção

de aeronaves são comumente utilizadas (Wild et al., 2021), tais como:

- **Inspeção visual:** como o nome diz, neste método os técnicos procuram por discrepâncias visíveis na estrutura, podendo a inspeção ser feita com o auxílio de equipamentos;
- **Tap test:** consiste em desferir pequenos golpes na estrutura – normalmente, com ferramentas específicas – para observar variações sonoras e vibracionais que indiquem imperfeições;
- **Emissão acústica:** considera ondas emitidas pela liberação de energia de deformação causada por microtrincas;
- **Líquido penetrante:** técnica utilizada em metais, na qual um líquido com coloração diferenciada é aplicado e combinado a um pó/líquido revelador, permitindo a detecção de trincas superficiais;
- **Ultrassom:** método amplamente utilizado, é feito através da emissão de ondas e análise do seu comportamento refletido, uma vez que a resposta em locais danificados é diferente da resposta em locais sem dano.

O dano pode ser entendido como uma mudança no material ou nas propriedades geométricas de um sistema (ou estrutura) que afeta de maneira negativa o comportamento e/ou o funcionamento atual ou futuro de dado sistema – o que pode incluir variações de condições de apoio ou conectividade entre subsistemas – de acordo com Inman et al. (2005). O dano não é indicativo de incapacitação do sistema, e sim de um decaimento no seu funcionamento em relação ao seu estado pleno; contudo, os danos podem se acumular ao longo do tempo devido ao tipo de operação realizada pela estrutura até o ponto de falha (Farrar and Worden, 2007) — como danos causados por fadiga ou até mesmo por eventos previstos dentro do ciclo de vida da estrutura, como por exemplo repetidas decolagens de um avião.

Desse modo, o monitoramento da saúde estrutural é um dos procedimentos de maior importância ao longo da vida de um sistema, pois a verificação da existência de falhas, trincas ou partes defeituosas permite uma manutenção antes que ocorram falhas catastróficas, diminuindo o risco de acidentes. Hoje este campo de estudo é conhecido como *Structural Health Monitoring* (SHM), ou, em tradução livre, Monitoramento de Saúde Estrutural. O diagnóstico e tratamento do dano em estruturas é normalmente classificado dentro de quatro níveis, como descrito por Rytter (1993):

- **Nível 1** (detecção): um indicativo da presença ou não de dano na estrutura;
- **Nível 2** (localização): definição provável do local do dano;
- **Nível 3** (avaliação): indicativos da severidade/tamanho do dano;
- **Nível 4** (consequência): informações a respeito da segurança e vida útil da estrutura, considerando o estado do dano identificado.

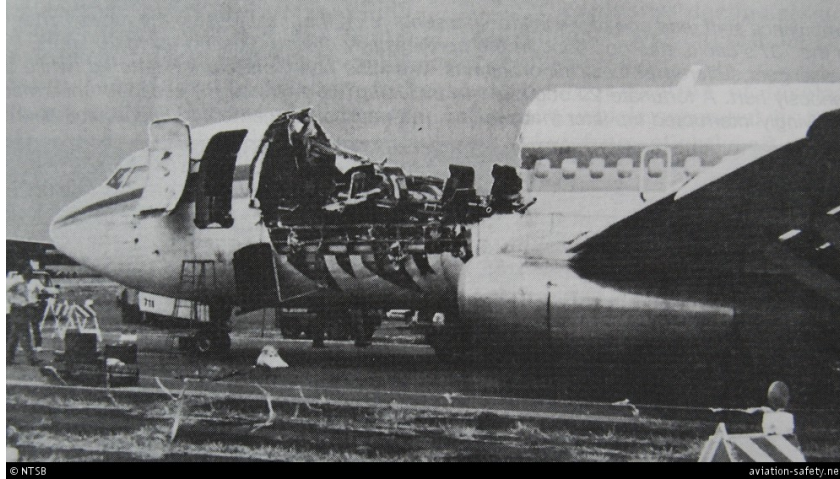
Ainda, as técnicas podem ser baseadas em um modelo representativo ou não – técnicas que não se baseiam em modelos tornam as análises mais simples, uma vez que não carregam consigo erros que frequentemente aparecem devido à utilização de modelos de baixa confiabilidade, bem como os custos computacionais necessários atrelados à realização das análises numéricas. Contudo, tais técnicas possuem uma grande limitação no que diz respeito aos níveis de análise acima do nível 1 determinado acima – para localização, avaliação e subsequente definição da vida útil restante da estrutura, torna-se necessária a construção de um modelo representativo da estrutura, como dito por Carneiro e Inman (2002). Adicionalmente, o nível exigido de complexidade do modelo depende diretamente do grau de especificidade do problema a ser abordado.

Alguns acontecimentos históricos trazem à tona a importância do monitoramento de danos e do conhecimento de mecanismos de falha na indústria aeroespacial – um exemplo conhecido é o da aeronave Comet, da fabricante de Havilland, que em 1954 foi a responsável por dois grandes acidentes fatais. A causa principal dos acidentes foi a falha por fadiga devido ao crescimento descontrolado de trincas em função de concentradores de tensão nas quinanas da janela – na época, as fabricantes não estavam preparadas para aviões que voassem em altitudes tão elevadas, e as grandes oscilações de temperatura e pressão provocavam fadiga no material da fuselagem e a consequente falha.

Outro conhecido acidente ocorreu com a companhia aérea Aloha Airlines em 1988, na qual uma descompressão brusca fez com que uma parte do revestimento da fuselagem do avião (um Boeing 737-200) fosse arrancada em voo, sendo necessária a realização de um pouso emergencial – vide Fig. 1.1. Como exposto no relatório n° NTSB/AAR-89/03 divulgado pela *National Transportation Safety Board* (NTSB, 1989), a causa principal foi definida como sendo uma inspeção visual má realizada e em condições não ideais – de madrugada – além de dificuldades na produção que resultaram em um método de junção na fuselagem que não resistia a muitos ciclos de operação, apresentando baixa durabilidade e alta degradação por corrosão e fadiga – fatos estes que também foram ignorados pela inspeção. A implementação de métodos eficazes de monitoramento da saúde estrutural, bem como de procedimentos bem definidos e rigorosos de detecção de dano na estrutura são capazes de minimizar e até mesmo evitar a ocorrência de acidentes como estes.

## **1.2 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA**

Muitas vantagens vêm da utilização do método SHM: ele auxilia no diagnóstico do dano de modo antecipado na estrutura, permitindo a realização de manutenção preventiva e facilitando a organização das inspeções programadas – procedimento muito comum na operação de aeronaves. Além disso, o conhecimento prévio da presença, localização e/ou intensidade do dano ajuda a otimizar o tempo dos processos de manutenção pois, uma vez que se tem ciência do problema a ser tratado, é possível agir de maneira mais precisa e ágil, aumentando o tempo útil de operação. Ainda, a coleta de informações a respeito da ocorrência de danos realizada durante um período de tempo contribui para a construção de um histórico de dados



**Figura 1.1.** Fotografia da aeronave com parte da fuselagem arrancada. Fonte: AEROIN (2020)

que possibilita a otimização do planejamento dos períodos de manutenção (Gomes et al., 2022).

Além disso, com a crescente utilização de materiais compostos na estruturas das aeronaves, faz-se necessário o constante desenvolvimento de novos métodos de detecção de dano, visto que o monitoramento da saúde estrutural de componentes constituídos de compósitos são acompanhados de suas próprias dificuldades (Broer et al., 2022). Para a aplicação de técnicas de monitoramento de dano em estruturas compostas foram levantados alguns possíveis cenários, baseado em levantamentos feitos por Ren, Chen e Chen (2017):

- Dano por impacto;
- Falha da interface reforçador e revestimento;
- Descolamento das fibras de carbono reforçadas (*Carbon Fiber Reinforced Plastic – CFRP*);
- Descolamento do núcleo e do revestimento em estruturas do tipo sanduíche;
- Delaminação;
- Danos gerais em estruturas do tipo colmeia (*honeycomb*);
- Detecção de rebites faltantes em estruturas CFRP;
- Determinação da distribuição de cargas e tensões/deformações em estruturas CFRP

Por todos esses motivos, o presente trabalho se propõe a aplicar dois métodos não destrutivos de detecção e localização do dano (nível 2 definido anteriormente), ambos baseados em parâmetros modais – a vantagem da utilização de tais métodos será discutida mais à frente, no capítulo 2 – sendo o primeiro método baseado em valores de frequências naturais, e o segundo em variações da curvatura modal. Adicionalmente, pretende-se aplicar um método

de fusão de dados para aumentar a eficácia dos métodos – a aplicação deste tipo de abordagem permite a consideração de mais de um modo de vibração, aumentando a exatidão dos resultados (Carneiro and Inman, 2002), e seu princípio de funcionamento será detalhado em seções mais à frente. Aqui, foi considerada uma aplicação simplificada, isto é, em vigas com comportamento linear ao invés de estruturas complexas, analisando os seis primeiros modos de flexão; o objetivo é validar a aplicabilidade do método para detecção e localização do dano em estruturas simples antes de partir para estruturas com maior complexidade.

## **1.3 OBJETIVOS**

### **1.3.1 Objetivos gerais**

Identificar a presença de danos estruturais simples que podem ser representados por uma redução local da rigidez em vigas metálicas de comportamento linear e para diversas condições de apoio através de dois métodos distintos: observação da variação das frequências naturais e diferença de curvatura modal – métodos estes que serão combinados a uma fusão de dados bayesiana para localização mais precisa dos danos.

### **1.3.2 Objetivos específicos**

Os objetivos específicos do trabalho são:

- Definir um modelo numérico que represente o dano adequadamente;
- Extrair valores de frequências naturais e vetores de modos de vibração através da análise modal do modelo;
- Analisar como a presença do dano afeta os parâmetros modais;
- Detectar e localizar o dano através das variações observadas;
- Verificar a previsão do local do dano com a sua localização real.

## **1.4 SÍNTESE DA METODOLOGIA**

O trabalho se propõe a detectar e localizar o dano através da análise de variações nos valores de frequências naturais e de diferença de curvatura modal em vigas. Para tal, são construídos dois modelos de vigas com duas modelagens distintas de dano – um modelo com o dano representado pela redução local da rigidez, e o segundo com o dano inserido na forma de uma entalhe na viga. Ainda, vigas de dimensões e materiais diferentes (aço e alumínio) são analisadas, em casos com danos simples e múltiplos de diferentes intensidades, e considera-se mais de um tipo de condição de apoio. Realiza-se então a análise modal numérica para os casos definidos e aplicam-se os métodos propostos de identificação por frequências e curvaturas modais. Em seguida, é feita a fusão de dados – cujo procedimento de execução

será detalhado mais a frente – considerando múltiplos modos de vibração para maior acurácia dos resultados.

## **1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO**

O presente trabalho inicia-se com a Introdução, que traz uma breve contextualização, motivação para realização da pesquisa e objetivos, bem como uma síntese da metodologia aplicada. Traz no segundo capítulo uma Revisão Bibliográfica sobre os principais assuntos aqui abordados, incluindo tópicos sobre identificação de danos por parâmetros modais, onde são discutidos frequência natural e a curvatura modal, e aplicação de fusão de dados na identificação de danos. Já o terceiro capítulo aborda a Fundamentação Teórica em que todo este estudo se baseia, abordando fundamentos da análise modal, o efeito da presença dos danos nos valores das frequências naturais, explicação do método da diferença de curvatura modal, além de uma breve explicação sobre probabilidade bayesiana e fusão de dados. O capítulo quatro traz informações a respeito da Metodologia utilizada na pesquisa, com um fluxograma do processo de identificação de dano adotado, uma introdução sobre modelagem do dano, além de descrever os modelos utilizados nas análises e os parâmetros de malha, bem como os casos de dano com os valores de intensidade considerados; conta também com uma breve explicação da consideração de ruído realizada no trabalho. Em seguida, o capítulo cinco traz os Resultados e Discussões a respeito destes, enquanto o sexto apresenta a Conclusão do trabalho, recomendações para trabalhos futuros e os trabalhos desenvolvidos e publicados a partir desta dissertação.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo será realizada uma revisão do estado da arte dos principais temas que permeiam o desenvolvimento deste trabalho. Inicia-se com definições a respeito do processo de Monitoramento de Saúde Estrutural e os principais trabalhos realizados, levando em conta a utilização de parâmetros modais na detecção do dano; ainda, traz uma revisão de estudos realizados considerando dois parâmetros: frequências naturais e a diferença de curvatura modal – parâmetros estes que são também utilizados nesta pesquisa. Em seguida, traz uma breve revisão da utilização de métodos de fusão de dados aplicados ao processo de detecção de dano, utilizando os mais diversos algoritmos.

### 2.1 IDENTIFICAÇÃO DE DANOS POR PARÂMETROS MODAIS

*Structural Health Monitoring* – SHM, como definido por Inman et al. (2005), pode ser entendido como o processo de identificação ou detecção de falhas estruturais nos campos aeroespacial, civil e mecânico. Esta identificação é usualmente feita através da extração de informações de parâmetros vibracionais da estrutura – parâmetros estes que devem ser sensíveis à presença de dano – obtidas periodicamente através de sensores. As informações extraídas são então processadas e é realizada uma análise estatística para determinação do estado atual do sistema e da sua capacidade de operação plena. Ainda, SHM pode ser aplicado a longo prazo, com a finalidade de manter informações atualizadas a respeito da capacidade do sistema de continuar seu funcionamento adequado mesmo com o efeito de intempéries e degradação natural. Cada uma dessas etapas pode ser realizada utilizando-se os mais diversos métodos.

Como em diversas áreas da ciência, não existe um método idealmente aplicável para todos os casos de estudo – a identificação de danos de natureza multifacetada ou não linear e que não causem variações nos parâmetros mensuráveis (tais como micro-trincas ou corrosão) não pode ser realizada através de processos de SHM baseados na observação de variações das grandezas modais, por exemplo; deste modo, o campo de SHM se desenvolveu em caminhos distintos. Um destes é a análise utilizando métodos não destrutivos em um campo chamado de *Nondestructive Damage Evaluation* (NDE), que se apoiam principalmente na possibilidade da utilização de métodos de coleta de dados e análise de parâmetros sem a necessidade de avariar a estrutura ainda mais. Um dos estudos mais antigos a respeito do tema foi realizado por Adams et al. (1978), onde foi possível notar que a presença do dano se manifesta como uma redução na rigidez que, por sua vez, provoca variação nos valores das

frequências naturais. Assim, foi possível obter valores até mesmo em estruturas que possuíam grande parte de sua superfície inacessível para medições, uma vez que só foi necessário um ponto de acesso para aferir o valor da frequência. Os testes geraram bons resultados para localização e detecção do dano em estruturas nas quais é possível fazer a aproximação do modelo por uma análise unidimensional.

Hu e Liang (1993) aplicaram dois métodos de modelagem combinados em uma técnica integrada de análise não destrutiva: o primeiro modelo utiliza molas com massa desprezível para representar a diminuição da rigidez local provocada por danos atreladas ao teorema de Castigliano e métodos de perturbação para relacionar as variações observadas nas frequências e a presença e intensidade do dano; o segundo modelo combina o conceito de tensão efetiva e o princípio de Hamilton. A junção de ambos os métodos em uma função combinada permite a identificação e quantificação de danos múltiplos em estruturas.

Kawiecki (2001) utilizou uma série de piezoelétricos para obter informações de amortecimento modal a fim de utilizá-las na detecção de danos e de monitoramento estrutural. Jaishi e Ren (2006) apresentaram um método de atualização de modelo (*model updating*) levando em conta a flexibilidade modal, parâmetro sensível à presença de dano na estrutura, auxiliando na identificação de elementos danificados. Radzienski, Krawczuk e Palacz (2011) realizaram estudos de identificação de danos por fadiga em uma viga de alumínio, utilizando variações na frequência natural e aferições dos modos de vibração. Domingues (2019) utilizou a variação de energia de deformação modal dos modos de vibração de um painel do tipo colmeia para detectar falhas.

Em estudos mais recentes, Vega e Yu (2022) utilizaram acelerômetros embutidos em smartphones operantes do sistema Android™ somado a algoritmos de redes neurais (*Deep Neural Networks* – DNNs) e sistemas *fuzzy*. Os acelerômetros são utilizados para medir a aceleração linear do sistema analisado em duas dimensões (dadas como  $x$  e  $y$ ), e os dados obtidos são processados através de uma rede *fuzzy* (*Fuzzy Neural Network* – FNN) que, por sua vez, retorna informações a respeito da presença de dano na estrutura medida. Este método é eficaz apenas na determinação da presença do dano ou não, mas devido à sua aplicação simples e acessível — uma vez que o sensor utilizado é um smartphone — é interessante o desenvolvimento da técnica para sistemas e análises mais complexas.

### **2.1.1 Frequências naturais**

Dentre os diversos parâmetros que podem ser analisados na detecção de danos, é natural que se destaquem aqueles que podem ser obtidos de maneiras mais simples e com menores chances de erro, pois são acompanhados de uma maior aplicabilidade do método. Assim, as frequências naturais têm se apresentado como boas candidatas que cumprem os requisitos propostos. Um dos estudos pioneiros na utilização de frequências naturais na identificação e localização de danos foi realizado por Cawley e Adams (1978; 1979): dando prosseguimento aos estudos de métodos NDE mencionados anteriormente, os autores foram capazes de utilizar o método dos elementos finitos (MEF) e medidas de valores de frequências naturais das

estruturas não danificadas e danificadas para detectar, localizar e quantificar – de maneira mais elementar – o dano nas estruturas. A mera presença do dano é identificada imediatamente mediante a aferição dos valores das frequências, visto que estas possuem valores menores quando na presença de dano.

Salawu (1997) discorre sobre a utilização de frequências naturais na identificação de danos, partindo dos efeitos do dano nas frequências e abordando até mesmo métodos de detecção e fatores a serem considerados no processo. Lee e Chung (2000) apresentaram um método que permite a localização e estimativa do tamanho de uma trinca em uma viga utilizando as quatro primeiras frequências naturais atreladas à equação de Gudmunson. Hassiotis (2000) desenvolveu um método de identificação de danos através da combinação de informações do domínio do tempo e da frequência; neste caso, utilizou-se medidas de frequências naturais e de parâmetros de Markov – que para um sistema contínuo são, essencialmente, as respostas ao impulso do sistema. Notou-se que a combinação das medições das frequências com os parâmetros de Markov permitiu uma maior eficiência na identificação de danos, além da observação de uma dependência entre quantidade de locais de dano e de medições necessárias para identificação.

Khiem e Toan (2014) apresentaram um método de detecção de danos múltiplos em vigas através da obtenção dos valores de frequências naturais e uma versão modificada do quociente de Rayleigh. Labib, Kennedy e Feathersen (2015) localizaram dano simples em estruturas através da normalização da variação das frequências considerando os valores para os casos com e sem danos. Zhang et al. (2016) conduziram estudos de detecção de dano em vigas de material compósito com delaminação, utilizando a abordagem gráfica proposta inicialmente por Adams et al. (1978) atrelada a redes neurais para determinação de três parâmetros, sendo estes a localização da delaminação em  $x$  e em  $z$ , bem como seu tamanho; o método gráfico utilizado é vantajoso pois não requer muito esforço computacional, além de não necessitar do treinamento de redes — tal como métodos que utilizam redes neurais de maneiras mais convencionais — podendo ser mais facilmente aplicado. Dahak, Touat e Kharoubi (2019) apresentaram uma técnica que não requer a modelagem do dano, apenas os valores das frequências naturais e os vetores de curvatura dos modos de vibração, que foram utilizados para prever a localização e severidade do dano.

Em estudos mais recentes, Ruiz et al. (2024) propõem um método de detecção utilizando *machine learning* (aprendizado de máquina), funções de resposta em frequência (FRFs) e modelagem estocástica. As FRFs são obtidas experimentalmente para os casos sem e com dano, e as informações adquiridas são então transformadas em índices indicadores de dano e utilizadas para alimentar três diferentes algoritmos de classificação – *Decision Tree* (DT – Árvore de Decisão), *Support Vector Machines* (SVM – Máquinas de Vetores de Suporte) e *Artificial Neural Network* (ANN – Redes Neurais Artificiais). Novas informações são utilizadas para testar os algoritmos e, destes analisados, as ANN apresentaram os melhores resultados na identificação de dano.

### 2.1.2 Diferença de curvatura modal

Outros parâmetros modais também têm sido amplamente estudados há décadas para identificação de danos: dentre eles temos a análise de diferença na curvatura dos modos de vibração. Um dos trabalhos pioneiros no desenvolvimento do método da curvatura modal foi realizado por Pandey, Biswas e Samman (1991) – na época, os parâmetros mais considerados eram as frequências naturais e amortecimento, contudo, os autores foram capazes de desenvolver uma conexão entre a presença de dano e variações na curvatura dos modos de vibração de vigas. O método foi capaz de localizar os danos com sucesso, estabelecendo um método que ainda hoje é amplamente estudado e aplicado.

Chandrashekhar e Ganguli (2009) utilizaram as variações nas curvaturas modais atreladas com um sistema de lógica *fuzzy* (*Fuzzy Logic System* – FLS) e algoritmo de janela deslizante para localizar e quantificar o dano em vigas. O FLS foi capaz de detectar o dano com êxito, incluindo casos com presença de ruído e que consideravam medidas faltantes ou com ruído mais elevado que o limiar permitido inicialmente pelo algoritmo. Dawari e Vesmawala (2013) publicaram estudos baseados nas variações na curvatura e flexibilidade modais para identificação de danos em estruturas do tipo colmeia. Wang, Liang e Xiang (2014) identificaram danos em pás de turbinas eólicas através da utilização do MEF para realização da análise dinâmica, em seguida, uma combinação de frequências, deslocamentos e diferenças de curvatura modal são utilizados para detecção do dano.

A diferença de curvatura modal foi também utilizada por He, Yang e Du (2017) – foram realizados testes experimentais e também numéricos para obtenção dos parâmetros modais das vigas sem e com dano, e a diferença de curvatura foi calculada utilizando o método de diferença central. No caso de delaminação de vigas, o dano foi localizado de maneira adequada, e foi possível também a determinação do seu tamanho e grau. Ainda tratando da identificação de danos em vigas delaminadas, Gomes e Giovani (2022) utilizaram um método em duas etapas – na primeira, utiliza-se um indicador de dano baseado nas derivadas dos modos de vibração (*Mode Shape Derivative-Based Damage Identification* – MSDBI); na segunda etapa aplica-se o algoritmo de otimização *sunflower* (*Sunflower Optimization* – SFO) para determinar a severidade do dano através da técnica de minimização da função objetivo.

Garrido et al. (2020) apresentaram uma análise comparativa de quantificação de dano avaliando diferença de curvaturas modais local e média através de uma formulação de diferenças finitas – demonstrou-se que o indicador local é mais fortemente conectado à intensidade do dano, enquanto o indicador médio é menos dependente do tipo do equipamento de medição e do ruído proveniente de medições experimentais. Lin et al. (2020) demonstraram uma abordagem simplificada na identificação de danos em pás eólicas comparando as curvaturas modais de casos intactos e casos com presença de dano. Xiang et al. (2020) basearam suas pesquisas na teoria da entropia da informação, desenvolvendo o indicador *Modal Curvature Utility Information Entropy* (MCUIE). Meng et al. (2023) publicaram estudos referentes à identificação de danos em vigas de madeira utilizando a Transformada de *Wavelet* aplicada à diferença de curvatura modal a fim de obter coeficientes da *wavelet* que, por sua vez, são

capazes de identificar a localização e a intensidade do dano.

## 2.2 FUSÃO DE DADOS NA IDENTIFICAÇÃO DE DANOS

Métodos de fusão de dados, embora soem como algo recente, têm sido estudados há algumas décadas. Goodman, Mahler e Nguyen (1997) definem a fusão de dados como a ação de “localizar e identificar múltiplos objetos desconhecidos de tipos distintos baseando-se em diferentes tipos de evidência. Esta evidência é coletada em um esforço contínuo, através de diversos sensores alocáveis que possuem capacidades distintas [...]” (tradução livre). Em outras palavras, são maneiras de gerenciar diversas informações obtidas de variadas fontes a fim de chegar a uma decisão — frequentemente essas informações possuem natureza estatística. A eficácia da utilização destes métodos de fusão de dados na identificação de danos pôde ser observada por Guo (2006), onde foram conduzidos estudos comparando dois métodos de identificação de danos através de métodos mais elementares com outros três métodos de fusão de dados, e foi possível observar que os métodos de fusão entregaram resultados com maior exatidão na estimativa de dano.

Alguns anos depois, Jiang, Zhang e Koh (2006) aplicaram o método de fusão de dados combinado a redes neurais probabilísticas (*Probabilistic Neural Network* – PNN) para identificação de danos estruturais. Foi observado que a adição da fusão de dados contribuiu positivamente para a finalidade desejada, de modo que foi capaz de aumentar a exatidão e a confiabilidade do método, além de possuir uma excelente tolerância à presença de ruído. O trabalho foi continuado e novos estudos foram publicados por Jiang, Zhang e Yao (2011), utilizando novamente PNN e fusão de dados, mas, desta vez, com aumento do nível de incertezas, utilizando-se informações de entrada não refinadas e com maior nível de ruído. O método se mostrou eficaz, mas, até então, apenas em casos de estudos numéricos. Zhou et al. (2012) identificaram danos estruturais através da integração de métodos de extração de informações por *wavelet*, fusão de dados e algoritmo de floresta aleatória.

Fu e Li (2023) publicaram estudos unindo o conceito de dimensão fractal, fusão de dados e uma rede *counter-propagation* revisada (*Revised Counter-Propagation Network* – RCPN) para identificação de danos. As dimensões fractais são extraídas do sinal original obtido, então é feita uma fusão de dados inicial e os dados inseridos no RCPN para identificação prévia do dano; é feita então uma fusão secundária e a decisão é tomada baseada nas informações. Os resultados demonstraram que os modelos com fusão de dados apresentam resultados significativamente melhores do que aqueles realizados unicamente com a RCPN.

Ainda, é notável que há um acervo de diferentes métodos de fusão de dados, cada qual com uma aplicação recomendada – em termos de análise de dano estrutural, um estratégia que tem sido estudada há muitos anos é a abordagem bayesiana. Ainda na década de 90, Sohn e Law (1997) publicaram estudos utilizando a probabilidade bayesiana para localização e quantificação de dano. Os resultados foram satisfatórios, com alguns problemas de análise já previstos – o esforço computacional crescente e proporcional à quantidade de elementos danificados, a dificuldade de determinação dos parâmetros modais necessários e a possibi-

lidade de uma modelagem equivocada dos danos. Contudo, o estudo aponta que o avanço propiciado pela utilização da probabilidade bayesiana é promissor, e a aplicação do método deve ser estudada mais a fundo.

Guo e Li (2012) realizaram estudos para identificação de danos múltiplos baseados na teoria bayesiana e no algoritmo genético imune (*Immune Genetic Algorithm* – IGA). As fontes de informação utilizadas, isto é, os parâmetros extraídos, são a energia de deformação modal e a frequência; um método bayesiano é então aplicado para integrar as informações obtidas e permitir a localização preliminar do dano e, posteriormente, faz-se uso do algoritmo genético para a determinação do seu tamanho. O método foi capaz de localizar e mensurar o dano com boa eficácia. Yin, Jiang e Yuen (2017) utilizaram a abordagem bayesiana para tratar as incertezas na modelagem de parâmetros estruturais utilizados como auxílio no método de redução de modelo para identificação de dano. Das e Debnath (2020) também utilizaram métodos bayesianos na atualização de modelo no caso da presença de informações incompletas sobre os parâmetros modais necessários.

Barman et al. (2021) aplicaram a fusão de dados bayesiana combinada ao algoritmo de otimização baseado em ensino-aprendizado (*Teaching-Learning Based Optimization* – TLBO) para detecção de danos em diversos tipos de estruturas. Aqui, o dano é preliminarmente identificado através da fusão de dados bayesiana utilizando-se quatro indicadores de dano; o algoritmo TLBO é então implementado como um segundo estágio para identificar o dano com maior precisão e minimizar os esforços computacionais necessários. Os resultados foram bem satisfatórios, permitindo que o método seja aplicado em estruturas grandes e mais complexas, além de apresentar um bom desempenho na presença de ruído.

Zhang et al. (2024) propõem um método de localização de danos em placas utilizando ondas de Lamb (*Lamb waves*) combinadas com fusão de dados bayesiana, com a finalidade de aumentar a exatidão da localização do dano. Quando comparado a métodos tradicionais, demonstrou-se que a técnica proposta produz resultados com menor erro e variância, aumentando a eficácia e diminuindo o tempo computacional. O estudo foi conduzido considerando uma placa de alumínio, abrindo possibilidades para análises em estruturas mais complexas e com condições ambientais mais inconstantes.

### 3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo são introduzidas as bases teóricas que fundamentam as análises realizadas no trabalho. Tais tópicos incluem os fundamentos de análise modal, uma breve explicação de modelagem de dano, bem como a relação da variação nas frequências naturais e a presença ou não de dano, explicação do método da diferença de curvatura modal e como este é aplicado também na detecção de dano, além de uma breve explicação de análise estatística de Bayes juntamente com a fusão de dados bayesiana.

#### 3.1 ANÁLISE MODAL

Vibrações estão presentes em todos os lugares, da vibração das cordas vocais que permitem a comunicação à vibração de asa de uma aeronave em voo devido a forças aerodinâmicas. O entendimento e consideração dos mecanismos de vibração é imprescindível na análise de sistemas mecânicos – em termos gerais, ela ocorre devido a uma troca entre as energias potencial e cinética das componentes do sistema (Inman, 2014).

Sistemas reais são extremamente complexos. Contudo, normalmente é possível analisá-los através de modelos simplificados, identificando os elementos constituintes e suas propriedades dinâmicas e construindo um modelo representativo (Meirovitch, 2001). Estes modelos, por sua vez, têm seu comportamento descrito por equações diferenciais, e a solução para o comportamento do sistema depende do tipo de excitação, das condições de contorno e das características do sistema como um todo.

Um modelo é caracterizado, dentre outras coisas, por sua quantidade de graus de liberdade – define-se como grau de liberdade (GDL) a quantidade mínima de variáveis necessárias para descrever, em qualquer instante de tempo, o estado do sistema. Sistemas com mais de um grau de liberdade contam com a presença de múltiplas frequências naturais de vibração e, além disso, introduzem o conceito de modo de vibração – que pode ser entendido como um vetor que descreve o movimento relativo entre as massas (ou componentes de inércia) do sistema. Um sistema linear amortecido de  $n$  graus de liberdade pode ser modelado como um conjunto massa-mola e representado pela equação que rege o seu movimento, dada pela Eq. (3.1), com condições iniciais  $\{x(0)\} = \{x_0\}$  e  $\{\dot{x}(0)\} = \{v_0\}$ .

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \quad (3.1)$$

onde  $[M]$  é a matriz diagonal  $n \times n$  de massa,  $[C]$  a matriz  $n \times n$  de amortecimento,  $[K]$  a

matriz simétrica  $n \times n$  de rigidez,  $\{f\}$  o vetor de forças aplicadas ao sistema e  $\{x\}$  o vetor  $n \times 1$  de deslocamento com suas respectivas derivadas, tal que:

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

dado que  $x_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) são as variáveis que descrevem o deslocamento para cada um dos graus de liberdade existentes no sistema.

Frequentemente, inicia-se a análise de sistemas pela consideração do seu comportamento em vibração livre não-amortecida, isto é, sem a aplicação de forças externas (Gomes e Giovani, 2022), que considera a relação simplificada dada pela Eq. (3.3).

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (3.3)$$

Uma vez que, no sistema descrito, a resposta à uma perturbação é percebida como uma oscilação da massa devido à presença da mola, é válido assumir uma resposta na forma oscilatória, isto é, uma resposta harmônica, como descrita pela Eq. (3.4),  $\{u\}$  sendo um vetor  $n \times 1$  de constantes a serem determinadas e  $\omega$  os valores de frequência natural do sistema.

$$\{x(t)\} = \{u\}e^{j\omega t} \quad (3.4)$$

Aplicando as derivadas e substituindo (3.4) na equação do movimento (3.3), determina-se que  $\{u\}$  e  $\omega$  têm que ser tais que satisfaçam a Eq. (3.5) apresentada – a restrição de  $\{u\} \neq 0$  é imposta a fim de garantir o movimento no sistema.

$$(-\omega^2[M] + [K])\{u\} = 0, \quad \{u\} \neq 0 \quad (3.5)$$

O problema se torna um problema de autovalor, de modo que é possível estabelecer uma matriz  $[\phi]_{n \times n} = [\{u_1\} \quad \{u_2\} \quad \dots \quad \{u_n\}]$  de autovetores, representativa dos modos de vibração; e uma matriz diagonal  $[\Lambda]_{n \times n}$  como a matriz dos autovalores do sistema, que são as frequências naturais.

Em um sistema de múltiplos GDL, os modos de vibração possuem uma propriedade conhecida como ortogonalidade dos modos. Um detalhamento maior do desenvolvimento matemático até a condição de ortogonalidade pode ser encontrado nas referências (Hutton, 2003), e a propriedade pode ser resumida pela relação dada na Eq. (3.6) para um sistema com  $n$  graus de liberdade.

$$\{u\}_{(i)}^T [M] \{u\}_{(j)} = 0, \quad i \neq j \quad (3.6)$$

o que estabelece, basicamente, que todos os elementos do produto triplo apresentado entre os vetores dos modos de vibração e de massa são iguais à zero para os termos fora da diagonal principal.

Deste modo, é possível considerar o produto que leva em conta a matriz completa dos modos de vibração  $[\phi]^T[M][\phi]$  como sendo uma matriz diagonal e, uma vez que os valores da amplitude dos modos de vibração são apenas representativos do comportamento, é possível escolher arbitrariamente uma normalização dos valores de  $[\phi]$ , tal que a relação expressa na Eq. (3.7) seja verdadeira –  $[I]$  é uma matriz identidade de dimensões  $n \times n$ .

$$[\phi]^T[M][\phi] = [I] \quad (3.7)$$

Considere agora o produto triplo em relação à matriz de rigidez do sistema, isto é,  $[\phi]^T[K][\phi]$  – tem-se da teoria de vibrações que a matriz  $[K]$  é simétrica, portanto, o produto também gera uma matriz simétrica; pela ortogonalidade, sabe-se também que a matriz gerada é diagonal. Retomando a relação da Eq. (3.5) adicionando-se o termo multiplicativo de  $[\phi]^T$ :

$$-\omega^2[\phi]^T[M][\phi] + [\phi]^T[K][\phi] = 0 \quad (3.8)$$

mas pela Eq. (3.7) sabe-se que a o termo envolvendo a matriz de massa  $[\phi]^T[M][\phi]$  é igual à identidade, sendo possível escrever, enfim:

$$[\phi]^T[K][\phi] = [\omega^2] = [\Lambda] \quad (3.9)$$

Para múltiplos GDL, a solução da Eq. (3.3) resulta em um conjunto de equações diferenciais acopladas com soluções analíticas difíceis, portanto, utiliza-se o método da análise modal para desacoplar as equações, transformando-as em  $n$  equações algébricas de soluções significativamente mais simples. A transformação é realizada através de uma mudança de coordenadas considerando a matriz de autovetores  $[\phi]$  definida anteriormente. Sendo  $\{q\}$  o vetor de deslocamento nas coordenadas modais:

$$\{x(t)\} = [\phi]\{q(t)\} \quad (3.10)$$

Substituindo a relação transformada na Eq. do movimento (3.3), tem-se que:

$$[M][\phi]\{q\} + [K][\phi]\{q\} = \{0\} \quad (3.11)$$

Pré-multiplicando a Eq. (3.11) por  $[\phi]^T$  e considerando as relações dadas pelas Eqs. (3.7) e (3.9), torna-se possível escrever a equação desacoplada do movimento, tal que:

$$[I]\{\ddot{q}\} + [\Lambda]\{q\} = \{0\} \quad (3.12)$$

O entendimento do comportamento da estrutura mediante uma ótica da análise vibracional é importante para a compreensão dos mecanismos que permitem o desenvolvimento e aplicação dos métodos de identificação de dano que serão apresentados em seguida.

### 3.2 EFEITO DOS DANOS NAS FREQUÊNCIAS NATURAIS

A deterioração de uma estrutura causa uma variação na sua rigidez local, ou seja, na matriz de rigidez  $[K]$ , variação esta denotada por  $[\delta K]$ . Assume-se que a deterioração é pequena o suficiente de modo que não causa alterações na matriz de massa  $[M]$ . Pela Eq. (3.5), é possível notar que uma variação em  $[K]$  mantendo  $[M]$  invariante induz uma variação em  $\omega$  e  $[\phi]$ , ou seja, nos valores das frequências naturais e nos modos de vibração. Considere a representação das frequência através de  $\lambda = \omega^2$ , tomando cada elemento individualmente, as variações são representadas por  $\delta\lambda_j$  e  $\{\delta\phi_j\}$ , agora  $j$  sendo o índice do modo de vibração. Assim, a Eq. (3.5) deve ser adaptada para a Eq. (3.13):

$$([K] + [\delta K]) - (\lambda_j + \delta\lambda_j)[M])(\{\phi_j\} + \{\delta\phi_j\}) = 0 \quad (3.13)$$

Expandindo a relação e negligenciando termos de segunda ordem, simplifica-se para a Eq. (3.14):

$$[\delta K]\{\phi_j\} - \delta\lambda_j[M]\{\phi_j\} = -([K] - \lambda_j[M])\{\delta\phi_j\} \quad (3.14)$$

e multiplicando ambos os lados por  $\{\phi_j\}_j^T$  tem-se:

$$\{\phi_j\}_j^T [\delta K]\{\phi_j\} - \delta\lambda_j \{\phi_j\}_j^T [M]\{\phi_j\} = -([K] - \lambda_j[M])\{\phi_j\}_j^T \{\delta\phi_j\} \quad (3.15)$$

Retomando a discussão anterior que culminou na determinação da Eq. (3.9), é possível estabelecer uma relação entre variação no valor da frequência natural e na rigidez do sistema, dada na Eq. (3.16):

$$\delta\lambda_j = \{\phi_j\}_j^T [\delta K]\{\phi_j\} \quad (3.16)$$

Considere, em seguida, a representação de uma viga através do método dos elementos finitos, que utiliza os princípios do cálculo variacional para modelar equações que descrevem o comportamento de um sistema a fim de encontrar soluções aproximadas (Hutton, 2003). O método consiste em discretizar a estrutura em nós que formam elementos, e os valores desejados para cada análise são obtidos através de funções interpoladoras entre os nós – estas funções interpoladoras podem também ser chamadas de funções de forma do elemento. Isto posto, pelos fundamentos variacionais, partindo do princípio da energia potencial mínima é possível escrever para a energia potencial total  $\pi$  de um sistema a relação observada na Eq. (3.17), onde  $U$  é a energia de deformação e  $E_{ext}$  a energia potencial das forças externas.

$$\pi = U + E_{ext} = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\} \{\varepsilon\}^T dV - \{p\} \{d\}^T - \int_S \{s\} \{x\}^T dS - \int_V \{b\} \{x\}^T dV \quad (3.17)$$

aqui,  $\sigma$  é a tensão,  $\varepsilon$  a deformação,  $p$  o vetor de forças nodais,  $d$  o vetor de deslocamento nodal,  $s$  as forças de superfície em  $S$ ,  $b$  as forças de corpo no volume  $V$ , e  $x$  o vetor de deslocamento. Explicações mais detalhadas a respeito de métodos variacionais podem ser encontradas nas referências (Reddy, 2002; 2019).

Aplicando os princípios variacionais na Eq. (3.17) e considerando  $x = \eta d$  onde  $\eta$  são as funções de forma dos elementos, é possível escrever:

$$\left[ \int_V [B]^T [D] [B] dV \right] \{x\} = \{p\} + \int_S \{\eta\}^T \{s\} dS + \int_V \{\eta\}^T \{b\} dV \quad (3.18)$$

onde  $[B]$  é a matriz das derivadas das funções de forma dos elementos e  $[D]$  a matriz constitutiva simétrica. Na ausência de forças externa, pode-se escrever simplesmente:

$$\left[ \int_V [B]^T [D] [B] dV \right] \{x\} = 0 \Rightarrow [K^e] \{x\} = 0 \quad (3.19)$$

de modo que o sobrescrito  $[K^e]$  indica a rigidez de um único elemento. Para a matriz de rigidez, então, considera-se a relação dada na Eq. (3.20).

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (3.20)$$

A variação total na matriz de rigidez pode ser expressa como uma soma das contribuições de cada um dos elementos – considere  $[K^e]_i$  a parcela de rigidez de um único elemento  $i$  na rigidez total, e  $\delta k_i$  a variação da rigidez deste mesmo elemento.  $N$  é o número total de elementos. A variação total da rigidez pode ser escrita como na Eq. (3.21).

$$[\delta K]_{total} = \sum_{i=1}^N [K^e]_i \delta k_i \quad (3.21)$$

Aqui é considerada a hipótese de conservação da matriz simétrica e conectividade estrutural. Substituindo (3.21) em (3.16), é possível obter uma relação entre variação das frequências naturais e rigidez:

$$\delta \lambda_j = \sum_{i=1}^N \{\phi_j\}^T [K^e]_i \{\phi_j\} \delta k_i, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3.22)$$

Para a variação considerando todos os elementos, estabelece-se a Eq. (3.23):

$$\delta \lambda = [A] \delta k \quad (3.23)$$

onde  $[A]$  é uma matriz  $m \times N$  cujos elementos são as variações relativas de cada elemento,  $a_{ji} = \{\phi_j\}^T [K]_i^e \{\phi_j\}$ . Assim, é possível estabelecer uma relação entre variação na rigidez local do elemento e no valor da frequência natural medido.

### 3.3 MÉTODO DA DIFERENÇA DE CURVATURA MODAL

Partindo das definições propostas pelas teorias do Cálculo Diferencial, é possível escrever a curvatura  $\kappa$  de uma curva parametrizada  $r(t)$  como na Eq. (3.24) (Stewart, 2013), onde o símbolo sobrescrito é indicativo de derivada. Maiores detalhes sobre parametrização de curvas e o desenvolvimento até chegar na relação demonstrada encontram-se na referência supracitada.

$$\kappa(t) = \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{|(r')^3|} \quad (3.24)$$

e considerando a parametrização  $r(x) = \langle x, v(x, t) \rangle$ , a relação para curvatura se torna como na Eq. (3.25), onde a variável  $v$  indica a deflexão da linha elástica.

$$\kappa(x, t) = \frac{v''(x, t)}{(1 + (v'(x, t))^2)^{3/2}} = \frac{(d^2v(x, t)/dx^2)}{(1 + (dv(x, t)/dx)^2)^{3/2}} \quad (3.25)$$

contudo, é plausível considerar que a inclinação da deflexão dada por  $(dv(x, t)/dx)$  é muito pequena, de modo que  $(dv(x, t)/dx) \ll 1$ , portanto a relação final toma a forma da Eq. (3.26).

$$\kappa(x, t) = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.26)$$

Considere agora uma viga de Euler-Bernoulli com todas as hipóteses aplicáveis, isto é, material linear, homogêneo e isotrópico, seções planas permanecem planas, não há acoplamento de rotação e translação e deformações por cisalhamento podem ser negligenciadas (Inman, 2014). Ainda, considere o elemento de viga sob flexão como ilustrado na Fig. 3.1.

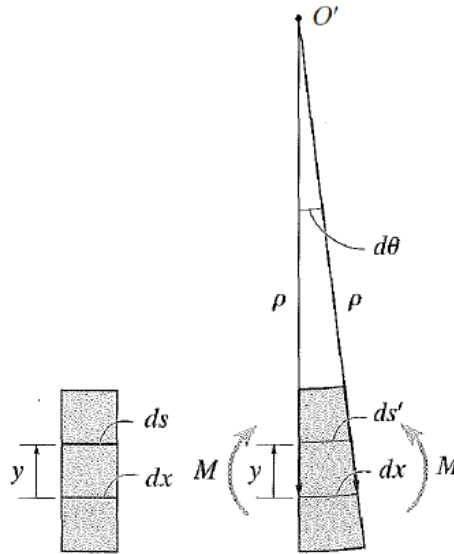
O elemento  $dx$  encontra-se sobre a linha neutra da viga, de modo que não sofre deformação. A deformação do elemento  $ds$ , por sua vez, pode ser escrita como:

$$\varepsilon = \frac{ds - ds'}{ds} \quad (3.27)$$

mas, considerando também a geometria antes da deformação, é possível escrever  $ds = dx = \rho d\theta$  e  $ds' = (\rho - y)d\theta$ , onde  $\rho$  é o raio de curvatura,  $y$  a distância entre a linha neutra e  $ds$  e  $\theta$  o ângulo entre seções transversais. Assim, a relação de deformação se torna:

$$\varepsilon = \frac{[(\rho - y) - \rho]d\theta}{\rho d\theta} = -\frac{y}{\rho} \quad (3.28)$$

e para um material linear elástico, através da lei de Hooke é possível escrever  $\varepsilon = \sigma/E$ ,  $E$  é o módulo de elasticidade do material. Para vigas em flexão pura, a tensão pode ser calculada



**Figura 3.1.** Ilustração do elemento de viga sob flexão. Adaptado de Hibbeler (2010).

por:

$$\sigma = -\frac{M(x, t)y}{I(x)} \quad (3.29)$$

onde  $M$  é o momento fletor e  $I$  o momento de inércia. Assim, a Eq. (3.28) se torna a relação descrita pela Eq. (3.30).

$$-\frac{M(x, t)y}{I(x)} = -\frac{y}{\rho} \quad (3.30)$$

reescrevendo a fim de definir a curvatura como  $\kappa = 1/\rho$ :

$$\kappa(x, t) = \frac{1}{\rho} = \frac{M(x, t)}{EI(x)} \quad (3.31)$$

É possível, enfim, relacionar as Eqs. (3.26) e (3.31), de modo a escrever:

$$\frac{M(x, t)}{EI(x)} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \Rightarrow M(x, t) = EI(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.32)$$

É conhecido da mecânica dos sólidos que a cortante  $V(x, t)$  é tal que  $V(x, t) = \partial M(x, t)/\partial x$ , e uma força distribuída  $w(x, t)$  é, por sua vez:

$$w(x, t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.33)$$

portanto, pela Eq. (3.32):

$$w(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right) \quad (3.34)$$

Ainda, tomando a segunda lei de Newton como  $F = ma$ , para o problema analisado, considerando o deslocamento  $v(x, t)$ , é possível escrever:

$$F = m \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.35)$$

unindo as Eqs. (3.34) e (3.35), então:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right) + m(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (3.36)$$

Assumindo uma formulação com elementos discretos, a viga pode ser dividida em uma quantidade finita de nós ao longo de seu comprimento. O deslocamento total da viga  $v(x, t)$  pode ser escrito através da superposição dos modos de vibração  $\phi_j(x)$  ( $j$  sendo o número do modo) e da coordenada dos nós  $q_i(t)$  ( $i$  sendo o número do elemento), tal que:

$$v(x, t) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \phi_j(x) q_i(t) \quad (3.37)$$

e, pela Eq. (3.26) da curvatura, enfim:

$$\kappa(x, t) = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} q(t) \quad (3.38)$$

Em análises práticas, devido a limitações de equipamento, é comum utilizar-se o método da diferença central no cálculo da curvatura modal, considerando as medições dos modos de vibração. A aproximação é feita através da Eq. (3.39).

$$C_j(i) = \frac{\phi_{j(i+1)} + \phi_{j(i-1)} + 2\phi_{j(i)}}{l^2} \quad (3.39)$$

com  $l$  sendo a distância entre os elementos. Assumindo para a viga não danificada o índice  $C_j^u(i)$  e para a viga danificada  $C_j^d(i)$ , para a diferença absoluta da curvatura tem-se:

$$\Delta C_j(i) = |C_j^d(i) - C_j^u(i)| \quad (3.40)$$

e considera-se a média das diferenças como a Diferença de Curvatura Modal (CMD, *Curvature Mode Difference*), tal que, para uma quantidade  $N$  de modos, tem-se a relação dada pela Eq. (3.41).

$$\text{CMD}_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Delta C_j(i) \quad (3.41)$$

### 3.4 FUSÃO DE DADOS BAYESIANA

Os métodos de fusão de dados combinam informações provenientes de diversas fontes, utilizando tais informações para aprimorar os resultados buscados. O princípio fundamental de funcionamento deste tipo de análise é o fato de cada fonte produzir um resultado baseado em sua própria observação, este resultado é então enviado para um centro de fusão que considera as diversas observações realizadas pelas várias fontes; a decisão é então tomada baseada no método ou algoritmo aplicado.

No presente trabalho, a abordagem aplicada foi a fusão de dados bayesiana – a probabilidade bayesiana, essencialmente, descreve como a probabilidade de ocorrência de um evento varia quando novas informações são apresentadas; em outras palavras, a probabilidade é atualizada a cada nova informação. A probabilidade condicional segundo Bayes pode ser representada pela Eq. (3.42).

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} \quad (3.42)$$

Neste ponto, é importante definir o significado de cada termo de probabilidade:

- $A$ : evento, aquilo que está sendo analisado a ocorrência;
- $B$ : fonte, de onde vem a informação;
- $P(B|A)$ : *likelihood*, probabilidade de ocorrência de  $B$  dado que  $A$  é verdade;
- $P(A)$ : probabilidade *a priori*, probabilidade de ocorrência de  $A$ ;
- $P(B)$ : probabilidade de  $B$ ;
- $P(A|B)$ : probabilidade *a posteriori*, probabilidade atualizada de  $A$  dada a evidência  $B$ .

Considere, agora, que  $A_i$  são os eventos (hipóteses) e  $S_m$  as fontes (informações). Utilizando propriedades da probabilidade bayesiana (Bernardo and Smith, 2000) é possível chegar na Eq. (3.43) para a probabilidade *a posteriori*:

$$P(A_i|S_m) = \frac{P(S_m|A_i)P(A_i)}{\sum_{u=1}^n P(S_m|A_u)P(A_u)} \quad (3.43)$$

e considerando as fontes como independentes, esta pode ser reescrita na forma:

$$P(A_i|S_m) = \frac{\prod_{j=1}^m P(S_j|A_i)P(A_i)}{\sum_{u=1}^n (\prod_{j=1}^m P(S_j|A_u)P(A_u))} \quad (3.44)$$

Ilustrando para o problema analisado:

- $A_i$ : evento, ocorrência de dano no elemento  $i$ ;
- $S_m$ : informação obtida pelo modo de vibração  $j$  analisado.

Definindo a probabilidade anterior como  $P(A_i) = 1/n$ , e assume-se a probabilidade condicional como sendo  $P(S_j|A_i) = \text{DPF}_{i,j}$ . DPF é a função de posição de dano (*Damage Position Function*), função que é responsável pela localização do dano estrutural, e pode assumir diversas formas, a depender do método considerado – as DPFs utilizadas neste trabalho serão detalhadas nas subseções seguintes. A probabilidade toma a forma da Eq. (3.45), onde é realizada a fusão de dados de múltiplas DPFs seguindo os princípios da probabilidade bayesiana.

$$P(A_i|S_m) = \frac{\prod_{j=1}^m \text{DPF}_{i,j}}{\sum_{u=1}^n (\prod_{j=1}^m \text{DPF}_{u,j})} \quad (3.45)$$

### 3.4.1 Determinação das Funções de Posição de Dano

Para a identificação de danos através de frequências naturais, é necessário definir inicialmente o conceito de curvas de variações relativas nas frequências naturais (do inglês, *Relative Natural Frequency Changes curves, RNFC curves*)

Considere uma viga de elementos finitos. Permanece também a consideração de que o índice  $i$  indica o número do elemento de viga e  $j$  o número do modo analisado. Deste modo, a frequência natural de uma viga não danificada pode ser denotada por  $\omega_j$ , enquanto para a viga com dano no elemento  $i$  pode ser denotada por  $\omega_{i,j}^d$ . É possível calcular uma variação nas frequências relativas aos modos e elementos danificados pela relação expressa na Eq. (3.46).

$$\Delta\omega_{i,j} = \frac{\omega_j - \omega_{i,j}^d}{\omega_j} \quad (3.46)$$

e aplica-se uma normalização min-máx (Sha et al., 2019), dada pela Eq. (3.47).

$$\Delta\bar{\omega}_j = \frac{\Delta\omega_j - \min(\Delta\omega_j)}{\max(\Delta\omega_j) - \min(\Delta\omega_j)} \quad (3.47)$$

Estudos realizados (Sha et al., 2019) foram capazes de demonstrar que é possível obter uma curva análoga à RNFC analisando-se os modos de vibração. Considere a equação que descreve o modo de vibração  $\phi_j$  de uma viga; a Tab. 3.1 traz uma relação entre as condições de apoio da viga e seus modos de vibração aproximados analiticamente (as informações foram adaptadas da referência (Inman, 2014)).

**Tabela 3.1.** Modos de vibração de vigas (adaptado de Inman (2014))

| Configuração    | $\lambda_n$           | $\sigma_n$  | Modo de vibração $\phi$  |
|-----------------|-----------------------|---|--|
| Biengastada     | $\frac{(2n+1)\pi}{2}$ | $\frac{\cosh \lambda_n - \cos \lambda_n}{\sinh \lambda_n - \sin \lambda_n}$ | $\cosh \lambda_n - \cos \lambda_n - \sigma_n (\sinh \lambda_n - \sin \lambda_n)$ |
| Engastada-livre | $\frac{(2n-1)\pi}{2}$ | $\frac{\sinh \lambda_n - \sin \lambda_n}{\cosh \lambda_n + \cos \lambda_n}$ | $\cosh \lambda_n - \cos \lambda_n - \sigma_n (\sinh \lambda_n - \sin \lambda_n)$ |
| Livre-livre     | $\frac{(2n+1)\pi}{2}$ | $\frac{\cosh \lambda_n - \cos \lambda_n}{\sinh \lambda_n - \sin \lambda_n}$ | $\cosh \lambda_n + \cos \lambda_n - \sigma_n (\sinh \lambda_n + \sin \lambda_n)$ |

Dado que  $\phi$  são os modos de vibração, tem-se que a curvatura dos modos é dada

por  $\phi''$ , como explicado anteriormente na seção 3.3, e a curva RNFC pode ser aproximada considerando a curvatura dos modos ao quadrado, isto é,  $(\phi'')^2$ . Maiores detalhes desta aproximação encontram-se nas referências (Sha et al., 2019). Normalizando esta curva por min-máx através da Eq. (3.48), onde  $\zeta$  é o indicativo do local do dano:

$$g_j(\zeta_i) = \frac{(\phi'')^2 - \min((\phi'')^2)}{\max((\phi'')^2) - \min((\phi'')^2)} \quad (3.48)$$

É possível então definir uma DPF relacionando as duas curvas obtidas. Para a localização do dano no elemento  $i$  do  $j$ -ésimo modo, a DPF toma a forma explicitada na Eq. (3.49).

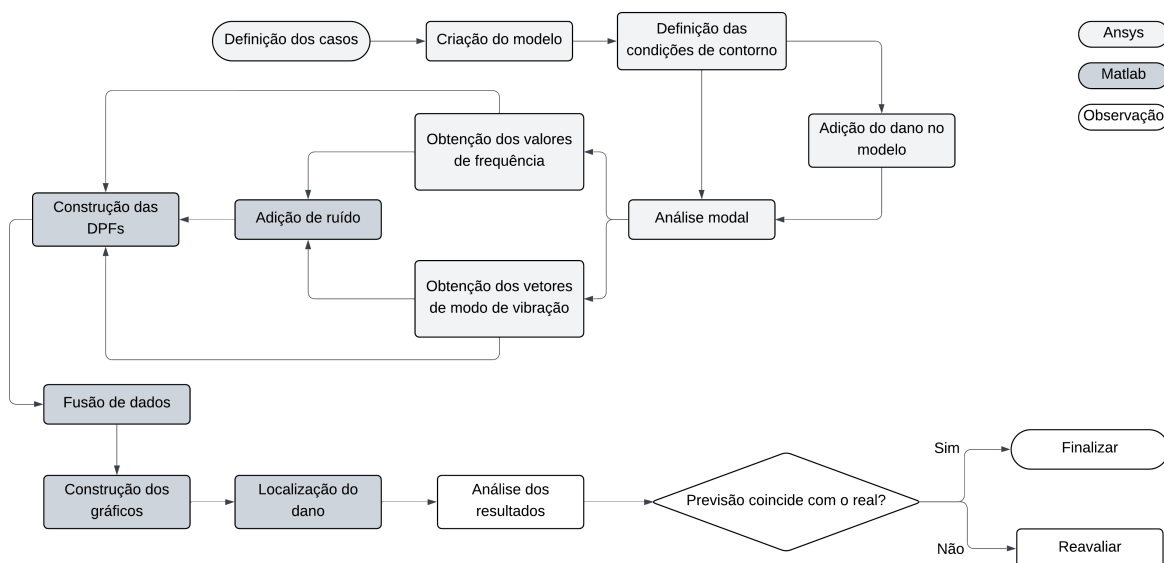
$$\text{DPF}_{i,j} = 1 - |g_j(\zeta_i) - \Delta\bar{\omega}_j| \quad (3.49)$$

No método da diferença de curvatura modal, as DPFs assumem diretamente o valor dos CMDs definidos anteriormente, de acordo com a Eq. (3.50).

$$\text{DPF} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Delta C_j(i) \quad (3.50)$$

## 4 METODOLOGIA

Dois modelos distintos de vigas foram utilizados no presente projeto, sendo um para as análises puramente numéricas, e outro modelo retirado de experimentos realizados pelas referências (Khiem and Toan, 2014), onde os valores de frequência obtidos pela referência foram considerados na identificação do dano. Os modelos adotados diferem nas dimensões, propriedades do material e local de presença do dano; ainda, para cada um desses modelos, há duas variações no modo de representação do dano. Um fluxograma do processo de modelagem do problema e aplicação dos métodos de detecção de dano propostos no trabalho encontra-se ilustrado na Fig. 4.1 – note que as etapas estão identificadas por cor de acordo com o software utilizado, sendo o identificador "Observação" ausente da utilização de software, contando com a análise crítica do avaliador.



**Figura 4.1.** Fluxograma do processo de detecção de dano proposto.

Um quadro resumo de todos os casos estudados no trabalho encontra-se ilustrado na Tab. 4.1. É importante pontuar que os casos considerados para o modelo da viga de alumínio foram utilizados nas análises numéricas considerando o método de variação das frequências; enquanto os casos do modelo da viga de aço foram incluídos nas análises do modelo experimental pelo método das frequências, e também nas análises numéricas pelo método da diferença da curvatura modal. Um detalhamento maior sobre os casos encontra-se nas seções seguintes. Os valores apresentados na Tabela representam uma variação percentual na rigidez local devido à presença de dano.

**Tabela 4.1.** Quadro resumo de todos os casos de dano analisados.

| <b>REDUÇÃO PERCENTUAL DA RIGIDEZ LOCAL</b> |              |                      |                     |                     |
|--|--------------|----------------------|---------------------|---------------------|
|  | <b>Casos</b> | <b>Local do dano</b> |                     |                     |
|  |              | $\zeta_1 = 0,02 (m)$ | $\zeta_2 = 0,2 (m)$ | $\zeta_3 = 0,4 (m)$ |
| <b>MODELO DA VIGA DE ALUMÍNIO</b>          | <b>A1</b>    | 10%                  | 0                   | 0                   |
|  | <b>A2</b>    | 10%                  | 0                   | 10%                 |
|  | <b>A3</b>    | 10%                  | 10%                 | 10%                 |
|  | <b>A4</b>    | 20%                  | 50%                 | 10%                 |
|  | <b>A5</b>    | 50%                  | 50%                 | 50%                 |
|  |              |                      |                     |                     |
|  | <b>Casos</b> | <b>Local do dano</b> |                     |                     |
|  |              | $\zeta_1 = 0,2 (m)$  | $\zeta_2 = 0,4 (m)$ | $\zeta_3 = 0,7 (m)$ |
| <b>MODELO DA VIGA DE AÇO</b>               | <b>S1</b>    | 0                    | 10%                 | 0                   |
|  | <b>S2</b>    | 10%                  | 10%                 | 0                   |
|  | <b>S3</b>    | 10%                  | 10%                 | 10%                 |
|  | <b>S4</b>    | 10%                  | 20%                 | 10%                 |
|  | <b>S5</b>    | 20%                  | 20%                 | 10%                 |
|  | <b>S6</b>    | 20%                  | 20%                 | 20%                 |
|  | <b>S7</b>    | 20%                  | 30%                 | 20%                 |
|  | <b>S8</b>    | 30%                  | 30%                 | 20%                 |
|  | <b>S9</b>    | 30%                  | 30%                 | 30%                 |
|  | <b>S10</b>   | 30%                  | 30%                 | 40%                 |
|  | <b>S11</b>   | 30%                  | 40%                 | 40%                 |
|  | <b>S12</b>   | 40%                  | 40%                 | 40%                 |
|  | <b>S13</b>   | 50%                  | 40%                 | 40%                 |
|  | <b>S14</b>   | 50%                  | 50%                 | 40%                 |
|  | <b>S15</b>   | 50%                  | 50%                 | 50%                 |

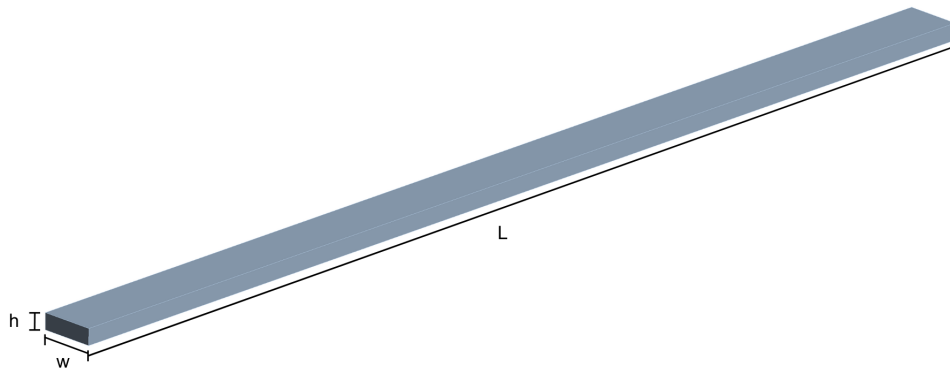
#### 4.1 MODELAGEM DE DANO

O dano pode ser entendido como qualquer variação do estado ideal de um material que afeta o seu funcionamento. Essas variações podem envolver mecanismos de separação do material, trincas, vazios microscópicos e delaminações, descontinuidades, *kinking* de fibras (no caso de compósitos) que são defeitos associados a micro-flambagens por desalinhamento de fibras, deslocamentos, entre outros, e podem se manifestar a depender das condições de operação da estrutura, do tipo de material e da microestrutura (Inman et al., 2005). Além disso, diversos tipos de danos podem estar presentes em uma estrutura, porém o modo dominante de falha, isto é, o tipo de dano mais provável de ocasionar uma futura falha no sistema depende de diversos fatores, tais como o layout estrutural em si, o comportamento microestrutural como um todo, bem como as condições de carregamento do material. Para análises mais complexas, entretanto, é necessário considerar a interação entre o comportamento dos diversos tipos de danos presentes, e não os considerar como eventos individuais – no presente trabalho, a análise é simplificada e são considerados danos macroscópicos, pontuais e isolados, sem levar em conta imperfeições microestruturais.

## 4.2 MODELAGEM DE ANÁLISE POR FREQUÊNCIA

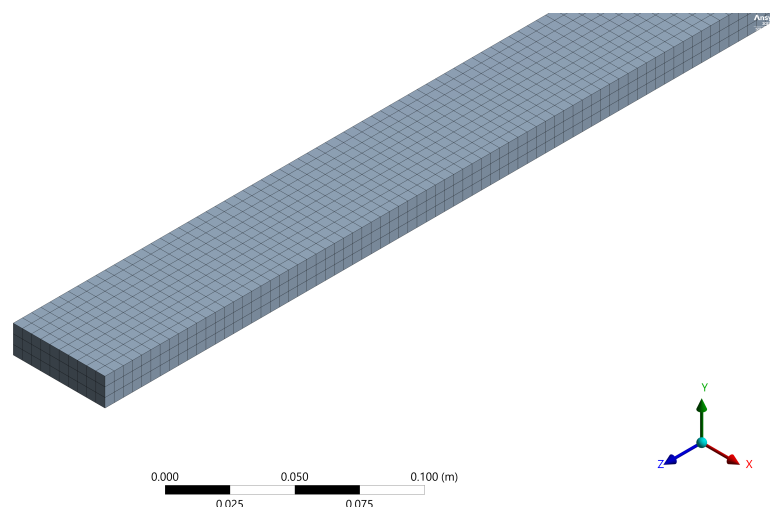
### 4.2.1 Modelos numéricos

Na identificação de danos com análise dos valores da frequência obtidos numericamente, foi utilizado um modelo de viga de dimensões como ilustradas na Fig. 4.2, sendo  $w = 0,05m$ ,  $h = 0,015m$  e  $L = 1m$ . A viga é composta do material alumínio 7075-T6, com módulo de elasticidade  $E = 71,7GPa$ , densidade  $\mu = 2810kg/m^3$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,33$ .



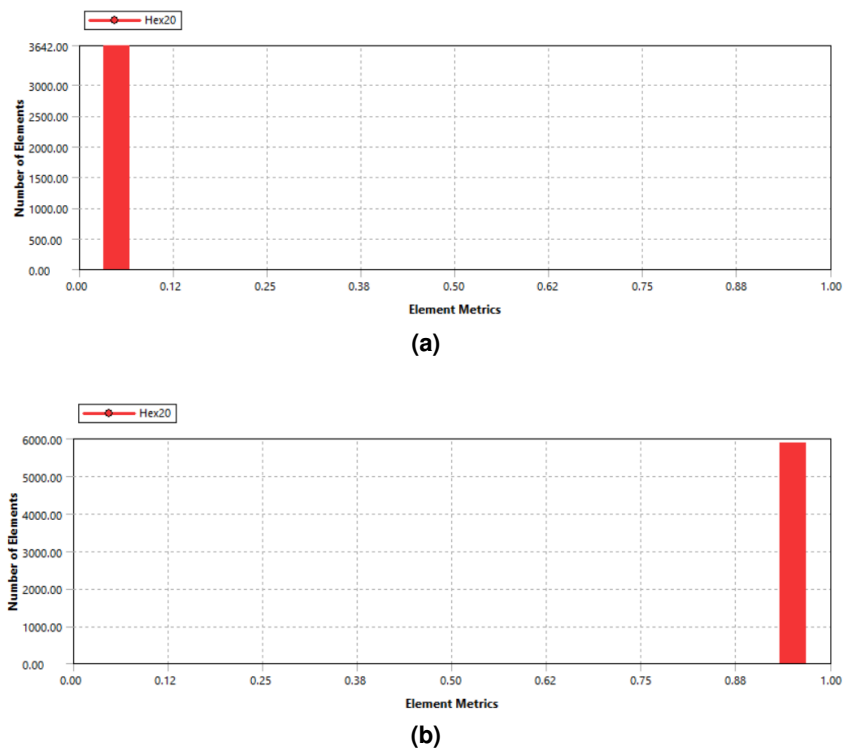
**Figura 4.2.** Ilustração da viga utilizada nas análises com definição das respectivas dimensões.

Os modelos numéricos foram construídos utilizando o software ANSYS Academic Research Release 24.2. Para a construção da malha, foi utilizado um elemento hexaédrico do tipo SOLID186, que contém 20 nós com 3 graus de liberdade cada – translação em  $x$ ,  $y$  e  $z$  – e os deslocamentos seguem uma aproximação quadrática (ANSYS, 2025). São elementos muito utilizados em análises puramente estruturais, além disso, elementos de maior ordem – neste caso, o elemento quadrático em comparação ao elemento linear – são menos afetados pelo fenômeno de *shear locking*, que é a incapacidade dos modelos lineares de capturar adequadamente a flexão do elemento, causando o surgimento de uma tensão cisalhante adicional. Uma ilustração da malha utilizada encontra-se na Fig. 4.3.



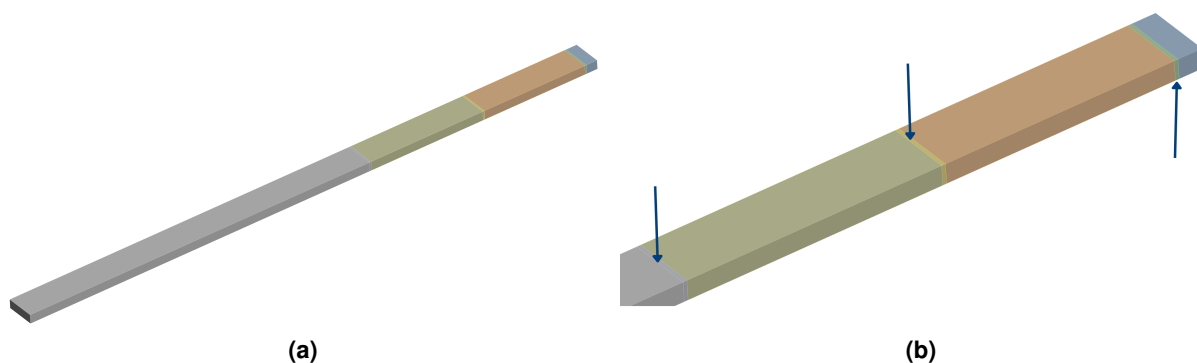
**Figura 4.3.** Ilustração da malha utilizada no modelo.

Para os parâmetros de qualidade de malha, optou-se por avaliar o nível de assimetria (*skewness*) da malha – expressa na Fig. 4.4a – e de razão de aspecto – Fig. 4.4b. É possível observar que os elementos se encontram em valores próximos de zero para o parâmetro de assimetria e próximos de um para a razão de aspecto, valores adequados e que são indicativos de boa qualidade da malha utilizada. Os parâmetros apresentados são para a viga não danificada.



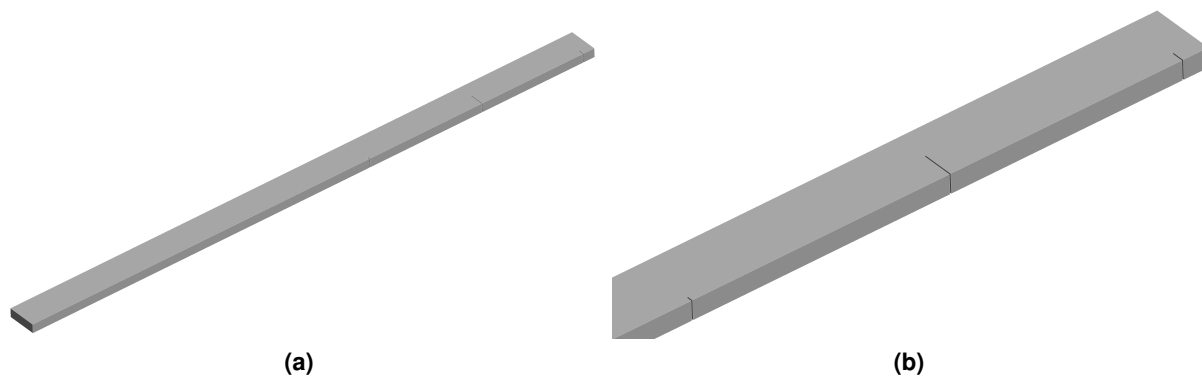
**Figura 4.4.** Parâmetros de qualidade da malha de assimetria (4.4a) e razão de aspecto (4.4b).

Ainda, dois modelos distintos foram desenvolvidos, diferindo entre si no método de representação do dano. Realizou-se a análise modal numérica para extração dos valores de frequência através do algoritmo de extração Block Lanczos (Golub e Underwood, 1977). No primeiro modelo (Fig. 4.5) o dano é modelado como uma diminuição local da rigidez, isto é, no ponto de dano é inserido um material de rigidez menor que a do material da viga, sendo esta diferença proporcional à intensidade do dano. Uma imagem em maior detalhe deste tipo de modelagem encontra-se na Fig. 4.5b – o caso ilustrado é para um dano triplo – e é possível notar o local da presença do dano como sendo as faixas mais estreitas da viga (indicados pelas setas na Fig. 4.5b), onde foram atribuídos os materiais de rigidez diferente.



**Figura 4.5.** Primeiro modelo de viga com dano modelado através da diminuição local da rigidez (4.5a) e um detalhe do dano inserido (4.5b).

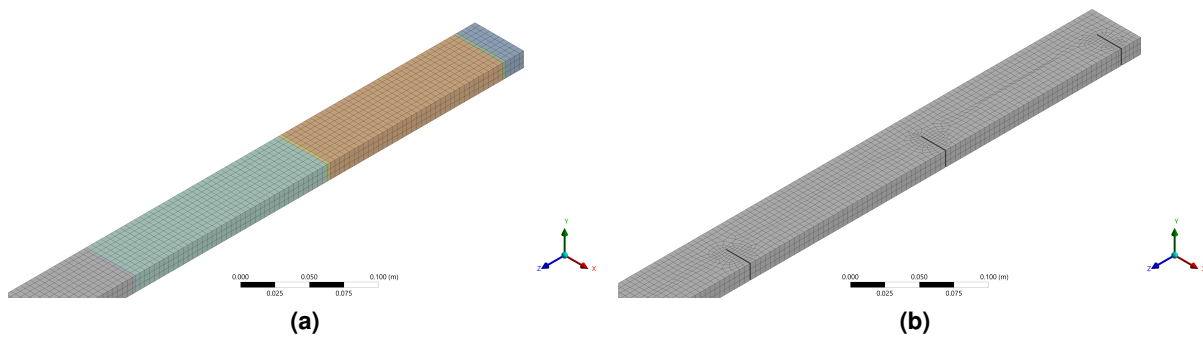
No segundo modelo (Fig. 4.6) por sua vez, o dano é inserido mecanicamente na estrutura, ou seja, é feito um corte passante de profundidade também proporcional à intensidade do dano. Um detalhe dos cortes encontra-se na Fig. 4.6b – o caso ilustrado representa um dano triplo onde cada dano possui uma intensidade diferente. Para cada um dos modelos apresentados foram realizadas análises considerando as condições de apoio biengastada, engastada-livre e livre-livre.



**Figura 4.6.** Segundo modelo de viga com dano modelado através de um corte passante (4.6a) e um detalhe do dano (4.6b).

Através da inspeção visual do modelo adotado, é possível notar que o método de inserção do dano afeta o comportamento da malha, modificando-a nos arredores da presença do dano – esses efeitos podem ser observados na Fig. 4.7. É possível notar que há uma alteração maior no modelo 2 (Fig. 4.7b), enquanto a malha do modelo 1 (Fig. 4.7a) é praticamente não alterada pela presença do dano. Contudo, ao analisar-se os parâmetros de qualidade de malha para ambos os modelos, foi possível notar que os valores permanecem dentro dos apropriados para análises estruturais, conferindo a adequação da malha para os fins desejados – isto é, a deformação da malha próxima ao dano não foi de magnitude considerável para inferir mudanças nos resultados obtidos.

Para este primeiro bloco de análises, foram considerados três possíveis locais de dano ( $\zeta$ ) ao longo da viga, sendo  $\zeta_1 = 0,02m$ ,  $\zeta_2 = 0,2m$  e  $\zeta_3 = 0,4m$ . Analisou-se cinco possíveis



**Figura 4.7.** Detalhe da malha com o dano representado como diminuição da rigidez (4.7a) e inserido mecanicamente (4.7b).

cenários de dano, com intensidades variáveis e variações também de  $\zeta$  – no caso do primeiro modelo, as porcentagens apresentadas representam uma diminuição percentual na rigidez local do elemento danificado; no caso do segundo modelo, indica um dano de tamanho correspondente ao percentual apresentado em relação à largura da viga, isto é, um dano de 10% indica um entalhe com tamanho de 10% da largura da viga, por exemplo. A Tabela 4.2 traz uma descrição dos casos analisados. Os casos foram definidos de modo que fosse possível observar o comportamento do método na identificação de danos simples, duplos e triplos, bem como analisar o efeito da intensidade do dano na detecção.

**Tabela 4.2.** Definição dos casos de dano para os modelos numéricos e análise por frequências naturais.

| Casos     | Local do dano        |                     |                     |
|-----------|----------------------|---------------------|---------------------|
|           | $\zeta_1 = 0,02 (m)$ | $\zeta_2 = 0,2 (m)$ | $\zeta_3 = 0,4 (m)$ |
| <b>A1</b> | 10%                  | 0                   | 0                   |
| <b>A2</b> | 10%                  | 0                   | 10%                 |
| <b>A3</b> | 10%                  | 10%                 | 10%                 |
| <b>A4</b> | 20%                  | 50%                 | 10%                 |
| <b>A5</b> | 50%                  | 50%                 | 50%                 |

#### 4.2.2 Modelo experimental

A análise de cunho experimental foi realizada utilizando os dados de frequência extraídos de artigos de referência (Khiem and Toan, 2014), onde a viga utilizada possui dimensões  $w = 0,02m$ ,  $h = 0,009m$  e  $L = 1,04m$ . O material utilizado foi aço com módulo de elasticidade  $E = 200GPa$ , densidade  $\mu = 7855kg/m^3$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ . Neste caso, considerou-se apenas a condição de apoio biengastada. Foram considerados 3 possíveis locais de dano, sendo estes  $\zeta_1 = 0,2m$ ,  $\zeta_2 = 0,4m$  e  $\zeta_3 = 0,7m$ , com a intensidade do dano variando entre 10% e 50%, gerando 15 casos de dano. Os casos são descritos na Tab. 4.3.

**Tabela 4.3.** Definição dos casos de dano para o modelo experimental e análise por frequências naturais (Adaptados de Khiem e Toan, 2014).

| Casos | Local do dano        |                      |                      |
|-------|----------------------|----------------------|----------------------|
|       | $\zeta_1 = 0, 2 (m)$ | $\zeta_2 = 0, 4 (m)$ | $\zeta_3 = 0, 7 (m)$ |
| S1    | 0                    | 10%                  | 0                    |
| S2    | 10%                  | 10%                  | 0                    |
| S3    | 10%                  | 10%                  | 10%                  |
| S4    | 10%                  | 20%                  | 10%                  |
| S5    | 20%                  | 20%                  | 10%                  |
| S6    | 20%                  | 20%                  | 20%                  |
| S7    | 20%                  | 30%                  | 20%                  |
| S8    | 30%                  | 30%                  | 20%                  |
| S9    | 30%                  | 30%                  | 30%                  |
| S10   | 30%                  | 30%                  | 40%                  |
| S11   | 30%                  | 40%                  | 40%                  |
| S12   | 40%                  | 40%                  | 40%                  |
| S13   | 50%                  | 40%                  | 40%                  |
| S14   | 50%                  | 50%                  | 40%                  |
| S15   | 50%                  | 50%                  | 50%                  |

### 4.3 MODELAGEM PARA ANÁLISE POR CURVATURA MODAL

Para o segundo método de identificação do dano, foi considerada a viga com dimensões e propriedades como a utilizada no modelo apresentado na subseção 4.2.2, porém a análise realizada foi por modelo numérico. Assim como na modelagem numérica para análise de frequência (subseção 4.2.1), foram utilizados os dois modelos de representação de dano adaptados às dimensões da viga considerada. Neste caso, para cada um dos modelos foi considerada a condição de apoio engastada-livre.

Os casos de dano considerados para o estudo foram os mesmos avaliados na subseção 4.2.2, contudo, os resultados se demonstraram muito semelhantes para os casos de danos triplos com intensidades diferentes – deste modo, optou-se por apresentar nesta seção os resultados dos casos que foram julgados como representativos da atuação do método, definidos na Tab. 4.4. Os demais casos encontram-se em anexo no Apêndice A.

**Tabela 4.4.** Definição dos casos de dano para os modelos numéricos e análise por diferença de curvatura modal (Adaptados de Khiem e Toan, 2014).

| Casos | Local do dano        |                      |                      |
|-------|----------------------|----------------------|----------------------|
|       | $\zeta_1 = 0, 2 (m)$ | $\zeta_2 = 0, 4 (m)$ | $\zeta_3 = 0, 7 (m)$ |
| S1    | 0                    | 10%                  | 0                    |
| S2    | 10%                  | 10%                  | 0                    |
| S3    | 10%                  | 10%                  | 10%                  |
| S5    | 20%                  | 20%                  | 10%                  |
| S15   | 50%                  | 50%                  | 50%                  |

#### 4.4 MODELAGEM DE RUÍDO EXPERIMENTAL

Em experimentos reais, é inevitável o aparecimento de divergências entre medidas esperadas pelos cálculos analíticos e aqueles obtidos experimentalmente, uma vez que estes estão submetidos a flutuações de equipamentos, condições ambientais, e muitos outros fatores que afetam o experimento. Assim, é necessária a adição de ruído aos dados obtidos numericamente a fim de simular as condições incertas da vida real. Para tal, foi inserido ruído branco nas amostras obtidas numericamente, de acordo com Mishra et al. (2020), como segue a Eq. (4.1). O ruído foi aplicado para ambas as medidas de frequência e modos de vibração.

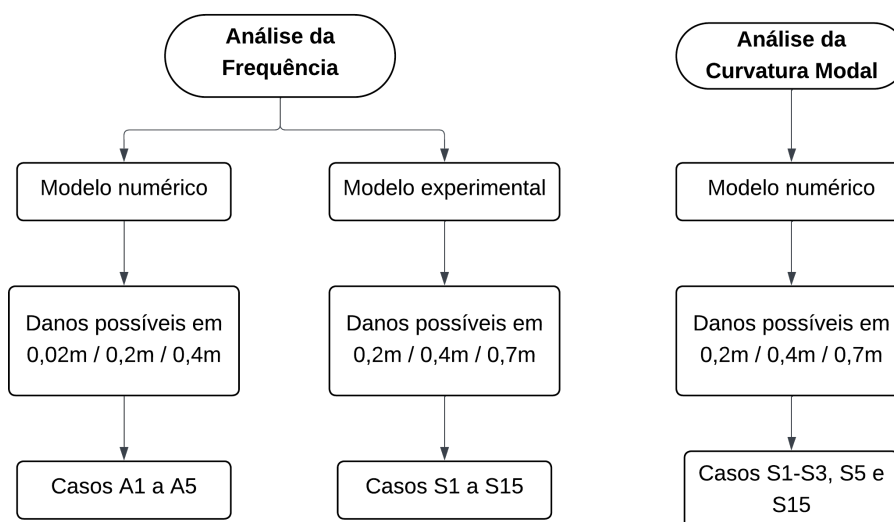
$$f_{\text{ruído}} = f_{\text{medido}} \left( 1 + \frac{\text{rand}(-1, 1) \cdot \delta}{100} \right) \quad (4.1)$$

onde  $\delta$  é o nível de ruído. No presente trabalho, intensidades variadas de ruído foram aplicadas, sendo 1% para os casos de análise pela frequência e 0,1% para os casos por análise de curvatura modal. Os valores utilizados são meramente representativos de uma medição não ideal com a finalidade de verificação da utilização do método em tais condições, sendo necessária uma análise mais aprofundada para os casos em que se deseja a modelagem de um ruído de natureza específica.

Foi possível notar que o ruído foi aplicado de maneira adequada, visto que cada rodada de identificação de dano gerava resultados diferentes, confirmando a aleatoriedade dos resultados com ruído.

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo serão apresentados os resultados de identificação de danos obtidos com os métodos expostos anteriormente. Na primeira parte serão abordados os resultados pela análise da variação da frequência e todos os seus modelos; em seguida, os resultados pela análise da curvatura modal e seus modelos. Os gráficos foram normalizados a fim de facilitar a visualização dos resultados e observar o efeito das diferentes intensidades e localização na detecção dos danos. Um fluxograma com o resumo dos casos analisados para cada método utilizado encontra-se na Fig. 5.1.



**Figura 5.1.** Fluxograma resumo dos casos analisados para cada um dos métodos.

Em todos os casos apresentados, o eixo  $x$  indica a localização do dano ao longo da viga, e o eixo  $y$  a probabilidade do dano como identificada pelo algoritmo; nos casos engastado-livre, o eixo  $x$  considera a origem como sendo a extremidade engastada. Para os casos do método da análise da frequência, o eixo  $x$  indica o comprimento da viga; enquanto para o método da análise da curvatura modal, indica o número do elemento ao longo de uma aresta da viga. As linhas tracejadas vermelhas indicam a localização real do dano, enquanto as linhas contínuas azuis indicam a probabilidade do dano como definido anteriormente, os picos do gráfico indicando os possíveis locais de dano.

## **5.1 RESULTADOS DA ANÁLISE DA FREQUÊNCIA**

### **5.1.1 Modelo 1 biengastado**

As Figuras 5.2a a 5.2e ilustram os resultados para identificação de dano por análise das variações na frequência do modelo 1 biengastado, considerando os casos A1 a A5. Os resultados obtidos são satisfatórios, sendo possível notar a existência de uma simetria nos resultados da fusão de dados no eixo simétrico da viga — esta condição possivelmente ocorre devido à simetria da condição de apoio. Em casos como este, a presença de dano em pontos simétricos da viga provoca uma mesma variação nas frequências, não sendo possível determinar diretamente quais dos possíveis locais é o real. Além disso, para o primeiro caso (Fig. 5.2a) há o aparecimento de um pico suave em um local onde não há presença de dano. Ainda, os danos são localizados de forma satisfatória – os picos do gráfico coincidem com a linha tracejada.

As Figuras 5.3 a 5.3e apresentam os resultados para o modelo 1 condição biengastada, mas com adição de ruído. Como discutido na seção 4.4, devido à natureza aleatória do ruído, cada rodada gerava resultados diferentes, e os apresentados aqui são apenas uma representação de uma das análises resultantes. Assim, para esta apresentada, é possível observar o aparecimento de picos extras, porém, principalmente para os casos de dano triplo (Figs. 5.3c a 5.3e) o algoritmo ainda detecta satisfatoriamente os danos.

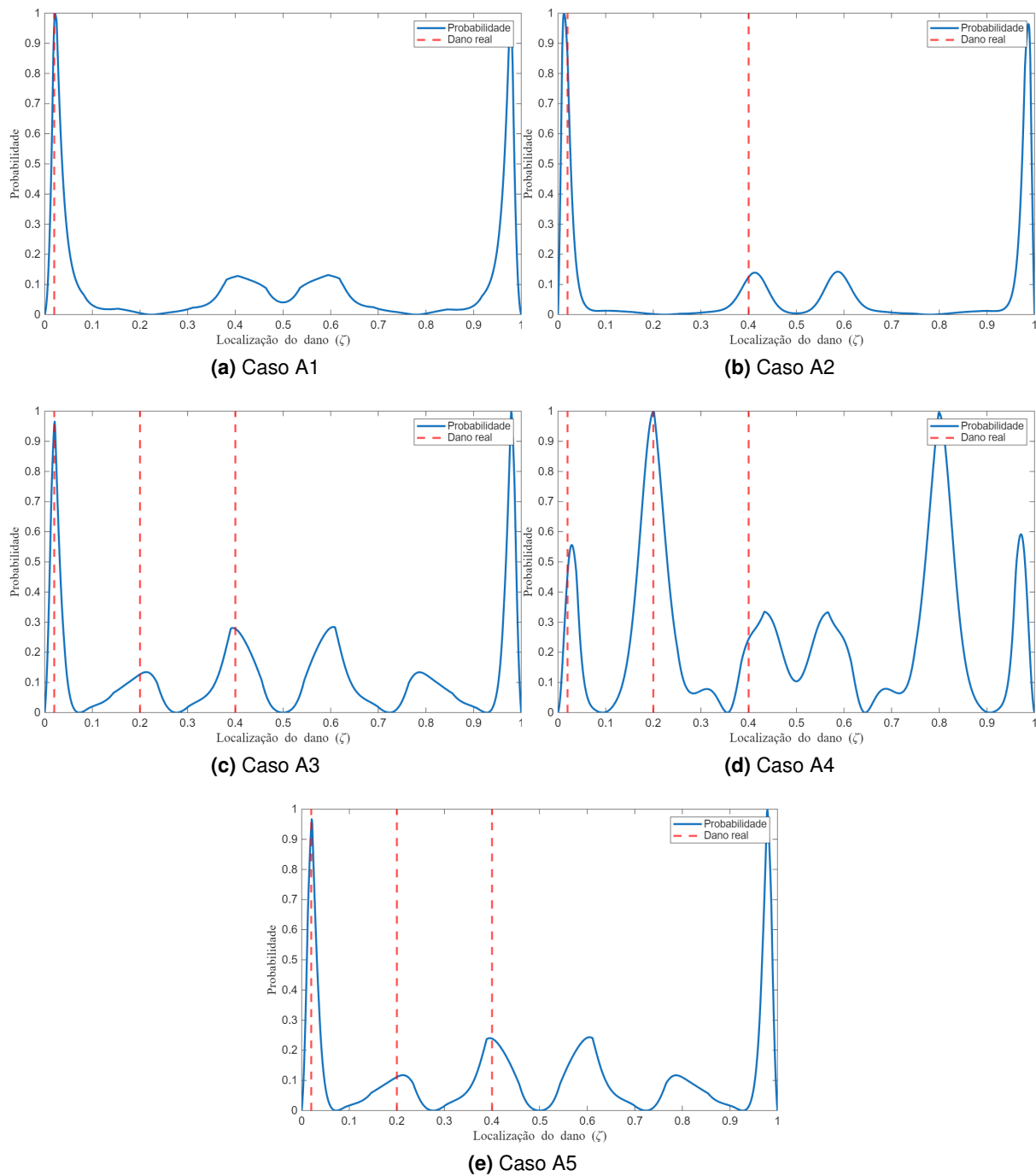
### **5.1.2 Modelo 1 engastado-livre**

As Figuras 5.4a a 5.4e trazem os resultados de identificação de dano para o modelo 1 na condição de apoio engastado-livre. Note que, assim como no caso anterior, os resultados são adequados — porém, neste caso não há o aparecimento de simetria. Isto colabora com o esperado: uma vez que as condições de apoio na viga não são simétricas, não há ambiguidade na detecção do dano pela variação da frequência. Há o surgimento de outros picos, em menor amplitude, em locais que não há a presença do dano; contudo, o local real do dano possui um pico significativamente mais pronunciado, permitindo uma localização mais adequada.

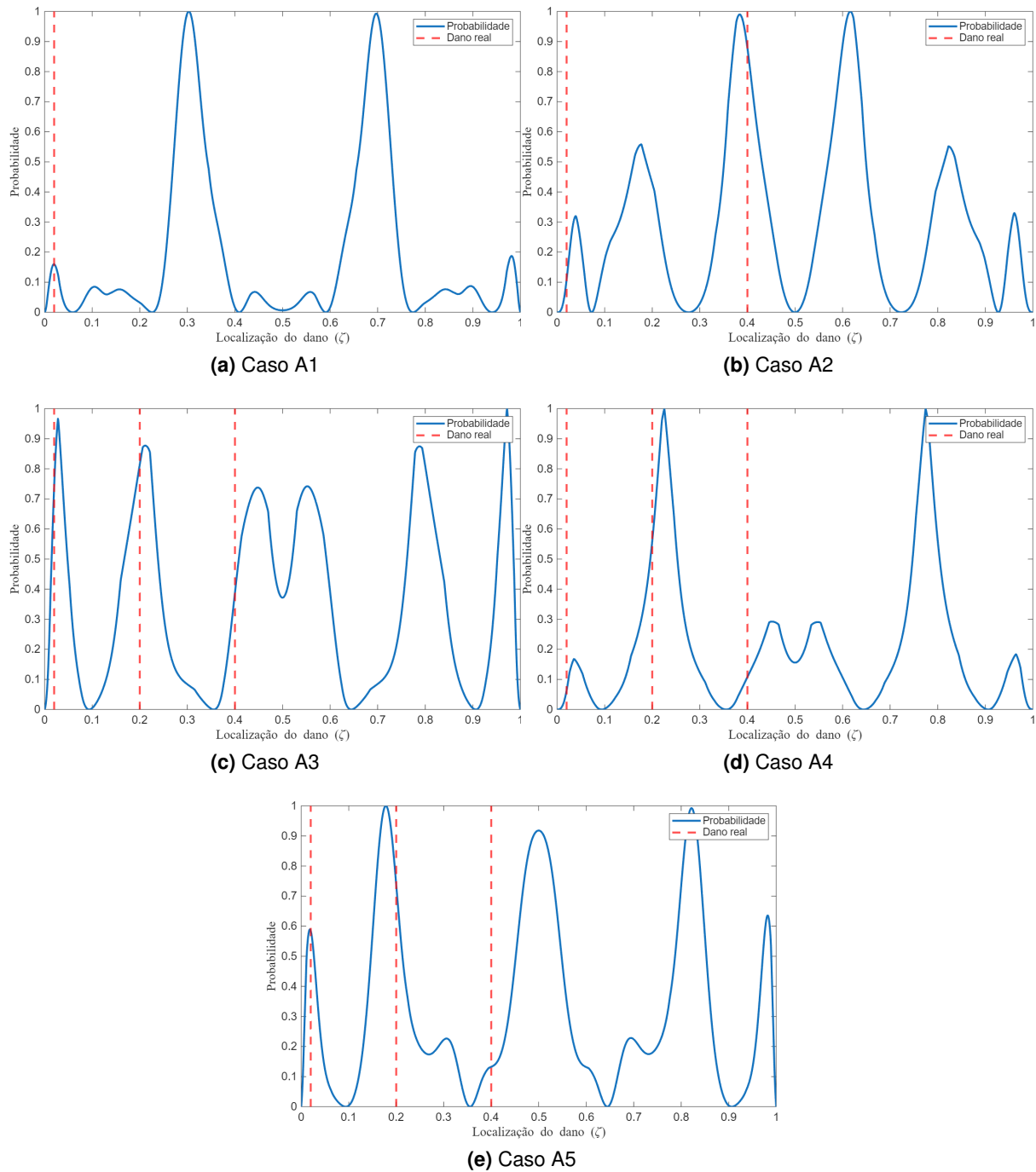
As Figuras 5.5a a 5.5e trazem os resultados para o modelo 1 engastado-livre com adição de ruído. É possível notar que, novamente, a identificação é mais acurada para os casos de danos triplos. Ainda, esta condição de apoio parece ser mais sensível à intensidade do dano, visto que os casos 5.5d e 5.5e apresentam os picos em locais mais alinhados ao local real do dano do que os demais casos (Figs. 5.5a a 5.5c).

### **5.1.3 Modelo 1 livre-livre**

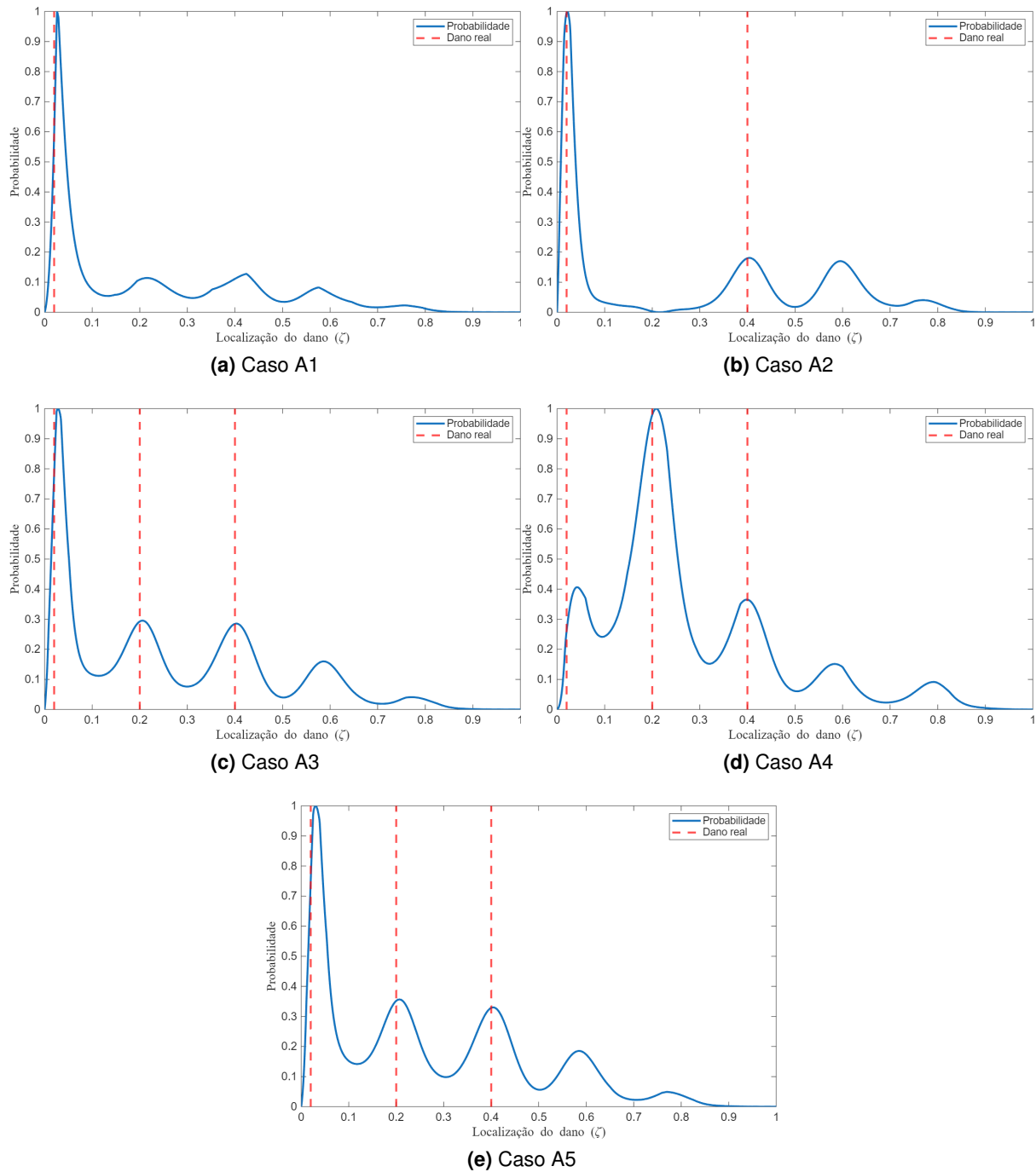
As Figuras 5.6a a 5.6e demonstram os resultados para o modelo 1 na condição livre-livre. Observe que novamente há o aparecimento da simetria — mais uma vez, devido às condições de apoio simétricas da viga. Aqui é possível notar também uma maior dificuldade na detecção



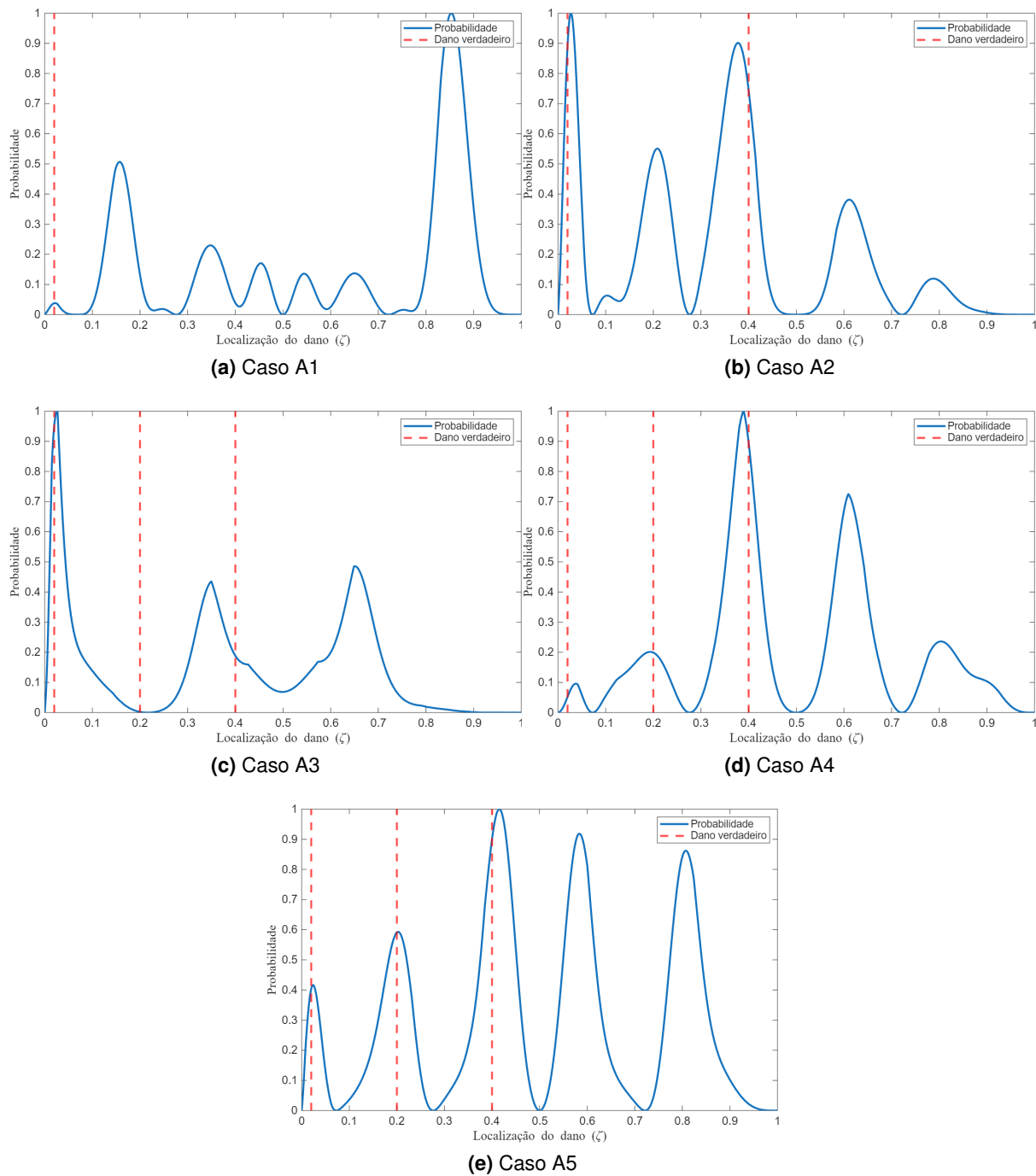
**Figura 5.2.** Localização de danos para o modelo 1 biengastado por análise das frequências sem consideração de ruído.



**Figura 5.3.** Localização de danos para o modelo 1 biengastado por análise das frequências com adição de ruído.



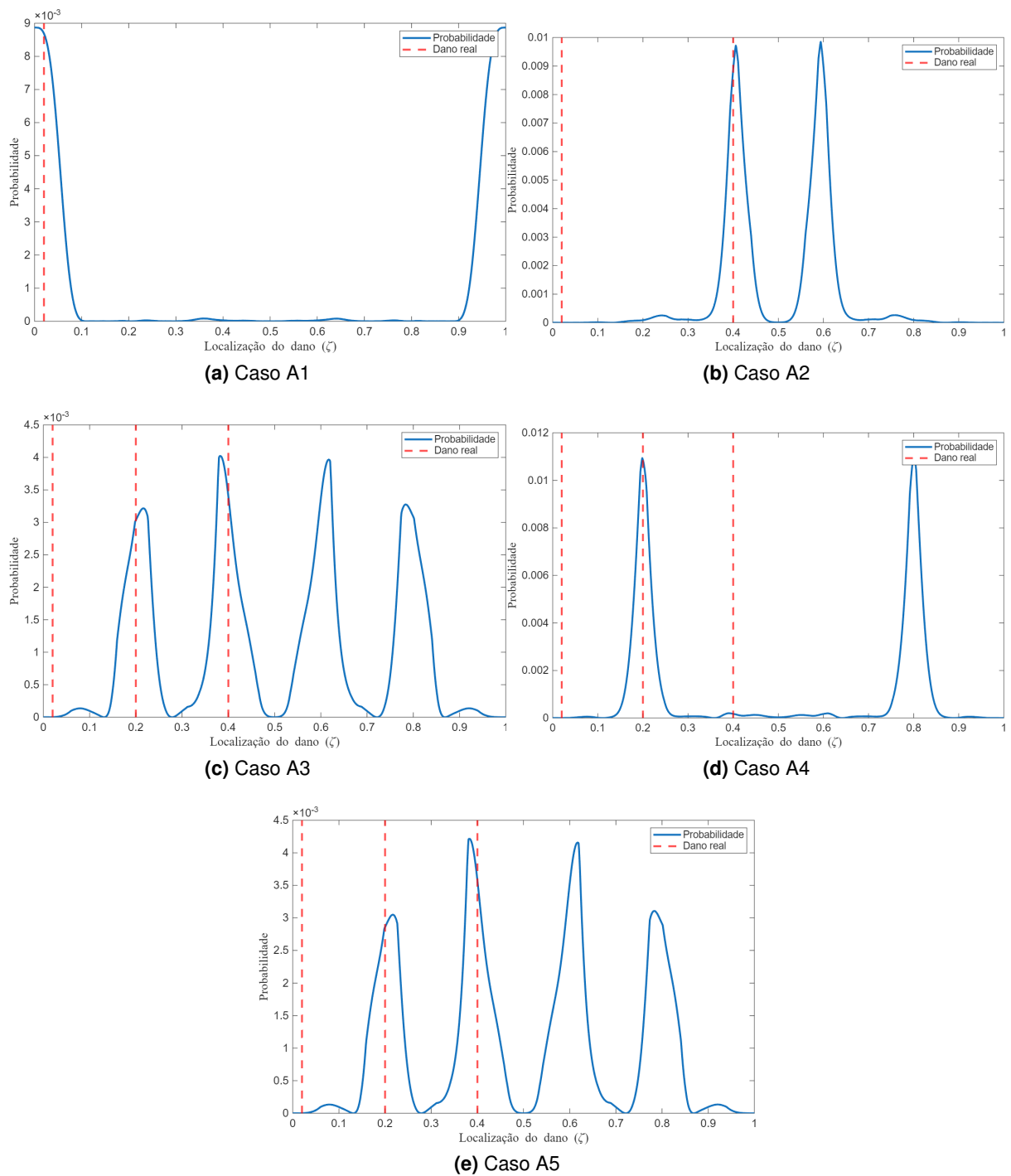
**Figura 5.4.** Localização de danos para o modelo 1 engastado-livre por análise das frequências sem consideração de ruído.



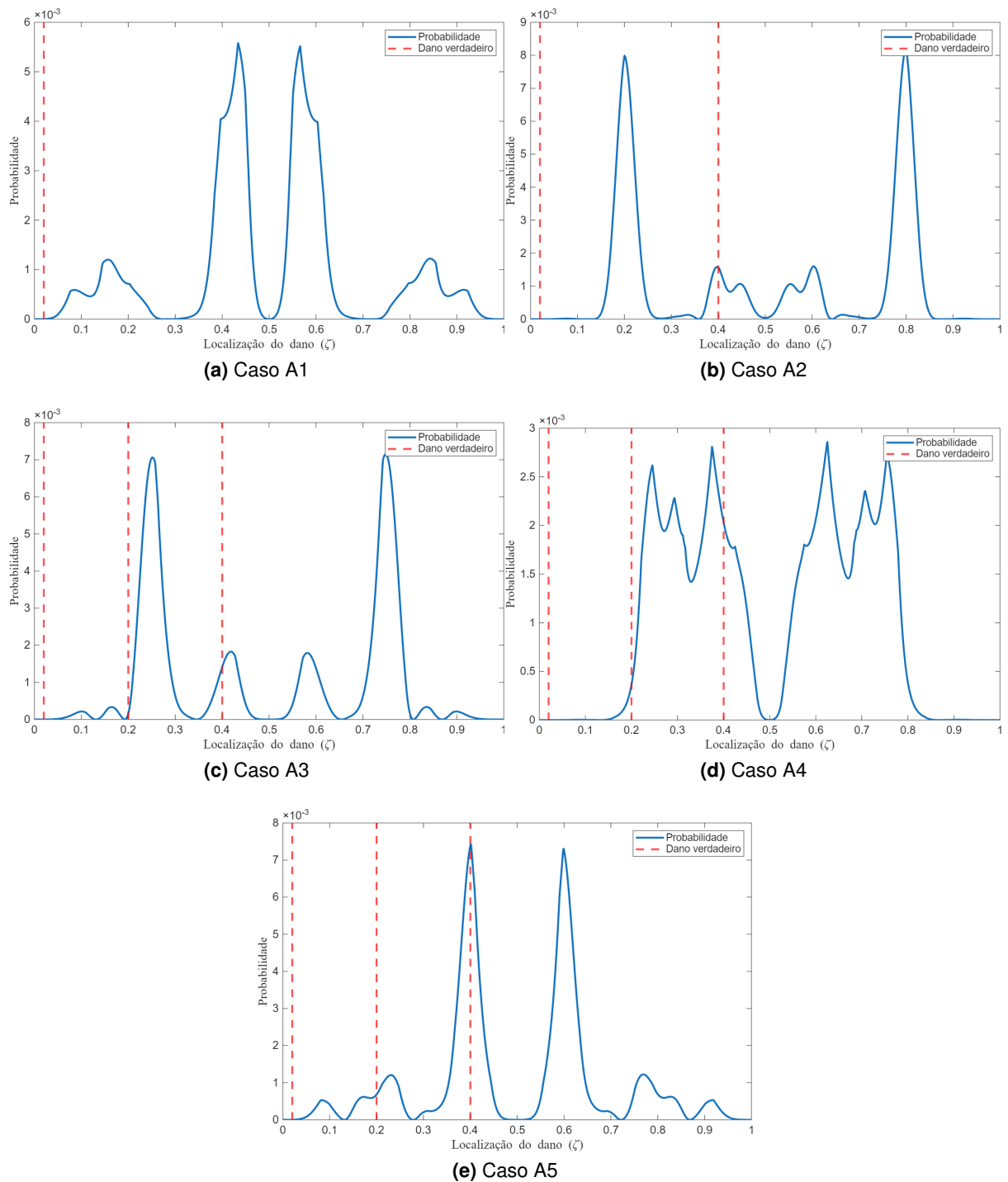
**Figura 5.5.** Localização de danos para o modelo 1 engastado-livre por análise das frequências com adição de ruído.

do dano na extremidade engastada da viga — o dano em  $\zeta = 0,02m$  só foi detectável no caso 1 (Fig. 5.6a), onde ele era o único dano presente. É possível também que esta condição possua uma maior sensibilidade à intensidade do dano, uma vez que no caso 4 (Fig. 5.6d) o único dano detectável foi o de 50%, que é o de maior intensidade.

Os resultados para o modelo 1 livre-livre com adição de ruído encontram-se nas Figs. 5.7a a 5.7e. Observa-se uma maior dispersão nos resultados para esta condição, mas, novamente, os casos de dano triplo e com maior intensidade parecem apresentar uma maior adequação de respostas quando comparados aos casos simples e duplo.



**Figura 5.6.** Localização de danos para o modelo 1 livre-livre por análise das frequências sem consideração de ruído.



**Figura 5.7.** Localização de danos para o modelo 1 livre-livre por análise das frequências com adição de ruído.

#### 5.1.4 Modelo 2 biengastado

Nas Figuras 5.8a a 5.8e encontram-se os resultados para identificação de dano para o segundo modelo na condição de apoio biengastado. Os resultados são similares ao primeiro modelo — também constam com a presença de simetria no eixo, e os resultados são muito satisfatórios para identificação do dano, principalmente nos casos de danos múltiplos.

Os resultados para o modelo 2 biengastado com adição de ruído encontram-se nas Figs. 5.9a a 5.9e. A identificação nos gera resultados capazes de identificar os danos, com maior eficácia nos casos de dano simples (Fig. 5.9a) e triplos com maior intensidade (5.9d e 5.9e). Contam também com a ocorrência de simetria e surgimento de picos adicionais.

#### 5.1.5 Modelo 2 engastado-livre

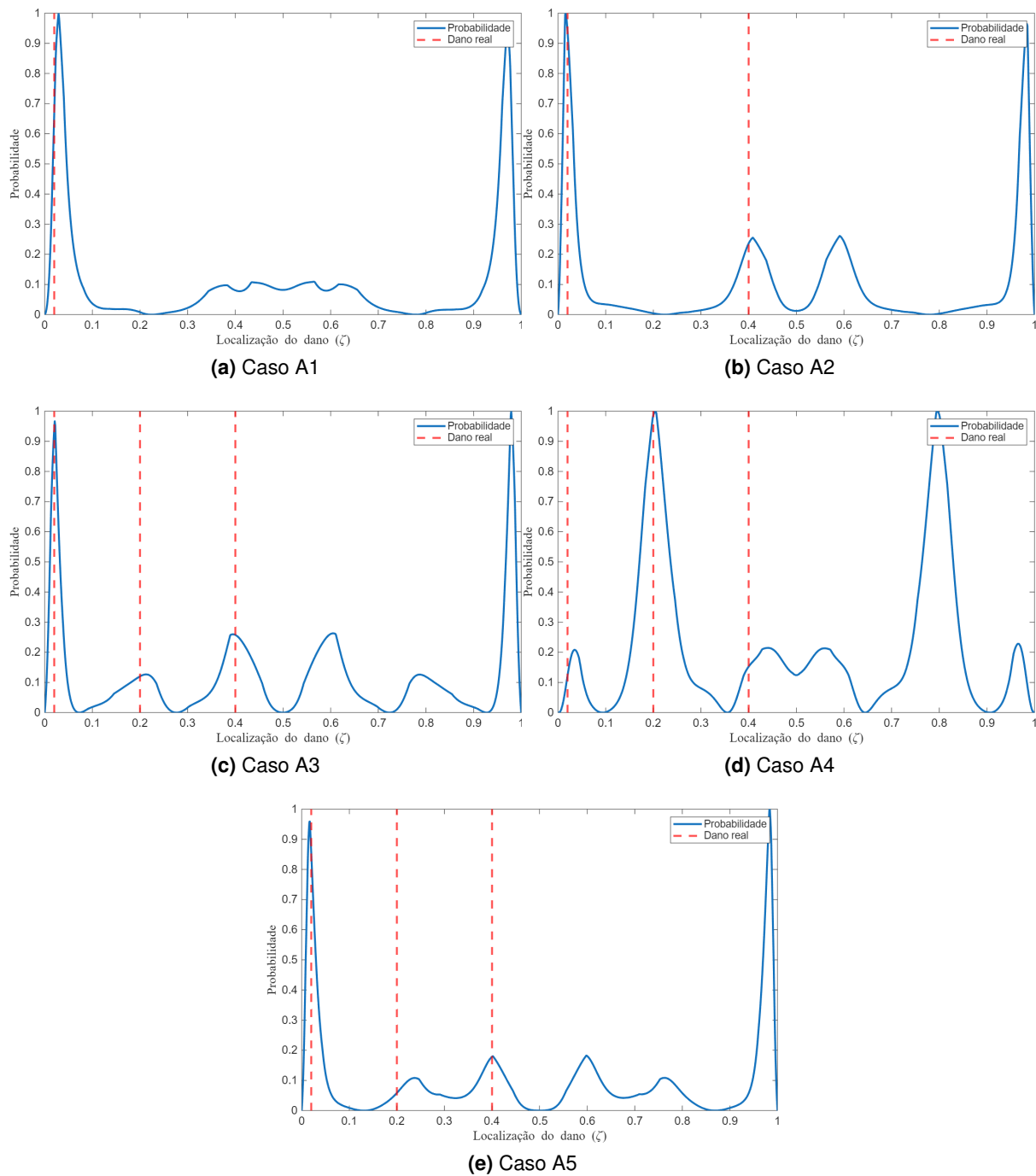
As Figuras 5.10a a 5.10e trazem os resultados da condição engastada-livre do segundo modelo numérico. Os resultados se assemelham ao primeiro modelo, não constando a presença de simetria, porém contêm pequenos picos em lugares onde não consta dano real na estrutura — ainda, os picos nos locais reais de dano são muito mais pronunciados para todos os casos analisados.

Para o caso engastado-livre com adição de ruído (Figs. 5.11a a 5.11e), a exatidão parece aumentar com o evoluir dos casos — os casos 5.11d e 5.11e são extremamente similares ao caso sem ruído nenhum, o que pode ser um indicativo que a exatidão da identificação aumenta com a intensidade do dano, enquanto os casos 5.11a e 5.11c, principalmente, possuem picos onde não há a presença de dano.

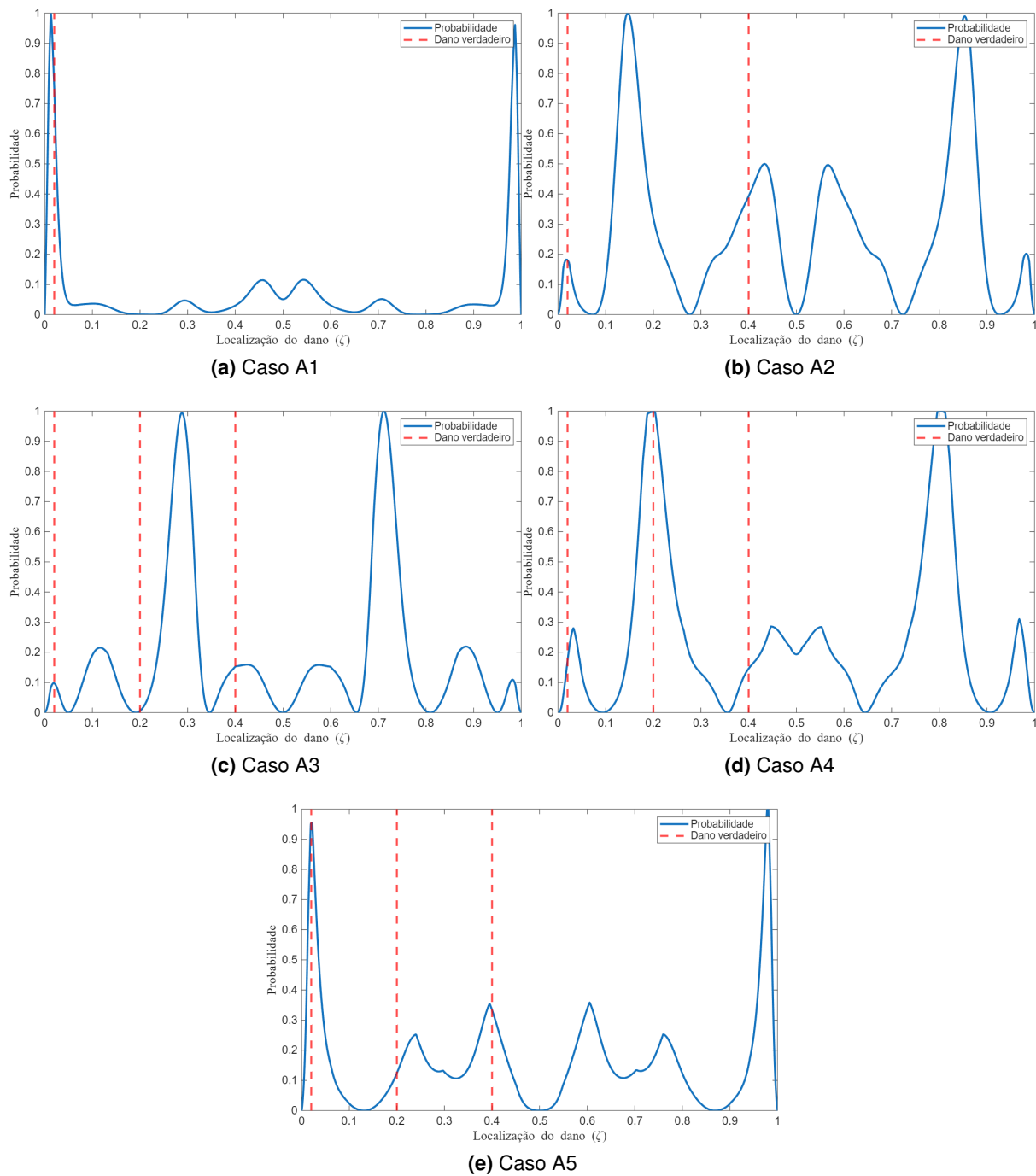
#### 5.1.6 Modelo 2 livre-livre

Enfim são apresentados nas Figs. 5.12a a 5.12e os resultados para o caso livre-livre do segundo modelo. O algoritmo foi capaz de localizar os danos para os casos com danos múltiplos, com exceção do dano próximo à extremidade engastada. Há também a ocorrência de simetria devido à condição simétrica do apoio. A sensibilidade à intensidade do dano também parece se manifestar neste modelo, visto que apenas o dano em  $\zeta_2$  (mais intenso) é identificado na Fig. 5.12d.

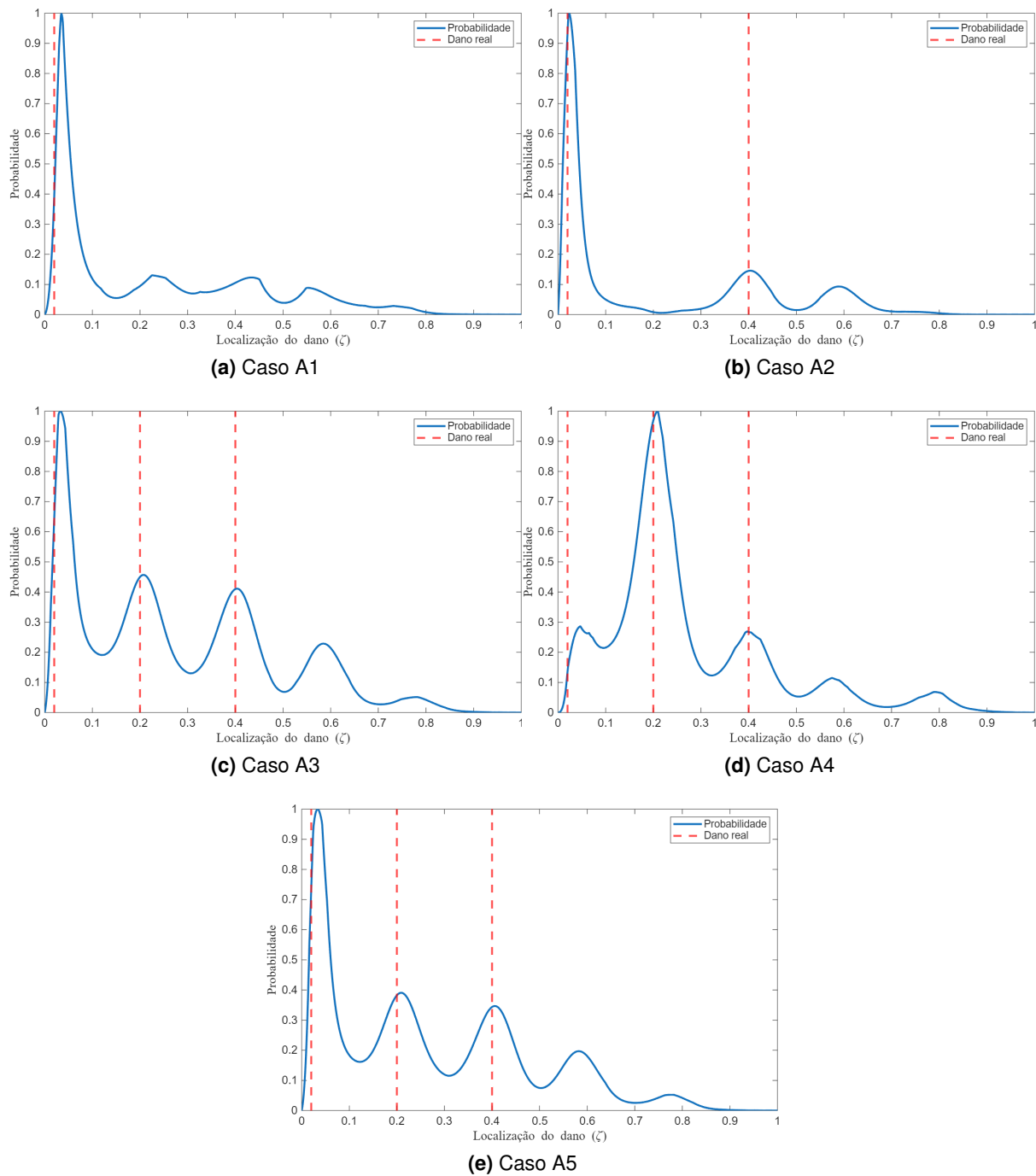
Para os casos livre-livre com adição de ruído (Figs. 5.13a a 5.13e) é possível observar a existência de uma tendência similar ao caso sem ruído: uma dificuldade na detecção do dano próximo à extremidade engastada e uma certa sensibilidade à intensidade do dano. Nota-se que, com exceção do dano em  $\zeta_1$ , para os casos 5.13c a 5.13e o dano é satisfatoriamente detectado.



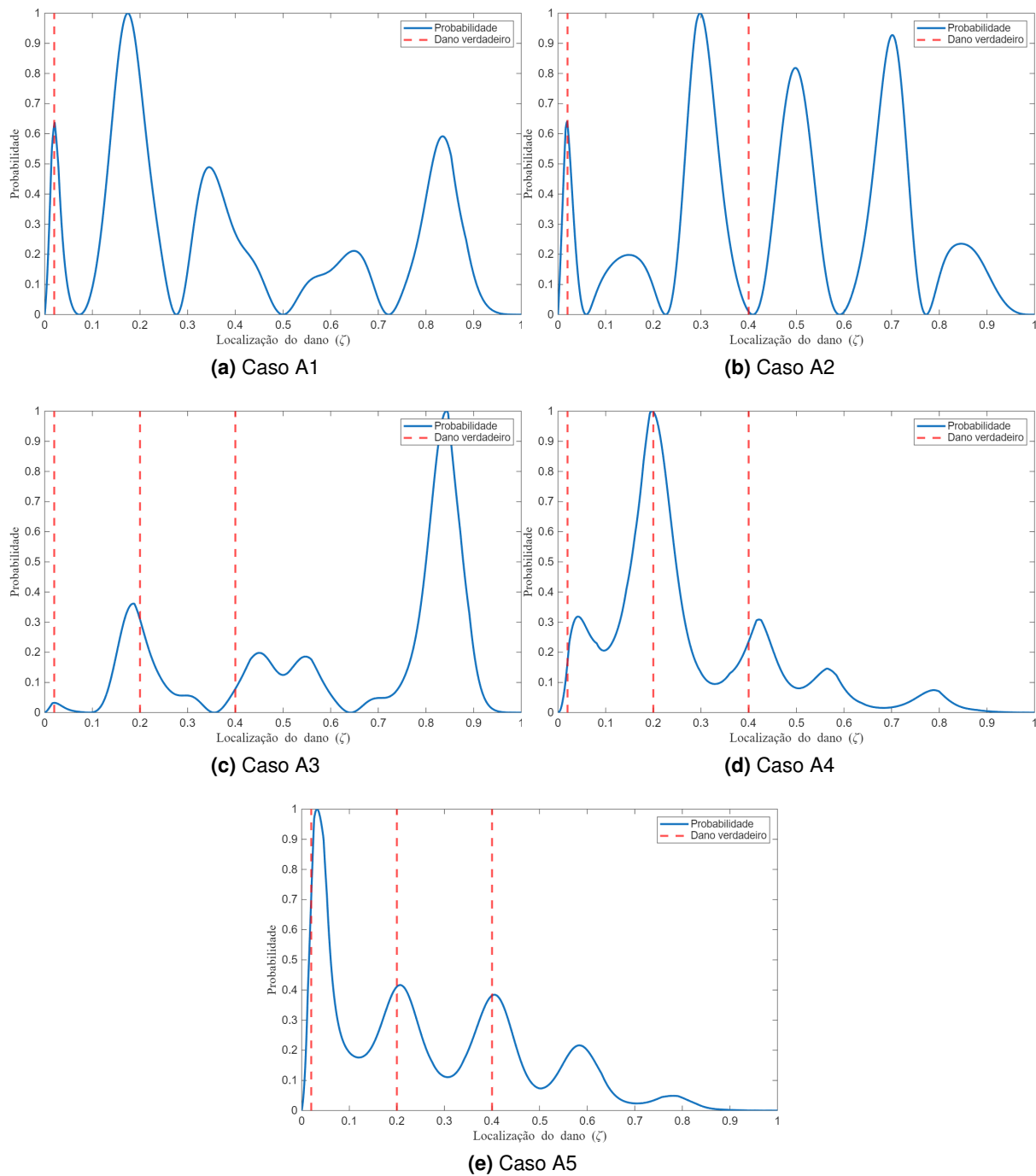
**Figura 5.8.** Localização de danos para o modelo 2 biengastado por análise das frequências sem consideração de ruído.



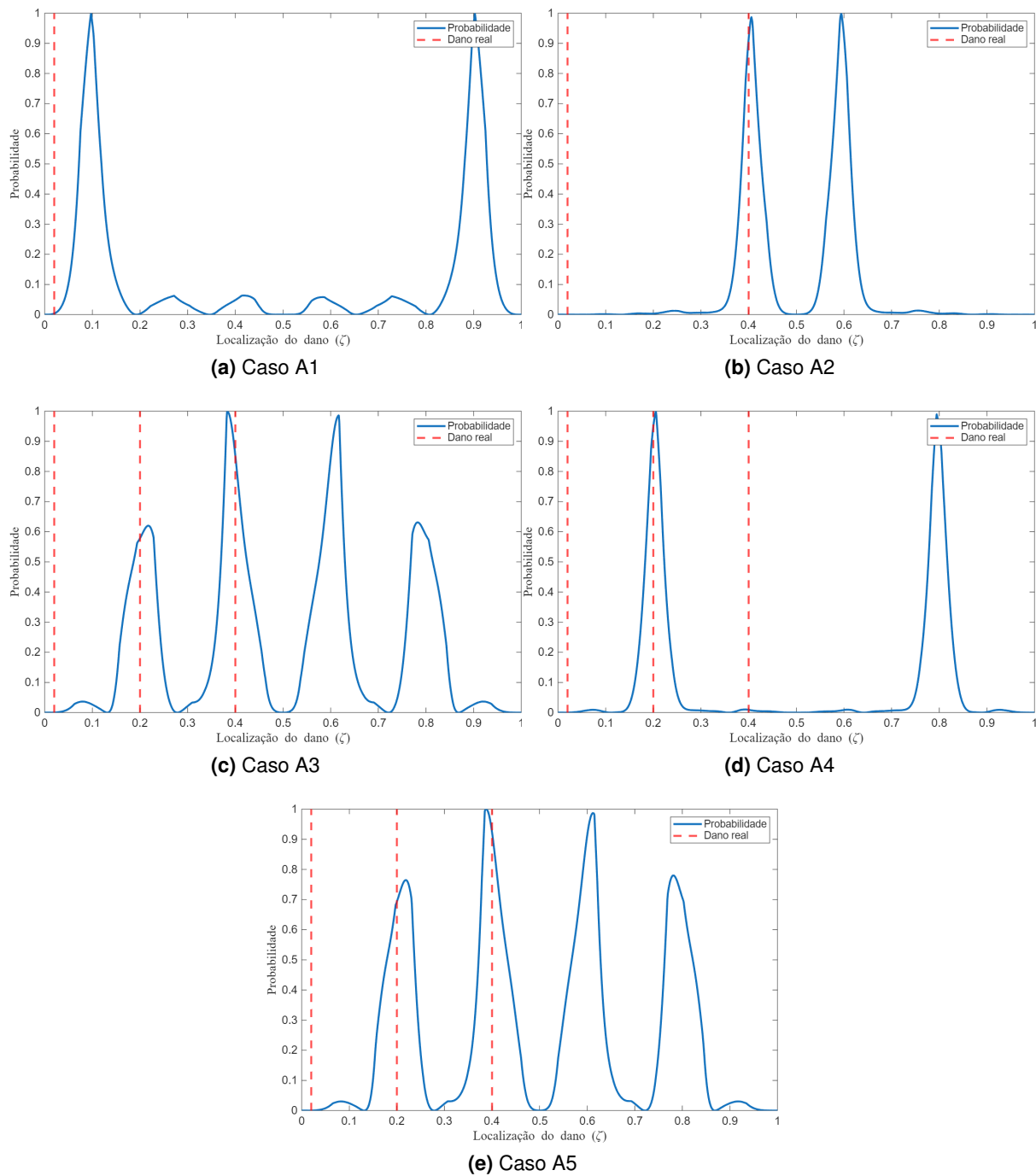
**Figura 5.9.** Localização de danos para o modelo 2 biengastado por análise das frequências com adição de ruído.



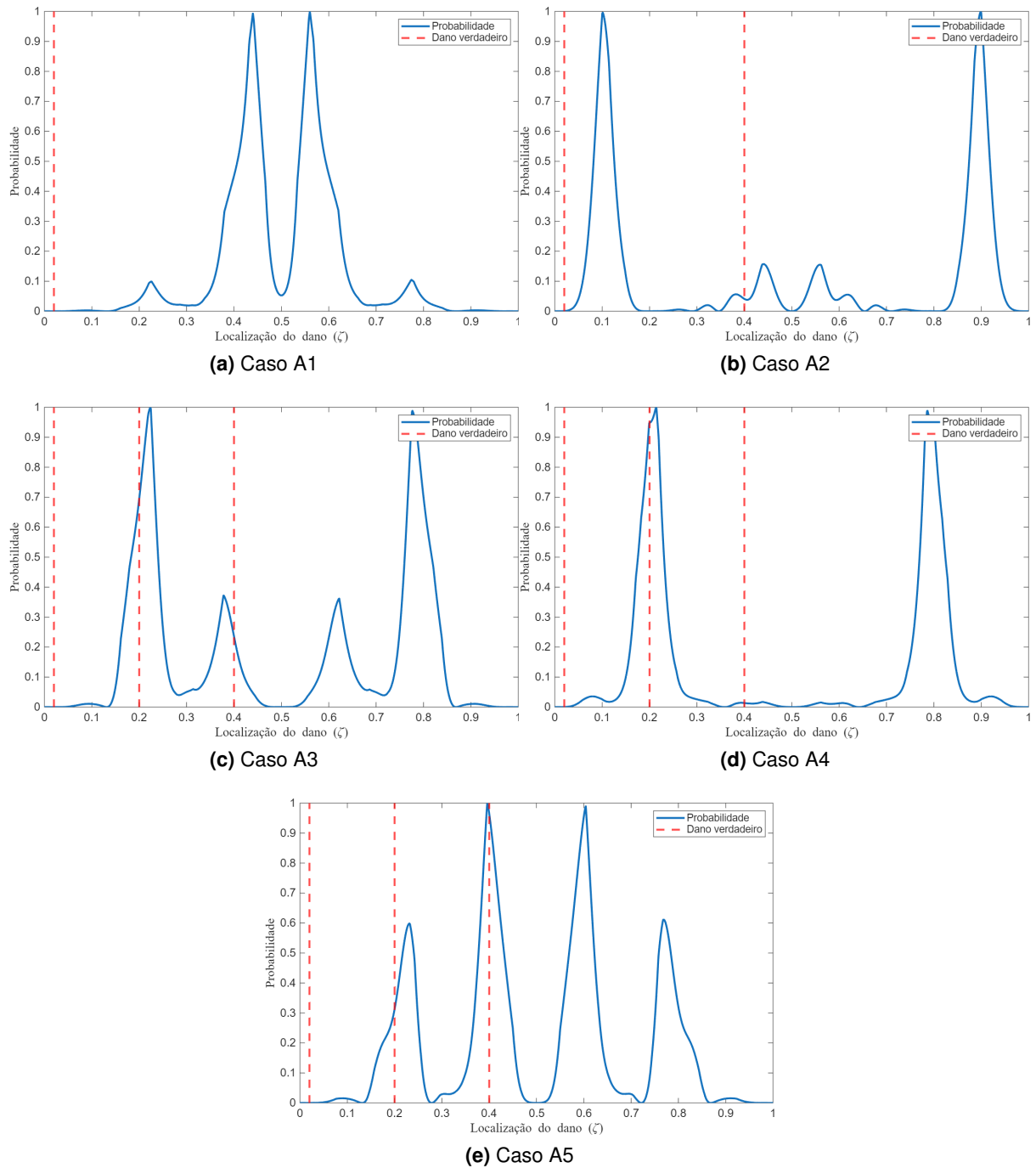
**Figura 5.10.** Localização de danos para o modelo 2 engastado-livre por análise das frequências sem consideração de ruído.



**Figura 5.11.** Localização de danos para o modelo 2 engastado-livre por análise das frequências com adição de ruído.



**Figura 5.12.** Localização de danos para o modelo 2 livre-livre por análise das frequências sem consideração de ruído.

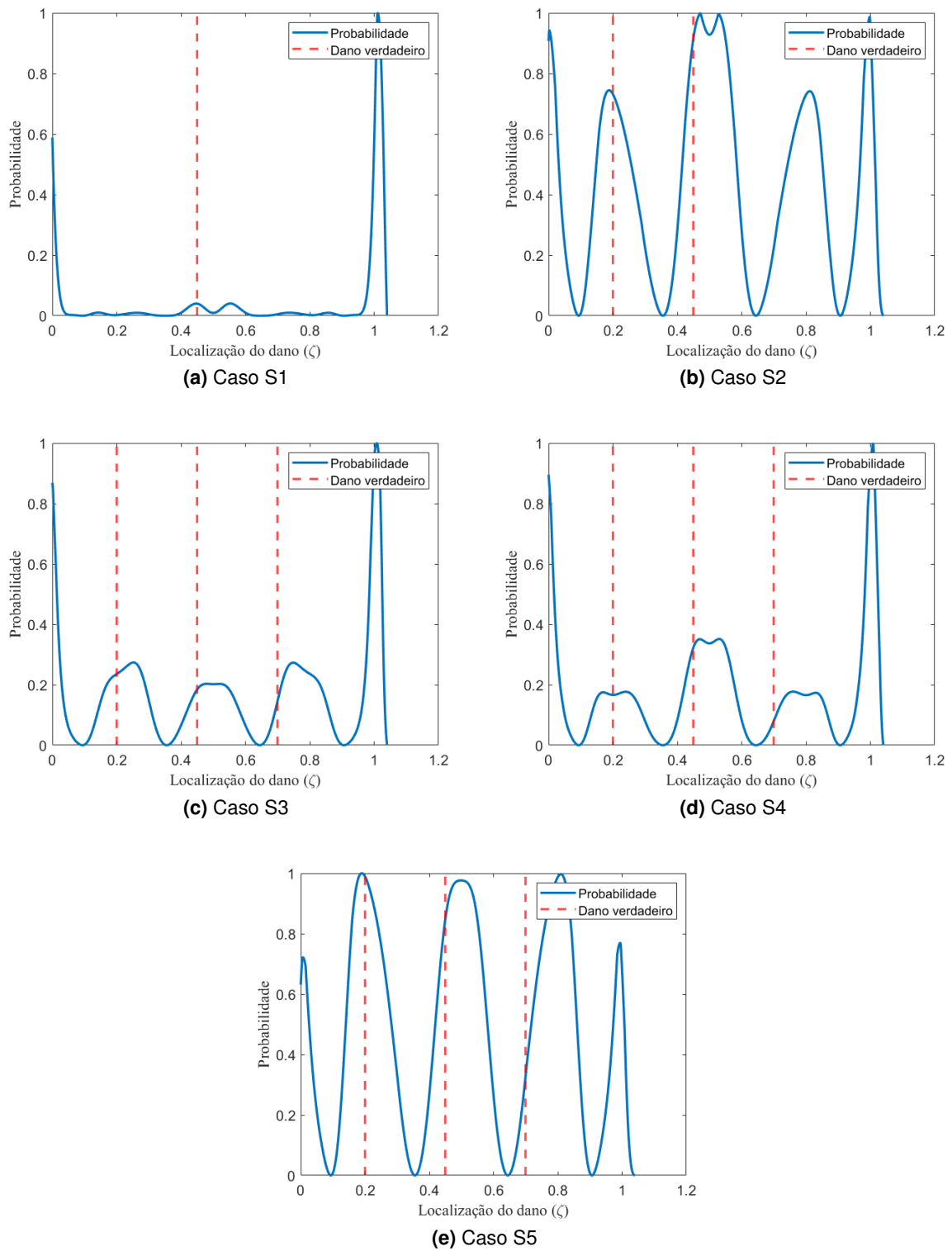


**Figura 5.13.** Localização de danos para o modelo 2 livre-livre por análise das frequências com adição de ruído.

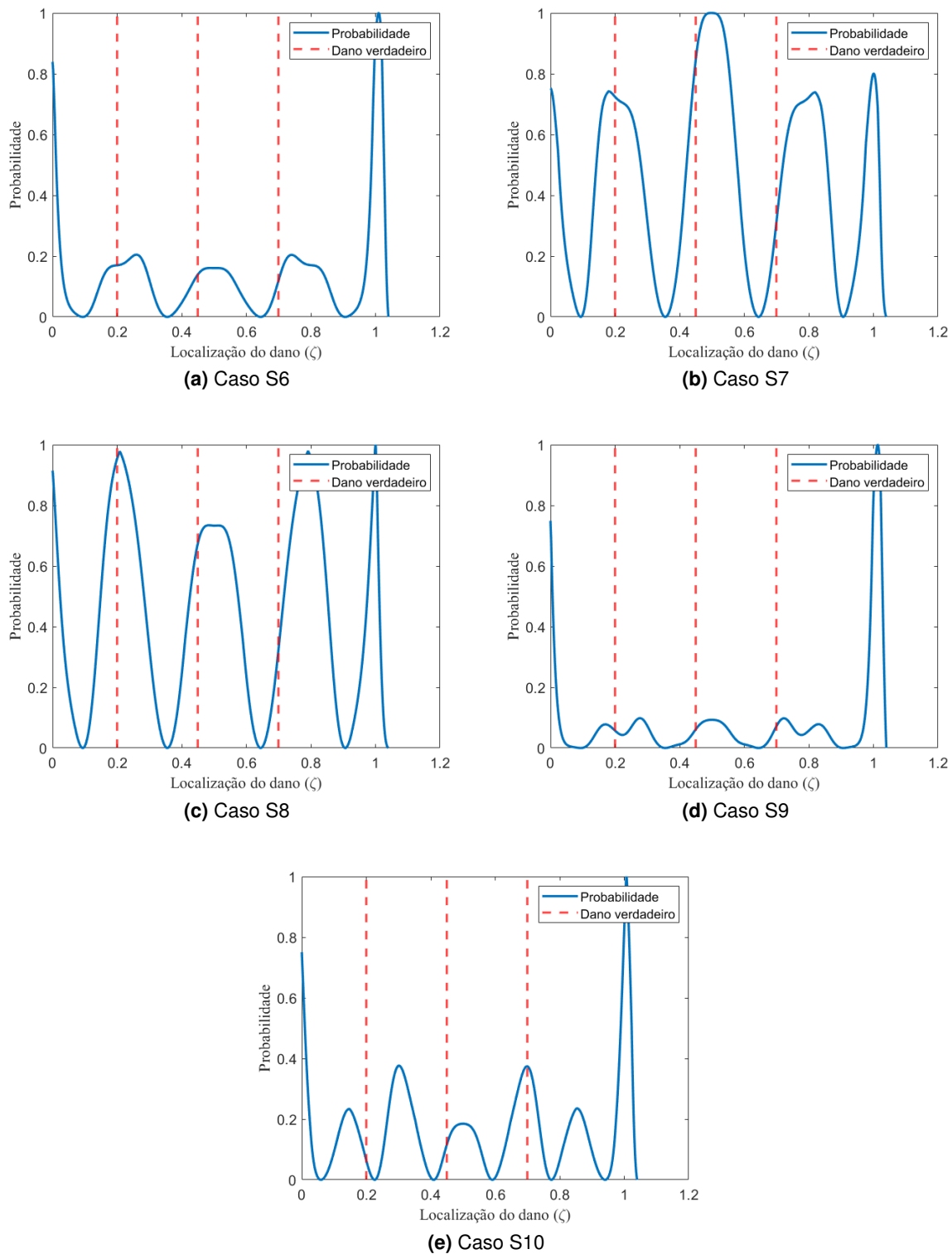
### 5.1.7 Modelo experimental

Nesta subsecção são apresentados os resultados obtidos da análise do modelo experimental realizado por Khiem e Toan (2014), onde foram utilizados os valores das frequências obtidos experimentalmente para a aplicação do algoritmo de detecção de dano. Os resultados encontram-se ilustrados nas Figs. 5.14 a 5.16 para os 15 cenários de dano na condição biengastada. Para este caso, não foram realizadas as análises com adição de ruído, uma vez que os valores utilizados na detecção do dano já contam com ruído experimental real.

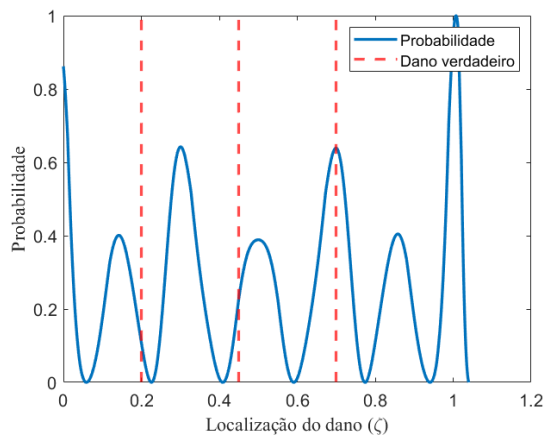
É possível observar a ocorrência da simetria discutida anteriormente, concordando com a condição simétrica de apoio de engaste nas duas extremidades. Tal simetria compromete a identificação do dano em  $\zeta_3$ , que se localiza após o eixo de simetria da viga. Além disso, picos surgem nas duas extremidades da viga em todos os casos analisados, onde não há a presença de dano, o que pode ser explicado por um efeito de borda gerado pela presença do engaste — entretanto, tal discussão foge do escopo deste trabalho e carece de investigações mais detalhadas. Nota-se também que a localização do dano passa a ficar um pouco menos precisa a partir do caso 10 (Fig. 5.15e). Isto pode ser devido a duas possíveis causas: o algoritmo pode não ser apropriado para intensidades muito elevadas de dano, ou o método de aquisição de dados utilizado para obtenção dos valores de frequência podem ser menos precisos para danos mais intensos. A definição da veracidade de ambas as possibilidades carece de estudos mais direcionados que não serão abordados neste trabalho.



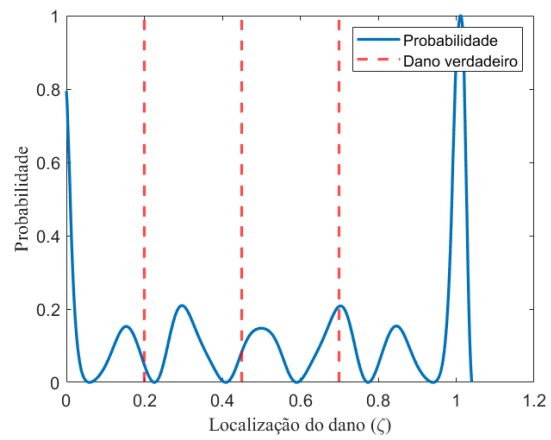
**Figura 5.14.** Localização do dano para o modelo experimental, casos S1 a S5, por análise das frequências sem consideração de ruído.



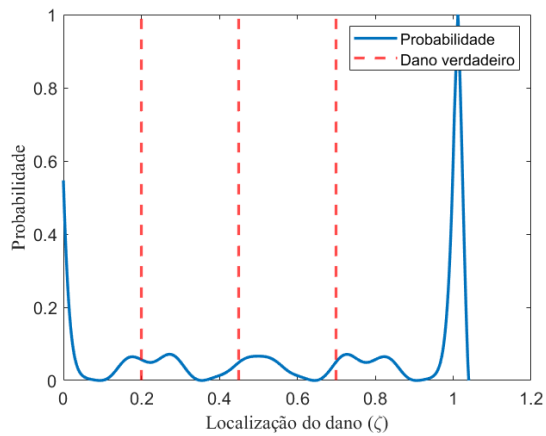
**Figura 5.15.** Localização do dano para o modelo experimental, casos S6 a S10, por análise das frequências sem consideração de ruído.



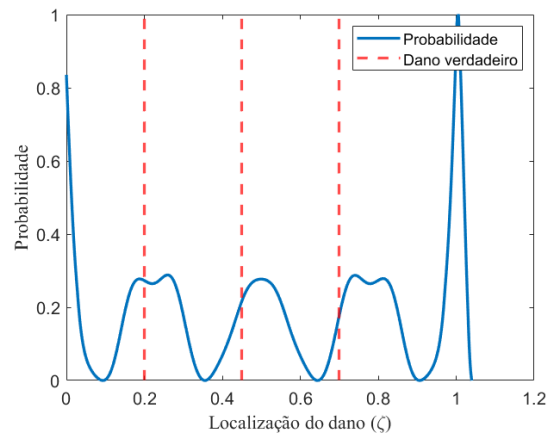
(a) Caso S11



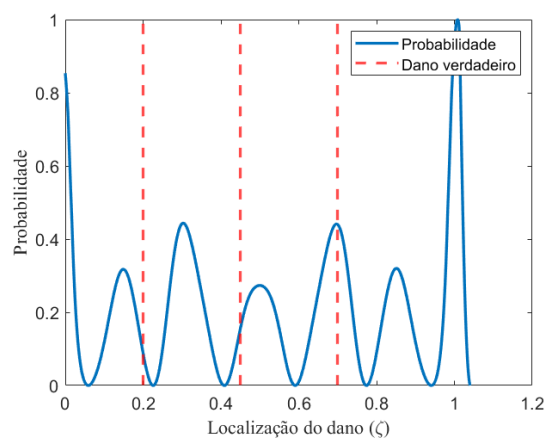
(b) Caso S12



(c) Caso S13



(d) Caso S14



(e) Caso S15

**Figura 5.16.** Localização do dano para o modelo experimental, casos S11 a S15, por análise das frequências sem consideração de ruído.

## 5.2 RESULTADOS DA ANÁLISE DA CURVATURA MODAL

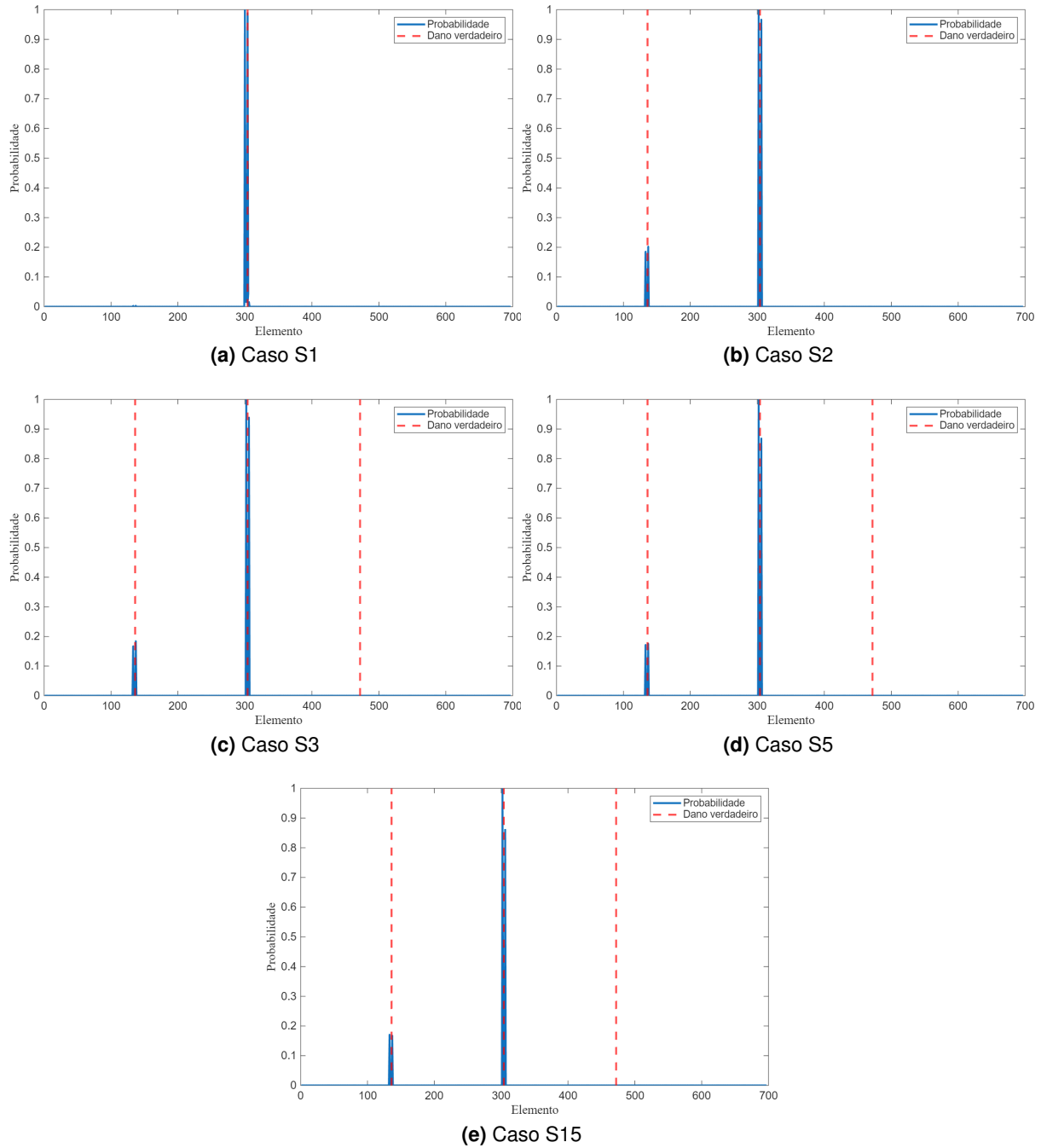
Neste tópicó serão apresentados os resultados de identificação de danos através do método da diferença da curvatura modal para os cinco casos propostos, para os dois modelos considerados na condição engastado-livre. É válido ressaltar que, ao todo, foram realizadas as análises para os mesmos quinze casos descritos no modelo experimental da análise de frequências, entretanto, os resultados para danos triplos não apresentaram diferenças significativas entre si, e foi tomada então a decisão de incluir nesta subseção apenas os casos julgados relevantes para uma representação completa de todos os resultados possíveis; entretanto, os resultados gerados para os demais casos podem ser encontrados no Apêndice, para ambas as análises sem ruído e com o ruído adicionado.

Assim como no método anterior, a linha contínua azul indica a probabilidade de presença de dano no elemento especificado, enquanto a linha tracejada vermelha indica a presença real do dano na estrutura. Devido à discretização necessária para a análise dos modos de vibração, o eixo horizontal do gráfico passa a representar o número do elemento ao invés do comprimento em metros da viga. Assim, os possíveis locais de dano em termos de número de elemento se tornam  $e_1 = 140$ ,  $e_2 = 310$  e  $e_3 = 480$ . A origem do eixo  $x$  continua representando a extremidade engastada da viga.

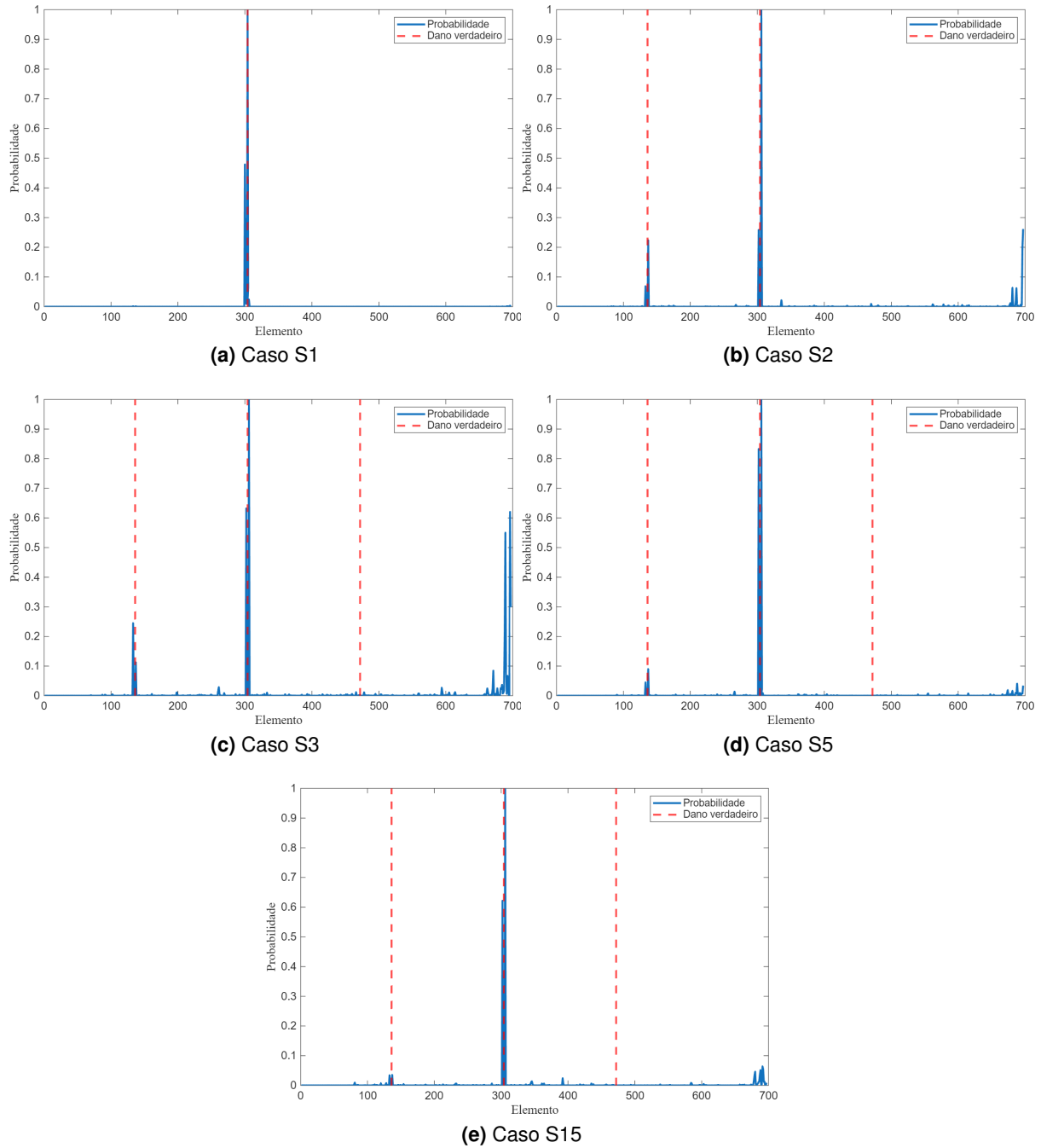
### 5.2.1 Modelo 1 engastado-livre

Os resultados encontram-se expressos nas Figs. 5.17a a 5.17e. O algoritmo produz resultados satisfatórios na localização do dano, entretanto, é válido destacar que há uma dificuldade da detecção do dano mais distante do engaste ( $e = 480$ ) nos casos de dano triplo (Figs. 5.17c a 5.17e). É notável também que os resultados produzidos por este método permitem uma visualização mais desobstruída e precisa da detecção do que quando comparados com os resultados do método das frequências, permitindo uma identificação mais clara, uma vez que não se observou a formação de picos adicionais em locais onde não há dano.

Nas Figuras 5.18a a 5.18e é possível observar os resultados para o modelo 1 com adição de ruído. Como mencionado na seção 4.4, neste caso o ruído adicionado é de 0,1% – nota-se que este tipo de análise é mais sensível ao ruído, pois com a adição de ruído de 1% o algoritmo já encontrou dificuldades significativas para a detecção de dano. Todavia, para os valores propostos, a detecção de dano permanece muito satisfatória, com o problema persistente de detecção do dano mais distante do engaste.



**Figura 5.17.** Localização do dano para o modelo 1 por análise de diferença de curvatura modal sem consideração de ruído.



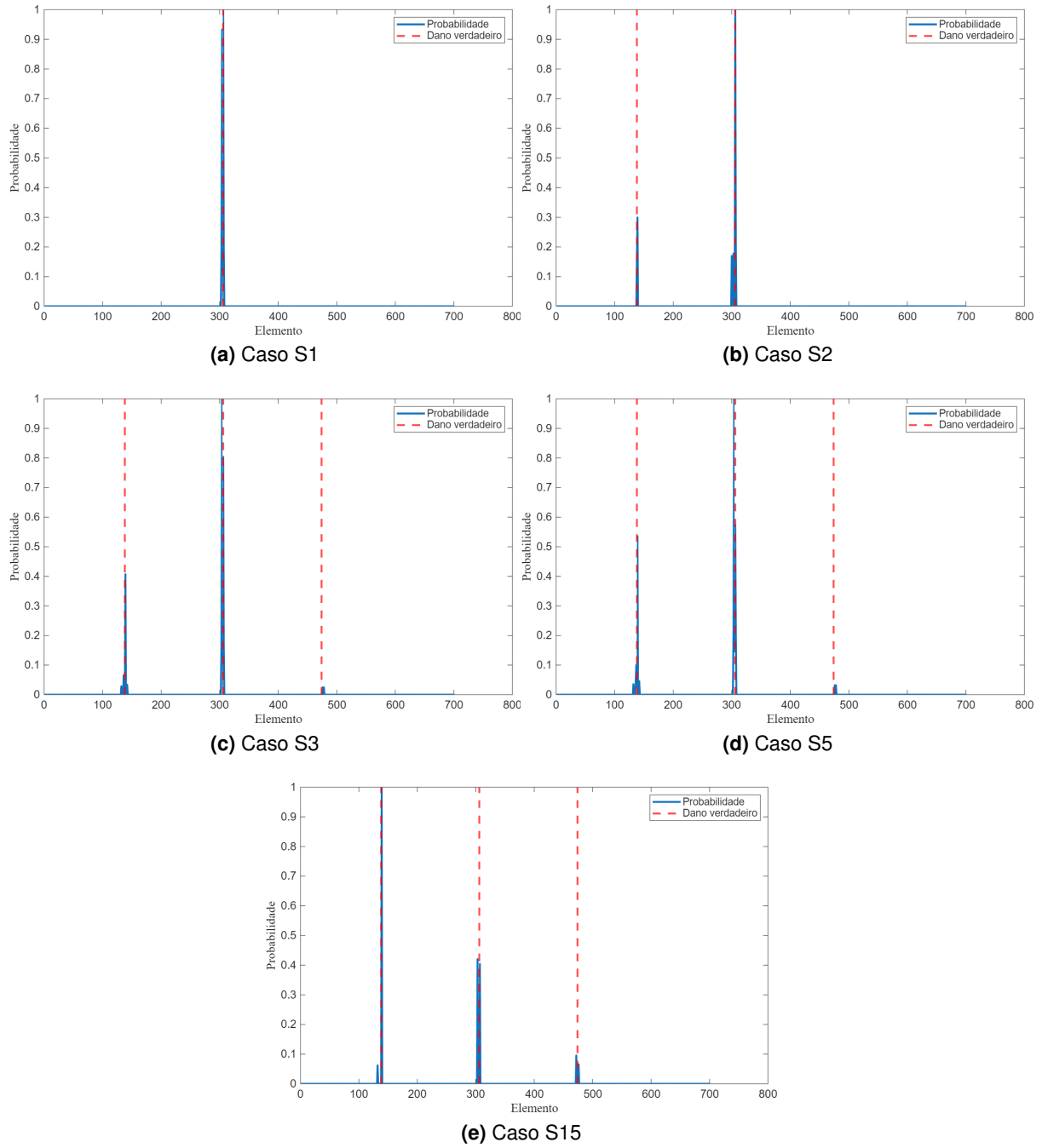
**Figura 5.18.** Localização do dano para o modelo 1 por análise de diferença de curvatura modal com adição de ruído.

### 5.2.2 Modelo 2 engastado-livre

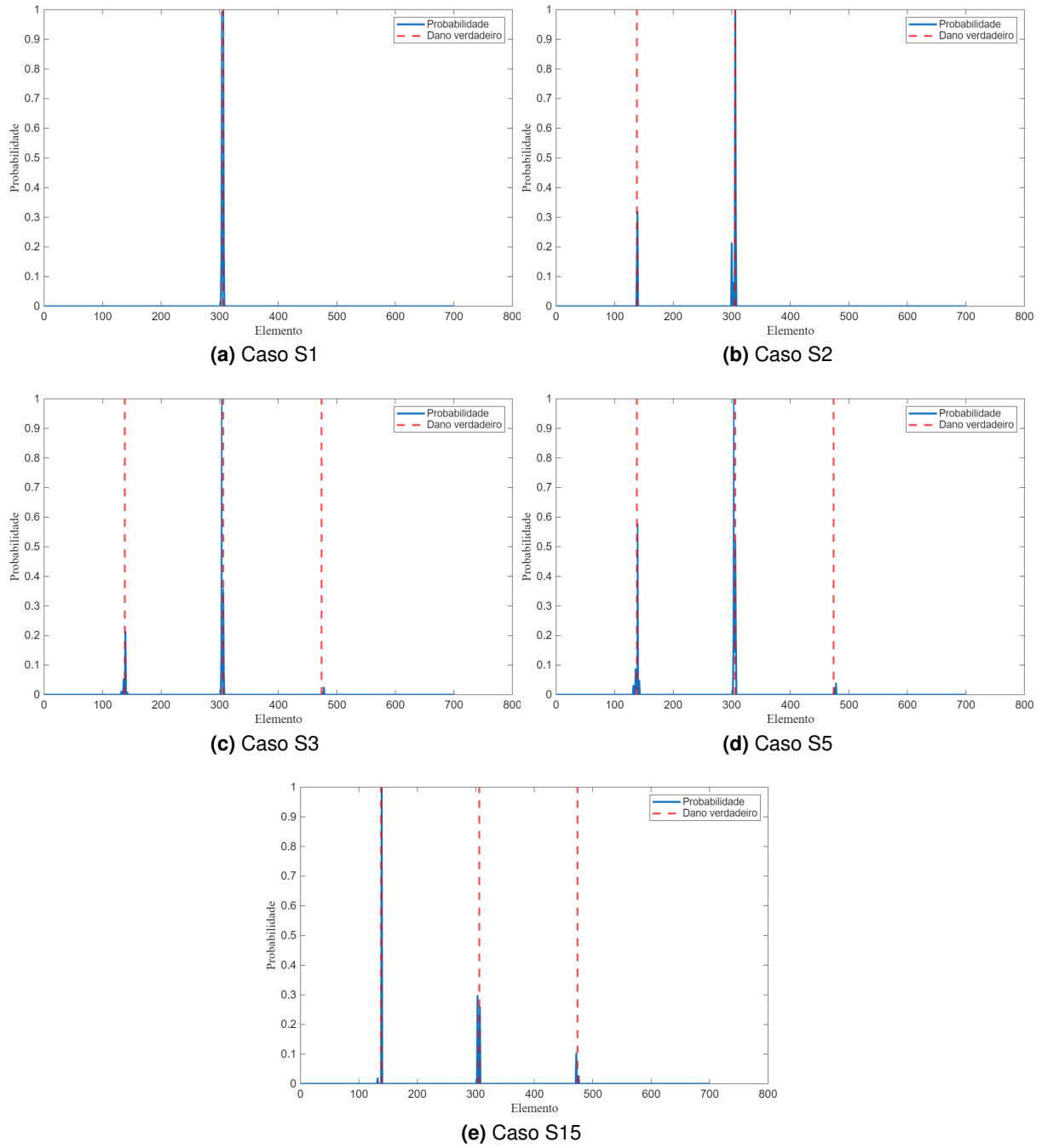
As Figuras 5.19a a 5.19e trazem os resultados para o segundo modelo da análise por curvatura modal. Observa-se que os resultados são muito satisfatórios para todos os casos analisados. Em dois dos casos de dano triplo (Figs. 5.19c e 5.19d), nota-se uma relativa dificuldade em detectar o dano no terceiro local ( $e = 480$ ), contudo, ainda é perceptível a existência de um pequeno pico indicativo de dano. Para maiores intensidade (Fig. 5.19e), tal dificuldade não foi manifestada, o que pode ser um indicativo de sensibilidade do algoritmo à intensidade do dano.

Os casos para o modelo 2 com adição de ruído são apresentados nas Figs. 5.20a a 5.20e. Os resultados também são satisfatórios, e se mostram mais robustos na presença de ruído do que o modelo 1, visto que apresentam menor incidência de picos adicionais para um mesmo valor de ruído adicionado (0,1%). Entretanto, persiste a dificuldade de detecção para o dano em  $e_3$  para os casos 5.20c e 5.20d.

Por fim, é possível observar que ambos os métodos geram bons resultados para detecção e localização do dano. A localização através da diferença de curvatura modal, no geral, gera resultados menos ambíguos e mais precisos na localização do dano – entretanto, é também mais sensível à presença de ruído, visto que, através do método das frequências naturais foi possível incluir ruídos de até 1%, enquanto na análise por diferença de curvatura modal os resultados divergiam consideravelmente para valores de ruído acima de 0,1%.



**Figura 5.19.** Localização do dano para o modelo 2 por análise de diferença de curvatura modal sem consideração de ruído.



**Figura 5.20.** Localização do dano para o modelo 2 por análise de diferença de curvatura modal com adição de ruído.

## 6 CONCLUSÃO

### 6.1 DISCUSSÃO

No presente trabalho, foram aplicados dois métodos de identificação de dano em vigas – através da análise de variações nos valores de frequência natural e através da diferença da curvatura modal, ambos associados à fusão de dados bayesiana. Foram utilizadas duas modelagens distintas de dano em duas vigas com dimensões e materiais diferentes, além da consideração de mais de um tipo de condição de apoio. Os métodos foram aplicados a simulações numéricas da viga, bem como a valores experimentais obtidos pelas referências.

A detecção do dano foi feita de maneira bem satisfatória para cerca de 64% dos casos analisados, considerando "bem satisfatória" a detecção acurada de pelo menos 2/3 da quantidade de danos definida para cada caso, além da consideração da existência mínima de picos adicionais que não indicam de maneira correta o local do dano. Os resultados por análise de frequência para o modelo numérico geraram resultados satisfatórios para todas as condições de apoio analisadas, com a ressalva da presença de simetria nos casos com apoio simétrico (biengastada e livre-livre). Ainda, o algoritmo se mostrou sensível ao ruído, principalmente para os casos de danos simples e duplos, assim como para danos com menor intensidade. Não há diferenças significativas na identificação entre os dois modelos distintos de dano, concluindo que, para análise por frequências, os dois modelos representam adequadamente e de maneira similar a presença do dano em vigas. Alguns casos analisados apresentaram indícios de sensibilidade do método à intensidade do dano, e sua investigação deve ser feita com maior cautela.

No entanto, para a análise pelos valores de frequência obtidos experimentalmente, o algoritmo detectou de maneira mais efetiva o dano presente nos casos iniciais, isto é, para os danos com menor intensidade. Este fato deve ser analisado com maior atenção – essa diferenciação pode estar relacionada a limitações do algoritmo ou, ainda, a incertezas provenientes das medições experimentais para valores mais elevados de intensidade de dano. Tais considerações fogem do escopo do trabalho e seguem como recomendações para pesquisas futuras.

A identificação através das diferenças de curvatura dos modos de vibração gerou resultados muito satisfatórios, sendo mais eficazes que a análise pela frequência. Considerando que o caso ilustrado é engastado-livre, não foi possível verificar a existência da simetria na localização do dano, tal como ocorre na análise das frequências. Ainda, é possível notar uma dificuldade na detecção do dano mais distante do engaste nos casos de dano triplo. Este

método, no entanto, se mostra mais sensível à presença de ruído – nas análises consideradas, o ruído máximo permitido para a localização adequada dos danos foi de 0,1%, contra o ruído de 1% da análise das frequências. Ademais, a modelagem do dano mecanicamente inserido (modelo 2) é mais robusto para identificação dos danos do que a redução local da rigidez (modelo 1), visto que houve menor dispersão dos resultados. É válido pontuar, também, que as análises numéricas através da aferição das frequências e através da curvatura dos modos de vibração foram realizadas em materiais com propriedades distintas, o que pode afetar os resultados. Análises com outros tipos de materiais (cerâmicas, polímeros) e a aplicabilidade dos métodos nestes deve ser analisada com atenção dedicada.

Foi possível observar uma variação nas frequências naturais e na curvatura dos modos de vibração devido à presença do dano através de duas abordagens distintas no que diz respeito à modelagem de dano. Em seguida, estas variações permitiram a definição de Funções de Posição de Dano, que foram inseridas em um algoritmo bayesiano de fusão de dados que permitiu uma detecção e localização adequada dos danos nas vigas. Ainda, os métodos se mostraram aplicáveis na presença de ruído, o que possibilita a investigação de sua funcionalidade em abordagens de análise modal experimental.

## **6.2 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS**

Algumas sugestões são feitas para trabalhos futuros a partir desta dissertação:

- Aplicação de métodos adicionais para eliminação da simetria em casos com condições de apoio simétricas;
- Aumento da robustez do algoritmo para permitir a aplicação em casos mais severos de ruído, bem como em avaliações experimentais;
- Realização de experimentos para avaliar com maior conformidade a aplicabilidade do método em dados experimentais;
- Consideração de estruturas e modelos de dano com comportamento não linear;
- Avaliar a sensibilidade dos métodos na proximidade do engaste;
- Avaliar a sensibilidade dos métodos quanto à intensidade do dano;
- Aplicação em estruturas mais complexas;
- Avaliação da possibilidade da aplicação do método para identificação de danos em placas, considerando a teoria de Kirchhoff-Love.

## **6.3 TRABALHOS ORIGINADOS A PARTIR DESTA DISSERTAÇÃO**

**Trabalho publicados em anais de congressos:**

SOARES, G. F.; CARNEIRO, S. H. S.; VILA, J. L. C. R.; GOULART, J. N. V.. Identificação de Danos Múltiplos em Vigas Através de Transformada de Wavelet e Fusão de Dados Bayesianas. 2024. In: XII Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, 2024, Natal, RN. Proceedings of the XII Congresso Nacional de Engenharia Mecânica - CONEM 2024, 2024.

SOARES, G. F.; CARNEIRO, S. H. S.; SOSA, H. E. G.. Identification of Single and Multiple Damage in Beams Using Natural Frequencies and Bayesian Data Fusion. In: XLV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE), 2024, Maceió/AL. 2024: XLV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2024.

SOARES, G. F.; CARNEIRO, S. H. S.; MAINARDES, C. B.; SOUZA, R. E. A.. Damage Detection Using Modal Curvature Difference and Bayesian Data Fusion. In: 28th ABCM International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2025). Curitiba/PR, 2025.

**Artigo submetido à revista:**

SOARES, G. F.; CARNEIRO, S. H. S. (2025). Identification of Damage in Beams Using Modal Curvature Difference and Bayesian Data Fusion. *Engineering Structures*.

## LISTA DE REFERÊNCIAS

- Adams, R. D., Cawley, P., Pye, C. J., and Stone, B. J. (1978). A vibration technique for non-destructively assessing the integrity of structures. *Mechanical Engineering Science*, 20(2).
- AEROIN (2020). Há 32 anos, na data de hoje, um boeing 737-200 pousava após perder parte da fuselagem em voo. <https://aeroin.net/ha-32-anos-boeing-737-200-pousava-perder-parte-fuselagem-voo/>.
- ANSYS (2025). *ANSYS Element Reference*.
- Barman, S. K., Mishra, M., Maiti, D. K., and Maity, D. (2021). Vibration-based damage detection of structures employing bayesian data fusion coupled with tlbo optimization algorithm. *Struct. Multidiscip. Optim.*, 64(4):2243–2266.
- Bernardo, J. M. and Smith, A. F. M. (2000). *Bayesian Theory*. John Wiley Sons, Ltd.
- Board, N. T. S. (1989). Aircraft accident report. Technical Report NTSB/AAR-89/03, United States Government.
- Broer, A. A. R., Benedictus, R., and Zarouchas, D. (2022). The need for multi-sensor data fusion in structural health monitoring of composite aircraft structures. *Aerospace*, 9(4).
- Carneiro, S. and Inman, D. (2002). Continuous model for the transverse vibration of cracked timoshenko beams. *Journal of Vibration and Acoustics*, 124.
- Cawley, P. and Adams, R. D. (1979). The location of defects in structures from measurements of natural frequencies. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 14(2):49–57.
- Chandrashekhar, M. and Ganguli, R. (2009). Structural damage detection using modal curvature and fuzzy logic. *Structural Health Monitoring*, 8(4):267–282.
- Dahak, M., Touat, N., and Kharoubi, M. (2019). Damage detection in beam through change in measured frequency and undamaged curvature mode shape. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 27(1):89–114.
- Das, A. and Debnath, N. (2020). A bayesian model updating with incomplete complex modal data. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 136:106524.
- Dawari, V. and Vesmawala, G. (2013). Modal curvature and modal flexibility methods for honeycomb damage identification in reinforced concrete beams. *Procedia Engineering*,

- 51:119–124. Chemical, Civil and Mechanical Engineering Tracks of 3rd Nirma University International Conference on Engineering (NUICONE2012).
- de Aviação Civil, A. N. (2024). Rbac 145. <https://www.anac.gov.br/assuntos/legislacao/legislacao-1/rbha-e-rbac/rbac/rbac-145>.
- de Aviação Civil, A. N. (2025). Rbac 43. <https://www.gov.br/anac/pt-br/assuntos/regulados/empresas-aereas/taxi-aereo/normas-do-setor/rbac-43>.
- Domingues, A. C. (2019). Identificação de dano em estruturas aeroespaciais leves utilizando o método da energia de deformação modal. Master's thesis, Universidade de Brasília.
- Dunegan, H. and Tetelman, A. (1971). Non-destructive characterization of hydrogen-embrittlement cracking by acoustic emission techniques. *Engineering Fracture Mechanics*, 2(4):387–402.
- Farrar, C. R. and Worden, K. (2007). An introduction to structural health monitoring. *Philosophical transactions. Series A, Mathematical, physical, and engineering sciences*, 365(1851):303–315.
- Fu, C. and Li, M. (2023). Data fusion-based structural damage identification approach integrating fractal and rcpn. *Applied Sciences*, 13(9).
- Garrido, H., Domizio, M., Curadelli, O., and Ambrosini, D. (2020). Numerical, statistical and experimental investigation on damage quantification in beams from modal curvature. *Journal of Sound and Vibration*, 485:115591.
- Golub, G. and Underwood, R. (1977). The block lanczos method for computing eigenvalues. In Rice, J. R., editor, *Mathematical Software*, pages 361–377. Academic Press.
- Gomes, G., Carneiro, S., Cesnik, C., and Jorge, A. (2022). *Jorge, Ariosto B., et al. (Eds.) Fundamental Concepts and Models for the Direct Problem, Vol. II*, chapter On the use of Modal Test Data in Inverse Problems: Fundamentals and Applications, page 311–348. University of Brasília - UnB, Brasília, DF, Brasil.
- Gomes, G. F. and Giovani, R. S. (2022). An efficient two-step damage identification method using sunflower optimization algorithm and mode shape curvature (msdbi-sfo). *Engineering with Computers*, 38.
- Goodman, I. R., Mahler, R. P. S., and Nguyen, H. T. (1997). *Mathematics of Data Fusion*. Springer Science+Business Media.
- Guo, H. (2006). Structural damage detection using information fusion technique. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(5):1173–1188.
- Guo, H. and Li, Z. (2012). Structural damage identification based on bayesian theory and improved immune genetic algorithm. *Expert Systems with Applications*, 39(7):6426–6434.
- Hassiotis, S. (2000). Identification of damage using natural frequencies and markov parameters. *Computers and Structures*, 74:365–373.

- He, M., Yang, T., and Du, Y. (2017). Nondestructive identification of composite beams damage based on the curvature mode difference. *Composite Structures*, 176:178–186.
- Hibbeler, R. C. (2010). *Resistência dos Materiais*. Pearson, 7th edition.
- Hu, J. and Liang, R. Y. (1993). An integrated approach to detection of cracks using vibration characteristics. *Journal of the Franklin Institute*, 330(5):841–853.
- Hutton, D. V. (2003). *Fundamentals of Finite Element Analysis*. McGraw-Hill Education.
- Inman, D. J. (2014). *Engineering Vibration*. Pearson, Upper Saddle River, New Jersey 07458.
- Inman, D. J., Farrar, C. R., Junior, V. L., and Junior, V. S. (2005). *Damage Prognosis For Aerospace, Civil and Mechanical Systems*. John Wiley Sons Ltd, USA.
- Jaishi, B. and Ren, W.-X. (2006). Damage detection by finite element model updating using modal flexibility residual. *Journal of Sound and Vibration*, 290(1):369–387.
- Jiang, S.-F., Zhang, C.-M., and Koh, C. G. (2006). Structural damage detection by integrating data fusion and probabilistic neural network. *Advances in Structural Engineering*, 9(4):445–458.
- Jiang, S.-F., Zhang, C.-M., and Yao, J. (2011). Eigen-level data fusion model by integrating rough set and probabilistic neural network for structural damage detection. *Advances in Structural Engineering*, 14:333–350.
- Kawiecki, G. (2001). Modal damping measurement for damage detection. *Smart Materials and Structures*, 10(3):466.
- Khiem, N. and Toan, L. (2014). A novel method for crack detection in beam-like structures by measurements of natural frequencies. *Journal of Sound and Vibration*, 333(18):4084–4103.
- Labib, A., Kennedy, D., and Featherston, C. (2015). Crack localisation in frames using natural frequency degradations. *Computers Structures*, 157:51–59.
- Lee, Y. S. and Chung, M. J. (2000). A study on crack detection using eigenfrequency test data. *Computers and Structures*, 77:327–342.
- Lin, Y.-C., Chiang, C.-H., Yu, C.-P., and Hsu, K.-T. (2020). Deterministic deterioration modeling of wind turbines toward the failure identification – a modal curvature approach. *Journal of Structural Integrity and Maintenance*, 5(2):104–112.
- Meirovitch, L. (2001). *Fundamentals of Vibrations*. McGraw-Hill.
- Meng, Z., Ren, X., Chai, S., Wang, X., Zhao, T., Gao, F., Wang, S., and Liu, Y. (2023). Wood beam damage identification based on the curvature mode and wavelet transform. *Advances in Civil Engineering*, 2023(1).

- Mishra, M., Barman, S. K., Maity, D., and Maiti, D. K. (2020). Performance studies of 10 metaheuristic techniques in determination of damages for large-scale spatial trusses from changes in vibration responses. *Journal of Computing in Civil Engineering*, 34(2):04019052.
- Pandey, A. K., Biswas, M., and Samman, M. M. (1991). Damage detection from changes in curvature mode shapes. *Journal of Sound and Vibration*, 145:321–332.
- Radzieński, M., Krawczuk, M., and Palacz, M. (2011). Improvement of damage detection methods based on experimental modal parameters. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(6):2169–2190. Interdisciplinary Aspects of Vehicle Dynamics.
- Reddy, J. N. (2002). *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*. John Wiley Sons, Inc.
- Reddy, J. N. (2019). *Introduction to the Finite Element Method*. McGraw Hill, 4th edition.
- Ren, H., Chen, X., and Chen, Y. (2017). *Reliability Based Aircraft Maintenance Optimization and Applications*, chapter 9. Elsevier Inc.
- Ruiz, D. V., Bragança, C. S. C., Poncetti, B. L., Bittencourt, T. N., and Futai, M. M. (2024). Vibration-based structural damage detection strategy using frfs and machine learning classifiers. *Structures*, 59:105753.
- Rytter, A. (1993). Vibrational based inspection of civil engineering structures. Ph.D.-Thesis defended publicly at the University of Aalborg, April 20, 1993 PDF for print: 206 pp.
- Salawu, O. (1997). Detection of structural damage through changes in frequency: a review. *Engineering Structures*, 19(9):718–723.
- Sha, G., Radzieński, M., Cao, M., and Ostachowicz, W. (2019). A novel method for single and multiple damage detection in beams using relative natural frequency changes. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 132:335–352.
- Sohn, H. and Law, K. H. (1997). A bayesian probabilistic approach for structure damage detection. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 26(12):1259–1281.
- Stewart, J. (2013). *Cálculo - Volume 2*. Cengage.
- Vega, F. and Yu, W. (2022). Smartphone based structural health monitoring using deep neural networks. *Sensors and Actuators A: Physical*, 346:113820.
- Wang, Y., Liang, M., and Xiang, J. (2014). Damage detection method for wind turbine blades based on dynamics analysis and mode shape difference curvature information. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 48.
- Wild, G., Pollock, L., Abdelwahab, A. K., and Murray, J. (2021). The need for aerospace structural health monitoring: A review of aircraft fatigue accidents. *International Journal of Prognostics and Health Management*.

- Xiang, C. S., Li, L. Y., Zhou, Y., and Yuan, Z. (2020). Damage identification method of beam structure based on modal curvature utility information entropy. *Advances in Civil Engineering*, 2020.
- Yin, T., Jiang, Q.-H., and Yuen, K.-V. (2017). Vibration-based damage detection for structural connections using incomplete modal data by bayesian approach and model reduction technique. *Engineering Structures*, 132:260–277.
- Zhang, H., Yang, Z., Lv, S., Jiang, M., and Jia, L. (2024). Damage identification method based on ultrasonic guided wave sensor network and path optimization bayesian fusion algorithm. *IEEE Sensors Journal*, 24(6):8661–8673.
- Zhang, Z., Shankar, K., Morozov, E. V., and Tahtali, M. (2016). Vibration-based delamination detection in composite beams through frequency changes. *Journal of Vibration and Control*, 22(2):496–512.
- Zhou, Q., Ning, Y., Zhou, Q., Luo, L., and Lei, J. (2012). Structural damage detection method based on random forests and data fusion. *Structural Health Monitoring*, 12(1):48–58.

## APÊNDICE A

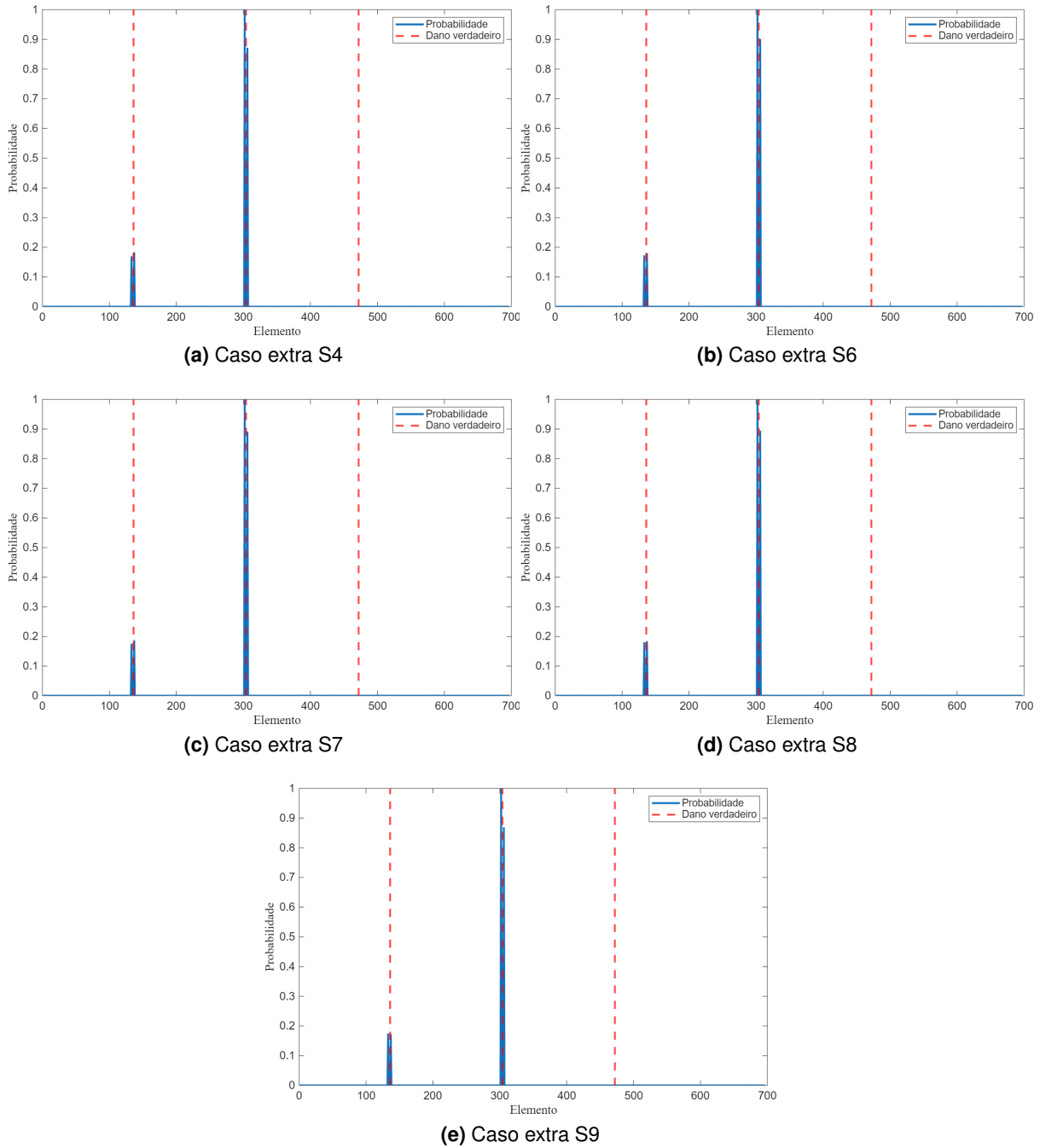
### RESULTADOS ADICIONAIS DE IDENTIFICAÇÃO DE DANO POR DIFERENÇA DE CURVATURA MODAL

Neste apêndice serão apresentados os resultados adicionais para a detecção e localização de dano através do método de diferença de curvatura modal combinado com a fusão de dados. Os casos extras são os mesmos que os analisados na identificação por frequências do caso experimental, e estão resumidos na Tab. A.1.

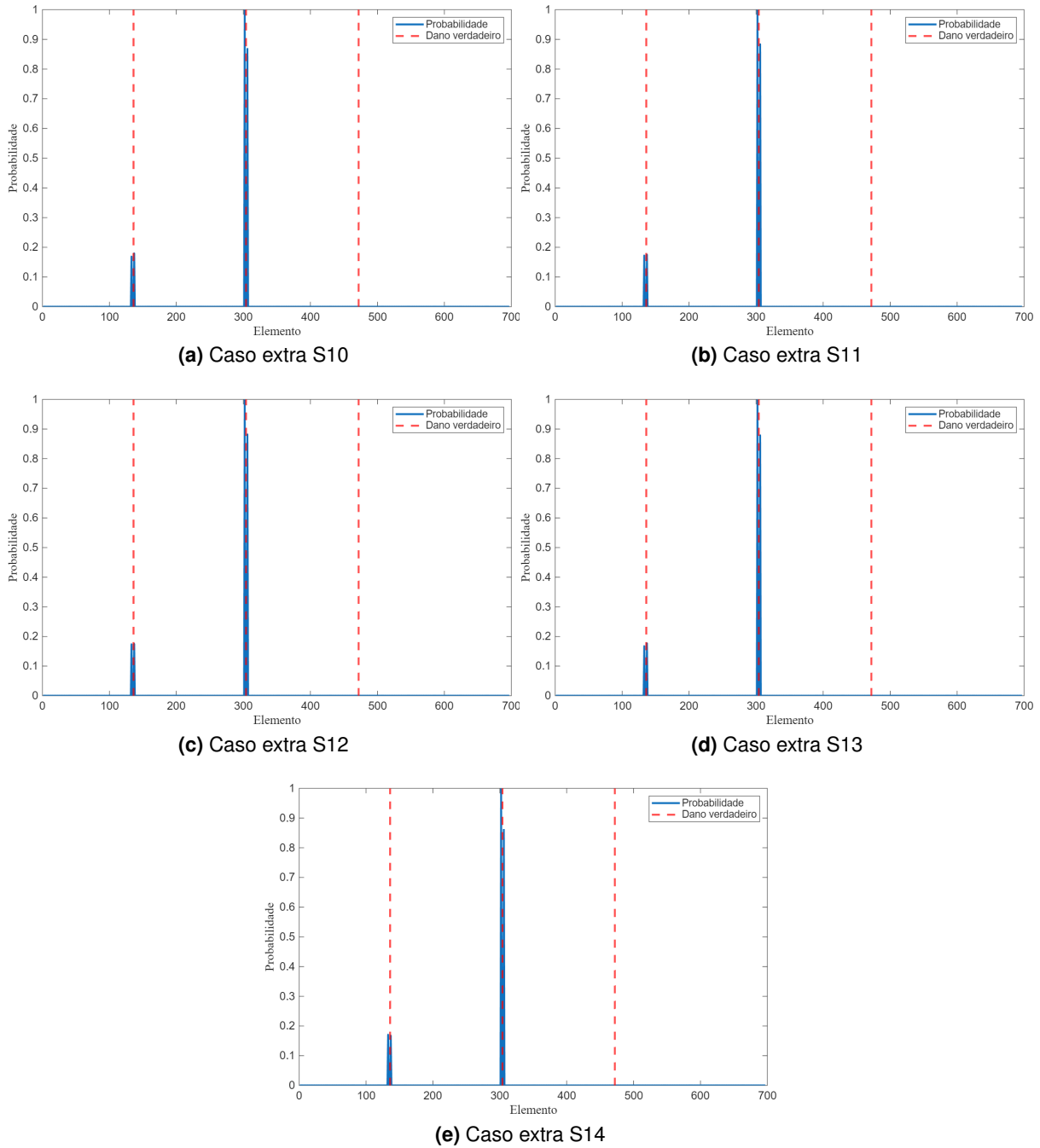
**Tabela A.1.** Definição dos casos extras para a identificação de dano por diferença de curvatura modal (Adaptados de Khiem e Toan, 2014).

| Casos      | Localização do dano |                     |                     |
|------------|---------------------|---------------------|---------------------|
|            | $\zeta_1 = 0,2 (m)$ | $\zeta_2 = 0,4 (m)$ | $\zeta_3 = 0,7 (m)$ |
| <b>S4</b>  | 10%                 | 20%                 | 10%                 |
| <b>S6</b>  | 20%                 | 20%                 | 20%                 |
| <b>S7</b>  | 20%                 | 30%                 | 20%                 |
| <b>S8</b>  | 30%                 | 30%                 | 20%                 |
| <b>S9</b>  | 30%                 | 30%                 | 30%                 |
| <b>S10</b> | 30%                 | 30%                 | 40%                 |
| <b>S11</b> | 30%                 | 40%                 | 40%                 |
| <b>S12</b> | 40%                 | 40%                 | 40%                 |
| <b>S13</b> | 50%                 | 40%                 | 40%                 |
| <b>S14</b> | 50%                 | 50%                 | 40%                 |

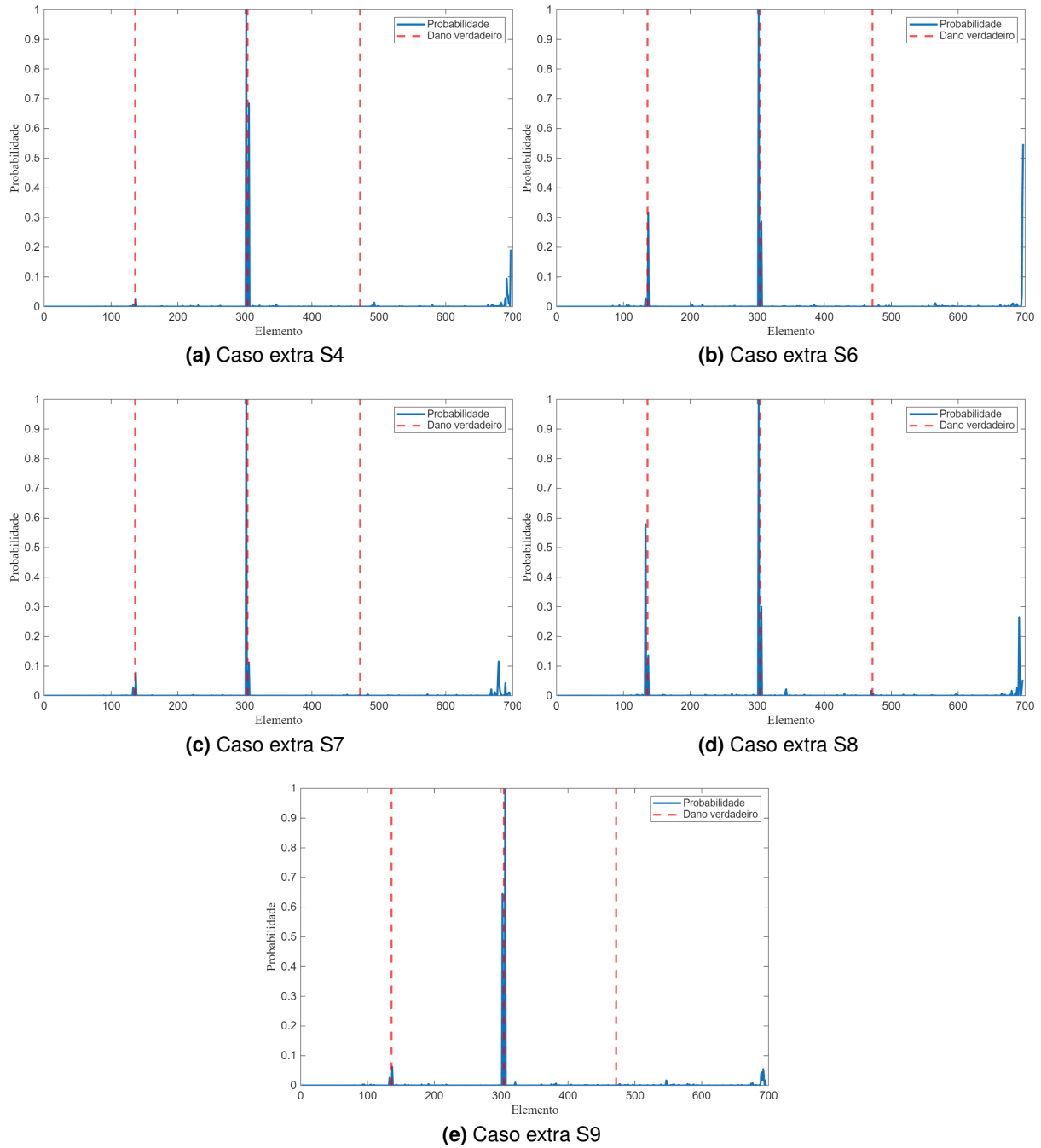
Os resultados para os casos extras do modelo 1 estão ilustrados nas Figs. A.1 e A.2, e os resultados para adição de ruído aos mesmos casos encontram-se nas Figs. A.3 e A.4. Em seguida, os resultados para os casos extras do modelo 2 encontram-se nas Figs. A.5 e A.6, e os casos com adição de ruído nas Figs. A.7 e A.8.



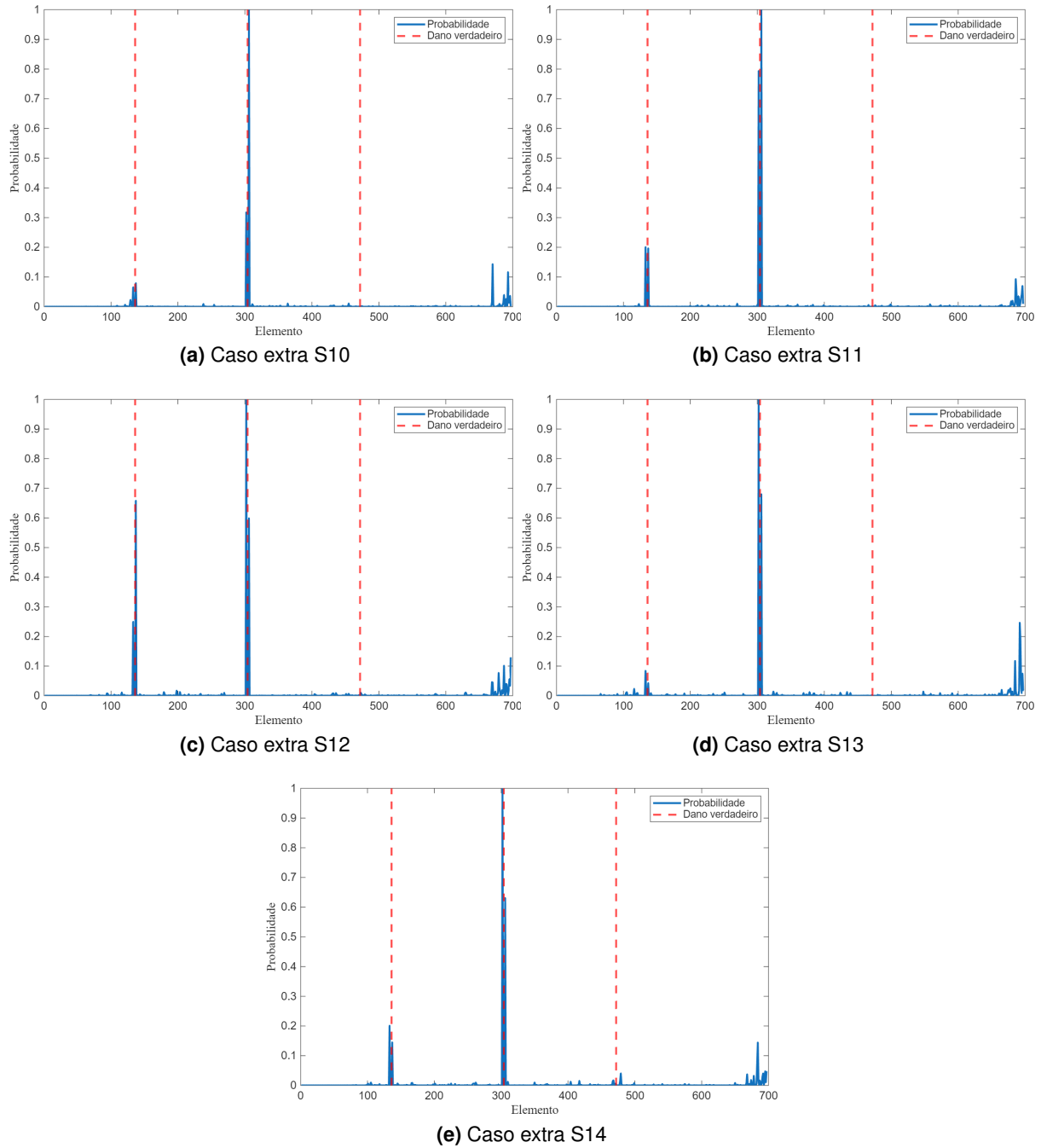
**Figura A.1.** Localização do dano para o modelo 1 para os casos extras S4-S9 da análise de diferença de curvatura modal sem consideração de ruído.



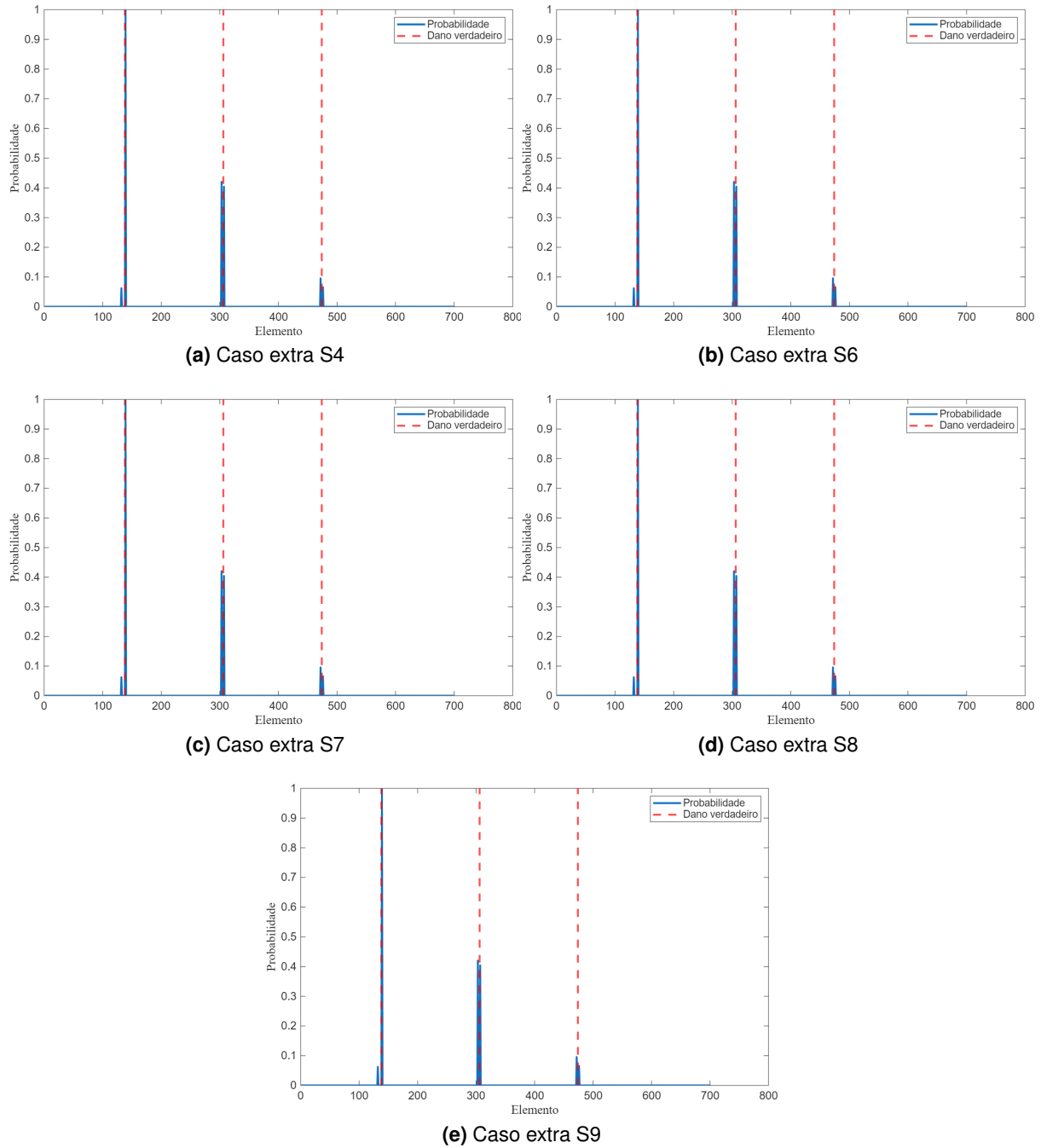
**Figura A.2.** Localização do dano para o modelo 1 para os casos extras S10-S14 da análise de diferença de curvatura modal sem consideração de ruído.



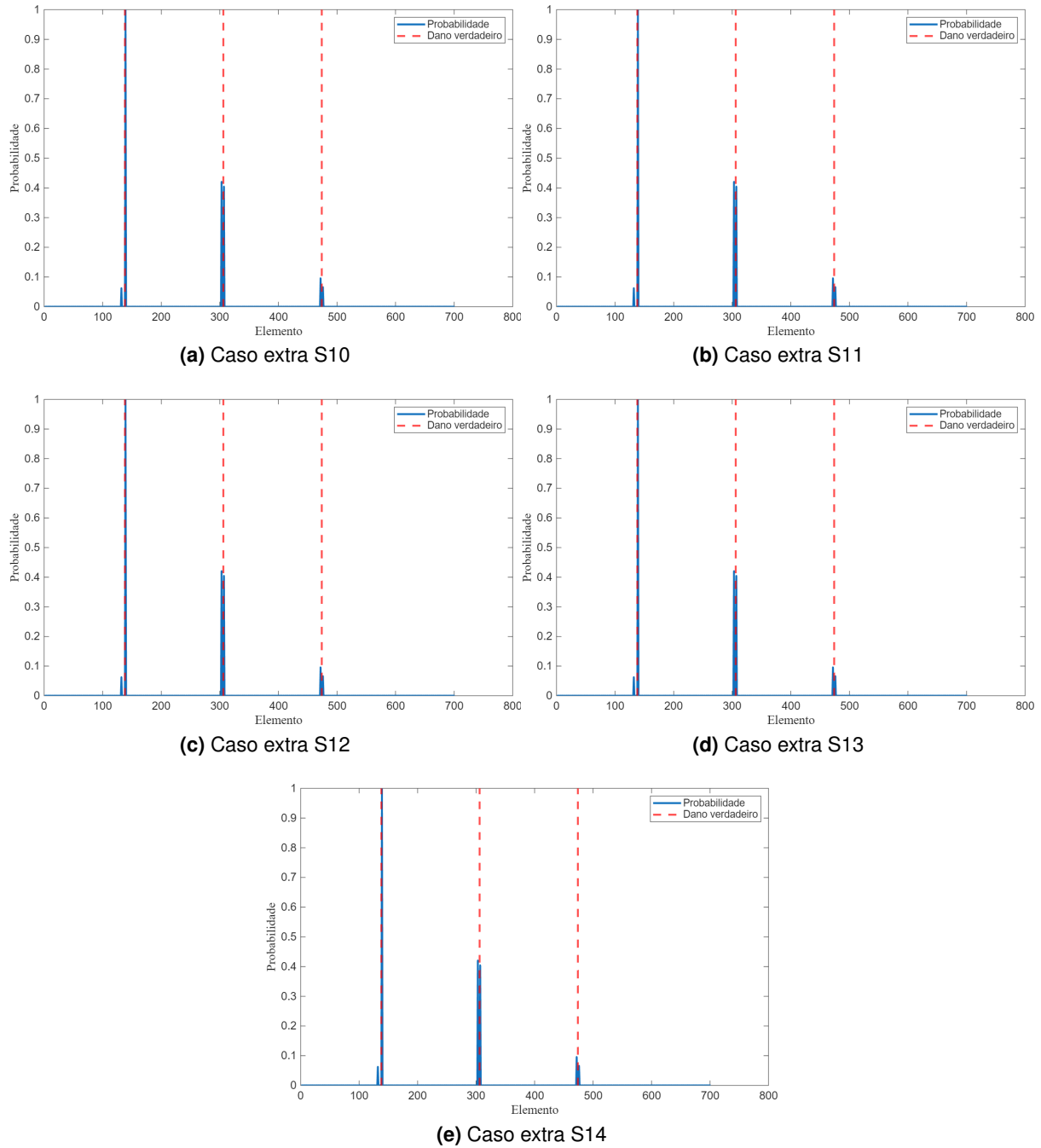
**Figura A.3.** Localização do dano para o modelo 1 para os casos extras S4-S9 da análise de diferença de curvatura modal com adição de ruído.



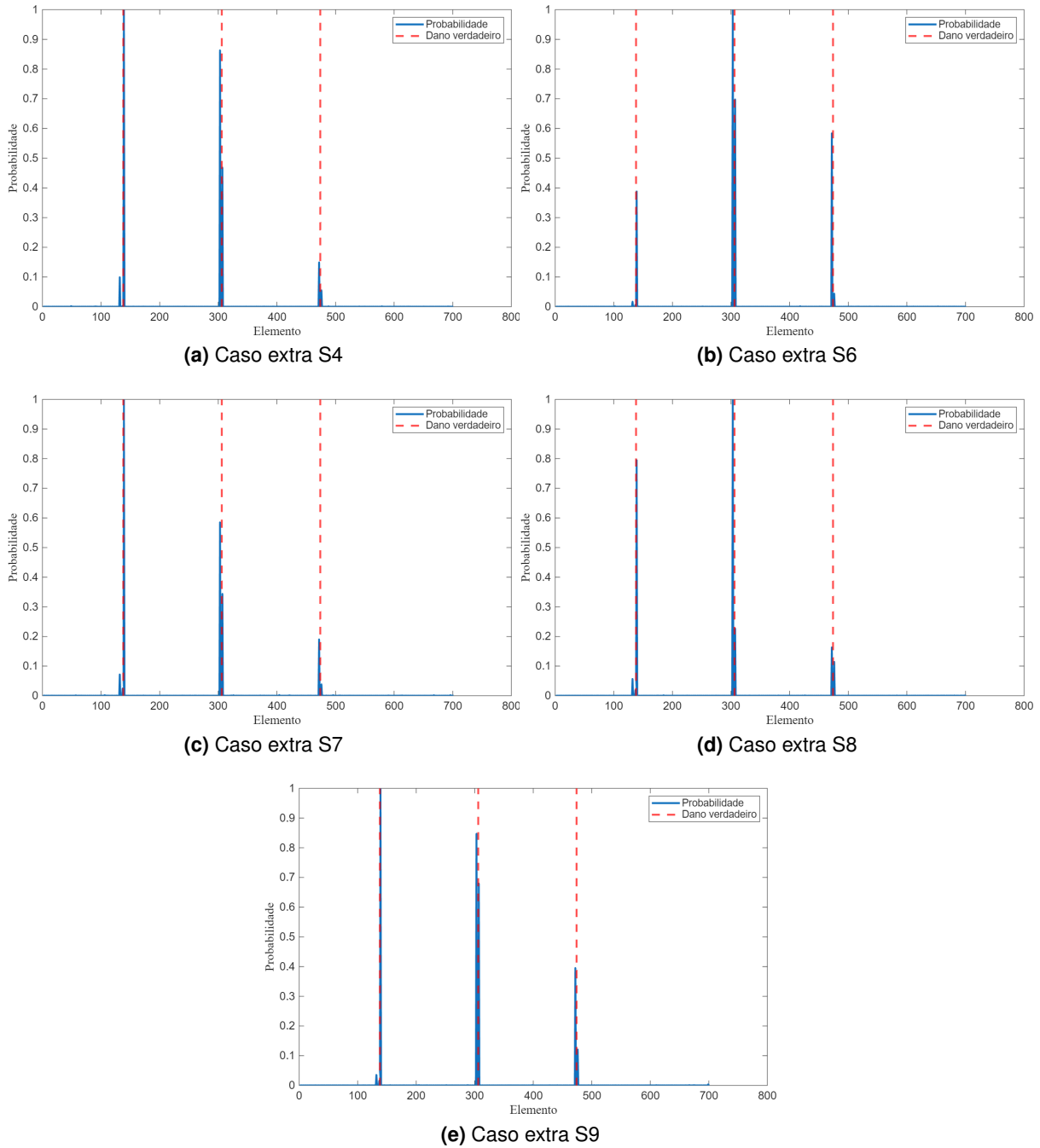
**Figura A.4.** Localização do dano para o modelo 1 para os casos extras S10-S14 da análise de diferença de curvatura modal com adição de ruído.



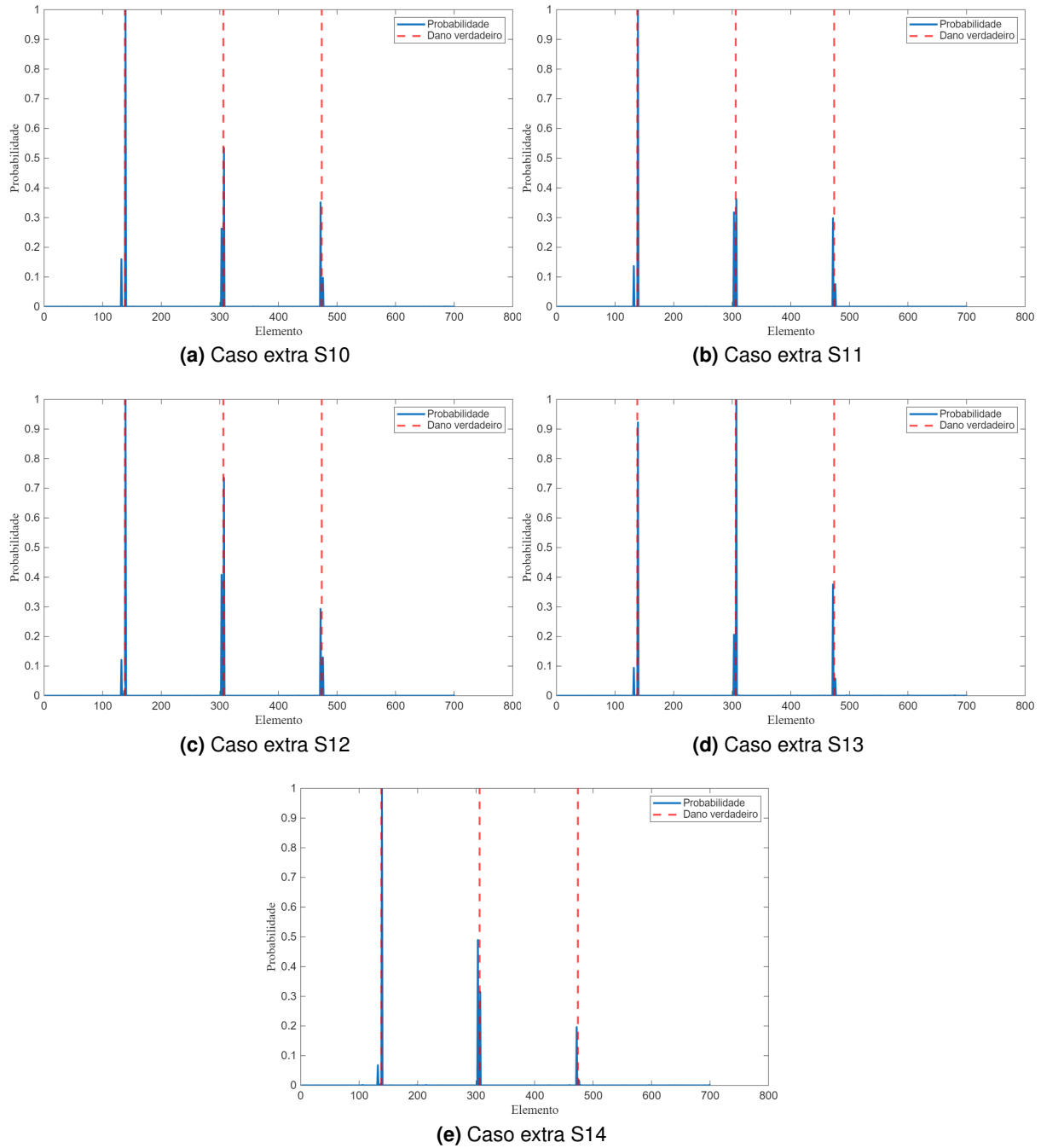
**Figura A.5.** Localização do dano para o modelo 2 para os casos extras S4-S9 da análise de diferença de curvatura modal sem consideração de ruído.



**Figura A.6.** Localização do dano para o modelo 2 para os casos extras S10-S14 da análise de diferença de curvatura modal sem consideração de ruído.



**Figura A.7.** Localização do dano para o modelo 2 para os casos extras S4-S9 da análise de diferença de curvatura modal com adição de ruído.



**Figura A.8.** Localização do dano para o modelo 2 para os casos extras S10-S14 da análise de diferença de curvatura modal com adição de ruído.