UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Luiz Fernando Ferreira Machado

O ENSINO DE PROBABILIDADE NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA NA PERSPECTIVA DO ENSINO EXPLORATÓRIO

Brasília, DF
2025

LUIZ FERNANDO FERREIRA MACHADO

O ensino de probabilidade na Educação de Jovens e Adultos: uma sequência didática na perspectiva do Ensino Exploratório

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Departamento de Matemática da Universidade de Brasília (UnB), como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof.ª. Dr.ª Regina da Silva Pina Neves

Brasília, DF
2025

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

MM149e

Machado, Luiz Fernando Ferreira
O ensino de probabilidade na Educação de Jovens e Adultos: uma sequência didática na perspectiva do Ensino Exploratório / Luiz Fernando Ferreira Machado; orientador Regina da Silva Pina Neves. Brasília, 2025.
166 p.

Dissertação(Mestrado Profissional em Matemática) Universidade de Brasília, 2025.

1. Ensino de probabilidade. 2. Ensino Exploratório. 3. Tarefas matemáticas. 4. Educação Profissional de Jovens e Adultos. I. Pina Neves, Regina da Silva, orient. II. Título.

LUIZ FERNANDO FERREIRA MACHADO

O ensino de probabilidade na Educação de Jovens e Adultos: uma sequência didática na perspectiva do Ensino Exploratório

BANCA EXAMINADORA:

Prof.ª Dr.ª Regina da Silva Pina Neves Orientador/Presidente
Universidade de Brasília (UnB)
Presidente

Prof.ª Dr.ª Raquel Carneiro Dörr
Universidade de Brasília (UnB)
Examinadora Interna

Prof.ª Dr.ª Aluska Dias Ramos de Macedo Silva
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)
Examinadora Externa

Prof.ª Dr.ª Márcia Rodrigues Leal
Instituto Federal de Brasília (IFB)
Examinadora Externa

Prof. Dr. Rui Seimetz
Universidade de Brasília (UnB)
Examinador Interno (suplente)

Brasília - DF
Fevereiro de 2025

Dedico aos professores que não se subordinam a uma prática meramente transmissiva e enxergam a Educação Matemática como um caminho para a emancipação.

AGRADECIMENTOS

> *[...] e mesmo que se perca; perder-se também é caminho.*
>
> (Clarice Lispector)

Perdi-me e reencontrei-me tantas vezes durante esta longa jornada. Perdi desejo, mas o reencontrei. Perdi força, mas a reencontrei. Perdi esperança, mas a reencontrei. Às vezes faltaram palavras, faltaram sorrisos, às vezes faltaram lágrimas. Mas o que não faltou foi acolhimento, parceria e compreensão. Sorrisos e lágrimas apresentam-se agora temperando estas palavras de agradecimento a todas as pessoas que não desistiram de mim, até mesmo quando eu tentei desistir.

Agradeço a minha *família*, que não me deixa esquecer jamais o que significa essa palavra. Meus pais, meus irmãos e quem chegou depois, meu companheiro: o amor e apoio de vocês foi e é indescritível!

Agradeço aos meus amigos, que cruzaram a minha vida em diversas circunstâncias – graduação, trabalho, vida – e permaneceram entrelaçando nossas histórias.

Agradeço a meus professores e a meus estudantes, que contribuíram com a minha formação profissional e me ajudaram a construir o professor que sou hoje.

Agradeço às professoras Dr.ª Raquel Carneiro Dörr, Dr.ª Márcia Leal e Dr.ª Aluska Macedo, pela disponibilidade e contribuições para enriquecimento deste trabalho.

Em especial, agradeço à Prof.ª. Dr.ª Regina da Silva Pina Neves pelo compartilhamento de conhecimentos, pela compreensão e dedicação nas sugestões, correções e adequações. Seu profissionalismo, competência e felicidade no trabalho pela Educação Matemática serão sempre um exemplo para mim. Acredito que nunca conseguirei explicar a importância que seus *sins* tiveram na minha vida. Com a senhora aprendi os verdadeiros sentidos de sabedoria e generosidade.

Por fim, agradeço ao Instituto Federal de Goiás e à Universidade de Brasília pelas oportunidades que me foram dadas e por transformarem vidas através da educação e da ciência.

RESUMO

O ensino de probabilidade tem sido um grande desafio para professores que ensinam Matemática em todas as etapas da Educação Básica. Diante disso, o presente trabalho tem como objetivo construir uma sequência didática para o ensino de probabilidade de acordo com o Ensino Exploratório, voltada para um curso técnico em eletrotécnica integrado ao Ensino Médio na modalidade da Educação de Jovens e Adultos (EJA), incluindo tarefas matemáticas que contemplem as suas especificidades. Para isso, fundamentou-se na literatura sobre o ensino de probabilidade, no letramento probabilístico e nos pressupostos teórico-práticos sobre tarefas matemáticas e sobre o Ensino Exploratório. Este estudo, de cunho exploratório, teve uma abordagem qualitativa, adotando a pesquisa do tipo bibliográfica para realizar a revisão de literatura e, a partir dela, sistematizar uma sequência didática com foco nas fases preparatórias e de elaboração do plano de aula e na análise de aspectos positivos e limitantes de cada tarefa escolhida. A sequência didática foi estruturada em cinco seções de duas aulas cada, contemplando as etapas de diagnóstico, desenvolvimento e avaliação das aprendizagens. Dos resultados alcançados, destaca-se a construção de cenários valiosos e potencializadores do pensamento probabilístico, da sistematização de ideias matemática, do diálogo e da participação ativa. Além disso, percebeu-se como o aprofundamento e o diálogo entre as teorias supracitadas fundamentaram o planejamento de estratégias de ensino que possam respeitar os conhecimentos prévios dos estudantes da EJA, promover a integração entre formação técnica e formação matemática e fomentar a multiplicidade de abordagens da probabilidade de maneira significativa.

Palavras-chave: Ensino de probabilidade; Ensino Exploratório; Tarefas matemáticas; Educação Profissional de Jovens e Adultos.

ABSTRACT

Teaching probability has been a major challenge for teachers who teach mathematics at all stages of basic education. In view of this, this study aims to build a didactic sequence for teaching probability according to Exploratory Teaching, aimed at a technical course in electrotechnical integrated into high school in the form of youth and adult education (EJA), including mathematical tasks that contemplate its specificities. To this end, it was based on the literature on teaching probability, probabilistic literacy and theoretical-practical assumptions about mathematical tasks and Exploratory Teaching. This exploratory study, had a qualitative approach, adopting bibliographic research to carry out the literature review and, from there, systematize a didactic sequence, focusing on the preparatory and lesson plan development phases and on the analysis of positive and limiting aspects of each chosen task. The didactic sequence was structured in five sections of two classes each, contemplating the stages of diagnosis, development and assessment of learning. Among the results achieved, the construction of valuable scenarios that enhance probabilistic thinking, the systematization of mathematical ideas, dialogue and active participation stand out. Furthermore, it was noted how the deepening and dialogue between the aforementioned theories supported the planning of teaching strategies that can respect the prior knowledge of EJA students, promote the integration between technical training and mathematical training and foster the multiplicity of approaches to probability in a meaningful way.

Keywords: Teaching probability; Exploratory Teaching; Mathematical tasks; Professional Education for Young People and Adults.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
Bolema	Boletim de Educação Matemática
Capes	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
EJA	Educação de Jovens e Adultos
EMR	Educação Matemática em Revista
IFG	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PETMAT	Programa de Educação Tutorial da Licenciatura em Matemática
PPC	Projeto Pedagógico do Curso
Relime	Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
RIPEM	Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática
RSL	Revisão Sistemática de Literatura
SEEDF	Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal
UFG	Universidade Federal de Goiás

SUMÁRIO

I A QUE VENHO...

Ensino porque busco, porque indaguei, porque indago e me indago. Pesquiso para constatar, constatando, intervenho, intervindo educo e me educo.

(Paulo Freire, 2011, p. 30-31)

Decidir tornar-se professor de Matemática foi um grande desafio frente aos conhecidos problemas enfrentados pelo Brasil no que se refere à aprendizagem em Matemática. Em 2018, o Brasil obteve 384 de média de proficiência em Matemática, 108 pontos abaixo da média da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico - OCDE (Brasil, 2020, p. 107). Então, para além de um desafio, ensinar Matemática é um compromisso social: educar integralmente o ser humano juntamente e por meio da formação de conhecimentos matemáticos. Mas antes de tudo, ser professor de Matemática é um ato de esperança, no sentido freireano de práxis libertadora (Freire, 2011a). É colocar-se à luta, mover-se para a desmistificação da dicotomia entre matemática e humanidades, entre matemática e realidade, entre matemática e sujeito. Compreendendo, assim, que pensamento e conhecimentos matemáticos contribuem e devem ser construídos para a emancipação dos estudantes?

Isso exige do professor de Matemática uma ação reflexiva, crítica e mediada pela práxis, indo ao encontro da ideia de pesquisa como princípio educativo. Para Demo (2003), os professores devem superar os limites de serem apenas “ensinadores”, construindo capacidades para a elaboração própria de sua atividade docente (material, técnica, atitudinal etc.), mas sempre com a devida preocupação teórica, metodológica e prática (no sentido dialógico com a teoria).

Freire (2011b) condiciona o ato de ensinar ao ato de pesquisar e o ato de pesquisar ao ato de ensinar. Entre outros saberes, avisa que ensinar exige ainda: rigorosidade metódica, que deve se opor a uma concepção memorizadora e reprodutora da prática docente; consciência de inacabamento, aceitando o que é diferente e novo, respeitando os saberes dos educandos e buscando reinventar-se; curiosidade, que coloca o professor em diálogo, por exemplo, com a indagação, inquietação e elaboração do educando.

Tais saberes, não coincidentemente, também podem ser entendidos como necessários à prática investigativa, que fornece ao docente autonomia e valorização profissional. Zeichner (2007, p. 208) atenta para a necessária superação da divisão entre professor-pesquisador (que está em atuação na escola) e pesquisador acadêmico, baseada na visão do primeiro que não vê aplicação na pesquisa acadêmica e, na visão do segundo, que considera a pesquisa do professor "trivial, ateórica e irrelevante". O autor complementa enfatizando que se deve orientar para a valorização do professor como pesquisador educacional e para a legitimação dos seus conhecimentos.

Mas que tipo de conhecimentos são esses produzidos pelos professores? Tardif (2014) afirma que, apesar de desvalorizados, os saberes docentes são sociais, plurais, provenientes de diversas fontes e estratégicos. Além disso, a consciência de como se configuram é importante para a construção da identidade docente. Ele classifica os saberes docentes em: saberes da formação profissional, que são as teorias e ideologias educacionais transmitidas nas instituições de formação de professores; saberes disciplinares, que correspondem aos campos do conhecimento, aos saberes tradicionalmente construídos e definidos pelas instituições acadêmicas; saberes curriculares, identificados pelos objetivos, conteúdos e métodos definidos pelas instituições escolares; e saberes experienciais, que são construídos e validados pelos próprios professores frente a suas vivências e ao trabalho cotidiano coletivo (Tardif, 2014).

Em particular, deve-se reconhecer que os saberes adquiridos pela experiência (dinâmicos e complexos) são aspectos primordiais da identidade docente e válidos, exigindo uma postura de pesquisa do professor. Mas quando esses saberes começam a se desenvolver? Apenas a partir do ingresso em cursos de formação inicial? Imbernón (2011) reforça que a experiência prévia como discente deixa fortes marcas no que irá se constituir enquanto saberes e práticas docentes.

Desse modo, são diversos os espaços e tempos em que o professor tem contato, aprende e (re)constrói os conhecimentos que fazem parte de seu repertório. Portanto, para compreender esses conhecimentos, é mister conhecer a trajetória e as motivações que levam um professor-pesquisador a atuar.

Nesse sentido, coloco-me[1] neste trabalho como professor-pesquisador na área da Educação Matemática, que reflete e revisita constantemente o “eu” profissional, subjetivo e coletivo, numa tentativa de compreender sempre o que me move. Por que, então, escolhi a Educação e a Matemática como campos de atuação profissional? O que me fez preocupar de tal maneira com a aprendizagem dos educandos? O que justifica as minhas escolhas nessa pesquisa (os conceitos matemáticos, as concepções, os instrumentos de coleta)?

A educação escolar foi desde muito cedo um objetivo meu, revelado por uma intensa vontade de frequentar a escola. Não tão mais tarde, com meu ingresso nesse ambiente, veio a forte identificação com o seu perfil disciplinar, principalmente a característica apresentada por Foucault (1987) como um sistema duplo de gratificação-sanção, no qual ao mesmo tempo em que se penaliza alguns também se premia outros, com o fim maior de normalizar os indivíduos em ambos os casos. Para o filósofo, “os aparelhos disciplinares hierarquizam, numa relação mútua, os ‘bons’ e os ‘maus’ indivíduos” (Foucault, 1987, p. 151). Ser considerado e destacado como um “bom estudante” (leia-se um bom repetidor ou discípulo) era, para mim, uma fonte de alegria. Considerei os anos escolares muito prazerosos quanto aos estudos e às conquistas pessoais advindos deles.

E qual disciplina melhor para ocorrer esse processo de hierarquização e diferenciação do que a Matemática? A identificação e o gosto por esta área do conhecimento se deram por dois caminhos: por um lado, ser um “bom estudante” nas mais diferentes disciplinas era recompensador; e a facilidade e os bons resultados em Matemática eram mais frequentemente assinalados. Por outro lado, agradava-me lidar com os desafios que a Matemática apresentava em cada novo conceito, em cada exercício. A Matemática era então um local de destaque e também de muito contentamento.

No entanto, esse processo se encontrava com uma realidade oposta e paralela, na qual eu convivia com o grande problema de me sentir diferente – logo não tão normalizado assim – e sentir o peso das outras pessoas me verem com olhares inquisitórios. E, apesar de acontecerem também no mesmo ambiente, meus estudos seguiram-se alienados a este intento social de colocar rótulos e excluir quem não é

[1] Neste primeiro capítulo, faço uso da primeira pessoa do singular para descrever a trajetória deste professor-pesquisador, compreendendo que essa é uma narrativa que me liga a esta pesquisa. Nos demais capítulos, o texto será escrito em terceira pessoa.

adequado ao perfil ensejado de um padrão normalizador. Assim, a escola representava uma composição de duas imagens antagônicas: era vista como o meu meio de ascensão e refúgio, ao passo que também era o fiel retrato da sociedade opressora em que se localizava. Foi nesse cenário conflituoso que decidi me tornar professor de Matemática, a fim de reproduzir e contribuir para a manutenção desse sistema.

Concluí a Educação Básica e ingressei no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Goiás - UFG, em 2008, como produto de uma bem-sucedida fabricação, movida por processos disciplinares “que permitem o controle minucioso das operações do corpo, que realizam a sujeição constante de suas forças e lhes impõem uma relação de docilidade-utilidade” (Foucault, 1987, p. 118). Estabelecida uma relação cartesiana clássica com o conhecimento, o meu objetivo era simplesmente saber. Era um objetivo acrítico, sem reflexão. Tornava-se logo, um saber igualmente acrítico.

O início da graduação, com as disciplinas básicas do curso, me apresentava o mesmo caminhar, até que tive contatos com novos olhares, tais como as discussões sobre a reflexão no processo de ensinar e aprender ou sobre o conhecimento enquanto meio para uma formação crítica, vivenciados principalmente em atividades do grupo Programa de Educação Tutorial da Licenciatura em Matemática da UFG - PETMAT[2]. Olhares que me fizeram entrar em choque com a minha anterior formação, instalando o caos onde ainda em mim era estável. Esse novo status caótico deu margem a dois relevantes episódios para a minha formação: tanto a abertura para conhecer novos enfoques e vivenciar a diversidade epistemológica, quanto o surgimento de uma enxurrada de inquietações referentes à Educação Matemática.

Esse primeiro episódio possibilitou identificar-me como diverso e ter um olhar cuidadoso para as distintas maneiras de (re)existências no mundo. Isso se deu a partir do aprofundamento em estudos sobre o Programa Etnomatemática e da participação

---

[2] O Programa de Educação Tutorial é um programa do Ministério da Educação orientado para a oferta de variadas ações cujo princípio é a indissociabilidade entre ensino, pesquisa e extensão. É desenvolvido por grupos de estudantes bolsistas de cursos de graduação, sob a tutoria de um docente. Mais informações podem ser acessadas no Portal do Ministério da Educação (http://portal.mec.gov.br/pet/pet). Em particular, na UFG existe o grupo PETMAT que é vinculado ao curso de Matemática na modalidade da Licenciatura e desenvolve projetos direcionados à Educação Matemática. Mais informações sobre esse grupo estão disponíveis em: https://petmat.ime.ufg.br/. Acesso em: 21 dez. 2024.

como tutor do curso de Educação Intercultural da UFG[3], uma licenciatura voltada para a formação de professores indígenas. Foi um encontro para mim. Esse movimento me levou a desenvolver no Estágio Supervisionado uma proposta de intervenção voltada para a abordagem de histórias e culturas africanas, afro-brasileiras e indígenas. Nessa mesma linha, ingressei no Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática[4] da UFG, em 2012 (curso não concluído), com o objetivo de pesquisar sobre a Educação Matemática numa perspectiva decolonial a partir da abordagem de culturas indígenas.

O outro episódio, não necessariamente desvinculado do anterior, foi repensar o que era o processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Para além das reflexões nas diferentes disciplinas das áreas da Educação e da Educação Matemática, participar de projetos de ensino, pesquisa e extensão no âmbito do PETMAT foi determinante para o olhar mais sensível e compromissado para o estudante enquanto sujeito e aprendente. Destaco a vivência em um projeto voltado para o ensino de cálculo diferencial e integral na perspectiva da educação tutorial e em oficinas promovidas para diferentes públicos.

Ao ingressar no Mestrado, tive contato com muitos outros teóricos importantes e participei de debates nos mais diferentes temas da Educação. O lado pesquisador foi cada vez mais sendo aguçado, porém os conflitos existentes internamente não cessaram. Como na resolução de um problema em Matemática, a avaliação das estratégias e resultados obtidos foi necessária para o desenvolvimento de novas trilhas rumo ao objetivo de construir-se enquanto profissional e pesquisador.

Isso tudo transformou as minhas concepções sobre a Educação e sobre a Matemática, modificando o que seria expresso em minha prática docente. Em 2014, uma grata surpresa mudou os rumos da minha atuação profissional, a posse como professor de Matemática na Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal - SEEDF. Em um concurso que me inscrevi despropositadamente, motivado apenas pela proximidade territorial e pela experiência, acabei sendo aprovado e convocado para atuar em uma cidade que havia conhecido apenas uma vez, no dia da prova do concurso. Decidi efetivar esse chamamento tanto pela carreira que me parecia mais

[3] Mais informações sobre o Núcleo Takinahakỹ de Formação Superior Indígena da UFG e o curso de Educação Intercultural estão disponíveis em: https://intercultural.letras.ufg.br/. Acessado em: 21 dez. 2024.
[4] Mais informações sobre o Programa podem ser acessadas em: https://ppgecm.prpg.ufg.br/. Acessado em: 21 dez. 2024.

atrativa, como pelo desafio de atuar em um lugar tão novo. Tive, então, a oportunidade de atuar em três escolas, em múltiplas turmas da segunda fase do Ensino Fundamental. Logo me deparei com realidades muito distintas das que tive. Porém, a formação que obtive até ali me ajudou a compreender aquelas crianças e adolescentes e a me dedicar, ao máximo, para que elas tivessem contato sólido com a aprendizagem em Matemática.

Já em 2015, fui aprovado em concurso público para ingresso na carreira de docente da Educação Básica, Técnica e Tecnológica do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás - IFG, na área de Matemática/Educação Matemática. Por se tratar de uma vaga de dedicação exclusiva, precisei optar entre essa carreira e a de professor na SEEDF. Sendo assim, em março de 2016, entrei em exercício no Câmpus Valparaíso de Goiás do IFG, escolha motivada pelos novos desafios: atuar no Ensino Médio (regular e na modalidade da Educação de Jovens e Adultos) integrado à Educação Profissional técnica e na licenciatura em Matemática. Assim, ao mesmo tempo em que trabalhava com a formação de professores de Matemática, refletindo sobre os processos de ensino e aprendizagem no lugar de formador, continuei vinculado ao exercício docente na Educação Básica . Amparado pelas ideias de Zeichner (2007) apontadas anteriormente, compreendi esse desafio como uma situação conflituosa, mas também muito frutífera.

Nessa instituição, venho participando de uma variedade de atividades: organização de eventos voltados para o curso de licenciatura em matemática; representação em comissões de debate de documentos e políticas institucionais; participação no Núcleo de Estudos Afro-Brasileiros e Indígenas do Campus Valparaíso (Neabi-Erê); participação no Núcleo de Pesquisas Transdisciplinares em Diversidade (Diversas); orientação de trabalhos de conclusão de curso e iniciação científica; projetos de ensino voltado à reflexão sobre o processo de ensino e aprendizagem em Matemática e sobre diversidade. Foi nos espaços de discussão das disciplinas que ministrei onde mais tive inquietações. Tanto nas disciplinas da licenciatura quanto nas disciplinas de Matemática da Educação Básica me defronto cotidianamente com o desafio de estabelecer a relação entre teoria e prática, aproximando o que é pesquisado e debatido no âmbito da Educação Matemática com a realidade educacional.

Uma das insatisfações que tive foi com a dificuldade de ensino e aprendizagem de análise combinatória e probabilidade no Ensino Médio. A primeira experiência aconteceu com uma turma de formandos do curso técnico em Eletrotécnica na modalidade da Educação de Jovens e Adultos - EJA, em 2018. Percebi que a busca por caminhos rápidos e repetitivos pelos estudantes era recorrente e isso os impedia de compreender a dinamicidade envolvida no pensamento probabilístico. O que suscitou os questionamentos: algo na minha prática reforçou esse comportamento dos estudantes? Eu propus mudanças que pudessem quebrar com essa repetição? Apesar da minha preocupação com um processo mais dialogado e com a aprendizagem daqueles estudantes, imperou na prática a antiga fórmula de apresentação de conteúdo seguida de aplicações motivadas por exercícios. O despertar para a mudança se iniciou.

Em 2019, tive a oportunidade de trabalhar com essa temática em outra turma da EJA. Nesse momento escolhi trabalhar com jogos de dados para a formação do conceito de probabilidade e do cálculo de probabilidade, embasado pelo trabalho de Brunehilde, Cordeiro e Oliveira (2018). Foi uma experiência interessante, porém de forma isolada e faltando uma organização didática que suscitasse melhor o raciocínio dos estudantes. Foi um momento importante de mobilização, com contribuições para o desenvolvimento dos estudantes, mas ainda não me parecia satisfatório. Em 2020, decidi trabalhar com uma turma de Ensino Médio regular que teria como conteúdo esse tema. No entanto, os desafios do ensino remoto e da pandemia da Covid-19 (2020-2022) dificultaram o avanço nesse processo de mudança.

Em 2021, ainda no ensino remoto mediado por tecnologias, tive a oportunidade de trabalhar com tais temas em duas turmas do curso de Eletrotécnica na modalidade da EJA, explorando as normas de segurança e a ideia de confiabilidade em um projeto de ensino. Essa experiência foi bastante produtiva, mas avaliei que ainda faltava algo na organização dos processos de ensino e a dificuldade dos estudantes frente ao ensino remoto não potencializaram os efeitos deste projeto.

A partir dessas experiências e das constantes insatisfações próprias de um professor-pesquisador, retornei à pós-graduação, desta vez ao Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, com a ânsia de pesquisar potencialidades e estratégias para o ensino de probabilidade no Ensino Médio. A partir das leituras sobre as tarefas na aprendizagem em Matemática em Ponte (2017) e do Ensino Exploratório em Canavarro (2011), desenvolvi um novo olhar sobre a organização do processo de ensino. Desse modo, nesta pesquisa[5] me proponho a responder o seguinte questionamento: *quais as potencialidades do Ensino Exploratório para o planejamento de uma sequência didática voltada para o ensino de probabilidade de estudantes de um curso técnico em eletrotécnica integrado ao Ensino Médio na modalidade da EJA?*

Na busca por responder essa pergunta, apresento o relato neste trabalho, organizado em seis capítulos, sendo este primeiro reservado ao apontamento de alguns aspectos que me trouxeram a esta pesquisa. No segundo capítulo serão explanados os objetivos propostos e os caminhos metodológicos para o seu alcance. Em seguida, no terceiro capítulo, apresenta-se uma construção histórica e teórica sobre a probabilidade e seu ensino. O quarto capítulo reserva-se a uma abordagem aprofundada sobre a conceituação e a tipificação de tarefas matemáticas e sobre as etapas do Ensino Exploratório, seguidas de revisão de literatura. O quinto capítulo faz uma discussão sobre como os pressupostos teóricos foram mobilizados para o planejamento de cada etapa da sequência didática. Por fim, no sexto capítulo, são tecidas algumas considerações sobre como professores e estudantes podem se beneficiar da sequência didática, bem como quais riscos e dificuldades podem ocorrer, posto que o seu desenvolvimento exige mudanças.

[5] O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

II CAMINHOS DA PESQUISA

O objetivo principal desta pesquisa é construir uma sequência didática para o ensino de probabilidade de acordo com o Ensino Exploratório, voltada para um curso técnico em eletrotécnica integrado ao Ensino Médio na modalidade da EJA. Nesse sentido, desenvolve-se a pesquisa a partir dos seguintes objetivos específicos:

- Sintetizar algumas teorias sobre probabilidade e ensino de probabilidade;
- Identificar os tipos de tarefas matemáticas e alguns elementos do Ensino Exploratório, em especial as etapas de planejamento e antecipação;
- Sistematizar planos de aulas integrados em uma sequência didática, seguido da interpretação de suas potencialidades e riscos para professores e estudantes de um curso técnico em eletrotécnica integrado ao Ensino Médio na modalidade da EJA.

Frente a esses objetivos, compreende-se que esta pesquisa é de cunho qualitativo, pois preocupa-se com o contexto, com os significados e com o processo de elaboração da sequência didática, aprofundando e mobilizando conhecimentos teóricos sobre a probabilidade e sobre a Educação Matemática, relacionando-os às vivências ao longo da profissionalização do professor-pesquisador (Triviños, 2013). Ainda que a dicotomia entre quantidade-qualidade precisava ser superada, ao definir a pesquisa como qualitativa, não se assume a inexistência de abordagem de dados quantitativos e a relevância desses para a pesquisa.

Em um primeiro momento, a pesquisa delineia-se como pesquisa bibliográfica, que é uma fase importante de qualquer estudo, pois possibilita que o pesquisador tenha acesso a uma diversidade de fenômenos (Gil, 2014) e é capaz de fornecer parâmetros para novas interpretações e hipóteses (Lima; Mioto, 2007). A revisão bibliográfica perpassa por todo o caminho de aprofundamento teórico-prático do professor-pesquisador. Além disso, o foco do trabalho sobre a reunião desses estudos culmina na elaboração de um documento, a sequência didática, a partir do viés interpretativo.

Sobretudo quanto à temática do Ensino Exploratório, optou-se por adotar também a Revisão Sistemática de Literatura (RSL) por ser uma estratégia que fornece protocolo e rigor à pesquisa de cunho bibliográfico (Campos; Caetano; Laus-Gomes, 2023). A revisão sobre o tema “Ensino Exploratório na Educação Matemática”, apresentada no Capítulo 4, foi realizada de fevereiro a agosto de 2023, orientada por etapas inspiradas a partir dos estudos de Campos, Caetano e Laus-Gomes (2023), Ramos, Faria e Faria (2014) e Paula, Martins e Oliveira (2021), a saber: elaboração de objetivos ou perguntas de pesquisa; estratégia de busca de material (equação de busca e base de dados); critérios de inclusão e de exclusão; síntese dos documentos encontrados; resultados; redação e publicação.

Define-se, ainda, esta pesquisa como um estudo exploratório, pois neste nível de pesquisa pretende-se aprofundar e aumentar a experiência do pesquisador em torno de uma determinada temática, encontrando e integrando diversos elementos necessários para obter os resultados desejados (Triviños, 2013; Gil, 2014). Assim, com o objetivo de compor uma sequência didática, busca-se relacionar as características do ensino de probabilidade, conforme apresentadas pelos pesquisadores da Educação Matemática, da organização do processo de ensino e aprendizagem por meio do Ensino Exploratório, do emprego de tarefas matemáticas exploratórias e investigativas e do perfil formativo em um curso de formação técnica na modalidade da EJA.

A concepção de sequência didática adotada se relaciona à definição de Zabala (1998, p. 18), como sendo um “conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos”. O autor utiliza indistintamente os termos *atividade* e *tarefa*, para os quais, nesta pesquisa, será demarcada uma diferenciação (vide capítulo 3). À vista disso, será utilizado o termo *tarefas* para esses elementos que ordenam, estruturam e se articulam nas aulas.

Zabala (1998) ressalta que as tarefas adquirem um determinado valor quando são organizadas numa sequência significativa, o que justifica a organização da prática educativa e a relação entre as tarefas por meio de sequências didáticas. Além disso, tomada como unidade analítica, uma sequência didática permite a análise pelo professor-pesquisador da própria prática e do processo de ensino e aprendizagem como um todo. Por esse mesmo motivo, o autor também denomina sequência didática como unidade didática, o que destaca o sentido de relação e integração que a sequência deve ter. Com isso, Zabala (1998) ainda a compreende como um instrumento que abrange as fases de planejamento, aplicação e avaliação, próprias de uma intervenção pedagógica reflexiva. Nesta pesquisa, o foco incidirá sobre a etapa de planejamento da sequência didática e em como distintos conhecimentos e reflexões são necessários para essa ação do professor-pesquisador.

Para Zabala (1998), além da definição e agrupamento das tarefas a serem desenvolvidas, a sequência didática também deve contemplar as formas de sequenciação, as relações e situações comunicativas, os papéis de professores e estudantes, a distribuição de espaço e tempo das aulas, a maneira de uso dos materiais e os procedimentos para a avaliação. Essas variáveis da unidade didática são orientadas pela abordagem didática adotada. Nesta pesquisa, a abordagem didática empregada é o Ensino Exploratório, o que é justificado no Capítulo 4.

A elaboração da sequência didática exigiu a definição de um público para o qual as tarefas e o planejamento seriam voltados, para que se configure num modelo contextualizado. Assim, optou-se pelo Curso Técnico Integrado em Eletrotécnica na Modalidade da Educação de Jovens e Adultos, oferecido pelo Campus Valparaíso de Goiás do IFG, por já fazer parte da trajetória profissional do professor-pesquisador, envolver o maior desafio para a sua prática e ter passado por uma recente reformulação do seu Projeto Pedagógico de Curso - PPC.

III ENTRE CERTEZAS E INCERTEZAS: A COMPLEXIDADE DE COMPREENDER E ENSINAR PROBABILIDADE

> *On peut même dire, à parler en rigueur, que presque toutes nos connaissances ne sont que probables; et, dans le petit nombre des choses que nous pouvons savoir avec certitude, dans les sciences mathématiques elles-mêmes, les principaux moyens de parvenir à la vérité, l'induction et l'analogie, se fondent sur les probabilités.*
>
> (Laplace, 1840, p. 1-2)

Laplace (1840) provoca a reflexão de que todo o conhecimento obtido seja apenas provável. Concordando ou não, fato é que a incerteza e a probabilidade se entrelaçam em muitas situações cotidianas.

O termo *probabilidade* já é um tanto quanto empregado de maneira intuitiva e usual para representar as chances e possibilidades de que algo aconteça. Matematicamente, chance e probabilidade têm definições distintas[6], mas essa especificidade não é relevante nesse momento. Pode-se entender a probabilidade como um campo ou um conjunto de ferramentas, tal qual definida por Viali (2008, p. 143) como "o ramo da matemática que pretende modelar fenômenos não determinísticos, isto é, aqueles fenômenos em que o 'acaso' representa um papel preponderante". Mas o termo representa, também, um conceito matemático que quantifica a incerteza de um evento, sendo por vezes definida a medida de probabilidade ou o cálculo de probabilidade. Então, no decorrer deste texto, os usos da palavra probabilidade estão representando um ou outro sentido, ou todos.

A título de compreensão para o bom andamento da leitura, apresenta-se também definições para acaso e evento. Viali (2008, p. 144) define o termo acaso como "um conjunto de forças, em geral, não determinadas ou controladas, que exercem individualmente ou coletivamente papel preponderante na ocorrência de diferentes resultados de um experimento ou fenômeno". Para Rathie e Zörnig (2012), compreende-se evento como um subconjunto do espaço amostral, que é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, logo de resultados não determinísticos de uma dada situação.

---

[6] Rathie e Zörnig (2012, p. 40) afirmam que, na Estatística, se p é a probabilidade de que um evento aconteça, então a chance de ocorrência desse evento é dada por $\frac{p}{1-p}$.

A integração da probabilidade nos currículos escolares ainda gera muitas reflexões e questionamentos, especialmente quanto a sua inserção nos primeiros anos de escolaridade, o que atrai a atenção de pesquisas nas áreas de educação matemática e psicologia (Batanero, 2024). As particularidades do seu raciocínio e do seu ensino exigem uma gama de habilidades do professor que ensina Matemática nos diferentes níveis e modalidades de ensino. Justamente por isso, tem se mostrado como um grande desafio para os professores.

Corrêa (2010) e Greer e Mukhopadhyay (2005) relatam em seus trabalhos o quanto os professores de Matemática encontram barreiras no momento de ensinar esse componente curricular, tais como concepções conflituosas sobre o acaso, um contato tardio com o estudo de probabilidade, a aprendizagem de probabilidade segundo uma visão determinista em sua formação, a "necessidade" de formalização excessiva e a escassa oferta de formação continuada associada às mudanças curriculares. Do mesmo modo, não é difícil encontrar relatos e pesquisas que apontam a grande dificuldade que os estudantes encontram para a aprendizagem do mesmo tópico.

Em meio a esses embaraços, fica o questionamento da necessidade e da importância da aprendizagem de probabilidade. Sáenz Castro (1999) afirma que a probabilidade teve (e tem) papel fundamental no desenvolvimento de diversas ciências e possibilitou que a realidade e os fenômenos pudessem ser lidos de maneiras não deterministas, tal qual na mecânica quântica. Além disso, a compreensão sobre a aleatoriedade tem muita relevância em diversos aspectos das sociedades, desde a análise de jogos de azar até às noções sobre seguridade, como em seguros de vida.

Então, para o autor, o crescimento da relevância da probabilidade nas sociedades já é uma justificativa para a sua inserção nos currículos educacionais. Soma-se a isso a sua potencialidade de aplicação de ideias matemáticas em situações reais, mais do que outros conteúdos da Matemática (Sáenz Castro, 1999). E outra justificativa apontada é de que seu estudo possibilita desenvolver um raciocínio diferente do pensamento lógico ou causal. Por outro lado, essa justificativa pode ser entendida como um dos grandes desafios para o seu ensino, atrelado ao fato de que o ensino de Matemática tem essencialmente uma perspectiva determinista, conforme apontado por Côrrea (2010).

Lopes (2008) assinala que a competência em estatística e probabilidade permite aos estudantes o desenvolvimento de pesquisas futuras e atuação no meio científico. A autora ressalta, ainda, que o conhecimento de probabilidade propicia a realização de previsões, a tomada de decisões, a argumentação e a análise crítica de informações e situações do cotidiano. Assim, a probabilidade é um dos componentes curriculares que contribuem para desenvolver “a capacidade de crítica e a autonomia desse estudante para que exerça plenamente sua cidadania, ampliando suas possibilidades de êxito na vida pessoal e profissional” (Lopes, 2008, p. 60).

Portanto, pode-se afirmar que a probabilidade (e a estatística) endossa o caráter político da Matemática. Borba e Skovsmose (2001) afirmam que estudantes que não aprendem Matemática dificilmente conseguirão lidar com a complexidade da sociedade atual. Para romper isso, não basta ensinar Matemática da forma tradicional, segundo uma visão determinista como citada anteriormente ou do Paradigma do Exercício[7], mas é preciso desconstruir a Matemática como perfeita, pura, superior, inquestionável, sem limitações, aplicável a todo e qualquer contexto e desvinculada de interesses sociais, políticos e ideológicos.

Demo (2020) também defende que a não aprendizagem de Matemática é um projeto de perpetuação da pobreza política. Relaciona-se essa ideia ao ato sistêmico de dificultar que as pessoas leiam o mundo, no sentido freireano[8]. É impedir que os sujeitos desenvolvam raciocínios abstratos necessários para a sua emancipação, pois “o oprimido precisa saber formalizar, abstrair a estrutura subjacente do fenômeno, para poder manipulá-lo a seu favor” (Demo, 2020, p. 14). Sendo os fenômenos da realidade dotados de complexidade e a probabilidade uma área que lida com incertezas, aleatoriedades e não linearidades, então o seu vínculo com um projeto emancipatório é ainda maior.

Considerada a relevância dessa área, adiante, pretende-se tecer o que se compreende como probabilidade (em particular a probabilidade inserida nos currículos da Educação Básica) e refletir sobre construções teóricas e metodológicas sobre o

[7] Skovsmose (2014) define o Paradigma do Exercício como um modelo vinculado a uma concepção tradicional de ensino, no qual o professor apresenta o conteúdo, alguns exemplos e, em seguida, elenca alguns exercícios para serem executados pelos alunos. Além disso, as tarefas nesse tipo de modelo são essencialmente contextualizados na Matemática Pura.

[8] Para Freire (2011, p. 19-20), “a leitura do mundo precede a leitura da palavra, daí que a posterior leitura desta não possa prescindir da continuidade da leitura daquele”. Desse mesmo modo, a construção do conhecimento e de si tem bases na realidade vivida, mas também a transforma.

seu ensino, apontando pesquisas desenvolvidas recentemente com foco naquelas realizadas com o público da educação de jovens e adultos.

3.1 UM PERCURSO HISTÓRICO DAS PRIMEIRAS IDEIAS SOBRE PROBABILIDADE

Remontar a história da probabilidade não tem sido uma tarefa fácil para os historiadores matemáticos, seja pela tardia elaboração de escritos teóricos sobre essa área ou pelas visões de mundo que ora se aproximam, ora desaprovam a ideia do acaso e aleatoriedade. Mas uma convergência que se encontra é que os jogos de azar foram as primeiras manifestações em que o homem lidou com a probabilidade. Huizinga (2007), em sua obra *Homo Ludens*, considera que o jogo (não especificamente de azar) e a ludicidade estão presentes nas relações dos seres humanos desde a existência desses. Já David (1962) relata a manifestação de jogos de azar por volta de 3500 a.C. entre os egípcios ou babilônios, sem saber necessariamente como eram esses jogos, evidenciada pelo uso do artefato astrágalo, obtido a partir do osso de um animal, provavelmente carneiros (Figura 1).

Figura 1 - Exemplo de astrágalo romano

Fonte: https://br.pinterest.com/pin/491666484314348485/.
Acessado em: 21 dez. 2024.

David (1962) considera que o astrágalo é o primeiro agente de aleatoriedade na história humana, logo, a primeira relação do homem com o acaso que se tem conhecimento. Sua utilização se assemelha aos dados atuais, sendo empregados em jogos de azar desde o período informado anteriormente, até mesmo por gregos e romanos na era pré-cristã, utilizando quatro unidades desse artefato. Por se tratar de um osso, a sua superfície era irregular e suas “faces” não eram idênticas, o que implicava distintas frequências de ocorrência de cada “face” (Viali, 2008). Provavelmente os primeiros dados, como os conhecemos, foram obtidos a partir da manipulação do astrágalo (por lixamento ou outro tratamento). Assim, percebe-se que a busca por um equilíbrio de probabilidades é bem antiga (David, 1962).

David (1962) apresenta indícios do uso dos jogos de azar para fins de lazer, como os escritos de Suetônio (69 d.C. - 114 d.C.) em sua obra *De Vitis Caesarum*, na qual afirma, por exemplo, que o imperador Augustus jogava, frequentemente, por recreação. No entanto, dominava a utilização desses jogos com um viés religioso. O acaso e a adivinhação eram considerados por povos antigos como meio de comunicação com seus deuses ou entidades.

Assim, os resultados obtidos pelo lançamento de astrágalos, por exemplo, poderiam ser considerados presságios, orientações, previsões. Sendo o acaso tido como o meio de manifestação de suas divindades, não parece que o cálculo de probabilidades tenha sido uma preocupação. Todavia, David (1962) afirma que já havia a enumeração de possibilidades e ideias de combinação para definir o significado de cada resultado obtido no jogo, além de indícios de pensamentos instintivos de probabilidade não formalizados, provavelmente, pela dificuldade em representar números em distintos sentidos. Coutinho (2007, p. 57) destaca, portanto, que até então havia uma avaliação intuitiva ou uma “apreensão perceptiva das chances de se obter um certo resultado a partir de um processo aleatório”.

Com o advento do cristianismo, esses jogos foram considerados pagãos e, consequentemente, proibidos. Mas não deixaram de existir. Santo Agostinho (354 d.C. – 430 d.C.) afirmava que tudo era minuciosamente controlado pela vontade de Deus e que a aparência de aleatoriedade nas situações cotidianas se daria pela ignorância do homem frente à vontade divina (David, 1962). Assim, de certo modo, refutava-se a necessidade de compreensão do que era aleatório.

Apesar de no período da Idade Média (476 d.C - 1453 d.C) considerar-se que houve menos avanços sobre a matemática (e as ciências, de modo geral) na Europa, o contrário aconteceu no Oriente. A título de exemplo, o árabe Omar Khayyan (1048 - 1131) tinha alguma ideia sobre coeficientes binomiais e o chinês Chu Shih-Chieh

(1249 - 1314) escreveu sobre um método antigo, não desenvolvido por ele, e simbolizado por um diagrama muito próximo ao que hoje denominamos triângulo de Pascal (David, 1962).

Nos últimos séculos da Idade Média e no Período Renascentista, foi fortalecido o princípio empírico das pesquisas e houve uma grande entrada da matemática hindu e árabe no Ocidente marcada, por exemplo, pela apropriação do sistema numérico indo-arábico. Nesse período, denota-se o desenvolvimento de um enfoque combinatório para a probabilidade. Ainda que os jogos de azar envolvendo dados fossem práticas proibidas, o bispo Wibold de Cambrai, por volta de 960 d.C., inventou um jogo e enumerou 56 virtudes obtidas no lançamento de três dados (David, 1962). O valor 56 corresponde à quantidade de resultados obtidos ao se lançar três dados, desconsiderando-se a ordem de lançamento. Isso evidencia que o raciocínio combinatório já era conhecido.

Mais tarde, na bem-sucedida obra medieval *De Vetula*, poema na forma de autobiografia de Ovídio (Publis Ovidius Naso, 43 a.C. - 17 d.C.), cuja autoria é dada ao francês Richard de Fournival (1201-1260), o cálculo da quantidade de resultados no lançamento de três dados é descrito. Segundo Bellhouse (2000), havia uma tabela entre as linhas 441 e 442 elencando os resultados possíveis, separando-os em casos de números de repetições e de consecução, seguida de uma argumentação.

Curiosamente, a obra descreve cálculos utilizando recursos de permutação e princípios de contagem, sendo a publicação da obra original estimada por volta do ano 1250. Compreendendo que as regras básicas de permutação e combinação simples foram conhecidas na França pelo menos no início do século XIV, mas que na Índia já eram conhecidas há mais tempo, Bellhouse (2000) pressupõe que Ovídio em *De Vetula* pode ter obtido seus conhecimentos matemáticos a partir de fontes árabes ou indianas.

Contudo, para Viali (2008, p. 146), os matemáticos italianos dos séculos XVI e XVII podem ser considerados os pioneiros dos cálculos probabilísticos, ainda que se limitando à reflexão sobre problemas mais concretos, mas "foram além da simples enumeração das possibilidades para resolver problemas de comparação de frequências de ocorrências e ganhos em jogos de azar".

O frei Luca Pacioli ou Luca di Borgo (1445 - 1517) desenvolveu sua obra *Summa*, publicada em Veneza em 1494, que incorporava quase por completo a obra *Lider Abaci* de Fibonacci (1170 - 1250) e, entre outras discussões matemáticas, apresentou o problema da repartição de apostas. Este problema, considerado por Coutinho (2007) como “fundador do Cálculo de Probabilidades”, inspirou reflexões de outros matemáticos como Tartaglia (Niccolo Fontana, 1499 - 1557), Girolamo Cardano (1501 - 1576) e Giovan Francesco Peveroni (século XVI).

Kendall (1958) afirma que Pacioli expôs uma versão mais simples do problema e que pode ser entendida da seguinte forma: A e B, jogando um jogo equitativo, concordam em continuar até um deles vencer seis rodadas; mas a partida parou quando A ganhou cinco e B ganhou três; questiona-se como as apostas devem ser divididas. O autor afirma que Pacioli propôs uma solução incorreta ao problema (com uma proporção de 5:3) e Tartaglia, na tentativa de corrigi-lo, em sua obra *General Tratatto* (1556), apresentou uma outra solução incorreta (com uma proporção de 2:1) (Kendall, 1958).

Francesco Peverone, em seu trabalho *Due Brevi e Facili Trattati, il Primo d'Arithmetica, l'Altro di Geometria* (1558), também teria apresentado um resultado equivocado, uma proporção de 6:1. No entanto, Kendall (1958) afirma que ele se aproximou bastante da resposta. Em seu argumento, ele afirma que se restasse um jogo para A e B vencerem, cada um teria que apostar 2 *crowns* (logo, a proporção seria de 1:1); se para B restasse dois jogos para vencer e A apenas um, nesse caso B deveria apostar 6 *crowns* (proporção de 3:1), pois ele poderia vencer duas rodadas seguidas, equivalendo a 4 *crowns*, ou poderia vencer a primeira e perder a segunda, equivalendo a 2 *crowns*. Até aqui, a lógica de progressão utilizada está correta. Mas no caso em que para B restasse três jogos para vencer, Francesco Peveroni afirma que B deveria apostar 12 *crowns*, pois a dificuldade e o risco dobram. Kendall nota que se ele tivesse continuado com a lógica utilizada no segundo caso, teria chegado à resposta correta: B deveria apostar 14 *crowns* e, logo, haveria uma proporção de 7:1.

Ainda sobre as contribuições dos pensadores italianos, destaca-se o *Liber de Ludo Aleae* de Cardano, publicado em 1663, bem depois de sua morte, que pode ser lido como um manual de jogos de azar. Viali (2008, p. 146-147) ressalta as suas contribuições para o desenvolvimento da probabilidade:

> Ele foi o primeiro a estudar o lançamento de dados, baseado na hipótese de que existia um princípio científico fundamental governando as probabilidades de se obter um par de "seis", além de mera sorte. (...) foi o primeiro a introduzir técnicas de combinatória no cálculo dos casos possíveis de um evento e também a considerar a probabilidade de um evento como a razão entre o

> número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Ele, também, conhecia a idéia (*sic*) de eventos independentes e a regra da multiplicação entre eles.

Outro matemático italiano que realizou estudos com princípios de cálculos de probabilidade foi Galileu Galilei (1564 - 1642), como em sua obra postumamente publicada *Sopra Le Scoperte dei Dadi* (1718), onde fica evidente, segundo David (1962), que Galileu compreendia cálculos a partir de conceitos matemáticos de lados do dado igualmente prováveis. Entretanto, é importante ressaltar que até então não foram realizados estudos de formalização da probabilidade, mas sim a resolução de problemas em que se buscava compreender frequências constantes em processos do acaso.

Já observando as contribuições dos matemáticos franceses, Blaise Pascal (1623 - 1662) e Pierre de Fermat (1607 - 1665) também realizaram diversos estudos sobre cálculos de probabilidade, muitos dos quais foram registrados e publicados por meio de correspondências. Em particular, o problema da repartição das apostas foi proposto a Pascal pelo Cavaleiro de Meré (Antoine Gombaud, 1607 - 1684) entre outros problemas de jogos de dados. Depois, Pascal propôs esse mesmo problema para Guilles de Roberval (1602 - 1675) e para Fermat. Pascal teria construído uma resposta correta sobre o problema "utilizando um método de recursividade do cálculo da esperança sobre ganhos futuros" (Coutinho, 2007, p. 59), fazendo combinações de todas as alternativas de ganho ou perda, que foi erroneamente questionado por Roberval. Fermat também apresentou uma solução correta para o problema, já utilizando da estratégia de enumeração dos casos possíveis e favoráveis, mais tarde retomado por Pascal (Coutinho, 2007).

As correspondências entre Pascal e Fermat se consolidaram como um importante contributo para o desenvolvimento do conceito de probabilidade. Coutinho (2007) ressalta que a partir destes estudos inicia-se uma mudança do ponto de vista sobre a avaliação de chances a partir de uma descrição mais teórica dos resultados. A autora ainda afirma que o procedimento seguido por eles não era descontextualizado nem teorizado, mas permitiu um avanço na direção da aplicação correta dessa relação entre favorável e possível (Coutinho, 2007).

Já é possível perceber que, além do avanço sobre o entendimento sobre o cálculo de probabilidades, a própria concepção associada a ideia de probabilidade vai se complexificando, atingindo diferentes significados. Mais especificamente nesse período, “[...] podemos constatar o nascimento deste conflito entre a percepção experimental no sentido da estimação das chances, e seu uso mais teórico no sentido da razão entre número de casos” (Coutinho, 2007, p. 60).

Dentro dessa dualidade, o caminho da recursividade foi retomado por Christiaan Huygens (1629 - 1695) em sua obra *De Ratiociniis in Ludo Aleae*. Tendo conhecido os estudos de Pascal e Fermat por meio de Roberval, também contribuiu para o desenvolvimento da teoria da probabilidade, por exemplo, formalizando a noção de direito de esperar. Desse modo, deve-se a ele a criação do importante conceito de Esperança Matemática (Godino; Batanero; Cañizares, 1996). Na obra, além de apresentar solução para o problema da repartição de apostas e de outros problemas sobre dados, Huygens inclui problemas envolvendo retiradas de bolas coloridas de uma urna.

Inspirado nas obras de Huygens, Abraham de Moivre (1667 - 1754) publica *De Mensura Sortis* em 1711 e, ampliando mais o seu trabalho sobre probabilidade, *Doctrine of Chances* em 1718. Percebe-se uma grande contribuição do matemático ao se debruçar na representação algébrica das ideias sobre probabilidade (David, 1962), permanecendo com o enfoque combinatório. Além disso, a definição clássica de probabilidade é dada por ele, nessa obra, sendo depois aperfeiçoada por Laplace (Batanero *et al.*, 2016).

A partir de alguns dos problemas discutidos por Huygens, Jacques Bernoulli (1655 - 1705), em sua obra *Ars conjectandi* (publicada postumamente em 1713), utiliza e se aprofunda no enfoque combinatório da resolução dos problemas. Porém, identificando a limitação desse tipo de estratégia a casos de equiprobabilidade, propõe a determinação da probabilidade após a observação de experiências semelhantes realizadas repetidas vezes. Com isso, elabora a primeira formulação da lei dos grandes números, segundo a qual as frequências relativas em um experimento convergem para a probabilidade de um resultado, ampliando o campo de aplicação da probabilidade para além dos jogos de azar.

Nesse sentido, a obra de Bernoulli (1713) acentua a dualidade de visões sobre a probabilidade: por um lado, o enfoque combinatório baseado na equiprobabilidade, na enumeração das possibilidades de resultados e na razão de casos favoráveis e possíveis; por outro lado, a estimativa de um valor da probabilidade estimado por meio de experimentação e observação baseado na convergência da frequência relativa dos resultados. Apesar de obtida, portanto, por um método experimental, é uma definição que considera que a probabilidade independe do observador (Coutinho, 2007), agregando o grau de objetividade a esse conceito.

Mais tarde, Thomas Bayes (1702-1761) introduz uma outra forma de compreender a probabilidade em seu ensaio *An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances*, publicada postumamente em 1763, com considerações de Richard Price. Na obra, a noção de probabilidade obtida a priori considerando uma consequência observada a posteriori, expõe uma primeira visão subjetiva de probabilidade, que pode também depender de outras várias informações disponíveis (Coutinho, 2007).

Destaca-se, nesse rol, a obra de Pierre-Simon Laplace (1749 - 1827), *Théorie Analytique des Probabilités*, publicada em 1812, na qual o matemático apresenta uma série de importantes resultados. Em 1814, publica o ensaio *Essai Philosophique Sur Les Probabilités* onde faz a primeira construção axiomática da teoria sobre probabilidade, definindo probabilidade de forma explícita e como objeto matemático bem delimitado (Coutinho, 2007). É baseada em sua definição, denominada como clássica, que hoje se trabalha o conceito de probabilidade na Educação Básica,

> [...] a razão deste número aquele de todos os casos possíveis é a medida desta probabilidade, que assim não mais que uma fração cujo numerador é um número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de todos os casos possíveis. (Laplace, 1814, p. 35 *apud* Coutinho, 2007, p. 65)

É nesse contexto que se percebe que o debate sobre a probabilidade estava de tal forma frutífera a ponto de possibilitar a teorização e formalização de um conceito tal qual realizado por Laplace. A partir daí, como em qualquer campo da ciência moderna, os sentidos atribuídos à probabilidade vão se relacionando a outras áreas (da Matemática ou não) e se distinguindo. No tópico a seguir, são discutidas distintas concepções sobre a probabilidade, dando continuidade a exposição de alguns elementos históricos ao passo que também compreenderemos como a visão sobre a probabilidade pode ser dada de diferentes formas.

3.2 VISÕES SOBRE A PROBABILIDADE

Refletir sobre as ideias associadas à probabilidade obviamente extrapola os estudos da Matemática dita pura. Primeiramente, porque estamos falando em um sentido epistemológico desse conhecimento. Além disso, o desenvolvimento da probabilidade foi influenciado e influenciou os debates epistemológicos da ciência, assim como podemos compreender a partir de Maciel e Telles (2000) e Melo (2015).

Após o resgate histórico desenvolvido no tópico anterior, fica evidente que não houve uma única forma ou um consenso na concepção sobre probabilidade e que, devido ao seu desenvolvimento recente em relação a outros ramos da Matemática, como afirma Batanero (2005), as diferentes concepções ainda coexistem, o que não é necessariamente um problema. Sobretudo, a autora considera que compreender essas distintas concepções é primordial para refletir sobre as concepções dos estudantes e identificar possíveis erros conceituais ou procedimentais (Batanero, 2005). Do mesmo modo, Borovcnik (2021, p. 252, tradução nossa) afirma que probabilidade "é um conceito complementar, que se dissipa se o reduzimos a uma única visão".

São vários os trabalhos que se preocupam em discutir essas diferentes concepções e usos da probabilidade, seja com um viés histórico, filosófico ou didático. No Quadro 1 apresenta-se uma sistematização das concepções que foram encontradas nos trabalhos estudados. A depender do objetivo e das fontes de pesquisa destes trabalhos, estas concepções são apresentadas em diferentes categorias: significado, visão, teoria, vertente, abordagem e interpretação. É entendido que uma série dessas concepções surgiram a partir das tentativas de construção teórica para a probabilidade, ou a partir do seu uso prático na tentativa de lidar com o acaso, ou a partir de aplicações em outras áreas. Daí essa diversidade de terminologias.

Ao longo deste texto, utilizaremos a que for mais recorrente nos textos referenciados ou a que se avaliar mais adequada frente a sua natureza.

Quadro 1 - Concepções sobre a probabilidade por trabalho

Trabalhos	Classificação	Concepções
Batanero (2005); Batanero e Díaz (2007)	Significado Significado Significado Significado Significado	Intuitivo Laplaciano Frequencial Subjetivo Matemático
Batanero, *et al.* (2016)	Visão Significado Significado Significado Significado	Intuitiva Clássico Frequentista de Propensão Lógico

	Significado Teoria	Subjetivo Axiomática	
Batanero e Álvarez-Arroyo (2024)	Significado Abordagem Significado Significado Visão Visão	Clássico Frequentista de Propensão Lógico Subjetivista Axiomática	
Coutinho (2007)	Avaliação Enfoque Enfoque Definição Enfoque	Intuitiva Frequentista Subjetivo Clássica Geométrico	Enfoque combinatório
Godino, Batanero e Cañizares (1996)	Teoria Teorias Teoria ou Enfoque Enfoque Teoria	Clássica Lógicas Frequencial ou empírica Subjetivo Axiomática ou matemática	
Melo (2015)	Teoria Teoria Teoria	Clássica Lógica Subjetiva ou individualista	Interpretação Epistêmica
	Teoria Teoria	frequentista de propensão	Interpretação Objetiva

Fonte: autoria própria.

Destaca-se Melo (2015) na última linha do Quadro 1, uma dissertação que trata da filosofia da probabilidade. O pesquisador diferencia as interpretações da probabilidade em duas vertentes: uma vertente epistêmica (ou subjetivista[9]) e outra objetiva. Na vertente subjetivista ou epistêmica, entende-se que a probabilidade depende do conhecimento ou de crenças humanas. Já na vertente objetiva entende-se que a probabilidade é uma propriedade do mundo físico, da realidade.

É possível também encontrar uma sistematização das concepções de probabilidade organizada por Batanero e Díaz (2007), que utilizaram cinco componentes, não necessariamente desconectados, a saber: o corpo de problemas do qual surgiu; a sua representação; os procedimentos ou algoritmos para resolver problemas a partir da probabilidade; a sua definição; e os argumentos e provas usadas para convencer e validar as suas propriedades.

Neste ínterim, dialogando com as classificações dos trabalhos citados, adiante são tecidos alguns aspectos das distintas concepções sobre a probabilidade, a saber:

[9] Na literatura, subjetiva é uma das visões/significados atribuídos à probabilidade. Melo (2010), ao falar das interpretações da probabilidade, também considera que a interpretação epistêmica da probabilidade pode ser chamada de subjetiva, englobando outras visões/significados.

intuitiva; clássica (laplaciana); subjetiva; frequentista (frequencial ou empírica); lógica; axiomática (matemática); de propensão; e geométrica.

– Visão Intuitiva

Anteriormente, foi relatado como a noção intuitiva de probabilidade permeou diferentes comunidades a partir da busca por interpretar o acaso e os jogos de azar, sendo, então, o primeiro formato das ideias sobre probabilidade na história. O aprofundamento sobre esses conhecimentos se dá com a necessidade de registrar (e contar) os resultados possíveis dos jogos e de equilibrar as chances, a fim de o jogo se tornar mais equitativo. Coutinho (2007) diferencia uma *avaliação intuitiva* de um *enfoque combinatório*, compreendendo que as tentativas de quantificação de possibilidade já indicam um grau de teorização que ultrapassa uma visão intuitiva *inocente*. Não discordando da autora e em complemento à sua visão, há de se separar os pensamentos combinatórios que tentaram apenas contabilizar as possibilidades, como de Richard de Fournival, e os que levaram a uma reflexão mais próxima da teoria clássica da probabilidade, como nas correspondências de Pascal e Fermat.

Em âmbito educacional, Batanero (2005, p. 253) ressalta que essas ideias intuitivas são manifestadas por crianças e por adultos que não tenham estudado probabilidade formalmente, “mas usam frases ou expressões coloquiais para quantificar os sucessos incertos e expressar seu grau de crença neles”. Por esse motivo, na Base Nacional Comum Curricular - BNCC, por exemplo, indica-se o trabalho com noções mais primárias de probabilidade nas séries iniciais da Educação Básica (Brasil, 2018). E, especialmente na EJA, trazer à tona a visão intuitiva sobre a probabilidade significa, nos dizeres de Freire (2011), respeitar os saberes do educando e possibilitar a consciência do seu inacabamento, podendo ser um importante ponto de partida para a sua formalização e amadurecimento do conceito.

– Teoria Clássica

Trata-se de uma interpretação da probabilidade a partir da definição de De Moivre em 1718, refinada por Laplace em 1814, baseada na suposição de equiprobabilidade dos eventos, muito por ser um progresso teórico sobre uma probabilidade ligada aos jogos de azar (Batanero *et al.*, 2016). Assim, a definição clássica de probabilidade se resume à razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Por se limitar ao estudo de evento equiprováveis e por haver uma gama de fenômenos com característica distinta a essa, como problematizado por Bernoulli, Laplace contorna este problema em sua teoria dos acasos sugerindo o ato de postular a equiprobabilidade dos diferentes casos, reduzindo os eventos de um mesmo tipo a um número de casos possíveis (Coutinho, 2007).

Ademais, a definição clássica de probabilidade é amplamente adotada nos livros didáticos e o seu vínculo a uma concepção combinatória é bastante explorada. A vantagem dessa abordagem, segundo Borovcnik (2021), está na possibilidade de estabelecer um modelo matemático completo para toda a situação analisada e determinar um caráter objetivo para a medição das probabilidades (muitas das vezes se conectando com a visão frequentista). Contudo, ressalta também a limitação própria dos problemas citados acima.

Godino, Batanero e Cañizares (1996) destacam que a compreensão da definição clássica de probabilidade não é simples para crianças, já que exige um domínio de frações e razões, mas também porque a pressuposição de equiprobabilidade pode distanciar da experiência que o estudante pode ter. Os autores exemplificam essa situação ao afirmar que o professor pode afirmar que a probabilidade de o estudante obter um cinco ao lançar um dado é de 1/6, mas que na experimentação do estudante em um contexto de jogo, pode demorar bem mais para conseguir o cinco. Assim, o modo como a definição clássica é comumente introduzida no processo de aprendizagem pode não ser satisfatória e merece especial atenção no ensino de probabilidade.

– Abordagem Frequentista

É uma visão que considera, após um grande número de repetições idênticas de um experimento aleatório, a convergência de frequência de um mesmo evento a uma constante. Como visto anteriormente, Bernoulli foi um precursor nessa ideia, demonstrando a sua versão da Lei dos Grandes Números (Batanero *et al.*, 2016). Assim, na abordagem frequentista, a “probabilidade é definida como um número hipotético para o qual a frequência relativa tende quando um experimento aleatório é repetido em uma infinidade de vezes” (Batanero; Alvaréz-Arroyo, 2024, p. 7).

Essa visão ampliou as aplicações da probabilidade, posto que, assim como as Ciências Naturais, utilizaria o método empírico para a sua definição. Mas existe uma limitação em seu processo quanto à impossibilidade de repetição nas mesmas condições de um experimento, enfrentando um certo grau de erro (Batanero *et al.*, 2016; Borovcnik, 2021). Essas limitações devem ser também discutidas em sala para que os estudantes não construam ideias equivocadas sobre a elaboração de modelos teóricos de probabilidade.

A abordagem frequentista em sala de aula por vezes também é adotada e, de acordo com Godino, Batanero e Cañizares (1996), pode ser adequada na definição de probabilidades em fenômenos que possuem fortes vieses experimentais. Promove assim, um caráter investigativo sobre a probabilidade e pode ser um valioso parceiro (e ser auxiliado) na introdução das tecnologias digitais no processo de ensino e aprendizagem.

– Teoria Lógica

Muitos daqueles que se dispuseram a desenvolver uma teoria lógica para a probabilidade assim o fizeram no sentido de explicar e validar o método indutivo como princípio científico. O *problema das inferências causais*, apontado por David Hume no século XVIII e mais tarde adotado como *problema da indução* na tradição filosófica contemporânea, diz respeito às inferências baseadas na experiência sensível, ao conhecimento das relações de causa e efeito, de passado e futuro, e à justificação da natureza empírica das leis científicas (Melo, 2015).

Para diversos pensadores, a solução desse problema envolveria a definição e utilização da probabilidade. A teoria lógica, que também é denominada por Melo (2015) por teoria lógica indutiva ou teoria semântica, propõe-se a calcular o grau de vinculação entre hipóteses e evidências a partir do raciocínio indutivo. Nesse sentido, “a probabilidade é um grau racional de confirmação que mede o suporte fornecido por alguma evidência E para uma dada hipótese H e é um valor objetivo com implicação e incompatibilidade nos extremos” (Batanero, 2024, p. 7).

No tocante à sua adoção na Educação Básica, Godino, Batanero e Cañizares (1996) não a veem como vantajosa frente às situações em que podem ser aplicadas. Porém, destaca-se a relevância de sua abordagem para uma compreensão histórica e contextual da probabilidade e para o entendimento de seu impacto no desenvolvimento epistemológico da ciência.

– Teoria Subjetiva

Anteriormente foi exposto que Thomas Bayes sistematiza uma teoria segundo a qual uma probabilidade de um evento (conhecida *a priori*) pode ser modificada como consequência de dados disponíveis *a posteriori*, perdendo assim o seu caráter objetivo (Batanero *et al.*, 2016). Mais tarde, os defensores de uma teoria subjetiva da probabilidade, em contraponto às teorias lógicas, questionaram a probabilidade determinada pela relação de implicação lógica imediata entre evidências e hipóteses, podendo diferentes indivíduos chegar a diferentes probabilidades a partir de suas crenças (Melo, 2015). Com isso, também se resolve a necessidade de repetição dos experimentos em uma infinidade de vezes para se chegar à probabilidade.

A teoria subjetiva foi desenvolvida mais detalhadamente por Frank Plumpton Ramsey e por Bruno de Finetti, descrevendo a probabilidade como os graus de crença individuais, baseados nas experiências da pessoa (Melo, 2015). Desse modo, proporciona-se um fundamento intuitivo para a probabilidade, ainda assim de maneira formal.

– Teoria Axiomática

Ao mesmo tempo em que havia um intenso debate sobre os fundamentos filosóficos da probabilidade, a sua aplicação às ciências e às atividades se expandiram rapidamente. A formalização matemática da probabilidade como a concebemos hoje é, relativamente, recente e é fruto do trabalho de diferentes matemáticos ao longo do século XX. Porém, deve-se a Kolmogorov, corroborando com uma visão frequentista de probabilidade, a sua axiomatização, no seu trabalho publicado em 1933 e traduzido posteriormente ao inglês com título *Foundations of the Theory of Probability* (Godino; Batanero; Cañizares, 1996).

Batanero *et al.* (2016, p. 6) definem a organização axiomática da probabilidade da seguinte forma:

> Probability is any function defined from A in the interval of real numbers $[0, 1]$ that fulfils the following three axioms, from which many probability properties

> and theorems can be deduced:
> 1. $0 \leq P(A) \leq 1$, for every $A \in S$;
> 2. $P(S) = 1$;
> 3. (a) For a finite sample space S and incompatible or disjoint events A and B, i.e., $A \cap B = \emptyset$, it holds that $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
>   (b) For na infinite sample space S and a countable collection of pairwise disjoint sets $A_i, i = 1, 2, \ldots$ it holds, $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Os autores reforçam ainda que essa teoria axiomática foi bem aceita nas diferentes escolas de probabilidade, pois ainda que persistam as especificidades dos fundamentos de cada interpretação (como a clássica, a frequentista e a subjetiva), todas podem ser codificadas pela teoria de Kolmogorov (Batanero *et al.*, 2016).

Importante ressaltar que essa organização também está amplamente presente nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, destacando a intencionalidade de formalização da definição de probabilidade a partir dos símbolos e estruturas matemáticos. Isso pode fundamentar a ampliação e aprofundamento dos conhecimentos sobre a probabilidade.

– Teoria de Propensão

Segundo Melo (2015), o que contextualiza a criação da teoria de propensão por Karl Popper é a necessidade identificada por ele de contrapor o método indutivo posto até então e as tentativas de utilizar a probabilidade para justificá-lo. Assim, apesar de contrapor à abordagem frequentista, Popper parte dela, resolvendo o problema que essa abordagem tem quanto cálculo de probabilidade de eventos únicos (Melo, 2015). Além disso, refuta a teoria lógica sobre como as evidências alteram a probabilidade associada a uma hipótese, buscando retomar a objetividade da interpretação probabilística.

Popper considerou a probabilidade como uma propensão física, definidas pelas condições geradoras; uma disposição ou tendência a produzir um resultado de um certo tipo (Batanero; Díaz, 2007). Desse modo, são as “*variações experimentais* que determinam as *variações probabilísticas*” (Melo, 2015, p. 87, grifo do autor), não a variação informacional como na teoria subjetiva. Batanero e Díaz (2007) localizam os problemas relacionados a essa teoria na dificuldade de atribuição a uma probabilidade objetiva ou a um valor de propensão.

Portanto, devido à sua origem e a essas indefinições, nesta pesquisa registra-se a sua incompatibilidade com o ensino de probabilidade na Educação Básica.

– Probabilidade Geométrica

Segundo Coutinho (2007), a probabilidade geométrica foi introduzida por Georges Louis Leclerc, Conde de Buffon, no século XVIII, na tentativa de utilização de elementos geométricos no cenário de jogos de azar, em meio a um contexto de evolução da noção de probabilidade. Apesar de seus trabalhos não contribuírem efetivamente para o desenvolvimento da probabilidade para a autora, a sua proposta diversificou as abordagens até então utilizadas. Em 1733, Buffon apresentou o jogo *Franc Carreau* que

> [...] consiste em lançar uma moeda sobre um piso ladrilhado com lajotas iguais em uma forma qualquer. Os jogadores apostam sobre a posição final da moeda: ficará ela inteiramente sobre uma única lajota (franc-carreau), ou sobre uma ou mais juntas entre lajotas? (Coutinho, 2007, p. 63).

Em uma abordagem atual, como realizada por Paula e Sousa Junior (2022), a probabilidade geométrica é associada à abordagem clássica ou laplaciana em um contexto geométrico, sendo obtida a partir da razão entre comprimentos, áreas ou volumes, com a mesma análise de casos favoráveis e possíveis. De acordo com os pesquisadores, essa abordagem permite a percepção das relações existentes entre diferentes áreas da Matemática, podendo ser benéfico para a aprendizagem, e possibilita a inserção das tecnologias digitais na Educação Matemática, a partir, por exemplo, do emprego de softwares de geometria dinâmica.

3.3 O ENSINO DE/PARA/PELA PROBABILIDADE: ALGUNS APONTAMENTOS

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (Brasil, 1997; 1998; 2002) já apontavam para a necessidade do estudo da probabilidade desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, dentro do bloco nomeado tratamento de informações. No documento ressalta-se o objetivo deste estudo para que crianças entendam que diversos acontecimentos do cotidiano são aleatórios e que, em muitos casos, é possível identificar seus prováveis resultados, o que mais tarde irá se configurar no cálculo de probabilidade, com o aprofundamento dos pensamentos combinatório e probabilístico nas séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio (Brasil, 1997; 1998; 2002).

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018) ressalta o mesmo objetivo na definição da unidade temática de estatística e probabilidade, indicando mais caminhos para o trabalho com os estudantes. No Quadro 2, são elencados os objetos de conhecimento e as habilidades previstas nesse documento para o ensino e aprendizagem de probabilidade.

Quadro 2 - Habilidades vinculadas à probabilidade na BNCC

Ensino Fundamental		
Ano/série	**Objetos do conhecimento**	**Habilidades**
1° Ano	Noção de acaso	(EF01MA20) Classificar eventos envolvendo o acaso, tais como “acontecerá com certeza”, “talvez aconteça” e “é impossível acontecer”, em situações do cotidiano.
2º Ano	Análise da ideia de aleatório em situações do cotidiano	(EF02MA21) Classificar resultados de eventos cotidianos aleatórios como “pouco prováveis”, “muito prováveis”, “improváveis” e “impossíveis”.
3º Ano	Análise da ideia de acaso em situações do cotidiano: espaço amostral	(EF03MA25) Identificar, em eventos familiares aleatórios, todos os resultados possíveis, estimando os que têm maiores ou menores chances de ocorrência.
4º Ano	Análise de chances de eventos aleatórios	(EF04MA26) Identificar, entre eventos aleatórios cotidianos, aqueles que têm maior chance de ocorrência, reconhecendo características de resultados mais prováveis, sem utilizar frações.
5º Ano	Espaço amostral: análise de chances de eventos aleatórios	(EF05MA22) Apresentar todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, estimando se esses resultados são igualmente prováveis ou não.
	Cálculo de probabilidade de eventos equiprováveis	(EF05MA23) Determinar a probabilidade de ocorrência de um resultado em eventos aleatórios, quando todos os resultados possíveis têm a mesma chance de ocorrer (equiprováveis).
6º Ano	Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável. Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista)	(EF06MA30) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.
7º Ano	Experimentos aleatórios: espaço amostral e estimativa de probabilidade por meio de frequência de ocorrências	(EF07MA34) Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.

8º Ano	Princípio multiplicativo da contagem Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral	(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.
9º Ano	Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes	(EF09MA20) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.
Ensino Médio		
Habilidades		
(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.		
(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.		
(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).		
(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.		
(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.		

Fonte: Brasil (2018).

Nas habilidades do Ensino Fundamental, é possível notar um desenvolvimento progressivo nas concepções sobre acaso e aleatoriedade e na precisão do ato de determinar a probabilidade de um evento. Isso tudo, partindo das noções espontâneas sobre esses conceitos e das suas relações com as vivências dos estudantes. Já no Ensino Médio, percebe-se a exigência de maior nível de habilidades voltadas para a resolução de problemas que envolvam cálculo de probabilidades.

Infelizmente, há uma escassez de documentos orientadores nessa mesma dimensão para a EJA na etapa do Ensino Médio. Lima (2018) buscou identificar os apontamentos para o pensamento probabilístico na Proposta Curricular para a Educação de Jovens e Adultos, composto por dois documentos, um voltado para o 1º e o outro para o 2º segmento do Ensino Fundamental, publicados em 2001 e 2002, respectivamente. A pesquisadora ressalta que no primeiro documento não há apontamentos explícitos sobre o ensino de probabilidade. Já o segundo traz mais indicações do trabalho com esse tema e da necessidade do equilíbrio entre uma abordagem utilitária e formal, valorizando estratégias espontâneas dos estudantes como suporte para a formalização (Lima, 2018).

É possível notar que a BNCC aborda a temática de probabilidade em todos os anos (Brasil, 2018). Porém, Gomes e Souza (2024) afirmam que isso não é suficiente se a sua abordagem não for diversificada, envolvendo distintas concepções em todos os níveis de ensino, a partir de diferentes fenômenos e situações (na Matemática e em outras áreas de conhecimento), culminando na reflexão de questões críticas. Os autores identificaram a superficialidade dos elementos do letramento probabilístico nas habilidades presentes na BNCC (Brasil, 2018), sobretudo nos aspectos relacionados à linguagem e às questões críticas (Gomes; Souza, 2024).

Nesta pesquisa, compartilha-se da ideia de que a aprendizagem em probabilidade requer o desenvolvimento de elementos básicos próprios desse tipo de conhecimento e guiados à capacidade de interpretar e se envolver efetivamente em situações probabilísticas do mundo real, conjunto que Gal (2005) delineia como *probability literacy*, ou letramento probabilístico, como tem sido utilizado nas pesquisas brasileiras.

Para Gal (2005), *literacy* (ou letramento) se refere ao desenvolvimento das habilidades de escrita e leitura de modo a auxiliar uma pessoa a atuar na sociedade. Do mesmo modo, o letramento específico em uma área do conhecimento seria um conjunto de habilidades esperadas dessa área de conhecimento para que uma pessoa consiga ser ativo e crítico na sociedade. Nesse sentido, o letramento probabilístico diz respeito à capacidade das pessoas interpretarem, avaliarem criticamente e, oportunamente, comunicar e expressar suas opiniões sobre informações probabilísticas ou situações em que há acaso, aleatoriedade ou previsibilidade (Gal, 2005).

Outro termo importante desta mesma conjuntura é numeramento. Gal (2005) define este termo como um conjunto de conhecimentos, habilidades e disposições que permite a um indivíduo atuar criticamente em situações da vida real que envolve quantificação, números ou informações baseadas em ideias matemáticas.

No caso da probabilidade, salienta-se a importância do letramento probabilístico para o desenvolvimento das práticas de numeramento, levando em consideração que as tomadas de decisão e a forma de lidar com as incertezas demandam não apenas os conhecimentos matemáticos da probabilidade, mas também são influenciadas por questões Interpretativas e/ou subjetivas (Gal, 2005).

De modo semelhante ao que faz na definição de letramento estatístico, Gal (2005) define o letramento probabilístico a partir de cinco elementos chave de conhecimento. São eles:

> 1. Grandes ideias: variabilidade, aleatoriedade, independência, previsibilidade/incerteza.
> 2. Encontrando probabilidades: maneiras de encontrar ou estimar a probabilidades de eventos.
> 3. Linguagem: os termos e métodos usados para comunicar sobre o acaso.
> 4. Contexto: compreender o papel e as implicações de questões e informações probabilísticas em vários contextos e no discurso pessoal e público.
> 5. Questões críticas: problemas para reflexão ao lidar com probabilidades. (Gal, 2005, p. 46, tradução nossa)

O primeiro elemento, *grandes ideias*, é composto por noções básicas relacionadas à probabilidade, que possuem representações em símbolos e termos matemáticos e estatísticos, mas cuja compreensão não se reduz à apropriação destas representações: a sua essência inclui também uma compreensão de natureza abstrata que se alcança apenas intuitivamente (Gal, 2005).

A *aleatoriedade* pode ser entendida como uma "característica daquilo que é incerto" (Gomes; Souza, 2024, p. 6) ou um processo que faz com que eventos no mundo ocorram sem alguma causa determinística subjacente (Gal, 2005). Apesar de parecer algo abundantemente presente no cotidiano, a apreensão dessa ideia é uma atividade complexa. Bryant e Nunes (2012) afirmam que a definição do que sejam sequências aleatórias em um evento é de considerável dificuldade para crianças, mas que adultos também apresentam essa dificuldade, pois os julgamentos são, por vezes, enviesados.

A *independência* é um elemento que marca a desconexão de eventos, quando um evento não pode ser previsto a partir de outro. Existem erros de compreensão desse elemento quando, por exemplo, adultos acreditam que ao lançar um dado obtendo o número 6, a probabilidade de no próximo lançamento obter um 6 é menor do que de obter qualquer outro número (Bryant; Nunes, 2012).

Já a *variabilidade* envolve a compreensão e a necessidade de quantificação do grau de variação em um evento ou da variação que esperamos observar em uma amostra repetida de uma mesma população (Gal, 2002; 2005). Assim, se "expressa na diferença entre o que se espera e o que acontece" (Gomes; Souza, 2024, p. 6).

Para Gal (2005), assim como a *aleatoriedade*, *independência* e *variabilidade* são ideias de difícil compreensão, o que é justificado pela distinção entre as essências subjacentes a cada uma, pela grande ausência ou omissão da sua abordagem nos processos de ensino e pela forma de interconexão entre elas. Por fim, a compreensão dessas três auxiliam na construção das ideias de *previsibilidade* e *incerteza*. O autor sugere que as pessoas podem fazer referências à determinação da probabilidade de um evento, mas isso não corresponde necessariamente a suas suposições sobre processos que possam afetar a ocorrência desse evento e sobre a qualidade das informações (Gal, 2005). Desse modo, não corresponde a seu grau de certeza ou previsão da ocorrência desse evento. Daí a separação desses conceitos.

Quanto ao segundo elemento, *encontrando probabilidades*, conhecer as variadas maneiras de encontrar ou estimar a probabilidade de eventos é necessário para interpretar declarações probabilísticas, gerar as próprias estimativas de probabilidade e se comunicar com outras pessoas. Esta habilidade associada a outras informações, inclusive não probabilísticas, auxiliam no processo de tomada de decisões e de atuação na sociedade frente a informações probabilísticas. É junto a esse bloco que também se vê a relevância do uso das diferentes visões sobre probabilidade. Gal (2005) reafirma que o desenvolvimento de apenas um ou dois dos elementos chave de conhecimento não favorece o letramento probabilístico. Porém, identifica uma supremacia na abordagem da estimativa de probabilidade (elemento 2) no trabalho em sala de aula.

Por muitas vezes, há também um foco na formalidade e no uso rígido dos símbolos matemáticos no processo de ensino, sem, no entanto, se preocupar com a real apreensão dessa linguagem pelos estudantes. O terceiro elemento ressalta justamente a relevância da linguagem relacionada ao acaso e à probabilidade, mas levando em conta a sua relação com os outros elementos. Para isso, considera-se tanto os modos de comunicar e expressar conceitos abstratos, como as grandes ideias citadas anteriormente, quanto a apropriação das diversas maneiras de representação de dados probabilísticos, ainda que em distintas redes semânticas (como na língua materna e na linguagem matemática).

O quarto elemento, *contexto*, diz respeito à necessidade de o educando reconhecer as situações onde noções sobre acaso e probabilidade são comumente requeridas e saber como esses entes impactam e interferem eventos e processos cotidianos (Gal, 2005). Isso possibilita ao educando conhecimento e leitura do mundo a partir e pela probabilidade, ao mesmo tempo em que se apropria desta área partindo de sua visão de mundo. A relevância do contexto para o letramento probabilístico se justifica, assim, tanto do ponto de vista funcional quanto educacional.

É importante ressaltar que o contexto exposto é o contexto de realidade. Mais adiante no texto, serão apresentadas as ideias de João Pedro da Ponte sobre as tarefas matemáticas e um dos elementos chave propostos por ele é justamente o contexto, mas onde também se identifica tarefas de contexto puramente matemático. O vínculo do contexto de realidade com o letramento probabilístico não quer dizer que todas as tarefas propostas devem partir exclusivamente da realidade, mas que uma prática que se baseia apenas em tarefas puramente matemáticas ou com tentativas pobres de contextualização não favorece o letramento probabilístico.

Por fim, Gal (2005) apresenta o quinto elemento chave, que se refere a potencialidade dos estudantes desenvolverem o olhar e o questionamento crítico frente a informações que envolvem probabilidade, acaso e aleatoriedade. Corresponde a uma habilidade de identificar limitações, equívocos, dados enviesados e a intencionalidade na comunicação. Para isso, o autor define uma coletânea de questões que exemplificam o posicionamento crítico ensejado.

> 1. Contexto. Qual é a natureza do domínio sobre o qual uma comunicação probabilística está sendo feita? Até que ponto os problemas em questão envolvem aleatoriedade, independência, variação, etc.?
> 2. Fonte. Qual é a fonte de uma afirmação probabilística (por exemplo: uma organização, uma pessoa) e quais são suas qualificações, expertise, características e motivos?
> 3. Processo. Como essa fonte chegou à afirmação que está sendo feita? Que tipos de fontes de informação foram usadas (por exemplo: uma análise "clássica" de eventos equiprováveis; informações frequentistas ou dados relacionados, como estatísticas oficiais ou resultados de estudos; estimativas subjetivas)? Qual é a relevância e a qualidade desses dados para o problema em questão? Se várias fontes foram usadas, como as informações foram integradas ou como os conflitos entre as fontes de dados foram resolvidos?
> 4. Significado da mensagem. Qual é o significado da declaração probabilística que está sendo feita (numérica ou verbal) e ela precisa ser traduzida ou representada de outra forma para ficar mais clara? A que exatamente a comunicação probabilística se refere? (o problema do significado pode surgir quando uma declaração pode confundir P(A|B) e P(B|A), ou quando uma fonte usa frases vagas de probabilidade)
> 5. Interpretação reflexiva. Como a mensagem deve ser interpretada? Ela deve ser questionada, dado o que se sabe sobre o contexto, a fonte, o processo de derivação e a clareza do significado da mensagem? Quão razoáveis são as estimativas feitas à luz do conhecimento de mundo de alguém? É possível que as próprias suposições e conhecimento de alguém possam ser falhos? Ou é possível que a probabilidade tenha sido superestimada ou subestimada pela fonte que a gerou, devido a interesses egoístas, motivos ocultos, necessidade de errar por excesso de cautela, aversão ao risco etc.? (Gal, 2005, p. 56, tradução nossa)

Esta ação reflexiva de avaliar as situações que envolvem acaso, imprevisibilidade e aleatoriedade vai além da mera apropriação de conceitos e linguagem matemática e requer o desenvolvimento dos outros quatros elementos combinados. Por isso não poder se falar de um letramento probabilístico na ausência de qualquer um deles.

Apesar do distanciamento teórico entre as ideias de Fernandes e Miarka (2015) e as de Gal (2005), principalmente quanto à sua intencionalidade de desvincular a probabilidade da educação estatística, é possível notar pontos de convergência. Entende-se que em especial os elementos *contexto* e *questões críticas* se relacionam com o viés dado por esses autores ao definir uma *educação pela probabilidade*.

Nesse educar pela probabilidade, revela-se a necessidade de, na prática educativa, abraçar as ideias de incerteza e imprevisibilidade como elementos da existência humana, as subjetividades sobre esses conceitos não como erros, mas como produtos das vivências e parte válida das elaborações dos educandos, e descrevem as relações possíveis entre a probabilidade e a constituição de si.

> [...] "como essa probabilidade funciona? Como se dá essa relação? Como invento e sou inventado, como afeto e sou afetado, ao pensar no acaso, na necessidade? O que isso diz do 'mundo', do 'homem'?" Que "homem" e "mundo" isso produz? Não se trata de dizer, então, que desmerecemos ou deixamos em segundo plano as questões já constituídas sobre a probabilidade, os conhecimentos produzidos pela máquina que engendra a matemática acadêmica ou a matemática escolar pautada nos currículos. A direção que tomamos e a de problematizá-las na medida em que questionamos sua centralidade na educação pela probabilidade (Fernandes; Miarka, 2015, p. 89).

Assim, amplia-se a visão de criticidade sobre a probabilidade para além da avaliação de afirmações e da localização de eventos no mundo, mas também do entendimento de como o acaso e a probabilidade se relacionam com o indivíduo e com o mundo. Esta leitura é ímpar, principalmente num contexto de Educação Profissional na modalidade da EJA, onde se espera que a educação seja elemento basilar de um processo emancipatório e de uma mudança paradigmática da relação entre homem e trabalho.

É nesse sentido, que se espera promover um ensino[10] de probabilidade (a probabilidade como objeto de conhecimento), para probabilidade (na compreensão de como a probabilidade se apresenta na realidade) e pela probabilidade (como a

---

[10] Apesar de incluir apenas o termo *ensino*, subentenda-se a inclusão também de aprendizagem, entendendo o processo de ensino e aprendizagem em uma relação necessária e não desconectada.

probabilidade é construída pelo e atua na construção do indivíduo). Para isso, deve-se também debater sobre quais as possibilidades de organização do processo de ensino que podem favorecer o diálogo, a construção e a reflexão, o que se propõe no próximo capítulo.

IV A EXPLORAÇÃO NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

Uma das mais importantes habilidades necessárias para o exercício da atividade docente é a elaboração/escolha de materiais e instrumentos com capacidade de orientar o processo de ensino e aprendizagem. Além disso, é importante que esses materiais sejam acessíveis aos estudantes e instiguem a sua atividade e criatividade.

Não é difícil lembrar daquela professora que, com intuito de que seus estudantes aprofundem no conteúdo, deixava em seu quadro-negro o tópico "tarefas para casa" (e, muitas das vezes, substituía a palavra casa por um desenho de uma casa, com chaminé e fumaça saindo). Esta ação já revelava uma escolha, com objetivos específicos, de uma sequência de tarefas a serem executadas pelos estudantes. A questão é que muitas das vezes essas tarefas resumiam-se a exercícios. Por isso, associava-se a palavra *tarefa*, necessariamente, a essa prática de repetição de um algoritmo ou conteúdo que foi estudado em aula.

Há muito se tem discutido sobre a necessidade de promover um ensino que supere o Paradigma do Exercício, que respeite o estudante como sujeito, aprendente, pensante e que, portanto, o coloque numa posição ativa de aprendizagem. Logo se viu a mudança do tópico supracitado para "atividades para casa", como se o segredo da mudança estivesse na troca da terminologia. Entretanto, a mudança deveria ocorrer na concepção sobre o ensino e aprendizagem de Matemática. E mais do que isso, é muito importante que se compreenda, utilize e aplique corretamente os conceitos, ideias e objetos que se estuda na educação e na educação matemática.

Em vista disso, muitas dúvidas surgem. O que se pode entender como tarefa? Mais especificamente, o que seria tarefa matemática e quais os seus tipos? Como as tarefas matemáticas podem integrar a atividade do professor de Matemática e dos estudantes? Por conseguinte, os objetivos deste tópico são: discutir a conceituação e a classificação de tarefa matemática desenvolvidas por diferentes pesquisadores, diferenciando-a e relacionando-a à atividade; compreender o papel da tarefa matemática em um processo de ensino e aprendizagem com abordagem exploratória; refletir sobre as suas possibilidades pedagógicas; e apresentar uma revisão bibliográfica de publicações brasileiras sobre o tema.

4.1 EM BUSCA DE UMA CONCEITUAÇÃO DE TAREFA MATEMÁTICA

Segundo o dicionário Houaiss (2001), o termo *tarefa* é oriundo do árabe *tariha,* que pode ser entendido como o quanto de trabalho se demanda para uma pessoa, e se relaciona ao termo *tarah* que tem o sentido de impor um preço determinado para a aquisição de uma mercadoria. E, entre outros significados, define tarefa como a “quantidade de trabalho realizado ou a realizar dentro de um prazo determinado” ou “qualquer trabalho, manual ou intelectual, que se faz por obrigação ou voluntariamente”. Aqui, *tarefa* se relaciona quase sinonimamente ao conceito de *trabalho*. Compreendendo *trabalho* como algo muito mais amplo, numa visão marxiana, toma-se certa distância deste conceito. Também é comum o uso dessa palavra como sinônimo de atribuição, papel, função. Porém, busca-se entender *tarefa* numa perspectiva que induza necessariamente a ações do sujeito.

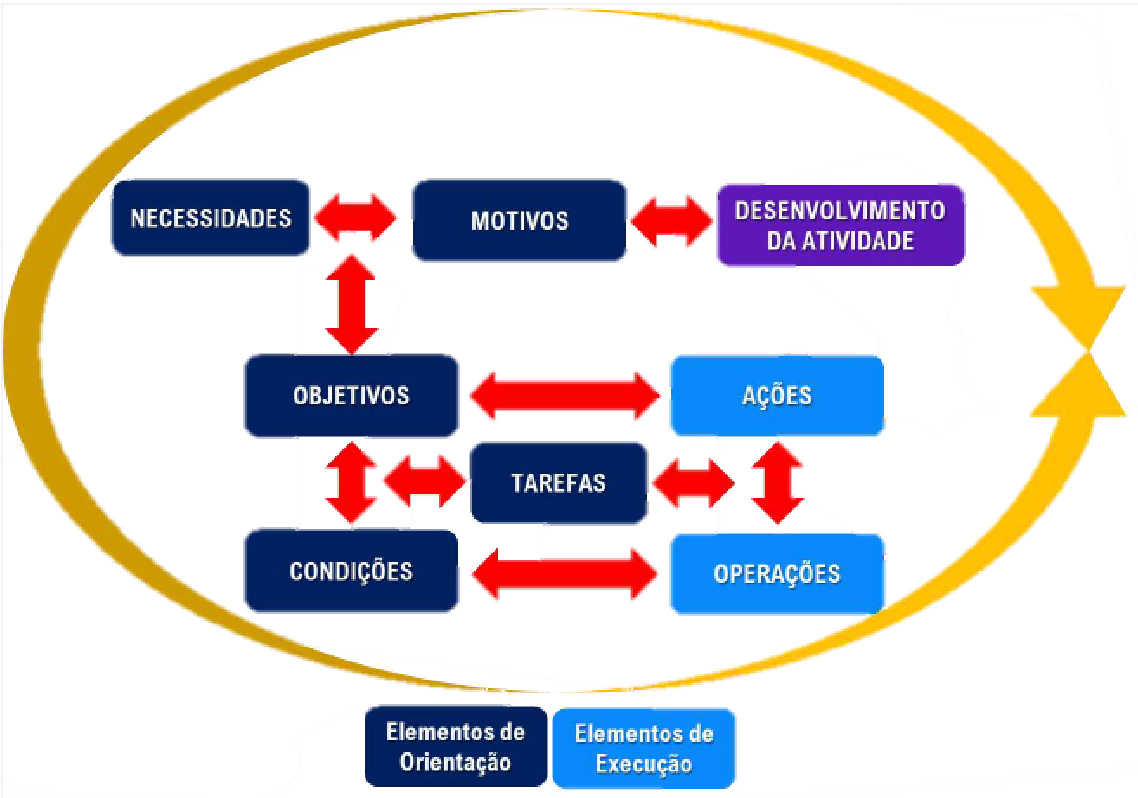
Uma diversidade de estudos busca compreender a relação entre tarefa e desenvolvimento dos sujeitos e os caminhos para sua análise, construindo diferentes concepções sobre ela. No campo da psicanálise, a técnica de grupos-operativos desenvolvida por Pichon-Revière assenta-se na realização e análise, com viés essencialmente terapêutico, de tarefas por um grupo. Nesta perspectiva, a tarefa é “a trajetória que o grupo percorre para atingir seus objetivos” (Bastos, 2010, p. 166), o que inclui a necessidade subjetiva e coletiva em resolver o que se propõe.

Considera-se que o grupo e os sujeitos *estão em tarefa*, quando está sendo realizada de maneira explícita, relacionado ao que é produzido de fato, e implícita, quando há a elaboração psíquica e a passagem pelos sentimentos e pensamentos (Castanho, 2007). Estar em *tarefa*, neste campo, pressupõe ainda passar por múltiplas contradições, romper com a resistência à mudança e com as dificuldades de lidar com o objeto (compreendidas como pré-tarefa) e o sujeito perceber a transformação de um objeto por sua atividade e de sua própria transformação a partir do objeto (Fabris, 2014). Por isso, Castanho (2007) destaca que *tarefa*, na concepção pichoniana, se aproxima de um conceito marxista do “trabalho não (ou menos) alienado”.

Mesmo não identificando o *conceito de tarefa* que iremos adotar neste trabalho a partir da Psicologia Social Pichoniana, é importante caracterizar algumas relações. O que se espera de uma boa tarefa matemática é aquela capaz de suscitar nos aprendentes a construção e/ou a reflexão sobre o conhecimento matemático, buscando transformações externas, dirigidas à proposição de soluções para problemas da realidade, e transformações internas que dizem respeito a reconstruções do conhecimento sobre objetos matemáticos e da relação que o sujeito possui com a Matemática e com o coletivo em ambiente educacional. Assim, busca-se distanciar de uma visão de tarefa como mera repetição ou simples atribuição e ajuste de ações dos estudantes.

Nesse mesmo sentido e com a intenção de contrapor a uma visão mercadológica da educação e da proposição de tarefas, Avelar (2023) busca definir tarefa a partir da Teoria da Atividade de Leontiev (Avelar, 2023; Silvestre, 2022). Considera, então, que atividade é uma categoria que vincula sujeito e objeto, a partir da qual o sujeito desenvolve a sua personalidade social consciente e engendra seus processos psíquicos. Na Figura 2, o pesquisador esquematiza as relações entre diferentes componentes da atividade, separando-as entre elementos de orientação e elementos de execução.

Figura 2 - Esquema dos componentes da atividade humana segundo Leontiev



Fonte: Avelar (2023, p. 246) adaptado de Silvestre (2022, p. 84).

Christiansen e Walther (1986) sintetizam que a atividade é realizada por meio de ações ou um sistema de ações, que são direcionados para objetivos e se concretizam em determinadas condições objetivas. Esses objetivos, por sua vez, são desencadeados pela relação entre motivo e necessidade da atividade identificados pelo sujeito. Assim,

> [...] o *encontro entre os objetivos e as condições objetivas, materiais (físicas ou simbólicas) para a sua realização é o que constitui a tarefa*. Entendo que **TAREFA**, portanto, (...), é um elemento de orientação consciente das atividades humanas, que comporta a relação entre os objetivos que geraram dadas ações e as possibilidades delas se efetivarem (Avelar, 2023, p. 248-249, grifo nosso).

Essa ideia é fundamental para a concepção de tarefa matemática que pretendemos adotar neste trabalho. Primeiramente, porque fica evidente que a aprendizagem ocorre por meio da atividade do estudante e, portanto, a tarefa proposta pelo professor não garante a aprendizagem (Ponte, 2017b). Além disso, para que a tarefa se desencadeie em atividade, é necessário preocupar-se com as condições objetivas de sua realização e com a identificação de motivo pelo sujeito. Essa deve ser a centralidade da tarefa do professor ao planejar o processo de ensino.

É nessa conjuntura que Ponte (2017b) concebe tarefas como elemento organizador da atividade do estudante e a sua proposição, em conjunto com as ações engendradas pelo professor na sua aplicação, como o principal método de ensino de Matemática. Por exemplo, o professor pode elaborar uma tarefa que envolve um jogo com seus estudantes. O simples ato de levar o jogo e esse jogo ser jogado pelos estudantes não assegura a aprendizagem matemática. É preciso que os objetivos atribuídos ao ato de jogar pelos estudantes se alinhem aos objetivos educacionais previstos. Para isso, é preciso que o professor estabeleça um cenário de aplicação do jogo, uma metodologia, que suscite a atividade do estudante a partir do jogo.

Para Antonijević (2016) a resolução de tarefas apoia a iniciação e a prática de diferentes atividades do pensamento matemático. O autor destaca 3 estágios para a realização de uma tarefa: (1) a *compreensão da tarefa*, que envolve a leitura, a identificação dos dados e das demandas propostas na tarefa e, às vezes, a mediação que o professor precisa desenvolver para auxiliar o estudante a entender esses elementos; (2) a *criação de um obstáculo cognitivo*, entendido como os graus de desafio e complexidade que uma tarefa oferece para um estudante e os conhecimentos ou técnicas que o estudante ainda não desenvolveu o suficiente para atendimento à demanda da tarefa; (3) *superação de um obstáculo cognitivo,* momento no qual o estudante avalia e desenvolve as formas de intensidade das operações do pensamento necessárias para resolver a tarefa, o que pode se dar na interação do estudante com os dados da tarefa ou coletivamente em um trabalho em grupo.

Diversos pesquisadores se aventuram na descrição de diferentes tipos de tarefas matemáticas, não havendo um consenso nessa tipificação. No desenvolvimento do projeto *Task Type and Mathematics Learning*, Sullivan *et al.* (2010, p. 134) apresentam 4 tipos de tarefas:

> Tipo 1. Envolvem um modelo, exemplo ou explicação que elabora ou exemplifica a matemática; Tipo 2. Situa a matemática dentro de um problema prático contextualizado para envolver os estudantes, mas o motivo é explicitamente a matemática; Tipo 3. Envolve tarefas abertas que permitem aos estudantes investigarem conteúdos matemáticos específicos; Tipo 4. Envolve investigações interdisciplinares nas quais é possível avaliar a aprendizagem em domínios matemáticos e não matemáticos.

É possível notar uma diferenciação a partir de critérios como a contextualização, o grau de complexidade e a conexão dos conteúdos matemáticos a outros conhecimentos. Já Powell *et al.* (2009), ao definir tarefa genericamente como algo que pode ser ou não um problema matemático, busca tipificar tarefas matemáticas apenas em duas maneiras: exercício, quando o estudante por sua própria experiência conhece a sequência de ações matemáticas que deve ser aplicada para realizar uma tarefa; problema, quando o estudante precisa compreender essa tarefa, formular uma sequência de ações, aplicar estratégias para produzir a solução e refletir sobre essa solução para avaliar se é uma resposta plausível para o problema. Além disso, este problema pode ser desafiador quando o estudante não domina as ferramentas procedimentais para resolver o problema.

Stein e Smith (2009) categoriza as tarefas matemáticas a partir de diferentes tipos de exigência cognitiva demandada dos estudantes: (1) memorização e (2) procedimentos sem conexão, como tarefas de exigência de nível reduzido; (3) procedimentos com conexão e (4) fazendo matemática, como tarefas de exigência de nível elevado. Tais categorias são incorporadas por Berisha e Bytyqi (2020), que compilam diferentes categorias de tipificação de tarefas matemáticas abordadas por outros pesquisadores para analisar as tarefas matemáticas comumente utilizadas no ensino secundário em Kosovo. Com isso, sintetizaram essas ideias no Quadro 3.

Quadro 3 - Quadro analítico utilizado no estudo de Berisha e Bytytqi (2020)

Dimensão de análise	Categorias	Descrição
Características contextuais	Tarefas não aplicativas	Sem conexão com contexto relacionado à realidade
	Tarefas de aplicação fictícia	Apresenta contexto relacionado à realidade projetado pelo autor
	Tarefas de aplicação autêntica	Apresenta dados da vida real ou dados coletados pelos estudantes do seu cotidiano
Formas de apresentação	Simbólico	Tarefas apresentadas em forma simbólica
	Textual	Tarefas apresentadas em forma textual
	Visual	Tarefas apresentadas em forma visual
	Combinado	Tarefas apresentadas combinando duas ou três formas de apresentação
Formas das respostas previstas	Tarefas fechadas	Tem apenas uma resposta
	Tarefas abertas	Tem diversas ou muitas respostas corretas
	Tarefas de respostas múltiplas	Respondentes selecionam apenas uma resposta correta dentre opções fornecidas
Atividade matemática envolvida	Tarefas de representação e modelagem	Exige a apresentação de dados matemáticos em diferentes formas; a tradução dos dados matemáticos de uma representação para outra
	Tarefas de cálculo e operações	Existe a realização de operações matemáticas, cálculos, transformações, construções geométricas etc.
	Tarefas de interpretação	Exige o reconhecimento, leitura e interpretação de relações ou dados matemáticos apresentados em diferentes formas
	Tarefas de argumentação e raciocínio	Exige elaborações, descrições e encadeamentos de argumentos corretos que levam a uma conclusão
Nível de demanda cognitiva	Tarefas de memorização	Envolve a reprodução de regras, fatos, fórmulas ou definições aprendidas anteriormente
	Tarefas com procedimentos sem conexões	Envolve a execução de procedimentos e algoritmos gerais, sem estabelecer nenhuma conexão com conceitos ou significados subjacentes
	Tarefas com procedimentos sem conexões	Envolve a execução de procedimentos e algoritmos gerais, que estabelecem conexões com conceitos ou significados subjacentes
	Tarefas “fazendo matemática” (de construção matemática)	Envolve pensamento complexo e não-algorítmico, exploração e compreensão de conceitos, processos e relações matemáticas.

Fonte: Berisha e Bytyqi (2020, p. 754, tradução nossa).

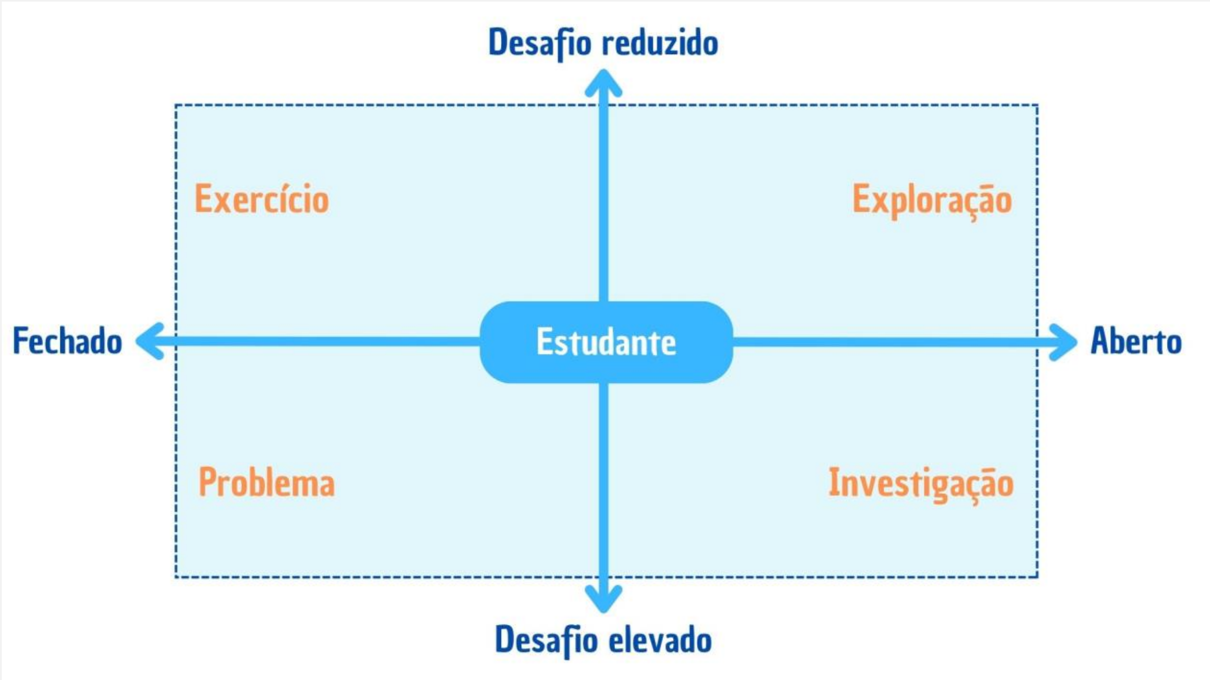
Esse quadro não apenas reúne uma quantidade considerável de trabalhos realizados sobre a categorização de tarefas matemáticas, mas pode auxiliar o professor a planejar e avaliar o material que é levado aos estudantes. Para além disso, lançou-se mão da tipificação de tarefas realizada por Ponte (2017a): (1) exercício; (2) problema; (3) exploração; e (4) investigação. Esses tipos foram estabelecidos pelo autor a partir de duas dimensões fundamentais.

O *grau de estrutura* é uma dimensão que representa o quanto uma tarefa apresentada ao estudante oferece de dados, de demandas e de conceitos, podendo variar entre os polos “aberto” e “fechado” (Ponte, 2017a). Quanto mais completas são essas informações no enunciado ou na apresentação de uma tarefa e mais claramente o estudante as identifica de imediato, mais a tarefa se aproxima do polo “fechado”. Do contrário, quanto mais significativo o grau de indeterminação dos dados, mais a tarefa se aproxima do polo “aberto”. Assim, essas categorias se diferenciam do que é apresentado por Berisha e Bytyqi (2020) que as utilizam sob uma dimensão da forma de respostas previstas.

Já o *grau de desafio matemático* “relaciona-se de forma estreita com a percepção da dificuldade de uma questão” (Ponte, 2017a, p. 112), variando entre os polos “reduzido” e “elevado”. Ponte (2017a) defende que uma tarefa de desafio elevado por proporcionar aos estudantes uma efetiva experiência matemática e uma tarefa de desafio reduzido contribui para a autoconfiança dos estudantes, visto que possibilita um elevado grau de sucesso a todos. Pode-se associar essa dimensão aos níveis de demanda cognitiva de Stein e Smith (2009) para se compreender melhor o que representa essa “percepção de dificuldade” de uma tarefa.

É a partir da combinação de categorias dessas dimensões que Ponte (2017a; 2017b) define os quatro tipos de tarefas supracitados, representados na figura 3. No 1º quadrante, localiza-se a exploração, um tipo de tarefa aberta com desafio mais reduzido. No 2º quadrante, o exercício, uma tarefa fechada e de desafio reduzido. No 3º quadrante, o problema, uma tarefa fechada e desafio elevado. No 4º quadrante, a investigação, um tipo de tarefa aberta e com desafio elevado.

Figura 3 - Tipos de tarefa, segundo Ponte (2017a)



Fonte: Ponte (2017a, p. 115) adaptado pelo pesquisador.

Nesse diagrama, foi incluída a centralidade do estudante entre os quadrantes para reforçar, conforme ressalta Ponte (2017a, p. 114), que a demarcação entre as linhas do grau de estrutura e de desafio pode variar de estudante para estudante, de acordo com os seus conhecimentos prévios e experiências. Outras dimensões definidas pelo autor, que transversalizam esses quatro tipos, são a *duração* (curta, média ou longa) e o *contexto* (realidade, semi-realidade, matemática pura). Sobretudo a dimensão de contexto, que é inspirada nos estudos de Ole Skovsmose (2000; 2014), tem uma grande importância em um cenário de um curso de educação de jovens e adultos, e integrado à formação profissional técnica.

Associando essas ideias ao debatido por Yeo (2017), pode-se compreender que tanto o grau de estrutura, quanto o grau de desafio matemático estão diretamente ligados à amplitude da diversidade de objetivos que os estudantes podem traçar ao se defrontar com uma tarefa. Por exemplo, uma tarefa investigativa possui objetivos mais abertos do que a tarefa de resolução de problemas, envolvendo tanto a resolução quanto a formulação de problemas. No entanto, o pesquisador argumenta que muitas vezes os estudantes não estão habituados à atividade de investigação e não sabem sequer por onde começar. Desse modo, a amplitude da não definição dos objetivos da tarefa de investigação pode se tornar um obstáculo para a atividade do estudante.

De modo correlato, Ponte (2017a) argumenta que tarefas investigativas como os projetos, que envolvem um longo período pode contribuir para a dispersão dos estudantes.

Uma possibilidade apresentada por Yeo (2017) para contornar essa dificuldade é a modificação da tarefa investigativa, definindo um pouco mais os objetivos em seu enunciado, de tal modo a ainda mantê-la aberta.

> Task 3a: Investigative Task (Powers of 3)
> Powers of 3 are 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, … Investigate.
> (...)
> Task 3b: Paraphrase of Investigative Task (Powers of 3)
> Powers of 3 are 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, … Find as many patterns as possible. (Yeo, 2017, p. 178-180)

A Tarefa 3a, direcionada a um grupo de estudantes de nível secundário, claramente possui objetivos abertos para eles e exige uma postura investigativa frente ao conhecimento das potências de 3. Mas o comando “investigue” traz um grau de indefinição muito alto desses objetivos. Já a Tarefa 3b ainda possibilita a definição de diferentes objetivos por diferentes estudantes, mas afunila as possibilidades de diversificação, dando mais direcionamento a eles. Entende-se que essa modificação se aproxima da utilização de tarefas exploratórias, quando o pesquisador tenta reduzir o nível de desafio das tarefas consideradas investigativas.

A fim de mapear e associar diferentes estudos que tratam das tarefas de natureza exploratória, Rosa e Estevam (2022) identificaram nove características inerentes a esse tipo de tarefa: propostas instigadoras; envolver formas complexas de pensamento; estimular o interesse e possuir contexto significativo; grau de desafio compatível com os estudantes; destaque de pontos-chave relacionados ao conceito, procedimento ou ideia matemática envolvida; diferentes possibilidades de estratégias, procedimentos, representações e níveis de complexidade; articular-se com os objetivos do professor; auxiliar no desenvolvimento de autonomia no trabalho do estudante; promoção de raciocínio indutivo (além do dedutivo). Por fim, os autores esboçaram um quadro de referência (ver Quadro 4) para sintetizar diferentes aspectos que devem ser considerados na elaboração/definição desse tipo de tarefa.

Quadro 4 - Aspectos a serem considerados em tarefas de natureza exploratória

Características da tarefa	Descritores	Redução de potencial	Atividade exploratória desencadeada
Propostas instigadoras	▪ Permitir raciocínio matemático; ▪ Não apresentar conceitos e procedimentos diretamente; ▪ Conter problema(s) ou situações significativas, com potencial para provocar os estudantes; ▪ Contribuir para aprendizagem significativa da matemática e o desenvolvimento de capacidades como o raciocínio e a comunicação.	▪ Situações em que são utilizados procedimentos sem reflexão; ▪ Apresentar diretamente conceitos ou procedimentos.	▪ Interpretar situações em termos matemáticos; ▪ Relacionar conceitos e procedimentos matemáticos a situações; ▪ Engajar-se na resolução da tarefa; ▪ Desenvolver vocabulário matemático.
Envolver formas complexas de pensamento	▪ Situações consideradas de elevado grau de exigência cognitiva, que priorizam procedimentos com conexão e fazer matemática.	▪ Situações consideradas de baixo grau de exigência cognitiva, em que são utilizados procedimentos mecânicos ou padronizados, sem reflexão.	▪ Estabelecer conjecturas e justificativas baseadas em fatos e propriedades conhecidas; ▪ Relacionar conceitos e procedimentos matemáticos; ▪ Atribuir significado à Matemática; ▪ Desenvolver capacidade de resolver problemas.
Estimular o interesse dos estudantes e possuir contexto(s) significativo(s)	▪ Temas de interesse dos estudantes; ▪ Envolvimento com situações cotidianas; ▪ Contextos que estejam de acordo com a realidade dos estudantes; ▪ Situações acessíveis, mas que proporcionam certo	▪ Situações descontextualizadas, que não possuem relação com as experiências dos estudantes, podendo gerar a rejeição da tarefa.	▪ Interpretar situações em termos matemáticos; ▪ Transformar a situação real em uma situação matemática; ▪ Discutir e negociar significados coletivamente; ▪ Atribuir significado
Grau de desafio compatível com os estudantes	▪ Linguagem e contexto acessíveis; ▪ Conhecimentos e experiências que se supõem que os estudantes possuem são necessários ou importantes para a resolução da tarefa; ▪ Permitir que os estudantes se apoiem em experiências anteriores.	▪ Situações que denotam caráter avançado em relação aos conhecimentos dos estudantes;	▪ Permitir a exploração matemática e não somente a assistemática; ▪ Engajar-se na resolução da tarefa; ▪ Oferecer condições para conjecturas, justificativas e validações.

Auxiliar o professor com pontos-chave	▪ Possuir aspectos, por exemplo, no enunciado de uma situação, que podem ser utilizados para elucidar dúvidas dos estudantes, seja como apoio ou provocações a percepção de ideias e conceitos fundamentais.	▪ Possuir um único problema ou uma questão muito diretiva; ▪ Itens desarticulados ou muito complexos.	▪ Conjecturar e justificar aspectos matemáticos e não-matemáticos relacionados ao objetivo da aula; ▪ Trabalhar autonomamente no processo de resolução da tarefa.
Diferentes estratégias de resoluções e diferentes níveis de complexidade	▪ Não ser limitada no sentido de possuir uma única estratégia de resolução; ▪ Permitir resoluções que variam das mais simples às mais elaboradas.	▪ Situações em que é apresentado o que deve ser feito, não permitindo a exploração.	▪ Relacionar conceitos e procedimentos matemáticos; ▪ Reconhecer o potencial de diferentes estratégias de resolução para a tarefa; ▪ Atribuir significado à Matemática;
Articular-se aos objetivos do professor	▪ Tarefas elaboradas, selecionadas ou adaptadas com base em objetivos bem estabelecidos; ▪ O efeito cumulativo de explorações de diferentes tipos de tarefas conduz ao desenvolvimento de ideias implícitas nos estudantes sobre a natureza da Matemática.	▪ Situações selecionadas pelo professor, sem critérios bem definidos.	▪ Conjecturar e justificar aspectos matemáticos e não-matemáticos relacionados ao objetivo da aula;
Autonomia no trabalho dos estudantes e manutenção da exigência cognitiva da tarefa	▪ Permitir que iniciem e realizem o trabalho com intervenções mínimas do professor; ▪ Fomentar justificativas para raciocínios, estratégias procedimentos empregados e ações realizadas, em processos de negociação de significados; ▪ Oferecer meios para avaliar seu próprio progresso.	▪ Linguagem complexa para os estudantes; ▪ Situações com caráter avançado em relação aos conhecimentos dos estudantes; ▪ Estudantes não são responsabilizados pelo trabalho desenvolvido.	▪ Trabalhar autonomamente no processo de resolução da tarefa, especialmente em grupos; ▪ Justificar estratégias, procedimentos, representações e ideias empregados; ▪ Responsabilizar-se pelas produções e aprendizagens.
Promover raciocínio indutivo	▪ Apresentar situações com contextos ricos e com potencial para, a partir de casos e fatos identificados, oferecer fundamentos para generalizações matemáticas, a partir de processos de descontextualização.	▪ Apresentar diretamente conceitos ou procedimentos; ▪ Itens desarticulados.	▪ Raciocinar de forma indutiva, resolvendo e analisando casos particulares para posteriores ampliações e generalizações.

Fonte: Rossa e Estevam (2022, p. 295-297)

Os descritores podem auxiliar o professor na definição da tarefa, ainda que seja por meio da adequação de tarefas não elaboradas por ele, como a adequação de exercícios de livros didáticos para o trabalho de natureza exploratória. Os apontamentos sobre a redução de potencial da tarefa fornecem indicativos de como uma tarefa pode estar indo de encontro à atividade exploratória do estudante e desprivilegiando uma oportunidade única de mobilização de pensamentos matemáticos. Já a última coluna do quadro, para além de auxiliar na definição dos objetivos educacionais, é de grande valia para que o professor possa realizar a avaliação contínua das ações dos estudantes.

Sendo assim, corroborando com a visão de Ponte, Quaresma e Branco (2017, p. 214), as tarefas de natureza exploratória servem para “promover o desenvolvimento de novos conceitos e para aprender novas representações e procedimentos matemáticos”, não simplesmente oferecer um contexto para aplicar um conceito já aprendido. Por isso e por todo o exposto, decidiu-se nesta pesquisa construir uma sequência didática para o ensino de probabilidade na perspectiva do Ensino Exploratório, tendo como público-alvo uma turma de educação de jovens e adultos. A seguir busca-se descrever com mais detalhes as características de um processo de Ensino Exploratório.

4.2 O ENSINO EXPLORATÓRIO

Como foi citado anteriormente, a adoção de uma tarefa pelo professor não assegura a aprendizagem do estudante. A mediação do professor e suas escolhas metodológicas devem favorecer o desenvolvimento de condições objetivas para a realização da atividade do estudante. Quando João Pedro da Ponte (2017a) faz a sua descrição dos tipos de tarefa, em nenhum momento supõe maldizer uma ou outra tarefa. Ao contrário, o teórico relata o quão importante é a gestão curricular que as articula. A preocupação principal é sobre qual a postura do professor frente a essas possibilidades.

Nesse contexto, Ponte (2017a) contrasta duas estratégias básicas no ensino de Matemática. No *ensino direto* a aprendizagem acontece a partir da transmissão de conhecimentos em um processo no qual o professor assume um papel de centralidade, quem fala, e o estudante um papel submisso de atenção, quem ouve, cuja atividade se resume a resolver exercícios quantos forem demandados. Esse modelo de ensino pode ser associado a concepção de educação bancária dada por Freire ou do Paradigma do Exercício elaborada por Skovsmose (2000; 2014).

Em contraposição, Ponte (2017a) define a *estratégia de ensino-aprendizagem exploratório*, a qual ele associa outras tecnologias como ensino ativo ou ensino por descoberta. Nessa forma de trabalho destina-se grande parte da aula para construção e descoberta do conhecimento matemático pelos estudantes, não excluindo a importante atuação do professor relativa a exposição, mediação e sistematização. Assim, essa estratégia privilegia o emprego de tarefas de exploração e de investigação.

Na *estratégia de ensino-aprendizagem exploratório*, o professor

> [...] dará ênfase a atividades de exploração, incluindo possivelmente também algumas investigações, projetos, problemas e exercícios. (...) valorizará mais os momentos de reflexão e discussão com toda a turma, tendo por base o trabalho prático já previamente desenvolvido, com momentos por excelência para a sistematização de conceitos, a formalização e o estabelecimento de conexões matemáticas (Ponte, 2017a, p. 124).

Nesse ínterim, tal estratégia prevê o entendimento sobre a tarefa a ser realizada, o trabalho em grupo em uma postura investigativa, buscando a construção do próprio saber matemático, a reflexão individual e coletiva sobre o produzido e a sistematização dos conhecimentos matemáticos trabalhados. Com isso, é possível já visualizar, em etapas, como o processo de ensino vai se organizando e desenvolvendo.

Canavarro (2011) preocupa-se em definir uma abordagem didática a qual denomina “Ensino Exploratório”, ressaltando a importância e descrevendo o papel do professor nesse contexto exploratório. O emprego terminológico adotado, no entanto, não tem a intenção de descaracterizar a terminologia “*ensino-aprendizagem exploratório*”, tampouco dissociar aprendizagem de ensino. Ora, se nessa proposta “os estudantes aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão colectiva” (Canavarro, 2011, p. 11), o acompanhamento e avaliação do professor é fundamental. É esse ator quem conduz o processo, da escolha criteriosa da tarefa ao delineamento da exploração matemática, interpretando como os estudantes resolvem a tarefa e mediando as ações deles com os objetivos educacionais previstos.

Oliveira, Meneses e Canavarro (2013) consideram quatro fases na aplicação do Ensino Exploratório, a saber: introdução da tarefa; resolução da tarefa (pelos estudantes); discussão coletiva das resoluções; sistematização das aprendizagens matemáticas. No mesmo artigo, elaboram um quadro de referência das ações dos professores em um contexto do Ensino Exploratório (Quadro 5).

Quadro 5 - Ações intencionais do professor na prática de Ensino Exploratório da Matemática

Fases	Promoção da aprendizagem matemática	Gestão da aula
INTRODUÇÃO DA TAREFA	*Garantir a apropriação da tarefa pelos estudantes:* — Familiarizar com o contexto da tarefa — Esclarecer a interpretação da tarefa — Estabelecer objetivos *Promover a adesão dos estudantes à tarefa:* — Estabelecer conexões com experiência anterior — Desafiar para o trabalho	Organizar o trabalho dos estudantes: — Estipular tempos para o trabalho a desenvolver em cada uma das fases da aula — Definir formas de organização do trabalho (individual, pares, pequenos grupos, ...) — Organizar materiais da aula
REALIZAÇÃO DA TAREFA	*Garantir o desenvolvimento da tarefa pelos estudantes:* — Colocar questões e dar pistas — Sugerir representações — Focar ideias produtivas — Pedir clarificações e justificações *Manter o desafio cognitivo e autonomia dos estudantes:* — Cuidar de promover o raciocínio dos estudantes — Cuidar de não validar a correção matemática das respostas dos estudantes	*Promover o trabalho de pares/grupos:* — Regular as interações entre estudantes — Providenciar materiais para o grupo *Garantir a produção de materiais para a apresentação pelos estudantes:* — Pedir registos escritos — Fornecer materiais a usar — Dar tempo para preparar a apresentação *Organizar a discussão a fazer:* — Identificar e selecionar resoluções variadas (com erro a explorar, menos ou mais completas, com representações relevantes) — Sequenciar as resoluções selecionadas
DISCUSSÃO DA TAREFA	*Promover a qualidade matemática das apresentações dos estudantes:* — Pedir explicações claras das resoluções — Pedir justificações sobre os resultados e as formas de representação utilizadas — Discutir a diferença e eficácia matemática das resoluções apresentadas *Regular as interações entre os estudantes na discussão:* — Incentivar o questionamento para clarificação de ideias apresentadas ou esclarecimento de dúvidas — Incentivar análise, confronto e comparação entre resoluções — Identificar e colocar à discussão erros matemáticos das resoluções	*Criar ambiente propício à apresentação e discussão:* — Dar por terminado o tempo de resolução da tarefa pelos estudantes — Providenciar a reorganização dos lugares/espaço para a discussão — Promover atitude de respeito e interesse genuíno pelos diferentes trabalhos apresentados *Gerir relações entre os estudantes:* — Definir a ordem das apresentações — Cuidar de justificar as razões da não apresentação de algumas resoluções — Promover e gerir as participações dos estudantes na discussão

SISTEMATIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS MATEMÁTICAS	*Institucionalizar ideias ou procedimentos relativos a tópicos matemáticos suscitados pela exploração da tarefa:* — Identificar conceito(s) matemático(s), clarificar a sua definição e explorar representações múltiplas — Identificar procedimento(s) matemático(s), clarificar as condições da sua aplicação e rever a sua utilização — Reconhecer o valor de uma regra com letras *Institucionalizar ideias ou procedimentos relativos a capacidades transversais suscitadas pela exploração da tarefa:* — Identificar e relacionar dimensões da(s) capacidade(s) transversal(ais) presentes — Reforçar aspetos-chave para o seu desenvolvimento Estabelecer conexões com aprendizagens anteriores: — Evidenciar ligações com conceitos matemáticos, procedimentos ou capacidades transversais anteriormente trabalhados	*Criar ambiente adequado à sistematização:* — Focar os estudantes no momento de sistematização coletiva — Promover o reconhecimento da importância de apurar conhecimento matemático a partir da tarefa realizada *Garantir o registo escrito das ideias resultantes da sistematização:* — Fazer registo em suporte físico ou informático (quadro, QI, acetato, cartaz ...) por estudante ou professor — Pedir registo escrito nos cadernos dos estudantes

Fonte: Oliveira, Meneses e Canavarro (2013, p. 33).

Em particular, no decorrer das três últimas fases, Canavarro (2013), apoiada em Stein e Smith (2009), denota cinco práticas inerentes à ação do professor para “orquestrar produtivamente as discussões matemáticas”:

(1) *Antecipar*: prever, o quanto possível, as estratégias e conceitos que os estudantes provavelmente irão utilizar, tanto de forma correta quanto incorreta, identificando graus de sofisticação; importante isso ser sistematizado para que o professor tenha condições de efetivar a monitorização;

(2) *Monitorizar*: observar, acompanhar e avaliar as estratégias adotadas pelos grupos no desenvolvimento da tarefa; intervir, quando necessário, para auxiliar no estabelecimento de conexões entre as estratégias e os entes matemáticos ou auxiliar aqueles que estão com dificuldades de traçar estratégias; fazer anotações que ajudem nesse acompanhamento dos grupos;

(3) *Selecionar*: identificar, a partir de diferentes critérios, as resoluções que irão compor a fase de discussão, de modo a contemplar uma diversidade de estratégias e ideias matemáticas que julgue adequadas; dentre os critérios destacam-se os erros

recorrentes que devem ser esclarecidos, as diferentes estratégias matemáticas, as diferentes representações matemáticas;

(4) *Sequenciar*: ordenar as apresentações das resoluções de modo mais adequado objetivando atingir o propósito da aula; essa ordem pode seguir o critério, por exemplo, da resolução mais informal para a mais formal, ou da progressão de generalizações, ou da complexidade e acessibilidade das resoluções, ou das que apresentam mais erros;

(5) *Estabelecer conexões*: prática durante e após a discussão coletiva que deve levar os estudantes a analisarem, compararem, confrontarem, sintetizarem e particularizarem ou generalizarem as diferentes resoluções; é uma prática que vai conduzir o professor para a fase de formalização de conceitos e ideias matemáticas.

Apesar dos diversos desafios destacados por Canavarro (2013) na implantação do Ensino Exploratório, é notável a sua validade e sua efetividade para a aprendizagem dos estudantes. Dörr, Pina Neves e Ribeiro (2023) desenvolveram uma pesquisa na formação continuada na qual professores elaboraram tarefas matemáticas, aplicaram-nas em um contexto de ensino e aprendizagem com abordagem exploratória e refletiram sobre o que foi realizado. Os autores concluíram que os professores em formação puderam perceber que os estudantes, mesmo apresentando diversos estágios de aprendizagem, conseguiram "elaborar conjecturas matemáticas potencializadas pela discussão coletiva (...) e, ainda, conseguiram desenvolver o raciocínio matemático necessário para a conclusão da tarefa" (Dörr; Pina Neves; Ribeiro, 2023, p. 23). Isso revela tanto a relevância do Ensino Exploratório para o contexto da educação matemática, quanto a necessidade de sua abordagem na formação inicial e continuada de professores.

4.3 UMA REVISÃO SISTEMÁTICA

A revisão sobre o tema "Ensino Exploratório" foi realizada de fevereiro a agosto de 2023 em diferentes plataformas[11]. Foram elaboradas quatro perguntas principais de pesquisa para orientar a busca e análise dos achados: P1 – Qual a tendência dos

[11] Esta revisão sistemática foi também apresentada no XXVII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática sob o título "Um panorama das publicações sobre a abordagem do Ensino Exploratório na educação básica" (Machado, 2023).

estudos em relação aos sujeitos da pesquisa e ao nível de ensino em que se consolidam as experiências, identificando quais descrevem/analisam experiências de ensino e aprendizagem de Matemática na Educação Básica?; P2 – Qual a tendência dos estudos em relação às unidades da Matemática escolar exploradas?; P3 – Qual a fundamentação teórica predominante para a definição de etapas para o Ensino Exploratório e/ou tarefas exploratórias?; P4 – Quais as potencialidades e os desafios apontados nos estudos sobre o Ensino Exploratório?

Como critérios de inclusão, foi definido que apenas seriam objetos dessa revisão os trabalhos: do tipo artigo de periódico e revisados por especialistas; que apresentassem a abordagem do Ensino Exploratório e/ou de tarefas exploratórias na educação matemática; publicados no período de 2012 a 2023; publicados em língua portuguesa. Todos os estudos que não se adequassem a esse formato seriam desconsiderados, além da exclusão daqueles repetidos em diferentes plataformas utilizadas.

Após isso, prosseguiu-se para a definição da estratégia de busca das publicações. Decidiu-se realizar buscas nas seguintes bases de dados:

1) Portal de Periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes);
2) sistema *Redalyc*;
3) nos *sites* dos periódicos da área de Educação Matemática classificados como A1 ou A2 no sistema Qualis Capes, triênio 2017-2020, com publicações em língua portuguesa.

Nas duas primeiras, a equação de busca com operadores booleanos utilizada foi: *"Matemática" AND ("Ensino Exploratório" OR "abordagem exploratóri*" OR "taref* exploratóri*" OR "atividad* exploratóri*" OR "aul* exploratóri*")*. No Portal de Periódicos da Capes foram encontrados 94 resultados e identificou-se, em uma primeira leitura exploratória, que 43 deles atendiam aos critérios de inclusão. No sistema *Redalyc*, além da busca do termo foi possível a inclusão dos filtros: período de 2012-2023; disciplinas de *Educación* e *Multidisciplinarias*; idioma português. Com isso, foram encontrados 72 resultados, dos quais 26 atendiam aos critérios de inclusão.

A Tabela 1 apresenta os periódicos da área de Educação Matemática com qualis A1 ou A2 e as quantidades de artigos encontrados em cada um deles. Em geral, os sites de tais periódicos possuem maior simplicidade nos mecanismos de busca e, portanto, foram utilizados apenas os termos *exploratório, exploratória* e *exploratórias* como palavra-chave de busca. Foi também realizada uma leitura exploratória dos resumos dos artigos a fim de identificar aqueles que satisfaziam os critérios de inclusão.

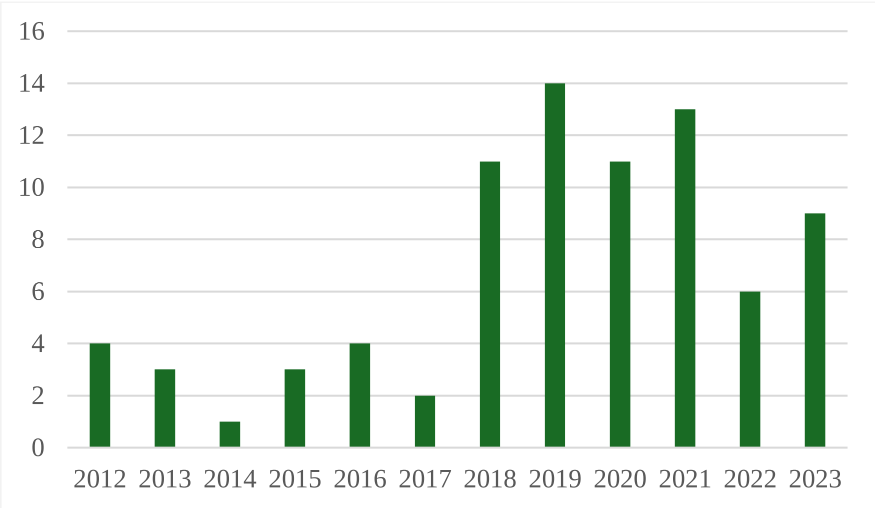
Tabela 1- Periódicos Qualis A1 ou A2 da área de Educação Matemática

Periódicos	**Quantidade de resultados**			
	exploratório	***exploratória***	***exploratórias***	**Após leitura exploratória**
Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)	16	21	1	10
Educação Matemática Pesquisa	16	18	3	10
Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (RIPEM)	5	4	0	0
Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)	4	2	0	2
Zetetiké	2	3	1	2
Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia	4	8	1	1
Acta Scientiae	18	13	0	3
Revista de Educação em Ciências e Matemáticas	8	5	0	2
Educação Matemática em Revista – RS	4	3	0	0
Educação Matemática em Revista – EMR	9	3	2	1
Perspectivas da Educação Matemática	6	5	3	6
Vidya	6	10	1	5
Total	**98**	**94**	**12**	**42**

Fonte: autoria própria.

Foram 42 os artigos encontrados nesses periódicos que abordaram o tema do Ensino Exploratório ou experiências envolvendo tarefas em uma abordagem exploratória. Destaca-se aqui que muitos dos trabalhos excluídos utilizaram o termo “abordagem exploratória” como tipo de pesquisa, ou traziam uma ideia superficial do exploratório (muitas vezes apenas citando como um adjetivo) ou em contexto diferente do objeto dessa pesquisa, ou ainda pesquisas que não tratavam do ensino de matemática. Reunindo os resultados obtidos nas três estratégias de busca e retirando as repetições, foram elencados 81 trabalhos, que possuem características que se intersectam e se desconectam quantos às perspectivas teóricas, metodológicas, dos objetivos e dos objetos de estudo. Inicialmente, para ser possível compreender o fenômeno das publicações sobre propostas de ensino com abordagens exploratórias, a Figura 4 apresenta o número de artigos por ano de publicação dentre os selecionados.

Figura 4 - Periódicos Qualis A1 ou A2 da área de Educação Matemática por ano



Fonte: autoria própria.

É possível notar uma tendência de aumento nas publicações que trabalham essa temática, o que pode corresponder a uma compreensão cada vez maior do quão frutífera é a abordagem, que suscita maior participação dos estudantes e maior diálogo entre professores e estudantes, em contraponto ao *Paradigma do Exercício*, conceito definido por Skovsmose (2000), que representa o modelo de aulas matemáticas no qual uma parte do tempo é dedicada à exposição de ideias pelo professor e outra parte é reservada à resolução de exercícios. Importante destacar uma diminuição nas publicações no ano de 2022 que pode ser reflexo do período de ensino remoto emergencial instalado frente à pandemia da Covid-19 (2020-2022).

Dos 81 artigos, um não foi encontrado na íntegra, pois a plataforma apresentava problemas de acesso e, portanto, foi excluído das análises subsequentes. Com a intenção de responder à pergunta de pesquisa *P1 – Qual a* *tendência dos estudos em relação aos sujeitos da pesquisa e ao nível de ensino em que se consolida as experiências, identificando quais descrevem/analisam experiências de ensino e aprendizagem de matemática na Educação Básica?*, definiu-se que esta análise seria um novo critério de seleção dos artigos, com a finalidade de delimitar os trabalhos que trouxessem ricas experiências de ensino na Educação Básica e que as aprendizagens de professores e/ou estudantes durante a experiência fosse o principal objeto de análise das pesquisas.

Com isso, identificou-se que, das 80 pesquisas restantes, três tinham viés de pesquisa bibliográfica ou teórica. Além disso, 49 traziam experiências de Ensino Exploratório em nível superior, seja conteúdos matemáticos de nível superior (como o Cálculo Diferencial e Integral), seja com perspectivas sobre a formação inicial ou continuada de professores. Destaca-se ainda que dessas, algumas traziam breves descrições de experiências na Educação Básica, mas a análise apresenta maior viés da formação de professores, como é o caso das pesquisas sobre estudo de aula ou *Lesson Study.* Assim, foram identificados 28 artigos que atendiam ao critério supracitado e foram objetos das análises subsequentes (ver Quadro 6).

A Tabela 2 apresenta os dados em relação à pergunta *P2 – Qual a tendência dos estudos em relação às unidades da matemática escolar exploradas?*

É importante notar que algumas pesquisas abordaram mais de uma unidade. Há uma preponderância dos estudos sobre tópicos de álgebra e de números, seguindo à tendência do ensino de Matemática que muito ofereceu resistência aos tópicos de geometria e estatística e probabilidade. Algo que chama a atenção é que nenhum dos trabalhos analisados abordou ideias relacionadas à probabilidade, o que reforça a necessidade de desenvolvimento da pesquisa proposta pelos autores deste trabalho.

Tabela 2 - Unidades da matemática escolar abordadas nos 28 artigos analisados

Unidades	**Quantidade de artigos**
Geometria	5
Álgebra	9
Números e funções	11
Grandezas e medidas	3
Probabilidade e estatística	2

Fonte: autoria própria.

Quanto à pergunta *P3 – Qual a fundamentação teórica predominante para a definição de etapas para o Ensino Exploratório e/ou tarefas exploratórias?*, os estudos mais citados foram: as definições e classificação de tarefas por Ponte (2005); as fases de implementação do Ensino Exploratório por Canavarro (2011) e Oliveira, Menezes e Canavarro (2013); a prática de professores que apoiam discussões matemática produtivas nas aulas, por Stein *et al*. (2008); a classificação das ações de professores na condução de discussões matemáticas, como em Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013); as ações de professores que apoiam o raciocínio matemático dos estudantes, como em Araman, Serrazina e Ponte (2019).

Quadro 6 - Lista dos 28 periódicos analisados

Autores	Periódico	Ano
Andrade, J. M.; Saraiva, M. J.	Relime	2012
Assis, A.; Godino, J. D.; Frade, C.	Relime	2012
Lamonato, M.; Passos, C. L. B.	Revista eletrônica de educação	2012
Assis, A.; Frade, C.; Godino, J. D.	Bolema	2013
Ponte, J. P. da; Quaresma, M.	Bolema	2014
Estevam, E. J. G.; Cyrino, M. C. de C. T.; Oliveira, H. M.	Perspectivas da Educação Matemática	2015
Loureiro, C.	VIDYA	2015
Ponte, J. P. da; Quaresma, M.	Revista da Faculdade de Educação (UNEMAT)	2015
Borba, B. T.; Freitas, M. T. M.	BoEM	2018
Alves, B. S.; Canavarro, A. P.	Debates em Educação	2018
Mata-Pereira, J.; Ponte, J. P. da	Bolema	2018
Araman, E. M. de O.; Sarrazina, M. de L.; Ponte, J. P. da	Educação Matemática Pesquisa	2019
Gregório, M.; Oliveira, H.	BoEM	2019
Santos, S.; Rodrigues, M.	Bolema	2019
Araman, E. M. de O.; Serrazina, M. de L.; Ponte, J. P. da	Bolema	2020
Araman, E. M. de O.; Serrazina, M. de L.	VIDYA	2020
Machado, B. E. C.; Lacerda, A. G.	Revista de Ensino de Ciências e Matemática	2020
Graça, S. I.; Ponte, J. P. da; Guerreiro, A.	Educação Matemática Pesquisa	2021
Mescouto, J. B.; Lucena, I. C. R. de; Barbosa, E.	Educação Matemática Debate	2021
Ferreira, M. C.; Ribeiro, A. J.; Ponte, J. P.	Educação Matemática Pesquisa	2021
Oliveira, V. S. D. de; Basniak, M. I.	Educação Matemática Debate	2021
Richit, A.; Tomkelski, M. L.; Richit, A.	Acta Scientiae	2021
Serrazina, L.	Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana	2021
Araman, E.; Trevisan, A. L.; Paula, B. A. de	Alexandria	2022
Morais, R. da S. de; Araman, E. M. de O.; Trevisan, A. L.	VIDYA	2022
Araman, E. M. de O. *et al*	Educação Matemática Pesquisa	2023
Brandelero, D. S.; Estevam, E. J. G.	Educação Matemática Pesquisa	2023
Elias, H. R. *et al*	Perspectivas da Educação Matemática	2023

Fonte: autoria própria.

Já sintetizando os resultados apontados nos artigos, em resposta ao questionamento *P4 – Quais as potencialidades e os desafios apontados nos estudos sobre o Ensino Exploratório?,* percebeu-se diversos pontos positivos tanto na perspectiva da construção de saberes docentes, quanto da aprendizagem dos estudantes. Nas pesquisas foram apontados avanços na apropriação de símbolos e linguagem matemáticos, ampliando o vocabulário e a variedade de representações de mesmos objetos (Lamonato; Passos, 2012; Ponte; Quaresma, 2014; 2015; Santos; Rodrigues, 2019; Richit; Tomkelski; Richit, 2021). Outrossim, a abordagem exploratória contribuiu para o desenvolvimento de argumentos, estratégias, conjecturas e justificações pelos estudantes (Estevam; Cyrino; Oliveira, 2015; Gregorio; Oliveira, 2019; Araman; Serrazina, 2020; Araman; Trevisan; Paula, 2022).

Muito importante também para a aprendizagem de estudantes foi a construção de um ambiente propício ao debate, ao diálogo e ao trabalho coletivo, que é um dos pilares da abordagem exploratória no ensino (Loureiro, 2015; Alves; Canavarro, 2018; Mata-Pereira; Ponte, 2018; Gregorio; Oliveira, 2019; Serrazina, 2021; Morais; Araman; Trevisan, 2022; Elias *et al.*, 2023). Isso é potencializado, visto que a proposição de tarefas exploratórias influencia as ações do professor, que promove mais discussões matemáticas e desafios para o estudante, suscitando o seu raciocínio matemático e o desenvolvimento de seu espírito de investigação (Araman; Serrazina; Ponte, 2019; Mescouto; Lucena; Barbosa, 2021; Araman *et al.*, 2023; Brandelero; Estevam, 2023).

Foram ainda levantados alguns desafios e limitações quanto a execução de propostas de Ensino Exploratório como o fato de essa estratégia demandar mais tempo de planejamento, estudos e avaliação por parte do professor, em contraponto à realidade educacional brasileira que sobrecarrega o professor, não lhe restando o tempo necessário para realizar tais ações de forma aprofundada (Oliveira; Basniak, 2021). Ferreira, Ribeiro e Ponte (2021) também assinalaram que o trabalho com viés exploratório exige do professor a consciência de que nem sempre a prática corresponde ao que foi planejado e que tem que lidar com situações imprevistas. Com isso, reforçam a necessidade de desenvolvimento das habilidades inerentes a atividade com esse viés, por meio, inclusive, de formações continuadas.

Assim, o conjunto de artigos analisados por meio desta RSL revela o quanto pode ser desafiador e potente a abordagem exploratória no ensino e nas tarefas elaboradas/escolhidas pelo professor. Ficou evidente a escassez de trabalhos que tratem do ensino de probabilidade em um contexto de Ensino Exploratório, o que ratifica a relevância do que se propôs nas próximas etapas da pesquisa, a elaboração de uma tarefa valiosa, que integre conhecimentos de probabilidade com a formação profissional da área técnica que os estudantes estão cursando, a ser estudada em uma experiência de Ensino Exploratório.

V UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE: APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO

No Capítulo 4 destacou-se que a atividade matemática do estudante é desencadeada a partir de tarefas valiosas que privilegiam a descoberta, a construção, o diálogo e a colaboração (Canavarro, 2011). O professor é convidado a definir cuidadosamente as tarefas matemáticas e como serão trabalhadas, considerando as habilidades, interesses, perfil dos estudantes e como estimulá-los ao desenvolvimento do pensamento matemático. Assim,

> [...] o professor necessita definir, cuidadosamente, a natureza do seu trabalho e as tarefas matemáticas que utilizará, saber o momento adequado de introduzi-las, ter em mente as expectativas, as habilidades, o background matemático e o interesse dos estudantes, verificar sua adequação ao perfil do grupo e, ainda, propiciar que elas sejam desenvolvidas estimulando, ao máximo, o potencial daquele que ensina e de quem aprende (Dörr; Pina Neves; Ribeiro, 2023, p. 5).

Por isso a importância de compreender em que aspectos se dá a escolha e/ou a elaboração das tarefas pelo professor de Matemática. Neste trabalho, assumiu-se que as tarefas para o estudo de probabilidade junto a estudantes jovens e adultos em contexto de formação profissional devem levar em consideração os seguintes aspectos: as diferentes características das tarefas matemáticas; as características de tarefas de natureza exploratória; as características do letramento probabilístico; a abordagem da probabilidade por meio das visões/teorias intuitiva, subjetiva, frequentista e clássica; a valorização dos conhecimentos prévios dos estudantes da EJA; a integração entre a formação profissional técnica e os conhecimentos matemáticos.

O trabalho tomou como referência o Curso Técnico Integrado ao Ensino Médio em Eletrotécnica na Modalidade da Educação de Jovens e Adultos, ofertado no Campus Valparaíso do IFG, localizado na cidade de Valparaíso, estado de Goiás. Esse curso é ofertado em regime anual, ao longo de quatro anos, e prevê a oferta da disciplina de Matemática nos três primeiros anos. Oferta 36 vagas anuais, com entrada no início de cada ano, via processo seletivo que contempla etapas de análise curricular, entrevista e sorteio. É o único curso voltado para a EJA nesse campus, onde também é ofertado dois cursos técnicos integrados ao Ensino Médio regular e dois cursos superiores (Brasil, 2023).

O curso se preocupa com uma formação integral e integrada do estudante, unindo habilidades técnicas da profissão e saberes necessários para a sua atuação crítica no mundo do trabalho e na sociedade. Dentre as competências previstas no perfil do egresso, destacam-se as elencadas a seguir.

> - Identificar-se como sujeitos ativos e capazes de interferir positivamente na transformação da sociedade em que estão inseridos;
> - Observar criticamente a realidade que os cerca e emitir seu posicionamento quanto às questões que lhes forem postas por ela;
> - Expressar-se quanto a seus direitos e deveres junto à sociedade, exercendo-os de maneira autônoma;
> - (...)
> - Atuar no planejamento e na execução da instalação e manutenção de equipamentos e instalações elétricas;
> - (...)
> - Desenvolver habilidades que permitam aos estudantes realizar com êxito as avaliações do ENEM, possibilitando para *(sic)* ingresso em cursos superiores (Brasil, 2023, p. 20-21).

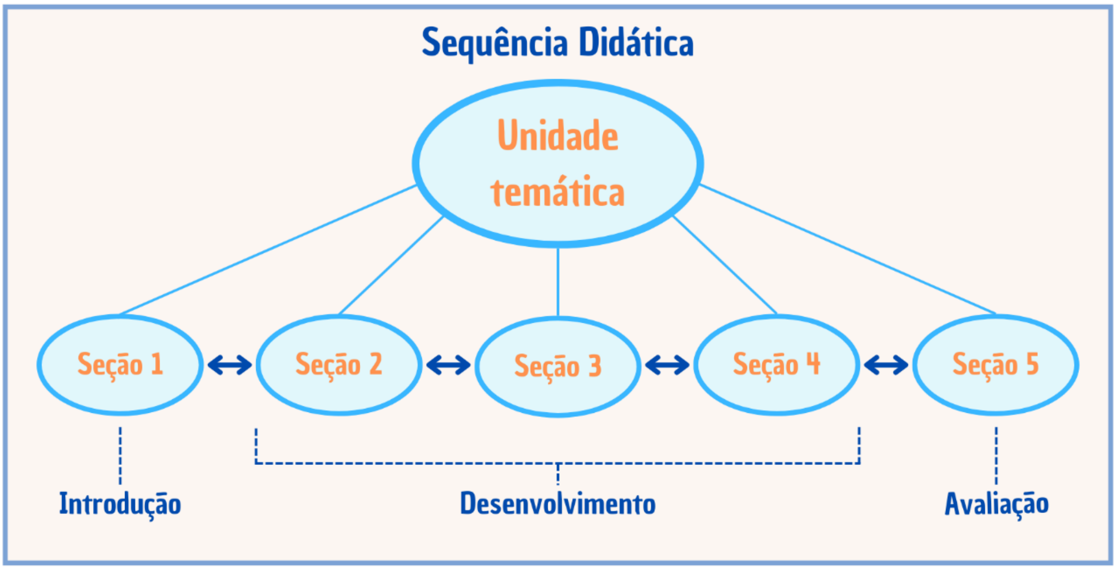
A visão de Educação Matemática que se lança mão neste trabalho corrobora com estas características formativas que buscam contribuir com o processo emancipatório dos estudantes, tendo o trabalho como princípio formativo e conhecimento matemático como uma das bases para a leitura crítica do mundo. De forma correspondente ao que foi citado, o Ensino Exploratório permite o desenvolvimento de autonomia, do trabalho colaborativo, do olhar crítico sobre suas ações na resolução de uma tarefa matemática, de ser agente de transformação e da capacidade de planejamento.

Assim, com amparo em Zabala (1998), Ponte (2017a; 2017b) e Canavarro (2011), compreende-se a sequência didática elaborada como uma sequenciação das seções (aulas individuais ou grupos de aulas) e das tarefas matemáticas exploratórias/investigativas a serem desenvolvidas pelos estudantes, orientada por objetivos educacionais e pelos campos teóricos estudados, bem como do planejamento e desenvolvimento de uma abordagem didática assentada no Ensino Exploratório.

Inicialmente, conforme desenvolvido durante este texto, foi delimitada a unidade de ensino ou unidade temática para esta sequência didática, a saber: definição e cálculo de probabilidades e suas aplicações. A sua elaboração levou em consideração o rol de competências apresentado e foi direcionada aos estudantes do 3º ano do curso, para o qual o Projeto Político de Curso - PPC prevê o estudo de probabilidade. A sequência didática foi organizada em cinco seções, cada uma com duas aulas de 45 minutos de duração. Essa organização foi motivada pelo próprio arranjo curricular do curso, que oferta duas aulas semanais conjuntas de Matemática no 3º ano. Com isso, a distância dos encontros seria de uma semana, o que poderia prejudicar o desenvolvimento de uma única seção em mais de duas aulas.

Nessa sequência didática (Figura 5), também levou-se em consideração três momentos: a seção introdutória, com a finalidade de alinhar professor-pesquisador e estudantes aos objetivos previstos para a unidade didática e de coletar informações diagnósticas sobre os saberes e concepções dos estudantes sobre probabilidade; três seções de desenvolvimento, com a perspectiva de explorar e construir os conhecimentos sobre probabilidade; uma seção de avaliação, com o intuito de identificar o que foi apreendido pelos estudantes. É importante observar que a indicação de uma última seção de avaliação não elimina o caráter processual e contínuo da avaliação durante as outras seções.

Figura 5 - Diagrama representativo da sequência didática



Fonte: autoria própria.

Cada uma das seções é composta por uma tarefa matemática exploratória/investigativa e corresponde a um plano de aula, todos apresentados sequencialmente como apêndices deste trabalho. Essa etapa de planejamento foi desenvolvida com base nas orientações de Ponte, Quaresma e Mata Pereira (2015). Para os autores, a preparação das aulas é realizada após a planificação da unidade de ensino, momento esse onde o professor reflete sobre o tempo e recursos disponíveis, as orientações da unidade educacional e "os seus alunos, as suas capacidades, interesses e disposição para se envolverem no trabalho em Matemática" (Ponte; Quaresma; Mata Pereira, 2015, p. 27), conforme discorrido nos parágrafos anteriores.

Na preparação das aulas, para os autores, deve-se considerar dois momentos: a fase preparatória do plano de aula e a elaboração do plano de aula (Ponte; Quaresma; Mata Pereira, 2015). A fase preparatória engloba diversas ações do professor relativas à previsão de acontecimentos durante as aulas e às respostas do professor frente a eles.

Para facilitar a posterior apresentação das etapas de planejamento de cada plano de aula desta pesquisa, decidiu-se descrever as ações da fase preparatória abordadas por Ponte, Quaresma e Mata Pereira (2015) em tópicos. Contudo, adverte-se que essa separação não pressupõe uma divisão estanque dessas ações, pelo contrário, elas se relacionam e complementam.

(1) *definição do(s) objetivo(s) de aprendizagem para a aula* (ou seção de aulas, como é o caso desta pesquisa), observando as orientações curriculares, os aspectos relevantes do tópico matemático e a necessidade da definição de um objetivo principal bem definido;

(2) *seleção de tarefas* orientadas para o alcance desses objetivos, podendo se originar de materiais didáticos e de apoio disponíveis ao professor;

(3) *resolução das tarefas*, que possibilita analisar as suas potencialidades para a aprendizagem, identificar os níveis de dificuldade e prever as possíveis dificuldades dos estudantes, minimizando aquelas que possam ter origem em aspectos da própria tarefa, contribuindo para sua reelaboração;

(4) *identificação das ações do professor* para auxiliar os estudantes na superação de suas dificuldades no estudo do tópico*;*

(5) *definição da tarefa* com a indicação de como os estudantes irão trabalhar com ela.

Já na fase de elaboração do plano de aula, Ponte, Quaresma e Mata Pereira (2015, p. 28) discriminam os aspectos gerais que o documento tem, comuns aos diferentes métodos de elaboração, e os aspectos relativos à "sucessão de atividades que se desenvolvem durante a aula". Dentre os aspectos gerais do plano de aula, destacam o(s) objetivo(s) de aprendizagem para a aula, a estratégia geral, a estrutura da aula e os recursos a serem utilizados. Já quanto à sucessão de atividades, os autores se baseiam nos estudos de aula japoneses (*lesson study*) para elaborar um quadro de referência, em cujas colunas se descrevem os seguintes aspectos:

> a) ‹‹Tarefas e atividades de aprendizagem›› incluem, por exemplo, as tarefas selecionadas e os modos de trabalho dos alunos em cada segmento de realização dessas tarefas (individual, pares, grupo, coletivo), bem como a definição dos momentos para a discussão coletiva.
> b) ‹‹Duração esperada›› refere-se ao tempo de duração previsto para cada segmento.
> c) ‹‹Atividade dos alunos e possíveis dificuldades›› incluem a previsão do que os alunos irão fazer bem como as suas dificuldades e dúvidas na interpretação e compreensão das tarefas e durante a resolução da tarefa. Este ponto inclui também a previsão de diferentes estratégias que se podem esperar da parte dos alunos.
> d) ‹‹Respostas do professor e aspetos a ter em atenção››, incluem aspetos fundamentais que o professor deve ter em atenção em cada segmento em resposta às possíveis dificuldades dos alunos. Este ponto refere-se também à definição da estratégia para a discussão coletiva bem como à definição das questões a sublinhar na síntese final da aula.
> e) Finalmente, ‹‹Objetivos e avaliação››, incluem os aspetos específicos da avaliação dos alunos, a ter em atenção durante a aula. Este campo corresponde de algum modo a uma decomposição do objetivo definido para a aula em objetivos mais específicos, cuja verificação permitirá ir obtendo informação parcial relativamente ao progresso dos alunos. Estas informações parciais permitirão fazer uma avaliação da aula, ao mesmo tempo que produzirão elementos para a planificação das aulas seguintes (Ponte; Quaresma; Mata Pereira, 2015, p. 28-29).

O modelo de plano de aula utilizado neste trabalho inspirou-se, portanto, nesses aspectos gerais e de desenvolvimento da aula descrito pelos autores. Compreendendo os objetivos específicos enquanto habilidades e ações observáveis e esperadas, no modelo utilizado, os tópicos ‹‹Objetivos e avaliação›› e ‹‹Atividade dos alunos e possíveis dificuldades›› foram integrados como *Ações esperadas dos estudantes e possíveis dificuldades enfrentadas*.

Em específico no item ‹‹Tarefas e atividades de aprendizagem›› a ser colocado na primeira coluna da tabela do desenvolvimento da aula, entende-se que devem ser respeitadas as formas de organização, atribuição de papéis e mediação próprias da abordagem didática adotada. Com isso, as fases do Ensino Exploratório propostas por Canavarro (2011) também serviram de embasamento para essa construção. Nesse sentido, foi utilizada a terminologia "Desenvolvimento das tarefas/Fases do Ensino Exploratório" nessa primeira coluna.

Após a análise sobre potencialidades, limitações e sugestões desenvolvidas na relação orientando-orientadora, mediada pela revisão de literatura, a versão final compôs o produto educacional apresentado. A seguir, a partir das etapas de Ponte, Quaresma e Mata Pereira (2015), aponta-se detalhadamente as características de cada tarefa e do respectivo plano de aula, como elas se relacionam com os aspectos teóricos supracitados e quais as possibilidades de desenvolvimento à luz do Ensino Exploratório.

5.1 TAREFA MATEMÁTICA 1: COMO VOCÊ LIDA COM A INCERTEZA E COM O ACASO?

Na elaboração da Tarefa 1, buscou-se construir um instrumento que possibilitasse emergir as concepções intuitivas dos estudantes sobre probabilidade, centrado em ações de diálogo e reflexão, compreendidas como fundamentais no processo de ensino e aprendizagem na modalidade da EJA, contemplando aspectos matemáticos, cotidianos e da formação profissional. Tomou-se como ponto de partida a complexificação do pensamento probabilístico de acordo com a evolução das habilidades apresentadas na BNCC (Brasil, 2018) a cada ano escolar do Ensino Fundamental, pré-requisito para ingresso no curso.

O objetivo é tanto obter um diagnóstico do conhecimento produzido pelos estudantes até então, quanto proporcionar um momento privilegiado de avaliação de situações nas quais há aleatoriedade ou risco, com base em suas vivências. Entende-se que nesse tipo de tarefa o estudante sente-se valorizado e consegue estabelecer conexões entre aquilo que já está formado em sua rede cognitiva e o que poderá ser construído ao longo da jornada. Pode-se potencializar, ainda, o desenvolvimento de habilidades de justificação e argumentação, além da autoavaliação de concepções que podem estar levando a enganos conceituais.

Entende-se que seria necessário trazer à tona diferentes interpretações sobre probabilidade, a partir das possibilidades de heurísticas comumente utilizadas na avaliação de situações de probabilidade. Heurísticas estas que podem também levar a enganos, conforme descrito por Borovcnik (2016), tais como: *disponibilidade*, que é uma tendência de relacionar a probabilidade de um evento à facilidade de recordar casos relevantes da memória; *viés de equiprobabilidade*, que é uma tendência de julgar casos como igualmente prováveis; *controle do futuro*, um impulso de relacionar passado e futuro numa relação de causalidade, utilizando informações probabilísticas para prever (com certeza) resultados exatos de um próximo experimento; *representatividade*, quando a probabilidade de um resultado específico é equiparada à probabilidade de um grupo de resultados semelhantes.

Assim, a tarefa se constitui de sete itens de avaliação com distintos contextos de risco, tomada de decisão e aleatoriedade. Neles, o grupo de estudantes é convidado a ler, refletir, discutir e dar uma resposta como um posicionamento, seguido de uma justificativa. O primeiro item (Quadro 7), aborda um contexto de semi-realidade que se aproxima da área de atuação técnica do curso. O grupo é convidado a avaliar a tomada de decisão de um profissional, que é baseada em uma probabilidade intuitiva de falha de um equipamento – no entanto, sem formalidade e critério de padronização. Com a discussão deste item, espera-se que os estudantes tragam a experiência profissional à tona como modelo comparativo e que revelem como o pensamento probabilístico molda a sua tomada de decisão.

Quadro 7 - Item 1 da Tarefa 1

Item 1. Em uma indústria, dez máquinas idênticas contêm, cada uma, uma unidade do equipamento T. Nos primeiros 45 dias de funcionamento das máquinas, nenhum equipamento T apresentou falha. Entre o 45º e o 60º dias, o equipamento T de três máquinas apresentaram falhas e precisaram ser substituídos. O gerente decidiu então trocar todos os equipamentos T das outras máquinas. Como você avalia a decisão do gerente?

Fonte: autoria própria.

O item 2 (Quadro 8) faz parte da rotina dos trabalhadores, moradores da região do entorno-sul do Distrito Federal, que transitam pela BR-040. É um tema sensível por envolver a violência e os riscos no trânsito. Borovcnik (2016) argumenta que em temas mais sensíveis, as memórias e vivências podem influenciar fortemente na avaliação da previsibilidade de eventos. Assim, essa avaliação pode ser enviesada pelo entendimento de que resultados já conhecidos e vivenciados, principalmente em temas de maior impacto, são mais possíveis ou tem maior probabilidade.

Quadro 8 - Item 2 da Tarefa 1

Item 2. Como você avalia a probabilidade de um motociclista que transita frequentemente na BR-040 se envolver em um acidente? **A:** Muito provável **C:** Improvável **B:** Pouco provável **D:** Impossível

Fonte: autoria própria.

Os itens 3 e 4 (Quadro 9) trazem contextos já bem conhecidos pelos professores nos exercícios de probabilidade. O item 6, adaptado de Borovcnik (2016), traz a possibilidade de avaliar se, no lançamento de uma moeda seis vezes, a ocorrência de mais caras torna esse resultado menos provável do que outro com o resultado mais equilibrado entre caras e coroas. Já no item 7 é possível fazer uma escolha baseada em cálculo de probabilidade por aqueles estudantes que já têm algum conhecimento sobre o tema. Mas também é possível revelar um tipo de pensamento probabilístico influenciado pela quantidade. Assim, um estudante pode ser motivado a escolher a urna B pela maior quantidade de bolinhas azuis disponíveis nela do que na urna A, ainda que em um universo de 100 bolinhas.

Quadro 9 - Itens 3 e 4 da Tarefa 1

Item 3. Você vai participar de um jogo no qual será feito o lançamento de uma moeda seis vezes, anotando o resultado de cada lançamento: se for cara, anota-se A; se for coroa, anota-se O. Para participar, te deram a opção de apostar em uma de duas sequências disponíveis. São elas: **Sequência 1:** A – O – O – A – O – A **Sequência 2:** A – A – A – A – O – A Em qual das duas sequências você apostaria?
Item 4. Em outra etapa do jogo que vai participar você vai retirar uma bolinha de uma urna em que não se pode ver o interior. Se você, em uma única tentativa, retirar uma bolinha azul da urna, você será premiado. No entanto, você deve escolher uma dentre duas urnas disponíveis. Você é informado que elas têm o seguinte conteúdo: **Urna 1:** 20 bolinhas no total, sendo 6 azuis e o restante brancas. **Urna 2:** 100 bolinhas no total, sendo 26 azuis e o restante brancas. Em qual das urnas você escolheria fazer sua retirada?

Fonte: autoria própria.

Os itens 5, 6 e 7 (Quadro 10) foram inspirados no trabalho de Kahneman e Tversky (1979 *apud* Borovcnik, 2016). Para além de revelar como o pensamento probabilístico influencia a tomada de decisão, pretende-se com esses itens, tal qual os autores buscaram analisar em sua pesquisa, compreender como os estudantes se portam na análise de riscos e como a individualidade no sentimento de perda e ganho influenciam esse pensamento probabilístico. Desse modo, a variação dos valores entre perda e ganho, aliado às próprias vivências, pode despertar um debate quanto a diferenciação de percepção sobre a probabilidade.

Quadro 10 - Itens 5, 6 e 7 da Tarefa 1

Item 5. Qual escolha você faria dentre as seguintes opções? **A:** Ganhar R$ 1000,00 de imediato. **B:** Ter 50% de chance de ganhar R$ 2500,00 e 50% de não ganhar nada.
Item 6. Qual escolha você faria dentre as seguintes opções? **C:** Perder R$ 1000,00 de imediato. **D:** Ter 50% de chance de perder R$ 2500,00 e 50% de não perder nada.
Item 7. Qual escolha você faria dentre as seguintes opções? **E:** Perder R$ 1000,00 de imediato. **F:** Ter 50% de chance de perder R$ 1500,00 e 50% de ganhar R$ 1000,00.

Fonte: autoria própria.

A essência da tarefa está na argumentação que justifique a sua escolha, na busca por revelar a natureza dos raciocínios envolvidos e em como os estudantes se relacionam com as grandes ideias identificadas por Gal (2005) no letramento probabilístico. Assim, entende-se que há um nível de abertura para essa argumentação que se encaixa na exploração, atendendo às características apresentadas no Quadro 5.

5.2 TAREFA MATEMÁTICA 2: JOGOS DOS 2 DADOS

O principal objetivo traçado para a seção 2 foi *elaborar uma definição sobre a probabilidade a partir de uma visão frequentista*. A necessidade de alcance desse objetivo se justifica primeiramente por uma congruência com a construção histórica da probabilidade, quando antes mesmo de uma definição clássica, Jacques Bernoulli identifica que a probabilidade de um evento se aproxima a um número determinado pela observação de várias experimentações semelhantes (Coutinho, 2007). Também é uma importante possibilidade de que estudantes aproximem o conhecimento matemático de um fenômeno observável e, às vezes, relacionada a outra área.

Além do objetivo principal, definiu-se como importante para esta seção que os estudantes pudessem: localizar o início do desenvolvimento da probabilidade na história; realizar observações repetidas vezes sobre um fenômeno; registrar dados relativos a esse fenômeno; determinar um valor aproximado para a probabilidade de um evento a partir dos dados registrados; avaliar suas concepções prévias sobre probabilidade.

Nesse sentido, foi selecionada e adaptada uma tarefa a partir do trabalho de Brunehilde, Cordeiro e Oliveira (2018) envolvendo jogos que associam lançamento de dados e operações aritméticas. Sabendo que o lançamento de um dado comum (cubo com faces numeradas de 1 a 6), não viciado, leva a um espaço equiprovável, os quatro jogos a serem propostos devem refletir em diferentes cenários de vantagem para um dos jogadores, baseados na probabilidade de vitória. A construção destes cenários requer a análise de propriedades das operações de adição e subtração e de paridade dos números naturais, contribuindo para o trabalho integrado entre aritmética e probabilidade.

A tarefa se inicia com um pequeno texto sobre a história da probabilidade que relaciona a sua origem e desenvolvimento aos jogos de azar, em especial os que utilizam dados. Mendes (2023) denota a relevância da abordagem de História da Matemática no ensino de Matemática para esclarecer diferentes aspectos da área (formativo, informativo e utilitário), dar significado aos conhecimentos ensinados, estimular o interesse dos estudantes, promover o acesso e a preservação do acervo cultural da Matemática e desmistificar uma visão neutra, a-histórica e a-cultural da Matemática.

Em seguida, passa-se para a leitura, interpretação e compreensão compartilhada das regras dos jogos. Essa etapa é de extrema relevância não somente para a boa atuação nos jogos, mas para a exploração da linguagem e de diferentes gêneros textuais, o desenvolvimento do pensamento lógico e sequencial e a mobilização dos estudantes em contextos também fora do jogo (Luvison; Grando, 2018). As regras de cada um dos quatro jogos são:

- **Jogo 1 –** *Jogo do par ou ímpar aditivo*: joga-se os dois dados. Realiza-se a adição dos resultados obtidos nos dois dados. O primeiro jogador vence se a soma das duas faces obtidas for par e o segundo jogador vence se a soma for ímpar.
- **Jogo 2 –** *Jogo do par ou ímpar multiplicativo*: joga-se os dois dados. Realiza-se a multiplicação dos resultados obtidos nos dois dados. O primeiro jogador vence se o produto das duas faces obtidas for par e o segundo jogador vence se o produto for ímpar.
- **Jogo 3 –** *Jogo dos diferentes*: joga-se os dois dados. O primeiro jogador vence se as faces forem diferentes e o segundo jogador vence se forem iguais.

- **Jogo 4 –** _Jogo do máximo_: joga-se os dois dados. O primeiro jogador vence se a maior face obtida for 1, 2, 3 ou 4 e o segundo jogador se a maior face for 5 ou 6.

Na tarefa, as regras são seguidas da ilustração de um exemplo, mas é importante que os estudantes possam testar para compreender bem essas regras. A partir desta compreensão, convida-se os estudantes a conjecturarem e argumentarem, em seus grupos, sobre a equidade ou não dos jogos no primeiro item. Espera-se um desenvolvimento mais intuitivo de probabilidade de vitória.

O *jogo 1* oferece possibilidades iguais de vitória para os dois jogadores e é esperado que os estudantes conjecturem isso. Já o *jogo 2* oferece maior probabilidade de vitória para o jogador 1 do que para o jogador 2. No entanto, é possível que os estudantes prevejam uma equidade de probabilidade nesse jogo (em uma experiência anterior, essa previsão foi unânime). Isso pode ser ocasionado por uma visão prematura dos espaços e uma interpretação equivocada da paridade dos produtos entre números naturais.

O *jogo 3* também oferece maior probabilidade de vitória para o jogador 1 e é esperado que os estudantes conjecturem isso sem dificuldade, posto que as possibilidades de resultados iguais nos dados são bem menores. Já o *jogo 4* oferece maior probabilidade de vitória para o jogador 2. No entanto, é possível que os estudantes acreditem que o jogador 1 tenha maior probabilidade de vitória uma vez que quatro valores dos dados o favorecem, contra dois valores que favorecem o jogador 2. A associação dessa interpretação com o fato de 5 e 6 serem os maiores valores, sem uma análise mais aprofundada, também pode levar os estudantes a conjecturarem uma equidade na probabilidade de vitória.

Em seguida, no item 2 propõe-se o ato de jogar e de registrar os resultados obtidos em uma certa quantidade de rodadas que possibilite estabelecer avaliações e generalizações. Foi estabelecido, então, o número de 30 lançamentos. É um momento de cautela em que o professor deve circular e acompanhar o desenvolvimento das duplas, certificar-se que compreenderam bem as regras e estão registrando corretamente o jogador vitorioso em cada jogo e em cada rodada. Para contribuir com a sistematização, a tarefa já inclui uma tabela de registro dos jogos (Figura 6).

Figura 6 - Parte do quadro de sistematização dos jogos na tarefa matemática 2

	Jogador 1:			Jogador 2:			
		Resultados		Vencedor do:			
	Rodada	Dado 1	Dado 2	Jogo 1	Jogo 2	Jogo 3	Jogo 4
Exemplo ⟶	1	3	6	Jogador 2	Jogador 1	Jogador 1	Jogador 2
	2						
	3						

Fonte: autoria própria.

No item 3, é solicitado que os estudantes façam o tratamento dos dados da tabela do item anterior, fazendo dois registros: primeiro o registro da frequência de resultados de cada face do dado, para que analisem a possível regularidade em dados não viciados; e, em seguida, o registro da frequência de vitórias de cada jogador em cada jogo (Figura 7), no qual o que se espera é a convergência para a probabilidade de cada jogador, conforme o viés frequentista.

A ideia é proporcionar o desenvolvimento da visão frequentista de probabilidade, a partir da síntese do número de vezes em que cada jogador foi vencedor em cada jogo. Desse modo, levar o estudante a associar a preponderância da vitória de um dos jogadores a um não equilíbrio obtido por algum fator na regra do jogo. Esse segundo registro permite aos estudantes a análise e avaliação de suas respostas no item 1, confirmando ou refutando as conjecturas elaboradas, e fornece uma maneira de representar a probabilidade de vitória de cada jogador.

Figura 7 - Quadros do item 3 da tarefa matemática 2

	Frequência dos resultados dos dados					
	Face 1	Face 2	Face 3	Face 4	Face 5	Face 6
Número de vezes:						

	Frequência de vitórias de cada Jogador	
	Jogador 1:	Jogador 2:
Jogo 1		
Jogo 2		
Jogo 3		
Jogo 4		

Fonte: autoria própria.

O quarto item da tarefa pretende, justamente, instigar esse processo reflexivo, ao propor que os estudantes reavaliem a probabilidade de vitória de cada jogador em cada jogo e busquem uma maneira de representar essa probabilidade. Essa última etapa tem um potencial enorme de exercício da criatividade na busca dessa representação. Os estudantes podem apresentar dificuldade no jogo proposto, mas devem ser encorajados pelo professor a relembrar usos de probabilidade que tenham contactado em suas vivências.

Uma representação possível é frequencial e utiliza a linguagem natural: 13 vitórias em 30 jogadas, por exemplo. É uma interpretação válida e já sinaliza a capacidade de entender a probabilidade numa relação de parte e todo. Mas ainda carece de um processo de matematização. Outra representação possível, e que é a que se objetiva, corresponde à razão entre a frequência de vitórias e o número de experimentos seja na forma fracionária ou decimal: por exemplo, 13/30 ≅ 0,43. Uma outra representação é percentual (43%, por exemplo), podendo envolver diretamente a ideia de razão, anteriormente citada, ou uma ideia de proporcionalidade. Apesar de terem relação entre si, é possível que o estudante faça a representação percentual quase de forma algorítmica, sem estabelecer conexão com uma razão entre frequência de vitórias e quantidade de jogadas.

Uma vez realizada a fase preparatória do planejamento, finalizada com a definição da segunda tarefa matemática (Apêndice C), foi elaborado o respectivo plano de aula. Em particular, no item “Desenvolvimento das tarefas/Fases do Ensino Exploratório”, foram discriminadas as seguintes etapas fundamentadas no Ensino Exploratório: apresentação da tarefa; leitura do texto histórico e das regras dos jogos; resposta ao item 1; resposta ao item 2; resposta ao item 3; resposta ao item 4; seleção/sequenciação; discussão coletiva; sistematização/formalização.

As respectivas ações esperadas de estudantes e professor ao longo da seção foram refletidas a partir das potencialidades e dificuldades descritas anteriormente e podem ser compreendidas no próprio plano de aula apresentado no Apêndice D. A formalização que se espera é a definição de probabilidade no modelo frequencial, tal qual descrito por Lima *et al.* (2006, p. 142): “se repetirmos a experiência n vezes e o evento A ocorreu em j dessas experiências, adotamos (...) $P(A) = j/n$”, onde $P(A)$ representa a probabilidade do evento A ocorrer. Assim, na etapa de sequenciação, o professor deve ordenar as respostas em modo crescente de aproximação com essa definição.

5.3 TAREFA MATEMÁTICA 3: ANALISANDO A CONFIABILIDADE DE COMPONENTES

A seção 3 tem como objetivo principal *definir probabilidade a partir da concepção clássica*. Para isso, é necessário instituir noções como espaço amostral e evento. Na concepção clássica, a probabilidade de ocorrer um evento é calculada pela razão entre o número de casos favoráveis (casos em que o evento ocorre) e o número de casos possíveis (total de casos). Existe uma conexão com a tarefa anterior no sentido de relacionar a probabilidade à ideia da razão citada.

Além disso, associar a definição clássica à definição axiomática é relevante para que se compreenda as propriedades da probabilidade que possibilitam uma leitura mais ampla dos fenômenos. Nesse sentido, Lima *et al.* (2006, p. 141) define probabilidade da seguinte maneira:

> Uma probabilidade é uma função que associa a cada evento A um número $P(A)$, de forma que:
> i) Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$.
> ii) $P(S) = 1$.
> iii) Se A e B são eventos *mutuamente excludentes*, isto é, eventos que não podem ocorrer simultaneamente $A \cap B = \emptyset$) então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Na sua definição, S representa o espaço amostral. Basicamente, o que é esperado dos estudantes é que consigam desenvolver as ideias subjacentes a essa definição e outras derivadas, tais como: que a probabilidade é um número entre 0 e 1 (ou 0% e 100%); que a probabilidade 1 é dada ao espaço amostral todo; que a probabilidade de um evento *A* ou um evento *B* ocorrer, sendo *A* e *B* excludentes, é a soma das probabilidades de *A* e de *B*; e, logo, que a probabilidade de *A* somada à probabilidade de *A* não ocorrer resulta em 1 (complementaridade).

Outros objetivos que se pretende alcançar nesta seção são: elaborar noções de espaço amostral e evento; calcular a probabilidade de um evento a partir da concepção clássica; aplicar o cálculo de probabilidade em um contexto de realidade; desenvolver ideias de complementaridade de eventos e suas implicações no cálculo de probabilidade. Entende-se, também, como oportuno nessa seção associar os conhecimentos probabilísticos aos conhecimentos da formação profissional técnica e do mundo do trabalho.

Nesse sentido, selecionou-se uma tarefa matemática já elaborada anteriormente por este professor-pesquisador sobre o tema *confiabilidade* e já apontada na introdução deste trabalho. Essa tarefa precisou ser modificada para se aproximar dos objetivos de aprendizagem estabelecidos e dos pressupostos de uma tarefa matemática de natureza exploratória/investigativa.

Como material de apoio, foram utilizados Rosa (2016) (dissertação), Nascimento (2016) (monografia), Dias e Leite (1998) (artigo científico) e Rocha (2019) (livro-texto voltado ao Ensino Superior). Esses trabalhos abordavam conhecimentos do cálculo diferencial e integral e de probabilidade de nível superior. Por isso a necessidade, também, de transpor adequadamente os conhecimentos relacionados à temática ao nível de aprendizagem dos estudantes.

O contexto da tarefa foi retirado do trabalho de Dias e Leite (1998) sobre a confiabilidade e taxa de falhas de um certo tipo de lâmpada. Por isso, com a finalidade de chamar a atenção dos estudantes, iniciou-se a tarefa com uma curiosidade relacionada à essa temática: a Lâmpada Centenária, uma lâmpada incandescente criada por Adolphe Chaillet e que está funcionando desde 1901 no quartel de bombeiros da cidade de Livermore, Califórnia, Estados Unidos. É possível, durante a aula, acessar o site que transmite a gravação da lâmpada em tempo real enquanto se faz essa primeira leitura e discussão.

Pretende-se, com isso, iniciar um debate crítico sobre a falha dos equipamentos e componentes que utilizamos no cotidiano. Este exemplo pode impulsionar uma discussão sobre obsolescência programada e perceptiva. Pode-se sugerir aos estudantes assistir ao vídeo *A História das Coisas* (originalmente *The Story of Stuff*)[12]. Definiu-se que esse primeiro momento de leitura e discussão seja realizado coletivamente com a turma toda. Uma vez feita essa primeira discussão, a tarefa encaminha-se para a necessidade de análise de falhas no mundo do trabalho, principalmente em uma profissão vinculada ao eixo tecnológico de controle e processos industriais.

Desse modo, propõe-se a leitura de um trecho da dissertação de Rosa (2016) no qual define *confiabilidade* e elenca os benefícios de sua aplicação nos processos

---

[12] Documentário de 20 minutos lançado em dezembro de 2007, escrito por Annie Leonard, Louis Fox e Jonah Sachs, dirigido por Louis Fox e produzido pela Free Range Studios. A versão dublada em português brasileiro pode ser acessada em: https://youtu.be/JMZNNrhXcW8?si=f0rS3GKR6v8iVkWE. Acessado em: 21 dez. 2025.

produtivos. Nesse momento, o professor deve orientar que os estudantes se dividam em grupos, sugere-se trios, e que iniciem a leitura. É importante estimular nos grupos uma discussão que leve os estudantes a perceberem uma aproximação da ideia de confiabilidade às noções de probabilidade desenvolvidas até então.

Logo após esse trecho, propõe-se o contexto da tarefa, como citado anteriormente. Nesse contexto, é apresentada uma tabela em que Dias e Leite (1998) registraram o tempo de falha de uma amostra de 20 lâmpadas de uma determinada fábrica (Figura 8). No estudo foram consideradas somente as falhas referentes a ruptura de um ou outro filamento da lâmpada. Em seguida, são propostos quatro itens aos grupos.

Figura 8 -Tabela com registro de falhas apresentada na Tarefa Matemática 3

Unidades Falhas	Suspensão	Tempo até a falha (Horas)
01	-	1394
01	-	1394
01	-	1451
01	-	1451
01	-	1470
01	-	1501
01	-	1550
01	-	1591
01	-	1591
01	-	1706
01	-	1750
01	-	1750
01	-	1750
01	-	1773
01	-	1797
01	-	1797
01	-	1888
01	-	1888
01	-	1980
01	-	1980

Fonte: Dias e Leite (1998, p. 2).

O item 1 solicita aos estudantes que: *organizem e sistematizem a frequência absoluta de falhas acumuladas ao longo do tempo (*incluindo a dica: *pode ser oportuno separar o tempo em períodos ou classes)*. Com isso, é demandado dos estudantes a mobilização de seus conhecimentos sobre estatística e tratamento de dados em estudos anteriores, nos conceitos de frequência absoluta, frequência relativa e agrupamento de dados em classes ou intervalos. É dada uma liberdade nessa sistematização, mas existem habilidades específicas esperadas dos estudantes para esse item. A seguir, exemplifica-se uma resposta esperada.

A primeira etapa esperada é a definição do número de classes. Nascimento (2016, p. 33) define um procedimento padrão para essa ação:

- Colocar os dados em ordem crescente;
- Verificar a amplitude total (R), ou seja, a diferença entre o maior valor e o menor valor (9);
$$R = x_{máx} - x_{mín} \qquad (9)$$
- Calcular o número de classes (k) de acordo com o tamanho da amostra (n) (10);
$$k = 1 + 3{,}3 * \log n \qquad (10)$$
- Calcular a amplitude de classe (h) através da razão entre a amplitude total (R) e o número de classes (k) calculado (11);
$$h = \frac{R}{k} \qquad (11)$$

O cálculo sugerido pelo autor para o número de classes é conhecido como Regra de Sturges que, em geral, não é trabalhado no Ensino Médio. Assim, para o item 1, aplicando a regra, o número ideal de classes k será $5{,}3$, arrendado para o número inteiro mais próximo 5. Como a amplitude do tempo até a falha é 586 horas, então cada classe englobaria $117{,}2$ horas. Para trabalhar com valores inteiros, vamos considerar as quatro primeiras classes com amplitude de 117 horas e a última com 118 horas. A tabela 3 representa uma possibilidade de sistematização apresentando todas as informações solicitadas no item 1.

Tabela 3 - Resposta esperada para o item 1 da Tarefa Matemática 3

Intervalos de tempo (horas)	Frequência absoluta da classe	Frequência absoluta acumulada
1394 ⊢ 1511	6	6
1511 ⊢ 1628	3	9
1628 ⊢ 1745	1	10
1745 ⊢ 1862	6	16
1862 ⊢ 1980	4	20

Fonte: autoria própria.

Neste item, os estudantes podem apresentar dificuldade em se lembrar da representação dos dados por agrupamento e que as classes devem ter mesma amplitude. O professor pode indicar que os estudantes se lembrem de exemplos estudados em que os dados são agrupados. Além disso, as possíveis dificuldades com os conceitos como frequência absoluta ou no entendimento do comando do item devem ser sanadas pelo professor.

No item 2, pergunta-se aos grupos *como definiriam a probabilidade de falha de uma lâmpada ao longo do tempo*. É esperado que os estudantes associem a probabilidade de falha à razão entre o número de lâmpadas que apresentaram falhas e o total de lâmpadas. É um momento oportuno para avaliar se os estudantes apreenderam as ideias de incerteza e previsibilidade, pois relaciona-se os dados obtidos por meio de observação a uma necessidade de previsão.

Caso os estudantes apresentem dificuldade na relação temporal com a probabilidade, é importante que o professor faça algumas intervenções. Pode perguntar, por exemplo: “a probabilidade de falha da lâmpada ao passar do tempo permanece a mesma, aumenta ou diminui?”; “passado o tempo compreendido na classe 2, qual a probabilidade de uma lâmpada apresentar falha?”; “passado o tempo compreendido na classe 2, quantas lâmpadas apresentaram falha? Você faria alguma relação entre essa quantidade e a probabilidade de uma lâmpada falhar?”.

Já no item 3, pergunta-se aos grupos *como definiriam a confiabilidade de uma lâmpada em cada período*. Entende-se confiabilidade como “a probabilidade que um item tem de desempenhar adequadamente suas funções, por um determinado tempo e sob condições ambientais predeterminadas” (Rosa, 2016, p. 34). Então, é esperado dos estudantes que associem a ideia de confiabilidade à ideia de probabilidade de a lâmpada não falhar. Caso tenham dificuldades em estabelecer essa conexão, é importante o auxílio do professor.

Para isso, alguns grupos podem já compreender que o evento *lâmpada falhar* e o evento *lâmpada não falhar* são simultaneamente excludentes e complementares e, portanto, que a soma das probabilidades de cada um resulta em 1 ou 100%. Este é o raciocínio que se espera atingir com a proposta do item. Outros grupos podem simplesmente realizar um cálculo parecido ao item 2 para o evento *lâmpada não falhar*, considerando a razão entre o número de lâmpadas que não apresentaram falhas e o número total de lâmpadas.

A Tabela 4 apresenta uma sistematização possível de resposta para os itens 2 e 3, a partir dos dados da Tabela 3.

Tabela 4 - Resposta esperada para os itens 2 e 3 da Tarefa Matemática 3

Intervalos de tempo (horas)	Frequência absoluta acumulada	Probabilidade de falha (Frequência relativa)	Confiabilidade
1394 ⊢ 1511	6	0,3 ou 30%	0,7 ou 70%
1511 ⊢ 1628	9	0,45 ou 45%	0,55 ou 55%
1628 ⊢ 1745	10	0,5 ou 50%	0,5 ou 50%
1745 ⊢ 1862	16	0,8 ou 80%	0,2 ou 20%
1862 ⊢ 1980	20	1 ou 100%	0

Fonte: autoria própria.

O último item, propõe uma reflexão crítica para interpretar e lidar com os dados de probabilidade em uma situação real de trabalho. Assim, questiona-se q*ual poderia ser uma ação tomada por uma empresa que utiliza tais lâmpadas visando a redução de riscos e otimização do tempo de utilização desse componente*. A resposta pode também buscar relacionar os resultados encontrados aos benefícios de aplicação da confiabilidade nos processos, como descrito no trecho de Rosa (2016) apresentado no início da tarefa.

A tarefa finalizada é composta por todos esses elementos e pode ser contemplada no Apêndice F. O desenvolvimento da seção, cujo respectivo plano de aula encontra-se no Apêndice G, contém as seguintes etapas fundamentadas no Ensino Exploratório: apresentação da tarefa; leitura do texto inicial e do contexto; resposta ao item 1; resposta ao item 2; resposta ao item 3; resposta ao item 4; seleção/sequenciação; discussão coletiva; sistematização/formalização.

Na etapa de formalização, o esperado é partir das respostas dos estudantes para elaborar a noção e representação de espaço amostral e evento, a definição axiomática de probabilidade citada anteriormente, propriedades importantes, como a complementaridade, e a definição do modelo clássico de cálculo de probabilidades. Nessa aula, o tempo necessário para essa etapa de sistematização é maior, já que envolve mais conceitos.

5.4 TAREFA MATEMÁTICA 4: ESTUDANDO EVASÃO E ÊXITO NO CURSO DE ELETROTÉCNICA

Nos experimentos aleatórios, nem todos os eventos acontecem de forma isolada, sendo necessário *calcular a probabilidade de ocorrência de dois eventos ou mais*. Assim, esse foi o objetivo principal traçado para a seção 4 desta sequência. Certamente, outras habilidades devem ser construídas para alcançar esse objetivo. Então, de modo mais específico, será necessário cada estudante: determinar espaço amostral e eventos favoráveis de um determinado experimento aleatório ou situação de previsibilidade; calcular a probabilidade de um evento; desenvolver a ideia de probabilidade condicional; avaliar se dois ou mais eventos são independentes ou não.

Lima *et al.* (2006, p.152) definem a probabilidade condicional da seguinte forma: “Dados dois eventos A e B, com $P(A) \neq 0$, a probabilidade condicional de B na certeza de A é o número $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$". Essa definição nos diz que a probabilidade condicional é dada pela razão entre a probabilidade desses dois eventos acontecerem e a probabilidade do evento condição. A partir dessa definição se afirma que $P(A \cap B) = P(A).P(B|A)$, ou seja, a probabilidade de dois eventos acontecerem é calculado pelo produto entre a probabilidade do primeiro evento e a probabilidade do segundo evento sabendo que o primeiro ocorreu. Nos casos em que os dois eventos são independentes, $P(B|A) = P(B)$. Logo, $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

O desenvolvimento dessa estratégia de calcular probabilidades de ocorrer diferentes eventos por meio do produto das probabilidades não é algo simples. Mas isso não impossibilita que o professor promova uma tarefa em que o estudante possa comparar resultados e iniciar processos de justificação que se aproximem das definições citadas. É comum nos livros didáticos exemplificar situações com a probabilidade condicional a partir de tabelas que cruzam dados de diferentes naturezas em uma mesma amostra. Um exemplo pode ser encontrado em Rathie e Zörnig (2012, p. 81):

> 2.5.12. A agência nacional de trânsito forneceu os seguintes dados sobre a ocorrência do veículo X no país:
>
> Probabilidades referentes ao veículo X:
>
> | Transmissão / Modelo | 1.6L | 1.8L | 2.0 | 2.0XL |
> |---|---|---|---|---|
> | Automática | 0,15 | 0,10 | 0,10 | 0,10 |
> | Manual | 0,15 | 0,05 | 0,15 | 0,20 |
>
> Considere os eventos $E_1 =$ {transmissão automática}, $E_2 =$ {modelo 2.0}, $E_3 =$ {modelo 1.6L}. Calcule
> (...) (b) $P(E_1|E_2)$, $P(E_2|E_1)$, $P(E_1|E_3)$ e $P(E_3|\bar{E}_1)$.

Esse é um exercício que já traz uma tabela de probabilidades. Mais comum ainda é a apresentação de uma tabela de frequências absolutas. Com isso, além de desenvolver os conhecimentos probabilísticos solicitados, também é requerida a habilidade de interpretação e tratamento de dados. Para a Tarefa Matemática 4, levou-se em consideração esse tipo de problema, mas também se compreendeu a oportunidade de trazer um contexto que se relacionasse à vivência dos estudantes e que permitisse uma reflexão crítica sobre a realidade.

Assim, elaborou-se a Tarefa Matemática 4 (Apêndice G) com a temática de análise da evasão e êxito do próprio curso em que os estudantes estão com um recorte de gênero. A partir de dados quantitativos fornecidos pela plataforma de gestão acadêmica e administrativa empregada pelo IFG, foi esboçada uma tabela com dados de ingresso e situação de matrícula de todos os estudantes que se vincularam ao curso, incluindo evasões e êxito (conclusão). A realização da tarefa deve se dar em grupos, sugere-se trios.

A partir desses dados, a resolução de uma série de itens é demandada aos estudantes, em duas partes. Na parte 1, quatro itens são propostos com o objetivo de estudar a probabilidade em experiências aleatórias com um ou mais estágios. Esses itens são sequenciados em nível crescente de complexidade e apresentam situações em que surjam a ideia de probabilidade condicional e o cálculo da probabilidade de ocorrência de mais de um evento.

O primeiro item (item a) oferece uma retomada do que foi aprendido até então, possibilitando a aplicação do modelo clássico de probabilidade em uma situação de aleatoriedade. O item: *Suponham que haverá um sorteio de uma vaga de emprego na área do curso dentre todos os concluintes. Para isso, os nomes de todos foram escritos em papéis e colocados dentro de uma urna. Qual a probabilidade de ser sorteada uma mulher?*

Como esperado, os estudantes devem observar que o espaço amostral é formado pelos resultados possíveis no sorteio dos concluintes. Logo, o espaço amostral tem 64 casos possíveis. O evento do qual se quer a probabilidade é o resultado do sorteio ser uma concluinte mulher. Logo, é esperado que os estudantes identifiquem que o número de casos favoráveis é 7. Desse modo, pelo modelo clássico, a probabilidade desse evento ocorrer será dada pela razão $\frac{7}{64}$, que se aproxima do valor $0{,}1094$ ou $10{,}94\%$.

Uma dificuldade que pode acontecer é quanto a aplicação do modelo clássico em situações de diferentes interpretações. Saiu-se uma experiência frequencial na Tarefa Matemática 2. Depois uma Tarefa Matemática 3 com frequências acumuladas ao longo tempo e a relação de probabilidade com uma taxa ou frequência relativa, que pode envolver maior variabilidade e a equiprobabilidade é assumida. Agora propõe-se uma situação de aleatoriedade em que a equiprobabilidade é explícita e a contagem de casos favoráveis e possíveis é mais direto. É necessário que o professor ofereça suporte para que os estudantes percebam a variação de contextos e métodos, mas que isso não dificulte a compreensão da interpretação clássica de probabilidade.

O item “b” apresenta uma continuidade no contexto do item anterior, com o seguinte enunciado: *No caso anterior, qual a probabilidade de ser sorteada uma mulher, sabendo que o(a) sorteado(a) ingressou no curso em 2019 ou 2020?* Na resolução, os estudantes podem manifestar dificuldade em compreender o caráter apriorístico do evento *sortear um estudante que ingressou no curso em 2019 ou 2020*. O professor deve se certificar e orientar para que percebam essa característica do contexto.

Em seguida, o esperado é que percebam que esse caráter apriorístico de alguma maneira restringe o espaço amostral aos estudantes que ingressaram em 2019 ou 2020. Perceber que conhecimento de uma informação prévia sobre o evento modifica a probabilidade representa um grande salto na aprendizagem e, portanto, apresenta um certo grau de complexidade. Nota-se que isso se aproxima de uma concepção subjetiva de probabilidade.

Em casos de dificuldade, o professor pode perguntar “quais são os estudantes possíveis de serem sorteados?”, “quantos são”, “vocês acreditam que uma mulher ingressante em 2015 possa ter sido sorteada?”, “como isso se aplica no cálculo da probabilidade?”. Nesse sentido, a resposta esperada para o item é a razão entre o número de mulheres ingressantes em 2019 ou 2020 e o número de estudantes ingressantes em 2019 ou 2020, chegando ao resultado $\frac{4}{18} = \frac{2}{9}$ ou aproximadamente $0{,}2222$ ou $22{,}22\%$.

Ampliando o contexto para o cálculo de probabilidade de dois eventos (uma experiência aleatória em dois estágios), propõe-se no item (c): *Suponham agora que serão sorteadas duas vagas de estágio apenas dentre os estudantes com matrícula ativa e que ingressaram em 2023. Para isso, serão retirados dois nomes da urna, sucessivamente e sem reposição. Qual a probabilidade de ser sorteada uma mulher no segundo sorteio, sabendo que uma mulher já foi sorteada no primeiro?*

Envolvendo também a ideia de probabilidade condicional, é esperado que os estudantes percebam que o primeiro sorteio de uma mulher modifica o número de casos possíveis e favoráveis para o segundo sorteio de uma mulher. As maneiras de mediar possíveis dificuldades podem ser correlatas ao sugerido no item anterior. Quanto à resposta para esse item: como o número de estudantes ingressantes em 2023 com matrícula ativa é 9, sendo duas delas mulheres, e no primeiro sorteio foi sorteada uma mulher, então a probabilidade requerida é $\frac{1}{8}$ ou $0{,}125$ ou $12{,}5\%$.

O item “d” solicita aos grupos que: n*o caso anterior, determinem a probabilidade de duas mulheres serem sorteadas*. A expectativa é que resolvam esse item utilizando recursos da contagem. Desse modo, o número de casos favoráveis é 2, já que no primeiro sorteio podem ser escolhidas uma estudante mulher ou outra, e o número de casos possíveis é $9\,.\,8 = 72$. Como resultado a probabilidade é de $\frac{2}{72} = \frac{1}{36}$.

É imprescindível em todos os itens, sobretudo no item “d”, que o professor estimule sempre a justificação dos estudantes para as estratégias adotadas. Para tentar estabelecer uma relação os valores encontrados, o professor pode solicitar que os estudantes façam essa avaliação: “qual a relação entre a probabilidade de uma mulher ser sorteada no primeiro sorteio $\left(\frac{2}{9}\right)$, a probabilidade do item (c) $\left(\frac{1}{8}\right)$ e a probabilidade de ser sorteada duas mulheres no item (d) $\left(\frac{2}{72}\right)$?”. É possível que os estudantes percebam que o produto dos dois primeiros resulta no último, o que, num raciocínio indutivo, facilita uma futura generalização.

Em seguida, na parte 2, direciona-se para a estimativa de probabilidades como uma previsão a partir de dados coletados, que pode fomentar políticas de permanência dos estudantes e de incentivo para um ingresso equânime no curso. No primeiro item (item e), pergunta-se *qual a estimativa de probabilidade de qualquer estudante ter êxito no curso* e *qual a estimativa de probabilidade de qualquer estudante evadir do curso*. Nesse contexto, retorna-se para a relação entre probabilidade e frequência relativa como um modo de interpretar dados. Por exemplo, relaciona-se a frequência relativa de estudantes ingressantes que concluíram o curso com a estimativa de probabilidade de êxito de um estudante qualquer no curso.

Rathie e Zörnig (2012, p. 64) atentam para o fato de que frequência relativa e probabilidade são distintos, mas que a frequência pode ser tomada como uma estimativa de probabilidade. Essa diferenciação é importante, mas não exclui o seu vínculo em situações contextuais. Reforça-se os questionamentos dispostos por Gal (2005): quais são os contextos em que os estudantes lidam com informações probabilísticas? Quais ideias são requeridas para que os estudantes leiam criticamente e possam agir na sociedade? O foco exclusivo em situações descontextualizadas auxilia no desenvolvimento de capacidade de interpretação, reflexão e pensamento crítico? Então, é ímpar o professor estar atento às situações em que realmente serão requeridas dos estudantes as interpretações probabilísticas e as tomadas de decisão.

Para responder a esse item, deve-se considerar como espaço amostral o fenômeno *estudantes ingressantes no curso até 2020* (aqueles que tiveram tempo para concluir o curso), sendo o total de estudantes ingressantes até 2020 a quantidade de elementos do espaço amostral. Na primeira pergunta, o evento que se quer analisar é *estudantes que obtiveram êxito*. Observando os dados da tabela fornecida, então a estimativa de probabilidade requerida é dada pela razão $\frac{64}{294} = \frac{32}{147}$ ou aproximadamente $0{,}2177$ ou $21{,}77\%$. Já na segunda pergunta, o evento que se quer analisar é *estudantes que evadiram*. Então, a estimativa de probabilidade é dada pela razão $\frac{197}{294}$ ou aproximadamente $0{,}6701$ ou $67{,}01\%$.

O item “f” tem a intenção de promover um debate sobre a equidade de gênero na área do curso e quebrar possíveis impressões equivocadas sobre a diferenciação entre os gêneros. É possível que os estudantes tenham a crença de que a desistência de mulheres no curso seja maior, motivados por um vínculo entre a área técnica e os papéis socialmente atribuídos aos homens e pelo menor ingresso de mulheres no curso. Assim, é proposto: *considerem uma estudante mulher que tenha acabado de ingressar no curso, qual a probabilidade de ela evadir até o final do curso? E no caso de um estudante homem?*

Nesse item, o espaço amostral continua sendo o anterior. Na primeira pergunta, o evento que se quer avaliar é *estudante mulher evadir do curso*. Nesse caso, a probabilidade será a razão $\frac{27}{40}$ ou $0{,}675$ ou $67{,}5\%$. Na segunda pergunta, o evento é *estudante homem evadir do curso*. A probabilidade estimada para esse evento será a razão $\frac{170}{254}$ ou aproximadamente $0{,}6693$ ou $66{,}93\%$. É de se esperar que os grupos utilizem os resultados alcançados para quebrar visões sexistas sobre a participação de mulheres no curso. Justamente com esse intuito, no item “g”, solicita-se que avaliem os resultados, comparando a suas impressões prévias: *a qual conclusão vocês podem chegar? Você imagina resultados diferente do que encontrou?*

O último item, “h”, representa mais um salto de complexidade e uma continuidade do raciocínio sobre probabilidade de interseção de dois eventos. Traz à tona o cálculo de probabilidade de mais de um evento independentes entre si: *vejam que em 2024/1 ingressaram 5 estudantes mulheres. Qual a probabilidade de todas as 5 estudantes evadirem do curso?* Nesse item, a evasão de cada estudante deve ser vista como um evento independente da evasão das demais. Logo, a probabilidade de evasão das cinco será $\frac{27}{40} \cdot \frac{27}{40} \cdot \frac{27}{40} \cdot \frac{27}{40} \cdot \frac{27}{40} = \left(\frac{27}{40}\right)^5 \cong 0{,}1401$ ou $14{,}01\%$.

Os grupos podem ter dificuldade de associar os conhecimentos sistematizados na parte 1 com esse item, por não enxergarem como cinco eventos distintos. Então, o professor pode perguntar: “qual o evento que vai ser analisado?”; “esse evento possuiu estágios ou etapas? Quais?”; “A probabilidade de evasão de uma estudante, de uma maneira objetiva, interfere na probabilidade de evasão de outra estudante?”; “como foi calculada a probabilidade de eventos em estágios distintos anteriormente?”.

Definida a tarefa matemática a ser trabalhada, assinalando suas potencialidades e limitações, encerrou-se a fase preparatória do planejamento e passou-se para a construção do plano de aula, abarcando as informações discutidas. Nessa seção, foi identificada a necessidade de promover dois momentos de discussão e sistematização ao final de cada uma das duas etapas, justificada pela complexidade da tarefa e pela variação de olhares sobre o seu contexto.

Após o desenvolvimento da parte 1 da tarefa, segue-se para uma primeira discussão coletiva e sistematização, com a finalidade de formalizar a definição de probabilidade condicional a partir das construções dos estudantes. Em seguida, a partir de suas observações no item (d) e da definição de probabilidade condicional, generalizar e teorizar a probabilidade da interseção de dois eventos. Essa etapa é fundamental para já dar sustentação a formação desses conceitos e relacioná-los com a linguagem matemática. E, após o desenvolvimento da parte 2, uma nova rodada de discussões será promovida para levantamento de questões críticas relativas às repostas obtidas e às concepções prévias dos estudantes sobre o contexto trabalhado. Seguindo para a formalização do cálculo da probabilidade de eventos independentes.

Desse modo, desenvolvimento da seção, cujo respectivo plano de aula encontra-se no apêndice I, contém as seguintes etapas fundamentadas no Ensino Exploratório: apresentação da tarefa; resposta aos itens da parte 1; seleção/sequenciação; discussão coletiva da parte 1; sistematização/formalização da parte 1; resposta aos itens da parte 2; seleção/sequenciação; discussão coletiva da parte 2; sistematização/formalização da parte 2.

Ao final desta seção, também é interessante fazer um apanhado geral das grandes ideias discutidas e os diferentes contextos de interpretação e aplicação de probabilidade em toda a sequência.

5.5 TAREFA MATEMÁTICA 5: UMA RETOMADA AO JOGO DOS 2 DADOS

Como dito anteriormente, a seção 5 será voltada para a retomada dos conhecimentos sistematizados durante a sequência didática e a complementação do processo avaliativo. Compreendendo a avaliação como o conjunto de ações para se obter informações sobre o que foi assimilado pelos estudantes, não há como não dizer que em todos os momentos da sequência didática o ato de avaliar é contínuo. Ato que pressupõe descrever e qualificar a realidade com base em dados relevantes e em comparação com critérios levantados para a qualidade desejada (Luckési, 2011).

Desse modo, pretende-se lançar mão de uma tarefa matemática a ser utilizada como instrumento de coleta de dados para a avaliação, isto é, como recurso “que empregamos para captar informações sobre o desempenho do educando, que são a base da descrição do seu desempenho” (Luckési, 2011, p. 299). Nesse sentido, um instrumento adequado de coleta de dados para a avaliação possui alinhamento com as finalidades educacionais traçadas, não exibe desvio de conteúdos ou do nível de complexidade em que foram apresentados, deve seguir às mesmas perspectivas metodológicas adotadas no processo de ensino e é elaborado com precisão, sistematicidade e cuidado com o que é essencial, auxiliando o estudante no aprofundamento de seus conhecimentos e habilidades (Luckési, 2011).

Assim, na seção 5 o objetivo principal é *sintetizar os conhecimentos e habilidades relacionados à definição e representação do espaço amostral e de eventos de um experimento aleatório, ao cálculo de probabilidade de um ou mais eventos e à probabilidade condicional*. Pelos princípios apontados por Luckési (2011), decidiu-se pela retomada dos *Jogos dos 2 dados* na Tarefa Matemática 5, porém exigindo uma leitura desse experimento a partir da interpretação clássica de probabilidade, ampliando a reflexão sobre os jogos.

Apesar da intenção de estudantes mobilizarem conhecimentos que já foram estudados nas seções anteriores, compreende-se que a tarefa apresenta um caráter desafiador, pois se trata de adaptar as diferentes estratégias na análise de um contexto de jogo. Seguem os itens elaborados e as respectivas respostas esperadas e análise das possíveis dificuldades.

Item 1. Considerando a experiência aleatória de lançar dois dados sucessivamente, determine o seu espaço amostral, ou seja, todos os resultados possíveis. Qual a quantidade total? Quanto mais sistematizada e ordenada for a representação do espaço amostral, mais objetiva será a análise das questões posteriores. Uma dúvida comum nesse tipo de situação é definir se os resultados (3,1) e (1,3) devem ser contabilizados com um só ou não. O professor deve ficar atento para auxiliar os estudantes na compreensão de que, por serem dados distintos ou lançamentos distintos, esses resultados são também distintos. Uma possibilidade de resposta em filas, como a seguir:

$$
\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (2,1) & (3,1) & (4,1) & (5,1) & (6,1) \\
(1,2) & (2,2) & (3,2) & (4,2) & (5,2) & (6,2) \\
(1,3) & (2,3) & (3,3) & (4,3) & (5,3) & (6,3) \\
(1,4) & (2,4) & (3,4) & (4,4) & (5,4) & (6,4) \\
(1,5) & (2,5) & (3,5) & (4,5) & (5,5) & (6,5) \\
(1,6) & (2,6) & (3,6) & (4,6) & (5,6) & (6,6)
\end{array}
$$

Outra possibilidade seria listar como elementos de um conjunto: $\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),\cdots,(6,4),(6,5),(6,6)\}$. Assim, a quantidade de elementos do espaço amostral é 36.

Item 2: Para cada um dos jogos, conte quantos resultados possíveis dá a vitória ao jogador 1 e quantos dá a vitória ao jogador 2. A resolução deste item demanda mais reflexão sobre as regras do jogo para avaliar quais resultados de lançamento dá vitória a cada jogador. Alguns estudantes podem utilizar estratégias relacionadas à análise combinatória (arranjo, princípio multiplicativo, princípio aditivo) para resolver, outros identificando os casos favoráveis na lista do espaço amostral. A resposta para esse item deve ter como resultados:

- Jogo 1: jogador 1 vence em 18 resultados; jogador 2 vence em 18 resultados.
- Jogo 2: jogador 1 vence em 27 resultados; jogador 2 vence em 9 resultados.
- Jogo 3: jogador 1 vence em 30 resultados; jogador 2 vence em 6 resultados.

- Jogo 4: jogador 1 vence em 16 resultados; jogador 2 vence em 20 resultados.

Item 3. Sabendo disso, como vocês definiriam a probabilidade de vitória de cada jogador em cada jogo? Espera-se que os estudantes consigam empregar o modelo clássico de probabilidade, identificando o número de casos favoráveis como o número de resultados que dá a vitória ao jogador X no jogo Y. Em caso de dificuldades, é importante verificar se a origem está na não compreensão da aplicação desse modelo, isto é, na não identificação da razão entre caso favoráveis e possíveis. Considerando $J1$ como o evento jogador 1 ganhar e $J2$ o evento jogador 2 ganhar, a resposta esperada para esse item é:

- Jogo 1: $P(J1) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} = 0{,}5\ ou\ 50\%$; $P(J2) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} = 0{,}5\ ou\ 50\%$.
- Jogo 2: $P(J1) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4} = 0{,}75\ ou\ 75\%$; $P(J2) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0{,}25\ ou\ 25\%$..
- Jogo 3: $P(J1) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6} \cong 0{,}83\ ou\ 83\%$; $P(J2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \cong 0{,}17\ ou\ 17\%$..
- Jogo 4: $P(J1) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9} = 0{,}445\ ou\ 44{,}5\%$; $P(J2) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} = 0{,}555\ ou\ 55{,}5\%$..

Item 4. Qual a probabilidade de o jogador 1 vencer o jogo 2 e o resultado de algum dos dados lançados ser ímpar? Esse item envolve a ocorrência de dois eventos: A = {jogador 1 vencer o jogo 2}; B = {pelo menos um resultado ímpar no lançamento}. Um recurso de resposta, e mais provável, será a partir da contagem de casos na lista do espaço amostral no item 1. Nessa estratégia, em 18 resultados há um resultado ímpar no lançamento e a vitória é do jogador 1 no jogo 2. Desse modo, a probabilidade seria dada pela razão $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. Outra possibilidade se dá por meio da expressão que utiliza a probabilidade condicional: $P(A \cap B) = P(A|B)\,.\,P(B)$. Como $P(B) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$ e $P(A|B) = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$, então $P(A \cap B) = \frac{3}{4}\,.\,\frac{2}{3} = \frac{1}{2}$.

Esse item pode auxiliar o professor a identificar uma possível dificuldade em compreender as relações possíveis entre dois eventos não excludentes. Além disso, pode acontecer de os estudantes apresentarem confusão na diferenciação entre a probabilidade condicional e a probabilidade da interseção entre dois eventos, caso em que o estudante não note que o espaço amostral deve permanecer o mesmo nesse item.

Item 5. Lembrem-se que para uma mesma jogada, vocês analisavam quem ganhava em cada um dos quatro jogos. Em uma determinada jogada sabe-se que o jogador 2 venceu o jogo 4. Qual a probabilidade de ele também ter vencido o jogo 3? Identificando os eventos C = {jogador 2 vencer jogo 3} e D = {jogador 2 vencer o jogo 4}, há duas possibilidades esperadas de resposta. A primeira envolve a identificação no número de casos favoráveis ao evento D (20), seguida da identificação, dentro dos casos favoráveis a D, do número de casos favoráveis a C (2). Assim, a probabilidade solicitada é dada por $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$. Caso um estudante não compreenda essa restrição que a condição atribui ao espaço amostral, é possível que ele calcule a probabilidade como $\frac{2}{36}$, por exemplo. Ou ainda, que ele insira todos os casos favoráveis ao evento C (6), resultando em $\frac{6}{20}$ ou até em $\frac{6}{36}$.

Outra estratégia que pode ser utilizada, mas menos provável, e por meio da definição matemática de probabilidade condicional por meio da expressão: $P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)}$ ou $\frac{n(C \cap D)}{n(D)}$. Uma dificuldade possível é na identificação do evento condição, o que poderia levar o estudante a calcular $P(D|C)$.

Item 6. Dois jogadores vão realizar três rodadas de lançamento de dados. Qual a probabilidade do jogador 1 vencer no jogo 2 nas duas primeiras rodadas, mas perder na terceira? O que é esperado e pode ser uma dificuldade dos estudantes é a compreensão de que há três eventos distintos indicados por esse item, sendo eles independentes. Uma dica pode ser fornecida pelo professor para que eles percebam essa identificação. Nesse sentido, podemos representar cada evento da seguinte forma: F = {jogador 1 vence jogo 2 na primeira rodada}; G = {jogador 1 vence jogo 2 na segunda rodada}; H = {jogador 1 perde jogo 2 na terceira rodada}. Como os eventos são independentes, então $P(F \cap G \cap H) = P(F)\,.P(G)\,.P(H) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{64}$.

Mesmo se tratando de um componente do processo avaliativo e do desfecho da sequência didática proposta, a seção 5 também foi planejado a partir dos princípios do Ensino Exploratório. Isso se deve primeiramente aos aspectos de congruência que a avaliação deve ter com todo o processo de ensino, conforme apontado por Luckési (2011). Também por compreender que essa abordagem didática se alinha aos objetivos da avaliação quando

> [...] o professor organiza situações de aprendizagem, em torno de tarefas matemáticas desafiantes, buscando o raciocínio e a comunicação dos alunos, e dessa forma faz emergir o conhecimento matemático nos processos de negociação de significado (Menezes; Oliveira; Canavarro, 2015, p. 5807-5808)

Assim, o plano de aula referente à seção 5, disponível no Apêndice J, contém uma organização do processo de ensino e aprendizagem também inspirados nas etapas de motivação/apresentação da tarefa, desenvolvimento da tarefa, discussão e sistematização das aprendizagens. No entanto, por já ser uma tarefa exploratória após a exposição de conteúdos, essas etapas tendem a ficar mais orgânicas.

Com essa finalização, espera-se institucionalizar os conceitos, propriedades, ideias e procedimentos relacionados à temática de probabilidade.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ato de planejar é essencial para a efetividade do processo de ensino. Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2015) reforçam a importância da reflexão prévia sobre diversos aspectos a se ter atenção nas aulas, para que o professor tenha maior capacidade de lidar com situações imprevistas, conferindo-lhe confiança. Esta necessidade é potencializada quando se trabalha com uma área tão desafiadora quanto a probabilidade. Uma área estudada dentro da Matemática, mas que oferece uma gama de possibilidades de questionar o status determinístico sobre o qual tradicionalmente se fundamenta o seu ensino.

Retomo a partir daqui o emprego da primeira pessoa para discorrer sobre algumas considerações frente à pesquisa que se propôs realizar. Ao me propor o desafio de realizar um trabalho sobre o ensino de probabilidade, eu já imaginava que encontraria diversas dificuldades. Mas a grata surpresa se deu ao perceber que, além de aprofundar mais meus conhecimentos sobre a área, as características próprias dela convergiriam de tal maneira com algumas concepções prévias sobre o ensino de Matemática que, para mim, deveria servir para questionar e atuar na realidade e desmistificar o conhecimento matemático como algo acabado, neutro e inacessível.

Um dos objetivos que tracei para esta pesquisa foi *sintetizar algumas teorias sobre probabilidade e ensino de probabilidade*. O estudo sobre a evolução histórica da probabilidade e da diversidade de interpretações cabíveis a ela, desenvolvido no capítulo 3, apresentou elementos fundamentais para o entendimento de quais probabilidades se deve falar no processo de ensino e aprendizagem. A origem histórica da probabilidade na humanidade relacionada à reflexão sobre os jogos de azar fundamentou a escolha da temática abordada nas Tarefas Matemáticas 2 e 5, configurando em uma aproximação dos problemas que alicerçaram a construção da área aos problemas que conduzem ao desenvolvimento dos conhecimentos probabilísticos dos estudantes.

A tomada de consciência sobre as diferentes interpretações sobre a probabilidade também subsidiou a minha intencionalidade de variação das abordagens temáticas nas aulas planejadas. Assim, é possível notar características das visões frequencial, clássica, axiomática, intuitiva e subjetiva ao longo da sequência didática. Além disso, as tarefas matemáticas elaboradas/adaptadas carregam um grande potencial de propiciar o letramento probabilístico dos estudantes.

Observando as características propostas por Gal (2005) para o letramento probabilístico, ao longo da sequência foram requeridas: reflexões sobre as grandes ideias relacionadas à probabilidade (acaso, variabilidade, aleatoriedade, previsibilidade, incerteza, independência); diferentes maneiras de estimar ou calcular probabilidades; o uso de linguagem adequada para expressão e comunicação; a variação de contextos e das implicações das informações probabilísticas para sua análise; reflexão sobre questões críticas e possibilidades de atuação na sociedade.

Mas para a promoção do letramento probabilístico também foi importante assumir uma postura que confronte o paradigma do exercício e a adotar uma abordagem didática que concedesse sustentação para a atividade investigativa dos estudantes. É por isso que o Ensino Exploratório como pano de fundo para todo o planejamento se fez fundamental.

Desta forma, o segundo objetivo que persegui foi *identificar os tipos de tarefas matemáticas e alguns elementos do Ensino Exploratório, em especial planejamento e antecipação*. No Capítulo 4 deste trabalho, sintetizei o que foi construído na revisão bibliográfica sobre esse tema. Com isso, a partir das ideias, principalmente de Canavarro (2011), buscou-se organizar o processo de ensino com foco no desenvolvimento do raciocínio criativo, colaborativo e cada vez mais autônomo dos estudantes na construção dos conhecimentos matemáticos, buscando o diálogo como elemento fundante.

Assim, todos esses estudos fundamentaram o alcance do terceiro objetivo deste trabalho: *sistematizar planos de aulas integrados em uma sequência didática, seguido da interpretação de suas potencialidades e riscos para professores e estudantes de um curso técnico em eletrotécnica integrado ao Ensino Médio na modalidade da EJA*. Juntamente com a elaboração das tarefas matemáticas, com base em Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2015), foi realizado o planejamento aprofundado das seções que compuseram a sequência didática. Os planos de aulas e as tarefas são apresentados como apêndices desta dissertação e a descrição de todo o processo de sua elaboração consta no Capítulo 5.

A escolha de um público para o direcionamento das tarefas matemáticas foi imprescindível para a atenção à linguagem utilizada e os tipos de contextos a serem abordados. De modo geral, as tarefas elaboradas atenderam aos aspectos apresentados por Rossa e Estevam (2022) e sintetizados no Quadro 4.

Destaco o fato de as tarefas apresentarem contextos variados e significativos, pois articulam-se com a formação profissional técnica, com a realidade do curso que frequentam ou com aspectos que integram ludicidade e aleatoriedade. Isso, aliado ao fato de as tarefas manterem a exigência cognitiva dos estudantes a partir de raciocínios de determinada complexidade, mas compatíveis com o público, desperta o interesse dos estudantes e a efetivação de sua atividade de forma autônoma.

Assim, considero que foi alcançado o objetivo principal desta pesquisa de *construir uma sequência didática para o ensino de probabilidade de acordo com o Ensino Exploratório, voltada para um curso técnico em eletrotécnica integrado ao Ensino Médio na modalidade da EJA.* Uma sequência que respeita as concepções e saberes prévios dos estudantes jovens e adultos, busca contextualizar o ensino de probabilidade à realidade do curso e da área de formação profissional técnica e relacionar os conhecimentos matemáticos estudados na Educação Básica aos aspectos históricos que fizeram parte de seu desenvolvimento.

Curiosamente, o que aponta para o seu potencial é também o seu desafio e maior risco. Se lidar com o acaso, com o aleatório, afasta as aulas de Matemática do conhecimento determinístico e potencializa o desenvolvimento do raciocínio, o grau de complexidade inerente a situações que envolvem essas ideias também pode trazer grandes dificuldades para os estudantes e para o professor na mediação do processo. O mais cômodo seria, então, fechar os olhos para isso e me limitar a um ensino de probabilidade que, como problematiza Gal (2005), em geral utiliza exercícios simples, curtos, descontextualizados porque seu nível de dificuldade pode ser fácil de manipular.

De modo parecido, o Ensino Exploratório me proporcionou olhar para os estudantes através de uma lupa, esmiuçando as suas ações, prevendo as suas dificuldades. Isso levantou aspectos que me dão melhores condições de enfrentar os desafios citados anteriormente. Todavia, exigiu um esforço, um tempo de preparação, de adequação, que também me tira da zona de conforto. Olhando para minha experiência, avalio os riscos de os estudantes apresentarem dificuldades em se adaptar ao contexto mais autônomo e dialógico que o Ensino Exploratório promove.

Na modalidade da EJA, os estudantes já passaram por um extenso e penoso processo de escolarização, marcado pela simples repetição. Destarte, há uma recorrência de questionamentos direcionados ao professor que fornecem indícios disso, tais como: “o que o senhor quer que eu faça?”, ou “o senhor pode fazer um exemplo primeiro?”, ou “o senhor não ensinou assim”. Sendo também um curso de formação profissional técnica, é marcante ainda o seu caráter tecnicista, de uma concepção de trabalho e de formação a partir da domesticação e da docilização: este é um contexto que atenua os riscos de os estudantes resistirem a uma mudança.

Nos resta, enquanto educadores compromissados com uma agenda de transformação na Educação Matemática, conhecer, aceitar e assumir tais riscos, e nos preparar o máximo possível para enfrentá-los de forma positiva. É isso que o Ensino Exploratório também proporciona ao professor.

Para esta pesquisa, como caminhos futuros, pretende-se fazer a aplicação da sequência didática em contexto real para certificar e identificar as suas potencialidades e limitações. Além disso, orienta-se para a necessária ampliação de pesquisas sobre os impactos do Ensino Exploratório no ensino de probabilidade, as contribuições do Ensino Exploratório para a EJA e as possibilidades pedagógicas na EJA voltadas ao letramento probabilístico.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, B. S.; CANAVARRO, A. P. Desenvolvimento do pensamento algébrico de jovens crianças: potencialidades da exploração de padrões, no contexto do Ensino Exploratório da Matemática. **Debates em Educação**, v. 10, n. 22, p. 247. 2018. Disponível em: https://www.seer.ufal.br/index.php/debateseducacao/article/view/5437. Acessado em: 10 dez. 2024.

ANDRADE, J. M.; SARAIVA, M. J. Múltiplas representações: um contributo para aaprendizagem do conceito de função. **Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa**, v. 15, n. 2, p. 137-169, jul. 2012. Disponível em: https://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v15n2/v15n2a2.pdf. Acessado em: 10 dez. 2024.

ANTONIJEVIĆ, R. Cognitive Activities in Solving Mathematical Tasks: The role of a Cognitive Obstacle. **Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education**, v. 12, n. 9, p. 2503-2515, 2016. Disponível em: https://www.ejmste.com/download/cognitive-activities-in-solving-mathematical-tasks-the-role-of-a-cognitive-obstacle-4614.pdf. Acessado em: 23 abr. 2023.

ARAMAN, E.; SERRAZINA, M. de L.; PONTE, J. P. “Eu perguntei se o cinco não tem metade”: ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 21, n. 2, p. 466-490, 2019. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/42505. Acessado em: 20 set. 2024.

ARAMAN, E. M. de O.; SARRAZINA, M. de L.; PONTE, J. P. Raciocínio matemático nos primeiros anos: ações de duas professoras ao discutir tarefas com seus estudantes. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 34, n. 67, p. 441-461, 2020. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/MkXMBRtxsbRdw5YNrQQ8Ngs/abstract/?lang=pt. Acessado em: 10 dez. 2024.

ARAMAN, E. M. de O.; SERRAZINA, M. de L. Como cozer pãezinhos: processos de raciocínio matemático e ações do professor na discussão coletiva de uma tarefa exploratória no 3.º ano. **VIDYA**, Santa Maria (RS), v. 40, n. 2, p. 147-165, jul./dez. 2020. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/3325. Acessado em: 10 dez. 2024.

ARAMAN, E.; TREVISAN, A. L.; PAULA, B. A. de. Raciocínio matemático apoiado por tarefas exploratórias e ações de professores. **Alexandria**, Florianópolis (SC), v. 15, n. 1, p. 357-375, 2022. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/82926. Acessado em: 10 dez. 2024.

ARAMAN, E. M. de O.; CÔRREA, L. do N.; BARROS, K. L. G. de; SERRAZINA, M. de L. “Quando nós tiramos 1, temos que pôr 1...”: ações que apoiam o raciocínio matemático desempenhadas por uma professora ao discutir uma tarefa de adição. **Educ. Matem. Pesq.,** São Paulo, v. 25, n. 1, p. 99-121, 2023. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/59255. Acessado em: 10 dez. 2024.

ASSIS, A.; FRADE, C.; GODINO, J. D. Influência dos padrões de interação didática no desenvolvimento da aprendizagem Matemática: análise de uma atividade exploratório-investigativa sobre sequências. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 27, n 47, p.733-758, 2013. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/tNcJzqMZjKTLGDxg6TjLBPC/?lang=pt. Acessado em: 23 abr. 2023.

ASSIS, A.; GODINO, J. D.; FRADE, C. As dimensões normativa e metanormativa em um contexto de aulas exploratório-investigativas. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa - RELIME**, v.15, n. 2, p.171-198, 2012.Disponível em: https://www.redalyc.org/journal/335/33523165003/html/. Acessado em: 10 dez. 2024.

AVELAR, L. M. de. **"Eu não sou tarefeira!"** Tarefas de articulação didática para a organização histórico-crítica do ensino de Biologia com a Educação de Jovens e Adultos. 2023. 429f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2023.

BATANERO, C. Significados de la probabilidade en la educación secundaria. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa - RELIME**, v. 8, n. 3, 2005. p. 247-263. Disponível em: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2096616.pdf. Acessado em: 10 dez. 2024.

BATANERO, C.; FERNANDES, J. A.; GARCÍA, J. M. C. Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas. **Suma, revista sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas**, v. 62, nov. 2009, p. 11-18. Disponível em: https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/suma.pdf. Acessado em: 10 dez. 2024.

BATANERO, C.; DÍAZ, C. The meaning and understanding of mathematics: the aase of probability. *In*: FRANÇOIS, K.; VAN BENDEGEM, J. P. **Philosophical Dimensions in Mathematics Education**. Springer: New York, 2007. p. 107-128. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/226100855_The_Meaning_and_Understanding_of_Mathematics. Acessado em: 10 dez. 2024.

BATANERO, C.; ÁLVAREZ-ARROYO, R. Teaching and learning of probability. **ZDM – Mathematics Education**, v. 56, n. 1, 2024, p. 5-17. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-023-01511-5. Acessado em: 10 dez. 2024.

BATANERO, C.; CHERNOFF, E. J.; ENGEL, J.; LEE, H. S.; SANCHEZ, E. **Research on Teaching and Learning Probability**. Springer: 2016.

BASTOS, A. B. B. I. A técnica de grupos-operativos à luz de Pichon-Rivière e Henri Wallon. **Psicólogo inFormação**. São Paulo, v. 14, n. 14, p. 160-169, out. 2010. Disponível em: https://pepsic.bvsalud.org/pdf/psicoinfo/v14n14/v14n14a10.pdf. Acessado em: 23 set. 2024.

BELLHOUSE, D. R. De Vetula: a Medieval Manuscript Containing Probability Calculations. **International Statistical Review**, v. 68, n. 2, p. 123-136, 2000. Disponível em: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1751-5823.2000.tb00317.x. Acessado em: 10 dez. 2024.

BERISHA, V.; BYTYQI, R. Types of mathematical tasks used in secondary classroom instruction**. International Journal of Evaluation and Research in Education**. v. 9. n. 3. p. 751-758, set. 2020. Disponível em: https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1274716.pdf. Acessado em: 20 set. 2024.

BORBA, B. T.; FREITAS, M. T. M. Práticas de ensino e aprendizagem de matemática e tecnologia: um olhar para as especificidades da educação de jovens e adultos (EJA). **BoEM**, Joinville (SC), v. 6, n 11, p. 241-261, 2018. Disponível em: https://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/11753. Acessado em: 21 dez. 2024.

BORBA, M.; SKOVSMOSE, O. A ideologia da certeza em Educação Matemática. *In:* SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática Crítica**: a questão da democracia. Campinas, SP: Papirus, 2001.

BOROVCNIK, M. Mutual Influence between Different Views of Probability and Statistical Inference. **Revista Paradigma**, v. 42, n. (extra) 1, mar. 2021, p. 221-256.

BOROVCNIK, M. Probabilistic thinking and probability literacy in the context of risk. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 18, n. 3, 2016, p. 1491-1516. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/31495. Acessado em: 20 set. 2024.

BRANDELERO, D. S.; ESTEVAM, E. J. G. Reflexões compartilhadas em uma investigação sobre a própria prática: trajetória de aprendizagem de uma professora envolvendo Ensino Exploratório de estatística. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 25, n. 1, p.479-507, 2023. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/58091. Acessado em: 20 set. 2024.

BRASIL, Instituto Federal de Goiás – IFG. **Projeto Pedagógico do Curso Técnico Integrado ao Ensino Médio em Eletrotécnica na modalidade da Educação de Jovens e Adultos**. Jan. 2023. Disponível em: http://cursos.ifg.edu.br/info/tecint-eja/eja-eletrotecnica/CP-VAL. Acessado em: 10 dez. 2024.

BRASIL, Instituto Federal de Goiás – IFG. **Sistema Unificado de Administração Pública**. Disponível em: https://suap.ifg.edu.br/. Acessado em: 29 dez. 2024.

BRASIL, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Relatório Brasil no Pisa 2018**. Brasília, DF: Inep, 2020. Disponível em: https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/avaliacoes_e_exames_da_educacao_basica/relatorio_brasil_no_pisa_2018.pdf. Acessado em: 23 abr. 2023.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental – Matemática. Brasília, DF: MEC/Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental – Matemática. Brasília, DF: MEC/Secretaria de Ensino Fundamental, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio: ciências da Natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, DF: MEC; SEMTEC, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acessado em: 23 abr. 2023.

BRUNEHILDE, B., CORDEIRO, N. J., OLIVEIRA, F. R. **Jogando com Probabilidade e Estatística**. Rio de Janeiro: SBM, 2018.

BRYANT, P.; NUNES, T. **Children's understanding of probability**: a literature review. Londres: Nuffield Foundation, 2012. Disponível em: https://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/NUFFIELD_FOUNDATION_CUoP_SUMMARY_REPORT.pdf. Acessado em: 22 set. 2024.

CAMPOS, A. F. M.; CAETANO, L. M. D.; LAUS-GOMES, V. Revisão sistemática de literatura em Educação: características, estrutura e possibilidades às pesquisas qualitativas. **Revista Linguagem, Educação e Sociedade - LES**, Teresina (PI), v. 27, n. 54, mai./ago. 2023. Disponível em: https://periodicos.ufpi.br/index.php/lingedusoc/article/view/2702/3710. Acessado em: 15 jun. 2023.

CANAVARRO, A. P. Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios. **Educação e Matemática**, Lisboa, Portugal, n. 115, p. 11-17, 2011. Disponível em: https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/4265/1/APCanavarro%202011%20EM115%20pp11-17%20Ensino%20Explorat%C3%B3rio.pdf. Acessado em: 20 jun. 2023.

CASTANHO, P. de C. G. O momento da tarefa no grupo: aspectos psicanalíticos e psicossociais. **Revista da SPAGESP**, v. 8, n. 2, p. 13-22, jul./dez. 2007. Disponível em: https://pepsic.bvsalud.org/pdf/rspagesp/v8n2/v8n2a03.pdf. Acessadoe em: 10 dez. 2024.

CHRISTIANSEN, B.; WALTHER, G. Task and activity. *In:* CHRISTIANSEN, B.; HOWSON, A. G.; OTTE, M. **Perspectives on Mathematics Education**. Dordrecht: D. Reidel, 1986. p. 243-307.

CORRÊA, M. W. **O conhecimento profissional e a abordagem do ensino da probabilidade**: um estudo de caso. 2010. 155 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

COUTINHO, C. de Q. e S. Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta? **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 2, n. 1, p. 50-67, 2007. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/129. Acessado em: 22 set. 2024.

DAVID, F. N. **Games, Gods and Gambling**. New York: Hafner Publishing Company, 1962.

DEMO, P. **Pesquisa**: princípio científico e educativo. 10. ed. São Paulo: Cortez, 2003.

DEMO, P. Politicidade da Matemática. **Rev. Int. de Pesq. em Didática das Ciências e Matemática (RevIn)**, Itapetininga (SP), v. 1, p. 1-19, 2020. Disponível em: https://periodicoscientificos.itp.ifsp.edu.br/index.php/revin/article/view/163. Acessado em: 10 dez. 2024.

DIAS, J. A. A.; LEITE, M. S. A. Uma aplicação de confiabilidade na indústria de lâmpadas elétricas. In: Encontro Nacional de Engenharia de Produção, 18, 1998, Niterói. **Anais [...]**, Niterói, RJ: ABEPRO, 1998. Disponível em: https://abepro.org.br/biblioteca/ENEGEP1998_ART128.pdf. Acessado em: 19 dez. 2024.

DÖRR, R. C.; PINA NEVES, R. da S.; RIBEIRO, A. J. Tarefas Matemáticas na Formação Continuada de Professores: Investigando a construção e o Desenvolvimento de uma Tarefa Exploratória. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 16, n. 42, p. 1-27, ago. 2023. Disponível em: https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/18819. Acessado em: 10 de. 2024.

ELIAS, H. R. et al. Tarefas exploratórias para o ensino de potenciação: manifestações do pensamento algébrico a partir de uma Investigação Baseada em Design. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 16, n. 42, 2023. Disponível em: https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/17912. Acessado em: 10 de. 2024.

ESTEVAM, E. J. G.; CYRINO, M. C. de C. T.; OLIVEIRA, H. M. Medidas de Tendência Central e o Ensino Exploratório de Estatística. **Perspectivas da Educação Matemática – UFMS**, v. 8, n. 17, 2015. Disponível em: https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/835. Acessado em: 30 set. 2024.

FABRIS, F. A noção de tarefa, pré-tarefa e trabalho na teoria de E. Pichon-Rivière. **Cad. Psicol. Soc. Trab.**, São Paulo, v. 17, n. spe. 1, p. 111-117, 2014. Disponível em: https://pepsic.bvsalud.org/pdf/cpst/v17nspe/a12v17nspe.pdf. Acessado em: 23 set. 2024.

FERNANDES, F. S.; MIARKA, R. Educar pela probabilidade: um ensaio sobre possíveis educabilidades junto aos pensamentos de Nietzsche e Deleuze. **Quadrante**, v. 24, n. 1, p. 81-102, 2015. Disponível em: https://quadrante.apm.pt/article/view/22914. Acessado em: 22 set. 2024.

FERREIRA, M. C.; RIBEIRO, A. J.; PONTE, J. P. Prática profissional de professores dos anos iniciais e o pensamento algébrico: contribuições a partir de uma formação continuada. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 23, n. 1, p.171-200, 2021. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/49720. Acessado em: 10 dez. 2024.

FOUCAULT, M. **Vigiar e punir**: nascimento da prisão. Trad. Raquel Ramalhete. Petrópolis, RJ: Vozes, 1987.

FREIRE, P. **Pedagogia da esperança**: um reencontro com a pedagogia do oprimido. São Paulo: Paz e Terra, 2011a.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 2011b.

FREIRE, P. **A importância do ato de ler**: em três artigos que se completam. 51. ed. São Paulo: Cortez, 2011c.

GAL, I. Adults' Statistical Literacy: Meanings, components, responsibilities. **International Statistical Review***,* v. 70, n. 1, p. 1-25, 2002. Disponível em: https://iase-web.org/documents/intstatreview/02.Gal.pdf. Acessado em: 21 dez. 2024.

GAL, I. Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. *In*: JONES, G. A. (org.). **Exploring probability in school**: Challenges for teaching and learning. New York: Springer, 2005. p. 39-63.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2014.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; CAÑIZARES, M. J. **Azar y probabilidad**. Madrid, España: Síntesis Editorial, 1996.

GOMES, H. M. G.; SOUZA, A. C. de. O letramento probabilístico nos documentos curriculares de Brasil, Argentina, Colômbia e México: uma análise comparada. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro (SP), v. 38, p. 1-15, 2024. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/ZHLFvrsW4W7NdmNTMjM7r9B/. Acessado em: 23 abr. 2023.

GRAÇA, S. I.; PONTE, J. P. da; GUERREIRO, A. Quando As Frações Não São Apenas Partes de Um Todo…! **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v. 23, n. 1, p. 683-712, 2021. Disponível em:

https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/51571. Acessado em: 10 dez. 2024.

GREER, B.; MUKHOPADHYAY, S. Teaching and learning the mathematization of uncertainty: historical, cultural, social and political contexts. *In:* JONES, G. A. **Exploring Probability in School**: Challenges for Teaching and Learning. New York: Springer, 2005. p. 297-324.

GREGÓRIO, M.; OLIVEIRA, H. As justificações matemáticas de estudantes do 5.º ano na validação de uma conjetura no estudo da igualdade de triângulos. **BoEM**, Joinville (SC), v. 6, n. 12, p. 21-40, 2019. Disponível em: https://revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/13852. Acessado em: 21 dez. 2024.

HOUAISS, A. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Ed. Objetiva, 2001.

HUIZINGA, J. **Homo Ludens**: o jogo como elemento da cultura. 5. ed., 3. reimpressão. São Paulo: Perspectiva, 2007.

IMBERNÓN, F. **Formação docente e profissional**: formar-se para a mudança e a incerteza. 9. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

KENDALL, M. G. Studies in the History of Probability and Statistics: II. The Beginnings of a Probability Calculus. **Biometrika**, v. 43, n. 1/2, p. 1-14, 1956. Disponível em: https://www.medicine.mcgill.ca/epidemiology/hanley/bios601/Likelihood/Kendall1961OnDanielBernoulliML.pdf. Acessado em: 23 set. 2024.

LAMONATO, M.; PASSOS, C. L. B. Siga os exemplos dos estudantes: aprendizagens em aulas exploratório-investigativas no 4o. ano do Ensino Fundamental. **Revista Eletrônica de Educação**, São Carlos (SP), v. 6, n. 1, p.243-265, 2012. Disponível em: https://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/406. Acessado em: 23 abr. 2023.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**: volume 2. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, E. T. de. **Raciocínios combinatório e probabilístico na EJA:** investigando relações. 2018. 141f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

LIMA, T. C. S.; MIOTO, R. C. T. Procedimentos metodológicos na construção do conhecimento científico: a pesquisa bibliográfica. **Revista Katálysis**, Florianópolis (SC), v. 10, n. esp., p. 37-45, 2007. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rk/a/HSF5Ns7dkTNjQVpRyvhc8RR/?format=pdf&lang=pt. Acessado em: 10 dez. 2024.

LOUREIRO, C. Geometria em coletivo - contributos para a sua compreensão. **VIDYA**, Santa Maria (RS), v. 35, n. 2, p. 55-74, jul./dez. 2015. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/601. Acessado em: 30 set. 2024.

MACHADO, B. E. C.; LACERDA, A. G. Comunicação matemática em uma tarefa exploratória- investigativa: uma proposta mediante a taxa de metabolismo basal. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 11, n. 4, p.1-21, 2020. Disponível em: https://ojs.ufgd.edu.br/index.php/tangram/article/download/12237/8284. Acessado em: 21 dez. 2024.

LOPES, C. E. O ensino da estatística e da probabilidade na Educação Básica e a formação dos professores. **Caderno Cedes**, Campinas (SP), vol. 28, n. 74, p. 57-73, jan./abr. 2008. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ccedes/a/gwfKW9py5dMccvmbqyPP8bk/. Acessado em: 23 set. 2024.

LUCKÉSI, C. C. **Avaliação da aprendizagem:** componente do ato pedagógico. São Paulo: Cortez, 2011.

LUVISON, C. da C.; GRANDO, R. C. **Leitura e escrita nas aulas de Matemática**: jogos e gêneros textuais. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2018.

MACHADO, L. F. F. **Um panorama das publicações sobre a abordagem do Ensino Exploratório na Educação Básica**. 2023. Trabalho apresentado ao 27º Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, Vitória, ES, 2023.

MACIEL, E. M. G. de S.; TELLES, F. S. P. Ensaio sobre a relação epistemológica entre probabilidade e método científico. **Cad. Saúde Pública**, v. 16, n. 2, 2000, p. 487-497. Disponível em: https://www.scielo.br/j/csp/a/Rwjqv9BYxFwmVLPf6sGRFVS/. Acessado em: 21 set. 2024.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. da. Promover o raciocínio matemático dos estudantes: uma investigação baseada em design. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro (SP), v. 32, n. 62, p. 781-801, 2018. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/JbLWRnZGLJmBYCNYRm4P76J/abstract/?lang=pt. Acessado em: 23 abr. 2023.

MELO, D. H. F. de. **Karl Popper e o problema da probabilidade**. 2015. 114 f. Dissertação (Mestrado em Filosofia) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2015.

MENDES, I. A. História da Matemática para uma renovação didática nas aulas de Matemática. *In:* MENDES, I. A. (org.). **A história como um agente de cognição na Educação Matemática**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2023.

MENEZES, L.; OLIVEIRA, H.; CANAVARRO, A. P. Descrevendo as práticas de ensino exploratório da matemática: o caso da professora Fernanda. 2013. Congreso

Iberoamericano de Educación Matemática, 7., 2013, Montevideo. **Anais [...]**. Montevideo, Uruguai: Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática, 2013, p. 5806-5814. Disponível em: https://repositorio.ipv.pt/entities/publication/f03a96a7-64b4-4685-a16e-f0c1c55378a3. Acessado em: 23 set. 2024.

MESCOUTO, J. B.; LUCENA, I. C. R. de; BARBOSA, E. Tarefas exploratório-investigativas de ensino-aprendizagem-avaliação para o desenvolvimento do pensamento algébrico. **Educação Matemática Debate**, v. 5, n. 11, p. 1-22, 2021. Disponível em: https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/3880. Acessado em: 10 dez. 2024.

MORAIS, R. da S. de; ARAMAN, E. M. de O.; TREVISAN, A. L. Raciocínio matemático e argumentação emtarefas de geometria plana nos anos iniciais. **VIDYA**, Santa Maria (RS), v. 42, n. 2, p. 101-119, jul./dez. 2022. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/4235. Acessado em: 30 set. 2024.

NASCIMENTO, F. S. do. **Aplicação de Engenharia da Confiabilidade na modelagem matemática estatística para previsão de consumo de energia elétrica de uma fábrica**. 2016. 65f. Monografia (Especialização em Engenharia da Confiabilidade) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2016.

OLIVEIRA, H.; MENEZES, L.; CANAVARRO, A. P. Conceptualizando o Ensino Exploratório da matemática: contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. **Quadrante**, v. 22, n. 2, p. 29-53, 2013. Disponível em: https://quadrante.apm.pt/article/view/22895. Acessado em: 22 set. 2024.

OLIVEIRA, V. S. D. de; BASNIAK, M. I. O planejamento de aulas assentes no Ensino Exploratório de Matemática desenvolvidas no ensino remoto de emergência. **Educação Matemática Debate**, v. 5, n. 11, p.1-26, 2021. Disponível em: https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/3774. Acessado em: 10 dez. 2024.

PAULA, B. B.; MARTINS, C. B.; OLIVEIRA, T. Análise da crescente influência da Cultura Maker na Educação: Revisão Sistemática da Literatura no Brasil. **Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico**, Manaus (AM), v.7, e134921, 2021. Disponível em: https://sistemascmc.ifam.edu.br/educitec/index.php/educitec/article/view/1349. Acessado em: 21 dez. 2023.

PAULA, F. V. de; SOUSA JUNIOR, P. M. de. Exploração da probabilidade geométrica na sala de aula com o Geogebra. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, Florianópolis (SC), v. 17, p. 1-22, jan./dez. 2022. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/90509. Acessado em: 10 dez. 2024.

PONTE, J. P. da. Gestão curricular em Matemática. In: PONTE, J. P. da; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, J.; BRANCO, N. **Investigações matemáticas e investigações na prática profissional**. São Paulo: Livraria da Física, 2017a. p. 103-142.

PONTE, J. P. da. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: PONTE, J. P. da; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, J.; BRANCO, N. **Investigações matemáticas e investigações na prática profissional**. São Paulo: Livraria da Física, 2017b. p. 193-212.

PONTE, J. P. da; QUARESMA, M.; BRANCO, N. Tarefas de exploração e investigação na aula de Matemática. *In*: PONTE, J. P. da; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, J.; BRANCO, N. **Investigações matemáticas e investigações na prática profissional**. São Paulo: Livraria da Física, 2017. p. 213-252.

PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M. Ações do professor na condução de discussões matemáticas. **Quadrante**, Lisboa (Portugal), v. 22, n. 2, p. 55-81, 2013. Disponível em: https://quadrante.apm.pt/article/download/22894/16960/88255. Acessado em: 22 set. 2024.

PONTE, J. P. da; QUARESMA, M. Representações e processos de raciocínio na comparação e ordenação de números racionais numa Abordagem Exploratória. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 28, n. 50, p. 1464-1484, 2014. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/gtn5MQ8fSP79DbXXt5DsPpg/abstract/?lang=pt. Acessado em: 22 set. 2024.

PONTE, J. P. da; QUARESMA, M. As discussões matemáticas na aula exploratória como vertente da prática profissional do professor. **Revista da Faculdade de Educação** (Universidade do Estado de Mato Grosso), v. 23, n. 1, p.131-150, 2015. Disponível em: https://periodicos.unemat.br/index.php/ppgedu/article/view/1092. Acessado em: 22 set. 2024.

PONTE, J. P. da; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, J. É mesmo necessário fazer planos de aula? **Educação e Matemática**, Lisboa (Portugal), n. 133, p. 26-35, 2015. Disponível em: https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/2292. Acessado em: 22 set. 2024.

POWELL, A. B.; BORGE, I. C.; FIORITI, G. I.; KOUBLANOVA, M.; KOUBLANOVA, E.; SUKTHANKAR, N. Challenging Tasks and Mathematics Learning. *In:* BARBEAU, E. J.; TAYLOR, P. J. **Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom.** The 16th ICMI Study. Springer, 2009. p. 133-170. Disponível em: https://link.springer.com/book/10.1007/978-0-387-09603-2. Acessado em: 23 abr. 2023.

RAMOS, A.; FARIA, P. M.; FARIA, A. Revisão Sistemática de Literatura: contributo para a inovação na investigação em Ciências da Educação. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 14, n. 41, p. 17-36, jan./abr. 2014. Disponível em: http://educa.fcc.org.br/pdf/de/v14n41/v14n41a02.pdf. Acessado em: 12 dez. 2024.

RATHIE, P. N.; ZÖRNIG, P. **Teoria da probabilidade**. Brasília, DF: Editora UnB, 2012.

RICHIT, A.; TOMKELSKI, M. L.; RICHIT, A. Compreensões sobre perímetro e área mobilizadas a partir da abordagem exploratória em um estudo de aula. **Acta Scientiae**, Canoas (RS), v. 23, n, 5, p. 1-36, ago./set. 2021. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/355792399_Compreensoes_sobre_perimetro_e_area_mobilizadas_a_partir_da_abordagem_exploratoria_em_um_estudo_de_aula. Acessado em: 10 dez. 2024.

ROCHA, H. M. **Confiabilidade**: volume único. Rio de Janeiro: Fundação Cecierj, 2019.

ROSA, R. N. da. **Aplicação da Manutenção Centrada em Confiabilidade em um processo da indústria automobilística**. 2016. 102f. Dissertação (Mestrado Profissional em Engenharia de Produção) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

ROSSA, E. P. de O.; ESTEVAM, E. J. G. Caracterizando tarefas matemáticas de natureza exploratória. **Revista Insignare Scientia**. v. 5. n. 5. p. 286-300, ago./dez. 2022. Disponível em: https://periodicos.uffs.edu.br/index.php/RIS/article/view/13285. Acessado em: 23 abr. 2023.

SÁENS CASTRO, C. **Materiales para la enseñanza de la teoría de probabilidades: propuesta de un modelo teórico**. Madrid, España: Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, 1999.

SANTOS, S.; RODRIGUES, M. O Desenvolvimento da Flexibilidade do Cálculo Multiplicativo em Estudantes do 3.° Ano. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 33, n. 64, p.542-567, 2019. Disponível em: https://www.redalyc.org/jatsRepo/2912/291265268007/291265268007.pdf. Acessado em: 23 abr. 2023.

SERRAZINA, L. Aprender Matemática com compreensão: raciocínio matemático e Ensino Exploratório. **Em Teia** - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v. 12, n. 3, 2021. Disponível em: https://periodicos.ufpe.br/revistas/index.php/emteia/article/view/250302. Acessado em: 10 dez. 2024.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Bolema – Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro (SP), v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10635. Acessado em: 23 abr. 2023.

SKOVSMOSE, O. **Um convite à Educação Matemática Crítica**. Campinas, SP: Papirus, 2014.

STEIN, M. K.; ENGLE, R. A.; SMITH, M.; HUGHES, E. K. Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. **Mathematical Thinking and Learning**, i. 10, p. 313-340, 2008. Disponível em: https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10986060802229675. Acessado em: 20 set. 2024.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S. Tarefas matemáticas como quadro para reflexão: Da investigação à prática. **Educação e Matemática**. Lisboa, Portugal, n. 105, p. 22-28, nov./dez. 2009. Disponível em: https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1809. Acessado em: 22 set. 2024.

SULLIVAN, P.; CLARKE, D.; CLARKE, B.; O'SHEA, H. Exploring the relationship between task, teacher actions, and student learning. **PNA Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática**. v. 4. n. 4. p. 133-142. jun. 2010. Disponível em: https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/6163. Acessado em: 20 set. 2024.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. 17. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2014.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais**: a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Atlas, 2013.

VIALI, L. Algumas considerações sobre a origem da Teoria da Probabilidade. **RBHM**, v. 8, n. 16, p. 143-153, 2008. Disponível em: https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/177. Acessado em: 22 set. 2024.

YEO, J. B. W. Development of a Framework to Characterise the Openness of Mathematical Tasks. **International Journal of Science and Mathematics Education.** v. 15. p. 175-191. 2017. Disponível em: https://eric.ed.gov/?id=EJ1123389. Acessado em: 10 ago. 2023.

ZABALA, A. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre, RS: Artmed, 1998.

ZEICHNER, K. M. Para além da divisão entre professor-pesquisador e pesquisador acadêmico *In*: GERALDI, C. M. G.; FIORENTINI, D.; PEREIRA, E. M. de A. **Cartografias do trabalho docente**: professor(a)-pesquisador(a). Campinas, SP: Mercado de Letras, 2007. p. 207-236.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Tarefa Matemática 1

Tarefa 1: Como você lida com a incerteza e com o acaso?

Sabe quando você precisa sair de casa para o trabalho e logo pensa “preciso levar o guarda-chuva, porque estou achando que hoje vai chover”? Ou quando já está se aproximando do final do Campeonato Brasileiro e você está avaliando quais os resultados que espera nas próximas rodadas para que seu time se classifique para a Copa Libertadores ou não seja rebaixado?

Todas essas situações envolvem a incerteza sobre situações futuras, a necessidade de fazer uma previsão sobre o que pode acontecer em contextos de acaso. Você pode até não perceber, mas está utilizando um tipo de raciocínio matemático quando tenta lidar com isso e planejar estratégias de enfrentamento, tomadas de decisão. Nas próximas aulas, é com esse tipo de situação que iremos trabalhar para construir os conhecimentos relacionados a uma área chamada ***probabilidade***.

Mas antes disso, gostaria de conhecer o que você já sabe sobre probabilidade e como você lida com situações que envolve o acaso no seu cotidiano. Mas que isso, que propor que você avalie uma diversidade de situações para que você mesmo conheça o modo como você lida com a probabilidade. Então, reflita e responda aos itens a seguir.

Item 1. Em uma indústria, dez máquinas idênticas contêm, cada uma, uma unidade do equipamento T. Nos primeiros 45 dias de funcionamento das máquinas, nenhum equipamento T apresentou falha. Entre o 45º e o 60º dias, o equipamento T de três máquinas apresentaram falhas e precisaram ser substituídos. O gerente decidiu então trocar todos os equipamentos T das outras máquinas. Como você avalia a decisão do gerente?

Resposta: ____

Justificativa: ____

Item 2. Como você avalia a probabilidade de um motociclista que transita frequentemente na BR-040 se envolver em um acidente?

A: Muito provável | C: Improvável
B: Pouco provável | D: Impossível

Resposta:

Justificativa:

Item 3. Você vai participar de um jogo no qual será feito o lançamento de uma moeda seis vezes, anotando o resultado de cada lançamento: se for cara, anota-se A; se for coroa, anota-se O. Para participar, te deram a opção de apostar em uma de duas sequências disponíveis. São elas:

Sequência 1: A – O – O – A – O – A

Sequência 2: A – A – A – A – O – A

Em qual das duas sequências você apostaria?

Resposta:

Justificativa:

Item 4. Em outra etapa do jogo que vai participar você vai retirar uma bolinha de uma urna em que não se pode ver o interior. Se você, em uma única tentativa, retirar uma bolinha azul da urna, você será premiado. No entanto, você deve escolher uma dentre duas urnas disponíveis. Você é informado que elas têm o seguinte conteúdo:

Urna 1: 20 bolinhas no total, sendo 6 azuis e o restante brancas.

Urna 2: 100 bolinhas no total, sendo 26 azuis e o restante brancas.

Em qual das urnas você escolheria fazer sua retirada?

Resposta: ____________________

Justificativa: ____________________

Nos próximos itens, você será desafiado a analisar o seu perfil em situações de risco e como você lida com perdas e ganhos. A justificativa da sua resposta é bem importante para essa reflexão. Imagine que você está em um contexto onde você é obrigado a fazer uma escolha dentre duas que lhe são fornecidas.

Item 5. Qual escolha você faria dentre as seguintes opções?

A: Ganhar R$ 1000,00 de imediato.

B: Ter 50% de chance de ganhar R$ 2500,00 e 50% de não ganhar nada.

Resposta: ____________________

Justificativa: ____________________

Item 6. Qual escolha você faria dentre as seguintes opções?

C: Perder R$ 1000,00 de imediato.

D: Ter 50% de chance de perder R$ 2500,00 e 50% de não perder nada.

Resposta:

Justificativa:

Item 7. Qual escolha você faria dentre as seguintes opções?

E: Perder R$ 1000,00 de imediato.

F: Ter 50% de chance de perder R$ 1500,00 e 50% de ganhar R$ 1000,00.

Resposta:

Justificativa:

APÊNDICE B – Plano de aula da seção 1

Plano da aula 01

Curso: Técnico Integrado em Eletrotécnica na Modalidade da EJA
Período: 3º Ano
Disciplina: Matemática
Temática: Noções intuitivas sobre acaso, risco, aleatoriedade, probabilidade

Pré-requisitos de conhecimento matemático

Porcentagem; números racionais.

Objetivos educacionais

- Localizar acaso e incerteza em situações cotidianas;
- Associar tomada de decisão com as noções intuitivas de acaso, incerteza, risco, probabilidade;
- Avaliar situações em que há a influência de acaso, risco, probabilidade;
- Elaborar argumentações sobre tomadas de decisão nas situações dadas;
- Refletir sobre os fatores que levaram à tomada de decisão, dentre conhecimentos matemáticos e características individuais.

Materiais necessários

Tarefa 1 (em anexo) impressa para cada estudantes; materiais de escrita (lápis, caneta, borracha); computador; projetor; aparelho com câmera.

Abordagem didática

Ensino Exploratório.

Descrição metodológica

Desenvolvimento da aula – Ensino Exploratório			
Desenvolvimento das tarefas/Fases do Ensino Exploratório	**Duração esperada**	**Ações esperadas dos estudantes e possíveis dificuldades enfrentadas**	**Respostas do(a) professor(a) e aspectos a ter atenção**
Fase 1: Motivação/ Apresentação da Tarefa Matemática	10 min	Apresentação da dinâmica da aula e da importância da realização e discussão da tarefa. Solicitar que se dividam em grupos de três estudantes.	Tirar as dúvidas sobre a dinâmica da aula. Organizar a turma em grupos de três pessoas.
		Entregar as tarefas aos estudantes e fazer uma leitura prévia coletiva, sem fornecer, no entanto,	Questionar como deve ser dada a resposta, como é o “jeito correto” de escrever.

		nenhuma possível interpretação para as questões.	
		Ressaltar que os estudantes devem responder a partir de suas percepções e não na busca de uma resposta esperada pelo professor.	
Fase 2: Desenvolvimento do Tarefa Matemática	30 min	Explicar em caso de dúvidas em qualquer das tarefas.	Ler e interpretar cada tarefa;
		Monitorar as discussões, identificando quais razões foram citadas para ajudar os estudantes na construção da argumentação.	Tomar decisões baseadas em seus conhecimentos prévios e debater as razões de suas escolhas.
		Dar direcionamento ao processo de argumentação a partir de perguntas tais como: “por que escolheu essa resposta?”; “o que deu base para essa escolha?”; “quais as necessidades que lhe deram motivação para essa escolha?”; “quais as consequências possíveis para cada escolha possível?”	Elaborar as argumentações para as suas respostas.
		Encorajar os estudantes a elaborarem suas argumentações, reforçando a validade de seus conhecimentos para o processo educativo.	Pode ser que os estudantes enfrentem dificuldades na organização de suas respostas. É importante que entendam que o professor está dando autonomia para os modos de organização da argumentação dada e que o objetivo é ser o mais claro possível.
		Identificação das respostas do tipo de argumentação utilizada pelos estudantes. Registrar no quadro de acompanhamento (em anexo) as respostas dadas e a natureza das argumentações (quais os aspectos da vivência utilizados; qual o nível de matematização). Nos itens 2, 3 e 4 já identificar se foram mais demonstraram comportamento mais arriscado ou mais conservador. No item 5, se houve o resgate à memória de situações conhecidas ou vivenciadas. Nos itens 6 e 7, qual o nível de formalização de ideias matemática apresentado.	
Fase 3: Seleção e sequenciação	Ao longo da Fase 2 + 5 min	Por se tratar de uma tarefa em que os conhecimentos intuitivos devem ser debatidos, compreende-se que as respostas de todos os grupos devem ser confrontadas. A sequenciação deve ser realizada a partir das respostas dadas e pelo nível crescente de utilização de noções mais matematizadas e	--

		formais de probabilidade. Colocar todas as respostas lado a lado, item por item, projetados no quadro (essa etapa pode ser dispensada se o professor preferir que seja apenas lido).	
Fase 4: Socialização e discussão da Tarefa Matemática	35 min	A socialização e discussão será realizada item por item. É importante criar um ambiente de respeito e colaboração para que os estudantes se sintam à vontade para compartilhar as suas produções sem receio de julgamento. Em cada item, pedir para que o respectivo grupo leia resposta e a explique, se necessário.	Identificar raciocínios de natureza próxima (com escolhas de respostas iguais ou diferentes) e raciocínios diferentes, buscando entender o porquê das diferenças. Buscar um veredito se há uma resposta mais vantajosa ou não, principalmente nos itens 6 e 7.
Fase 5: Formalização/ Sistematização das aprendizagens	10 min	Sistematizar as noções principais comuns nos itens analisados: o acaso, a aleatoriedade, a incerteza, a imprevisibilidade, o risco, a probabilidade. Buscar caracterizar cada uma a partir das respostas dos estudantes.	Identificar as noções principais comuns nos itens analisados: o acaso, a aleatoriedade, a incerteza, a imprevisibilidade, o risco, a probabilidade. Perceber a relação entre essas noções e a sua tomada de decisão. Perceber como a leitura sobre situações de risco e incerteza tem viés subjetivo. Reconhecer que os conhecimentos matemáticos sobre probabilidade podem contribuir para a sua relação com o risco e a incerteza.

Avaliação

Análise das produções dos estudantes na Tarefa 1 e dos diálogos realizados.

Referências bibliográficas para a elaboração da tarefa

BOROVCNIK, M. Probabilistic thinking and probability literacy in the context of risk. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 18, n. 3, 2016, p. 1491-1516.

APÊNDICE C – Tarefa Matemática 2

Tarefa 02: Jogos dos 2 dados[1]

Nossa tarefa será jogar e pensar sobre quatro jogos que envolvem sorte. Para isso, formem duplas. Em seguida, façam a leitura e respondam o que se pede.

Por dentro da história... Há uma convergência entre historiadores matemáticos de que as primeiras manifestações do uso do pensamento probabilístico pela humanidade tenham sido por meio dos jogos de azar. O primeiro artefato usado para esse fim que se tem registro é o astrágalo, um osso de um animal, provavelmente um carneiro, utilizado como uma espécie de dado desde 3500 a.C.. Devido a isso, é considerado o primeiro agente de aleatoriedade na história humana, tendo sido utilizado por babilônios, egípcios e romanos. Desde então, com o aperfeiçoamento desse artefato, surgiram os dados, que foram amplamente empregados em jogos de azar, mas cuja adoção também envolvia ideias de adivinhação, presságio e comunicação com as divindades (David, 1962)[2].

Figura 1: Exemplo de astrágalo romano

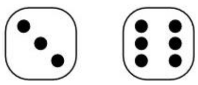
Fonte: https://br.pinterest.com/pin/491666484314348485/

Então, muito do que se produziu no campo hoje delimitado pela Probabilidade se deve justamente à relação do ser humano com os jogos em seus aspectos de azar, incerteza, aleatoriedade e tentativa de previsibilidade. Muitos pensadores e matemáticos desenvolveram seus escritos a partir de jogos como esses, prevendo o equilíbrio de chances, tais como: Wibold de Cambrai (séc. X), Richard de Fournival (1201-1260), Luca di Borgo (1445 – 1517), Tartaglia (Niccolo Fontana, 1499 – 1557), Girolamo Cardano (1501 – 1576), Giovan Francesco Peveroni (séc. XVI), Blaise Pascal (1623 – 1662), Pierre de Fermat (1607 – 1665), entre outros.

Os jogos (não especificamente de azar) e a ludicidade estão presentes nas relações dos seres humanos desde a sua existência (Huizinga, 2007)[3]. Atualmente, há uma diversidade de jogos nos quais a sorte é um fator de preponderância, e quando não envolve processos de escolhas às cegas (como no embaralhamento de cartas e sua distribuição), envolve algum agente de aleatoriedade, como os dados.

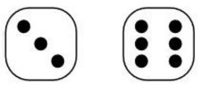
Tendo como base essa relação histórica, trabalharemos nesta tarefa com jogos envolvendo dados. Serão com quatro jogos distintos simultâneos, mas com regras bem próximas, com a participação de dois jogadores. Como em qualquer jogo em que o nosso objetivo é buscar pelas melhores estratégias para vencer, nosso objetivo principal nesta tarefa será analisar as possibilidades de vitória. As regras são simples e têm como base uma operação ou comparação entre os valores obtidos após o lançamento de dois dados. Vamos aos jogos.

(Jogo 1) *<u>Jogo do par ou ímpar aditivo</u>*: Joga-se os dois dados. Realiza-se a adição dos resultados obtidos nos dois dados. O primeiro jogador vence se a soma das duas faces obtidas for par e o segundo jogador vence se a soma for ímpar.



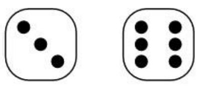
$\longrightarrow 3 + 6 = 9 \longrightarrow 9 \text{ é } \textit{ímpar} \longrightarrow \textit{Vence jogador } 2$

(Jogo 2) *<u>Jogo do par ou ímpar multiplicativo</u>*: Joga-se os dois dados. Realiza-se a multiplicação dos resultados obtidos nos dois dados. O primeiro jogador vence se o produto das duas faces obtidas for par e o segundo jogador vence se o produto for ímpar.



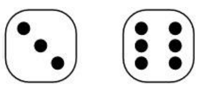
$\longrightarrow 3 \times 6 = 18 \longrightarrow 18 \text{ é } \textit{par} \longrightarrow \textit{Vence jogador } 1$

(Jogo 3) *<u>Jogo dos diferentes</u>*: Joga-se os dois dados. O primeiro jogador vence se as faces forem diferentes e o segundo jogador vence se forem iguais.



$\longrightarrow 3 \neq 6 \longrightarrow \textit{Faces diferentes} \longrightarrow \textit{Vence jogador } 1$

(Jogo 4) *<u>Jogo do máximo</u>*: Joga-se os dois dados. O primeiro jogador vence se a maior face obtida for 1, 2, 3 ou 4 e o segundo jogador se a maior face for 5 ou 6.



$\longrightarrow 3 < 6 \longrightarrow \textit{Maior face é } 6 \longrightarrow \textit{Vence jogador } 2$

Notas:

[1] Adaptado de BRUNEHILDE, B., CORDEIRO, N. J., OLIVEIRA, F. R. *Jogando com Probabilidade e Estatística*. Rio de Janeiro: SBM, 2018.

[2] DAVID, F. N. *Games, Gods and Gambling*. New York: Hafner Publishing Company, 1962.

[3] HUIZINGA, J. *Homo Ludens*: o jogo como elemento da cultura. 5. ed., 3. reimpressão. São Paulo: Perspectiva, 2007.

Parte 1: Analisando apenas as regras de cada jogo, vocês avaliam que algum dos jogadores tem mais chances de vitória do que o outro ou eles terão as mesmas chances de vitória? Marque abaixo a sua resposta e justifique.

	Quem tem mais chances de vitória?		
Jogo 1	( ) Chances iguais	( ) 1º jogador	( ) 2º jogador

Justificativa:

Jogo 2	( ) Chances iguais	( ) 1º jogador	( ) 2º jogador

Justificativa:

Jogo 3	( ) Chances iguais	( ) 1º jogador	( ) 2º jogador

Justificativa:

Jogo 4	( ) Chances iguais	( ) 1º jogador	( ) 2º jogador

Justificativa:

Parte 2: Vamos jogar? Escolham quem será o jogador 1 e quem será o jogador 2. Em cada rodada, vocês farão o lançamento dos dois dados registrando os valores na tabela, na coluna de resultados. Em seguida, para um mesmo lançamento de dados, vocês preencherão o nome do vencedor nas colunas de cada jogo.

Jogador 1: **Jogador 2:**

		Rodada	Resultados		Vencedor do:			
		Rodada	Dado 1	Dado 2	**Jogo 1**	**Jogo 2**	**Jogo 3**	**Jogo 4**
Exemplo →		1	3	6	Jogador 2	Jogador 1	Jogador 1	Jogador 2
		2						
		3						
		4						
		5						
		6						
		7						
		8						
		9						
		10						
		11						
		12						
		13						
		14						
		15						
		16						
		17						
		18						
		19						
		20						
		21						
		22						
		23						
		24						
		25						
		26						
		27						
		28						
		29						
		30						

Parte 3: Agora registrem a síntese de todas as informações obtidas nos jogos.

	Frequência dos resultados dos dados					
	Face 1	Face 2	Face 3	Face 4	Face 5	Face 6
Número de vezes:						

	Frequência de vitórias de cada Jogador	
	Jogador 1:	Jogador 2:
Jogo 1		
Jogo 2		
Jogo 3		
Jogo 4		

Parte 4: Baseando-se agora nos dados obtidos, vocês avaliam que algum jogador tem maior chance de vitória em cada jogo? Como vocês representariam a probabilidade de vitória de cada jogador em cada jogo?

APÊNDICE D – Plano de aula da seção 2

Plano da aula 02

Curso: Técnico Integrado em Eletrotécnica na Modalidade da EJA
Período: 3º Ano
Disciplina: Matemática
Temática: Noções intuitivas sobre contagem e probabilidade; probabilidade frequencial.

Pré-requisitos de conhecimento matemático

Operações de adição e subtração entre números naturais.

Objetivos educacionais

Objetivo geral: elaborar uma definição sobre a probabilidade a partir de uma visão frequentista.
Objetivos específicos: 1. localizar o início do desenvolvimento da probabilidade na história; 2. realizar observações repetidas vezes sobre um fenômeno; 3. registrar dados relativos a esse fenômeno; 4. determinar um valor aproximado para a probabilidade de um evento a partir dos dados registrados; 5. avaliar suas concepções prévias sobre probabilidade; 6. sintetizar o cálculo da probabilidade no modelo frequencial.

Materiais necessários

Tarefa 2 (em anexo) impressa para cada estudantes; materiais de escrita (lápis, caneta, borracha); dados numerados de 1 a 6; computador; projetor; aparelho com câmera.

Abordagem didática

Ensino Exploratório.

Descrição metodológica

Desenvolvimento da aula			
Desenvolvimento das tarefas/Fases do Ensino Exploratório	**Duração esperada**	**Ações esperadas dos estudantes e possíveis dificuldades enfrentadas**	**Respostas do(a) professor(a) e aspectos a ter atenção**
Fase 1: Motivação/ Apresentação da Tarefa Matemática	5 min	Apresentação de dúvidas relativas à dinâmica da aula. Organização em duplas. Preparação para o desenvolvimento da tarefa.	Explicar o objetivo da aula, a dinâmica da aula, a tarefa proposta e sua relevância. Auxiliar na disposição para que os jogos ocorram.

Fase 2: leitura do texto histórico e das regras do jogo	10 min	Motivação a partir do texto histórico. Dúvidas em relação a algum termo ou interesse sobre algum personagem. Relacionar a origem histórica do desenvolvimento do conceito de probabilidade com a tarefa a ser desenvolvida. Exemplificar casos em que o jogador 1 vence e o contrário para cada jogo. Compartilhar com o parceiro de dupla a sua compreensão. Apresentar dificuldade na interpretação de alguma regra, como por exemplo não compreender o resultado da face do dado como uma parcela da soma no jogo 1. Testar rodadas de jogos.	Explicar significados dos termos em que existir dúvidas e sobre os matemáticos que são citados. Confirmar o entendimento dos estudantes sobre as regras dos jogos. Explicar as dúvidas que aparecerem, auxiliando-os na elaboração de relações necessárias entre as faces dos dados e as regras de cada jogo.
Fase 3: resposta ao item 1	10 min	Estabelecer se algum dos jogadores tem maior chance de vitória ou não, a partir da análise das regras dos jogos. O jogo 1 oferece possibilidades iguais de vitória para os dois jogadores e é esperado que os estudantes conjecturem isso. Já o jogo 2 oferece maior probabilidade de vitória para o jogador 1 do que para o jogador 2. No entanto, é possível que os estudantes prevejam uma equidade de probabilidade nesse jogo (em uma experiência anterior, essa previsão foi unânime). Isso pode ser ocasionado por uma visão prematura dos espaços e uma interpretação equivocada da paridade dos produtos entre números naturais. O jogo 3 também oferece maior probabilidade de vitória para o jogador 1 e é esperado que os estudantes conjecturem isso sem dificuldade, posto que as possibilidades de resultados iguais nos dados são bem menores. Já o jogo 4 oferece maior probabilidade de vitória para o jogador 2. No entanto, é possível que os estudantes acreditem que o jogador 1 tenha maior probabilidade de vitória uma vez que quatro valores dos dados o favorecem, contra dois valores que favorecem o jogador 2. A associação dessa interpretação com o fato de 5 e 6 serem os maiores valores, sem uma análise mais aprofundada, também pode levar os estudantes a conjecturarem uma equidade na	Acompanhar o que os estudantes estão registrando, certificando de que estão buscando justificar suas respostas. Professor não deve dar direcionamento sobre a resposta correta, deixando que a intuição e o raciocínio dos estudantes se manifestem.

		probabilidade de vitória. Aplicar as noções prévias e intuitivas sobre probabilidade. Justificar as suas respostas, ainda que essas não correspondam ao gabarito. Manifestar dificuldades ou hesitações em registrar os argumentos de suas respostas.	Encorajar os estudantes a registrarem seus pensamentos como foram construídos.
Fase 4: resposta ao item 2	18 min	Realizar 30 rodadas. A cada rodada: lançar os dois dados; registrar os valores das faces de cada dado; para cada jogo, registrar o jogador vencedor. A cada rodada corresponde uma linha da tabela. O estudante pode acabar registrando alguma vitória equivocada, o que pode sinalizar a não compreensão da regra.	Acompanhar os registros, estimulando a participação de todos os estudantes. Identificar possíveis erros de registro. Em caso de erro, solicitar a revisão e certificar a compreensão dos estudantes sobre a regra do jogo.
Fase 5: resposta ao item 3	7 min	Contabilizar, ao longo das 30 rodadas, o número de resultados para cada face do dado e número de vitórias de cada jogador em cada um dos quatro jogos.	Verificar se compreenderam como devem ser realizados os registros.
		Desenvolver a visão frequentista de probabilidade a partir da síntese do número de vezes em que cada jogador foi vencedor em cada jogo. Associar a preponderância da vitória de um dos jogadores a um não equilíbrio obtido por algum fator na regra do jogo. Relacionar os valores encontrados a maior chance de um dos jogadores ou a uma equidade de chances de vitória. Identificar padrões, equilíbrios e discrepância em relação aos números encontrados.	Estimular as comparações e o raciocínio dos estudantes, a partir de perguntas como: “alguém venceu muito mais que o outro?”, “o que isso te indica?”, “por que vocês acham que isso aconteceu?”.
Fase 6: resposta ao item 4	10 min	Confrontar os dados do item 3 com as respostas do item 1, estabelecendo avaliações, confirmações ou refutações. Avaliar as concepções prévias e intuitivas sobre a probabilidade de vitória. Alguma dupla pode apresentar resistência em refutar sua conjectura, justificando algum vício nos dados ou descredibilizando a repetição da experimentação.	Questionar os estudantes se os dados do item 3 convergem com a resposta dada ao item 1 ou não. É importante que o professor auxilie o estudante a refletir sobre a veracidade dos dados coletados e a entender a margem de erro que pode existir.

		Desenvolver alguma maneira de registrar a probabilidade de vitória dos jogadores em cada jogo, a partir dos dados do item 3. Representações possíveis: - frequencial, utilizando a linguagem natural: 13 vitórias em 30 jogadas, por exemplo. - razão entre a frequência de vitórias e o número de experimentos seja na forma fracionária ou decimal: por exemplo, 13/30 ou 0,43. - percentual (43%, por exemplo), podendo envolver diretamente a ideia de razão, anteriormente citada, ou uma ideia de proporcionalidade.	Auxiliar o estudante a buscar maneiras conhecidas, ainda que informalmente, de representação de probabilidade. Pode, por exemplo, pedir para o estudante eventos cotidianos relacionados ao acaso, e como diria a probabilidade desse evento acontecer no momento.
Fase 7: Seleção e sequenciação	Ao longo das Fases 2 a 6	É importante que os estudantes compreendam que a sequenciação não objetiva a hierarquização e que todas as etapas individuais de construção matemática são igualmente importantes.	Acompanhar os registros dos estudantes, e tirar fotos à medida em que concluem algum item. A sequenciação será realizada com base no item 4 e na aproximação crescente da definição de probabilidade de vitória dada pela dupla e o modelo frequencial formal.
Fase 8: Socialização e discussão da Tarefa Matemática	20 min	Interagir, estabelecer conexões entre as respostas, dialogar, explicar a sua argumentação e a sua proposição, compreender e avaliar o que é válido na produção das outras duplas. Relacionar as diferentes representações. Avaliar as potencialidades, vantagens e equívocos nas representações. Sintetizar a probabilidade como a razão entre a frequência de vitórias de um jogador e número de rodadas experimentadas.	Apresentar, segundo a sequência escolhida, as respostas dos estudantes ao item 4. Respostas parecidas ou próximas podem ser agrupadas e representada por uma delas. Pedir para que a respectiva dupla explique como chegou a essa resposta e se a resposta validou o que tinham conjecturado no item 1 ou não. Promover o diálogo avaliando as potencialidades, vantagens e equívocos na representação apresentada.
Fase 9: Formalização/ Sistematização das aprendizagens	10 min	Definir probabilidade frequencial tal qual descrito por Lima et al. (2006, p. 142): “se repetirmos a experiência n vezes e o evento A ocorreu em j dessas experiências, adotamos (...) $P(A) = j/n$”, onde $P(A)$ representa a probabilidade do evento A ocorrer. Generalizar o modelo frequencial de probabilidade encontrado no jogo para outros fenômenos do cotidiano. Compreender a probabilidade enquanto um valor numérico obtido por uma razão, uma relação de parte e todo. Assinalar o intervalo no qual o valor de probabilidade varia (de 0 a 1, ou de 0% a 100%).	Formalizar a definição de probabilidade em um modelo frequencial, qual seja: a razão entre a frequência de ocorrência de um evento e o número de experimentações realizadas.

Avaliação

Análise das produções dos estudantes na Tarefa Matemática 2 e dos diálogos realizados.

Referências bibliográficas

BRUNEHILDE, B., CORDEIRO, N. J., OLIVEIRA, F. R. **Jogando com Probabilidade e Estatística**. Rio de Janeiro: SBM, 2018.

DAVID, F. N. **Games, Gods and Gambling**. New York: Hafner Publishing Company, 1962.

HUIZINGA, J. **Homo Ludens**: o jogo como elemento da cultura. 5. ed., 3. reimpressão. São Paulo: Perspectiva, 2007.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**: volume 2. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

APÊNDICE E – Tarefa Matemática 3

Tarefa 03: Analisando a confiabilidade de componentes

Figura 1: Lâmpada Centenária

Fonte: BulbCam[2]

Você já ouviu falar da Lâmpada Centenária? É uma lâmpada incandescente criada por Adolphe Chaillet que está funcionando desde 1901 no quartel de bombeiros da cidade de Livermore, Califórnia, Estados Unidos[1]. Essa durabilidade é um feito tão grande que está até registrada no *Guiness Book*. Infelizmente os componentes e equipamentos que utilizamos não têm a mesma durabilidade, sendo a falha um acontecimento recorrente. No mundo do trabalho, em indústrias e empresas de energia por exemplo, a avaliação das falhas e a confiabilidade desses componentes e equipamentos se faz muito necessário.

Vamos nos aprofundar um pouco mais sobre esses conceitos?

"Confiabilidade é a probabilidade que um item tem de desempenhar adequadamente suas funções, por um determinado tempo e sob condições ambientais predeterminadas (LEEMIS, 1995). Segundo Fogliatto e Ribeiro (2009), a confiabilidade é associada à boa operação dos recursos utilizados, como sistemas ou produtos, ausentes de falhas ou quebras, e está associada à execução com sucesso de uma determinada função de um produto e/ou sistema, onde não ocorrem falhas e quebras. Wang et al. (2015) complementam, afirmando que a confiabilidade do processo é uma capacidade de produzir produtos de acordo com os requisitos de projeto, de forma eficiente, constante e sob condições específicas.

(...) Quanto aos conceitos de qualidade e confiabilidade, a principal diferença que se deve notar é que a passagem de tempo é incorporada nas análises de confiabilidade, enquanto o conceito de qualidade é a descrição estática de um item (FOGLIATTO; RIBEIRO, 2009). Para Lafraia (2001), os benefícios com a aplicação da confiabilidade são: a) aumento dos lucros da empresa através da redução de paradas programadas, redução dos custos de manutenção e operação, redução da possibilidade de acidentes; b) criação de soluções para algumas necessidades das empresas como o aumento da produção com mais lucro, resposta rápida para mudanças de produtos, cumprimento de legislação (ambiental e segurança); c) aplicação de investimentos baseados nas informações quantitativas do programa; d) mudança de postura com a atuação nas causas dos problemas e não nos sintomas, uma vez que existe um histórico de falhas dos equipamentos e a determinação dos fatores para a mantenabilidade dos equipamentos.” (Rosa, 2016, p. 34-35)[3]

Segundo Nascimento (2016)[4] e Rocha (2019)[5], para a determinação da confiabilidade de um componente, equipamento ou sistema, é necessário a coleta sistemática dos dados e posterior tratamento indicando as frequências absolutas e relativas de falhas ao longo do tempo. Vamos encontrar uma maneira de fazer isso?

Contexto: Em seu artigo, Dias e Leite (1998)[6] relatam um estudo que teve como objetivo principal “propor uma aplicação com intervalo de confiança não paramátrico (*sic*) para a determinação da confiabilidade de lâmpadas elétricas, ainda usando a função de distribuição de Weibull” (Dias; Leite, 1998, p. 1). Para isso, foi analisado o tempo de falha de uma amostra de 20 lâmpadas de uma fábrica. No estudo, foram consideradas somente as falhas referentes a ruptura de um ou outro filamento da lâmpada. O registro do tempo de falha de cada lâmpada da amostra foi organizado na Tabela 1.

Tabela 1: Valores do ensaio de abril de 1997

Unidades Falhas	Suspensão	Tempo até a falha (Horas)
01	-	1394
01	-	1394
01	-	1451
01	-	1451
01	-	1470
01	-	1501
01	-	1550
01	-	1591
01	-	1591
01	-	1706
01	-	1750
01	-	1750
01	-	1750
01	-	1773
01	-	1797
01	-	1797
01	-	1888
01	-	1888
01	-	1980
01	-	1980

Fonte: Dias e Leite (1998, p. 2).

Proposta de tarefa: A partir dos dados apresentados na tabela 1, vocês refletirão sobre a confiabilidade dessa lâmpada, respondendo os itens abaixo.

Item 1: Organizem e sistematizem a frequência absoluta de falhas acumuladas ao longo do tempo. (Dica: pode ser oportuno separar o tempo em períodos ou classes)

Item 2: Como vocês definiriam a probabilidade de falha da lâmpada em cada período de tempo identificado no item anterior?

Item 3: Como vocês definiriam a confiabilidade da lâmpada em cada período?

Item 4: Qual poderia ser uma ação tomada por uma empresa que utiliza tais lâmpadas visando a redução de riscos e otimização do tempo de utilização desse componente?

Notas:

[1] Mais informações podem ser acessadas em: https://www.centennialbulb.org/.

[2] Imagem coletada em 11 de janeiro 2025 a partir da transmissão ao vivo pelo link: http://bulbcam.cityofpleasantonca.gov/view/view.shtml?id=175529&imagepath=%2Fmjpg%2Fvideo.mjpg&size=1.

[3] ROSA, R. N. da. **Aplicação da Manutenção Centrada em Confiabilidade em um processo da indústria automobilística**. 2016. 102f. Dissertação (Mestrado Profissional em Engenharia de Produção) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

[4] NASCIMENTO, F. S. do. **Aplicação de Engenharia da Confiabilidade na modelagem matemática estatística para previsão de consumo de energia elétrica de uma fábrica**. 2016. 65f. Monografia (Especialização em Engenharia da Confiabilidade) - Departamento Acadêmico de Eletrotécnica, Universidade Tecnológica Federal Do Paraná, 2016.

[5] ROCHA, H. M. **Confiabilidade**: volume único. Rio de Janeiro: Fundação Cecierj, 2019.

[6] DIAS, J. A. A.; LEITE, M. S. A. Uma aplicação de confiabilidade na indústria de lâmpadas elétricas. In: Encontro Nacional de Engenharia de Produção, 18., 1998, Niterói. **Anais [...]**, Niterói, RJ: ABEPRO, 1998. Disponível em: https://abepro.org.br/biblioteca/ENEGEP1998_ART128.pdf. Acessado em: 19 dez. 2024.

APÊNDICE F – Plano de aula da seção 3

Plano da aula 03

Curso: Técnico Integrado em Eletrotécnica na Modalidade da EJA
Período: 3º Ano
Disciplina: Matemática
Temática: Definição de probabilidade; cálculo de probabilidade no modelo clássico; confiabilidade.

Pré-requisitos de conhecimento matemático

Estatística e tratamento de dados.

Objetivos educacionais

Objetivo geral: definir probabilidade a partir da concepção clássica.
Objetivos específicos: 1) elaborar noções de espaço amostral e evento; 2) calcular a probabilidade de um evento a partir da concepção clássica; 3) aplicar o cálculo de probabilidade em um contexto de realidade; 4) desenvolver ideias de complementaridade de eventos e suas implicações no cálculo de probabilidade; 5) associar os conhecimentos probabilísticos aos conhecimentos da formação profissional técnica e do mundo do trabalho.

Materiais necessários

Tarefa Matemática 3 impressa para cada estudante; materiais de escrita (lápis, caneta, borracha); régua; computador; projetor; aparelho com câmera.

Abordagem didática

Ensino Exploratório.

Descrição metodológica

Desenvolvimento da aula			
Desenvolvimento das tarefas/Fases do Ensino Exploratório	**Duração esperada**	**Ações esperadas dos estudantes e possíveis dificuldades enfrentadas**	**Respostas do(a) professor(a) e aspectos a ter atenção**
Fase 1: Motivação/ Apresentação da Tarefa Matemática	10 min	Apresentação de dúvidas relativas à dinâmica da aula. Identificar situações em que há falhas de equipamentos e questionar a sua durabilidade, bem como a necessidade de atuar preventivamente quanto a falhas.	Explicar o objetivo da aula, a dinâmica da aula, a tarefa proposta e sua relevância. Apresentar a transmissão da Lâmpada Centenária e incitar a comparação com outros equipamentos utilizados no cotidiano.

		Organização em trios. Preparação para o desenvolvimento da tarefa.	Auxiliar na disposição.
Fase 2: leitura do texto e do contexto	10 min	Apresentar dúvidas em relação a algum termo do trecho sobre confiabilidade. Exemplificar o conceito e a aplicabilidade de confiabilidade a situações já vivenciadas, seja em âmbito pessoal ou profissional. Relacionar o conceito de confiabilidade às ideias de probabilidade constituídas até então. Apresentar dúvidas em relação ao contexto da tarefa. Interpretar os dados da tabela. Pode surgir a dificuldade nessa etapa, caso não entendam o caráter processual de observação dos pesquisadores.	Explicar significados dos termos em que existir dúvidas. Questionar o que compreenderam sobre o conceito dado e a sua relevância. Questionar se já lidaram com situações em que esse termo pode ser aplicável. Sanar as possíveis dúvidas, questionando se identificaram a quantidade da amostra, quando iniciaram as falhas, quanto tempo durou o experimento.
Fase 3: resposta ao item 1	10 min	Apresentar dúvida quanto ao solicitado no item. Identificar a necessidade de divisão do tempo em classes/períodos. Relembrar que as classes devem ter amplitudes iguais. Alguma dificuldade com a divisão em classes pode surgir, por exemplo, quanto ao tamanho de cada classe. Uma possiblidade de resposta (bastante adequada) é dividir em cinco classes, número obtido a partir da Regra de Sturges (em geral, não é trabalhada no Ensino Médio). Como a amplitude do tempo até a falha é 586 horas, então cada classe englobaria 117,2 horas. Para trabalhar com valores inteiros, vamos considerar as quatro primeiras classes com amplitude de 117 horas e a última com 118 horas. Realizar a contagem de falhas acumuladas até cada classe. Pode haver uma dificuldade em compreender a estratégia de contabilizar falhas acumuladas. Uma apresentação possível é no formato de tabela, caso os estudantes identifiquem as vantagens nessa apresentação. Mas outras maneiras podem surgir, como fluxograma, textualmente ou apenas numericamente.	Sanar as possíveis dúvidas sem, no entanto, definir o caminho para a resolução, deixando aberta à criatividade do grupo. O professor deve estar atento às discussões nos grupos para perceber se estão conseguindo se lembrar do tratamento de dados agrupados. Pode informar que existe algumas padronizações para a definição da amplitude das classes, mas que estaria aberta à interpretação de cada grupo. Indagar qual estratégia utilizaram para definir essa amplitude é bom início para fazê-los refletir sobre possíveis inconsistências. Direcionar para a necessidade de contagem de falhas acumuladas. Questionar, por exemplo, se, para a avaliação a longo prazo, as falhas anteriores a uma classe/período deixaram de existir ou não são relevantes. É importante que o processo não direcione a uma forma única de representação e os encoraje a apresentar da forma que acharem mais conveniente.

Fase 4: resposta ao item 2	8 min	Relacionar a probabilidade de falha em uma determinada classe à razão entre o número de falhas acumuladas e o número total de lâmpadas (20).	Identificar como são utilizados os símbolos e linguagem matemáticos;
		Pode ainda persistir uma dificuldade em relacionar proporção de casos favoráveis a um evento (falha) em relação ao total com o conceito de probabilidade. Isso pode indicar uma dificuldade na compreensão das grandes ideias relacionadas ao tema, como previsibilidade e variabilidade.	O professor precisa identificar os tipos de representação de probabilidade utilizadas e identificar possíveis restrições à ideia de probabilidade enquanto razão. Isso deve ser retomado na fase de discussões.
Fase 5: resposta ao item 3	8 min	Relacionar o conceito de confiabilidade à ideia de probabilidade de não falha. Identificar o evento não falha como complementar ao evento falha. Concluir que, como são complementares, a soma de suas probabilidades deve ser 1 ou 100%. Ou que a confiabilidade será a diferença entre 1 ou 100% e a probabilidade de falha. Um caminho diferente pode ser o cálculo da confiabilidade com a mesma estratégia do item 2, como razão entre o número de lâmpadas sem falhas e o total. Os estudantes que escolherem uma representação de probabilidade do tipo “9 em 20” podem apresentar mais dificuldade em compreender as ideias relacionadas a complementaridade e eventos excludentes.	Incentivar o diálogo no grupo trazendo reflexões sobre a definição dada no trecho anterior da tarefa e qual o evento subjacente à confiabilidade no caso das lâmpadas. Questionar sobre a estratégia utilizada para perceber se a propriedade de complementaridade de probabilidade está associada a complementaridade dos eventos, ou não.
Fase 6: resposta ao item 4	5 min	Relacionar as ideias de probabilidade trabalhadas no texto com a previsibilidade e a tomada de decisões em situações de prevenção e gestão estratégica.	Encorajar e valorizar as experiências prévias dos estudantes como sustentação para a reflexão.
Fase 7: Seleção e sequenciação	Ao longo das Fases 3 a 6	É importante que os estudantes compreendam que a sequenciação não objetiva a hierarquização e que todas as etapas individuais de construção matemática são igualmente importantes.	Acompanhar os registros dos estudantes, e tirar fotos à medida em que concluem algum item. A sequenciação será realizada item a item. No item 1, os aspectos considerados para sequenciação serão: nível crescente de adequação procedimental (na identificação das classes, por exemplo), nível crescente de uso correto de símbolos matemáticos e de organização/sistematização. No item 2, além dos critérios anteriores, será considerado o tipo de representação para a probabilidade, sequenciando

			quanto ao nível de aproximação da ideia de probabilidade enquanto razão. No item 3, além de todos os critérios anteriores, também deverá ser sequenciado quanto ao nível de complexidade vinculada à ideia de complementaridade. Quanto ao item 4, serão selecionadas as respostas que apresentarem diferentes ideias.
Fase 8: Socialização e discussão da Tarefa Matemática	20 min	Interagir, estabelecer conexões entre as respostas, dialogar, explicar a sua estratégia, compreender e avaliar o que é válido na produção dos outros grupos. Relacionar as diferentes estratégias, sistematizações e representações. Avaliar as potencialidades, vantagens e equívocos nas resoluções. Sintetizar a probabilidade como a razão entre o número de casos favoráveis e o número total de casos. Sintetizar a complementaridade de eventos e a probabilidade da união de dois eventos excludentes.	Apresentar, segundo a sequência escolhida, as respostas dos grupos item a item. Respostas parecidas ou próximas podem ser agrupadas e representada por uma delas. Pedir para que o respectivo grupo explique como chegou a essa resposta. Promover o diálogo avaliando as potencialidades, vantagens e equívocos na representação apresentada. Reforçar as ideias principais que devem se relacionar às concepções clássicas e axiomática da probabilidade.
Fase 9: Formalização/ Sistematização das aprendizagens	19 min	Generalizar o modelo clássico de cálculo de probabilidade e definir o modelo axiomático de probabilidade, no mesmo sentido dado por Lima *et al.* (2006, p. 141): Uma probabilidade é uma função que associa a cada evento A um número $P(A)$, de forma que: i) Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$. ii) $P(S) = 1$. iii) Se A e B são eventos *mutuamente excludentes*, isto é, eventos que não podem ocorrer simultaneamente $A \cap B = \emptyset$) então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Identificar características que definem a probabilidade; Concluir as implicações de complementaridade de eventos para a probabilidade.	Relacionar o contexto da tarefa à representação algébrica de evento e espaço amostral. Formalizar as características que definem probabilidade: "i) Para todo evento A, 0≤P(A)≤1. ii) P(S)=1. iii) Se A e B são eventos mutuamente excludentes, isto é, eventos que não podem ocorrer simultaneamente A∩B=∅) então P(A∪B)=P(A)+P(B)." (Lima *et al*, 2016, p. 141) Identificar que $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Avaliação

Análise das produções dos estudantes na Tarefa 3 e dos diálogos realizados.

Referências bibliográficas

DIAS, J. A. A.; LEITE, M. S. A. Uma aplicação de confiabilidade na indústria de lâmpadas elétricas. In: Encontro Nacional de Engenharia de Produção, 18., 1998, Niterói. **Anais [...]**, Niterói, RJ: ABEPRO, 1998. Disponível em: https://abepro.org.br/biblioteca/ENEGEP1998_ART128.pdf. Acessado em: 19 dez. 2024.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**: volume 2. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

NASCIMENTO, F. S. do. **Aplicação de Engenharia da Confiabilidade na modelagem matemática estatística para previsão de consumo de energia elétrica de uma fábrica**. 2016. 65f. Monografia (Especialização em Engenharia da Confiabilidade) - Departamento Acadêmico de Eletrotécnica, Universidade Tecnológica Federal Do Paraná, 2016.

ROCHA, H. M. **Confiabilidade**: volume único. Rio de Janeiro: Fundação Cecierj, 2019.

ROSA, R. N. da. **Aplicação da Manutenção Centrada em Confiabilidade em um processo da indústria automobilística**. 2016. 102f. Dissertação (Mestrado Profissional em Engenharia de Produção) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

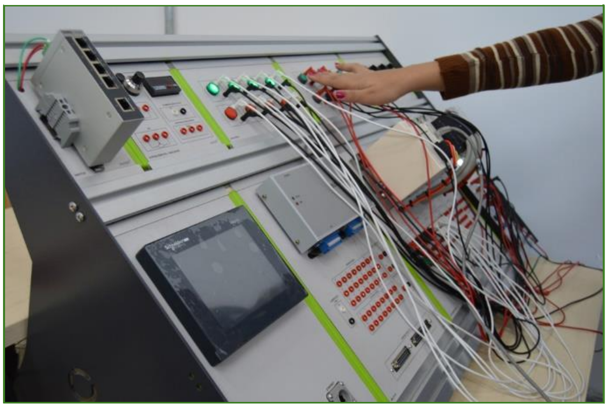
APÊNDICE G – Tarefa Matemática 4

Tarefa 04: Estudando evasão e êxito no curso de eletrotécnica

O Curso Técnico Integrado ao Ensino Médio em Eletrotécnica na Modalidade da Educação de Jovens e Adultos é um curso de grande importância para o Campus Valparaíso do IFG. É com muita alegria que assistimos ao êxito das e dos estudantes, acessando uma formação de qualidade para o mundo do trabalho.

Figura 1: Frente do IFG/Campus Valparaíso

Figura 2: Bancada do Lab. de Instalações Elétricas



Fonte: Site do IFG/Campus Valparaíso - https://www.ifg.edu.br/valparaiso

Vocês já estão concluindo o terceiro ano de curso e puderam observar a evasão (abandono, desistência) de colegas. Vamos pensar um pouco sobre isso. A evasão do curso é alta ou baixa? Qual será a probabilidade de qualquer estudante ter êxito na conclusão do curso? As chances de uma estudante mulher e de um estudante homem evadir ou concluir o curso é diferente?

As nossas percepções dizem muito, mas é importante que avaliações, principalmente institucionalmente, sejam realizadas por meio de dados oficiais. O convite agora é para que vocês possam fazer essas aferições de modo a conseguirem comprová-las. A tabela na próxima página relaciona o quantitativo de estudantes e os respectivos status de matrícula no curso, desde o seu início no segundo semestre de 2014. Os dados foram coletados e tratados a partir de uma consulta ao Sistema Unificado de Administração Pública (Suap)[1], adotado pelo IFG.

[1] IFG. Sistema Unificado de Administração Pública. < https://suap.ifg.edu.br/>. Acessado em: 29 dez. 2024.

Semestre de ingresso	Estudantes:																	
	ingressantes			**evadidos ou com matrícula cancelada**			**com matrícula trancada**			**com matrícula ativa**			**concludentes (com pendência em atividades finais)**			**Concluintes**		
	Gênero		Total	Gênero		Total	Gênero		Total	Gênero		Total	Gênero		Total	Gênero		Total
	M	H		M	H		M	H		M	H		M	H		M	H	
2014/2	1	29	30	1	24	25	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	4	4
2015/1	5	25	30	4	19	23	0	0	0	0	0	0	1	1	2	0	5	5
2015/2	7	23	30	6	12	18	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	10	11
2016/1	2	28	30	2	20	22	0	0	0	0	0	0	0	3	3	0	5	5
2017/1	3	27	30	3	17	20	0	0	0	0	1	1	0	4	4	0	5	5
2017/2	8	28	36	5	22	27	1	0	1	0	0	0	1	1	2	1	5	6
2018/1	7	29	36	4	16	20	0	1	1	1	1	1	2	2	4	1	9	10
2019/1	4	32	36	1	19	20	0	3	3	0	0	0	0	0	0	3	10	13
2020/1	3	33	36	1	21	22	1	6	7	0	2	2	0	0	0	1	4	5
→ Turmas que já completaram quatro anos de curso e já tiveram oportunidade de concluir																		
Subtotal 1	40	254	294	27	170	197	2	10	12	1	4	4	4	13	17	7	57	64
2021/1	1	25	26	1	18	19	0	1	1	0	6	6	-	-	-	-	-	-
2022/1	3	27	30	2	17	19	1	1	2	0	9	9	-	-	-	-	-	-
2023/1	4	14	18	2	7	9	0	0	0	2	7	9	-	-	-	-	-	-
2024/1	5	35	40	0	0	0	0	0	0	5	35	40	-	-	-	-	-	-
→ Turmas que ainda estão ativas no Campus																		
Subtotal 2	13	101	114	5	42	47	1	2	3	7	57	64	0	0	0	0	0	0
Total	53	355	408	32	212	244	3	12	15	8	61	68	4	13	17	7	57	64

Parte 1: Nesses primeiros itens, vamos analisar a probabilidade em experiências aleatórias com um ou mais estágios. Respondam aos itens a seguir, baseando-se nas informações da tabela.

(a) Suponham que haverá um sorteio de uma vaga de emprego na área do curso dentre todos os concluintes. Para isso, os nomes de todos foram escritos em papeis e colocados dentro de uma urna. Qual a probabilidade de ser sorteada uma mulher?

(b) No caso anterior, qual a probabilidade de ser sorteada uma mulher, sabendo que o(a) sorteado(a) ingressou no curso em 2019 ou 2020?

(c) Suponham agora que serão sorteadas duas vagas de estágio apenas dentre os estudantes com matrícula ativa e que ingressaram em 2023. Para isso, serão retirados dois nomes da urna, sucessivamente e sem reposição. Qual a probabilidade de ser sorteada uma mulher no segundo sorteio, sabendo que uma mulher já foi sorteada no primeiro?

(d) No caso anterior, determinem a probabilidade de duas mulheres serem sorteadas.

Parte 2: Agora vamos lidar com a estimativa de probabilidade como uma previsão a partir de dados coletados.

(e) Qual a estimativa de probabilidade de qualquer estudante ter êxito no curso? E qual a estimativa de probabilidade de qualquer estudante evadir do curso?

(f) Considerem uma estudante mulher que tenha acabado de ingressar no curso, qual a probabilidade de ela evadir até o final do curso? E no caso de um estudante homem?

(g) A qual conclusão vocês podem chegar? Você imagina resultados diferente do que encontrou?

(h) Vejam que em 2024/1 ingressaram 5 estudantes mulheres. Qual a probabilidade de todas as 5 estudantes evadirem do curso?

APÊNDICE H – Plano de aula da seção 4

Plano da aula 04

Curso: Técnico Integrado em Eletrotécnica na Modalidade da EJA
Período: 3º Ano
Disciplina: Matemática
Temática: probabilidade clássica; probabilidade condicional; probabilidade de dois eventos (independentes ou não).

Pré-requisitos de conhecimento matemático

Tratamento de dados.

Objetivos educacionais

Objetivo geral: calcular a probabilidade de ocorrência de dois eventos (ou mais), avaliando se são independentes ou não.
Objetivos específicos: 1) determinar espaço amostral e eventos favoráveis de um determinado experimento aleatório ou situação de previsibilidade; 2) calcular a probabilidade de um evento; 3) desenvolver a ideia de probabilidade condicional; 4) avaliar se dois ou mais eventos são independentes ou não

Materiais necessários

Tarefa Matemática 4 impressa para cada estudante; materiais de escrita (lápis, caneta, borracha); quadro e pincéis.

Abordagem didática

Ensino Exploratório.

Descrição metodológica

Desenvolvimento da aula			
Desenvolvimento das tarefas/Fases do Ensino Exploratório	**Duração esperada**	**Ações esperadas dos estudantes e possíveis dificuldades enfrentadas**	**Respostas do(a) professor(a) e aspectos a ter atenção**
Fase 1: Motivação/ Apresentação da Tarefa Matemática	5 min	Apresentação de dúvidas relativas à dinâmica da aula. Despertar interesse sobre a tarefa ao resgatar memórias relativas às vivências no curso. Organização em trios. Preparação para o desenvolvimento da tarefa.	Explicar o objetivo e a dinâmica da aula, a tarefa proposta e sua relevância. Ressaltar a importância de problematizar a evasão e o êxito dos estudantes para avaliação do curso. Reforçar a importância da participação ativa deles no desenvolvimento do curso. Auxiliar na disposição e organização da turma.

Fase 2: resposta ao item (a)	5 min	É esperado que os estudantes identifiquem e se adaptem à mudança de natureza do contexto. Porém, dificuldades podem aparecer nessa mudança de análise frequencial (tarefa 2), experimentação dada pela observação contínua de um fenômeno (tarefa 3) e o presente contexto na parte 1: um fenômeno com um agente de aleatoriedade explícito (sorteio), num espaço reconhecidamente equiprovável. Apresentar dúvida quanto a definição do espaço amostral do experimento e dos eventos dos quais se pretende analisar a probabilidade. Aplicar o modelo clássico de probabilidade a esse item. Observar, assim, que o espaço amostral é formado pelos resultados possíveis no sorteio dos concluintes. Logo, o espaço amostral tem 64 casos possíveis. O evento do qual se quer a probabilidade é o resultado do sorteio ser uma concluinte mulher. Logo, é esperado que os estudantes identifiquem que o número de casos favoráveis é 7. Desse modo, pelo modelo clássico, a probabilidade desse evento ocorrer será dada pela razão $\frac{7}{64}$, que se aproxima do valor 0,1094 ou 10,94%. As possíveis dificuldades nessa etapa podem sinalizar a persistência de dúvidas em relação ao que foi apontado nas linhas acima. Outra dificuldade pode ser uma imaturidade ainda no entendimento da medida de probabilidade no modelo clássico.	Questionar qual a diferença do contexto desse item para as tarefas anteriores; o que define a aleatoriedade nesse contexto; se avaliam que nesse contexto a determinação da probabilidade seja mais simples ou não (no sentido de variabilidade). Perguntar: “qual é o experimento aleatório colocado em questão?”; “nesse experimento é possível definir e/ou quantificar todas as possibilidades de resultado?”; “você pode exemplificar resultados do evento que é considerado favorável?”. Caso as dúvidas sejam relacionadas ao contexto, às grandes ideias (aleatoriedade, variabilidade) ou nos conceitos (espaço amostral, evento e sua quantificação), é necessário reforçar as intervenções ditas anteriormente. Caso as dúvidas estejam relacionadas à medida da probabilidade, o professor pode questionar: “como foram calculadas as probabilidades na última aula?”; “como você poderia representar quantitativamente o número de casos favoráveis em relação à totalidade de casos possíveis?”; “como explicaria a alguém as chances de uma mulher ser sorteada? Qual valor poderia ser representativo dessas chances?”.
Fase 3: resposta ao item (b)	5 min	A primeira etapa é compreender o caráter apriorístico do evento “sortear um estudante que ingressou no curso em 2019 ou 2020” e a implicação disso: reduzir os casos possíveis a um subconjunto do espaço amostral relativo a esse evento. Chegar à resposta de o item: a razão entre o número de mulheres ingressantes em 2019 ou 2020 e o número de estudantes ingressantes em 2019 ou 2020, chegando ao resultado $\frac{4}{18} = \frac{2}{9}$ ou	Questionar: “qual a característica essencial dos casos possíveis nesse item?”; “no contexto apresentado, é possível que um estudante que ingressou em 2017 tenha sido sorteado? Então ele pode ser contabilizado nos casos possíveis?”; “qual é, então, o número de casos possíveis?”.

		aproximadamente $0{,}2222$ ou $22{,}22\%$. A dificuldade pode ser exatamente em estimar que essa condição reduz os casos possíveis. Notar que a redução dos casos possíveis pode restringir os casos favoráveis, pois só serão favoráveis aqueles casos que também respeitam a condição.	Questionar: “no contexto apresentado, é possível que uma estudante mulher que ingressou em 2017 tenha sido sorteada? Então ela pode ser contabilizada nos casos favoráveis?”; “qual é, então, o número de casos favoráveis?”
Fase 4: resposta ao item (c)	5 min	Identificar que os dois eventos são dados em estágios distintos do experimento, que envolve agora dois sorteios em sequência, mas que um estágio interfere no próximo. Elaborar uma resposta aproximada a seguinte: como o número de estudantes ingressantes em 2023 com matrícula ativa é 9, sendo duas delas mulheres, e no primeiro sorteio foi sorteada uma mulher, então a probabilidade requerida é $\frac{1}{8}$ ou $0{,}125$ ou $12{,}5\%$. Pode existir uma dificuldade de compreensão dessa dependência e como isso interfere nos resultados da probabilidade no segundo sorteio e, logo, na compreensão de probabilidade condicional. Sabendo dos impactos do primeiro sorteio para o segundo, os estudantes irão definir o número de casos favoráveis e de casos favoráveis e calcular a probabilidade por meio da razão entre esses números.	O professor deve estar atento às respostas dos estudantes para identificar se a noção de dependência não foi ignorada. Assim, pode perguntar: “se foi sorteada uma mulher no primeiro sorteio, isso interfere nas possibilidades do segundo sorteio?”; “quantos papéis com nomes tinham na urna antes do primeiro sorteio? Quantos tinham após o sorteio? Isso modifica as probabilidades?”.
Fase 5: resposta ao item (d)	5 min	Os estudantes podem recorrer ao recurso da análise combinatória para determinar o número de casos favoráveis (2) e possíveis (72), calculando a probabilidade em seguida: $\frac{2}{72} = \frac{1}{36}$.	O professor deve encorajar os estudantes a utilizarem estratégias de contagem para determinar o número de casos possíveis, pedindo para que os estudantes se lembrem de situações em aulas anteriores em que foi necessário contabilizar agrupamentos de indivíduos. Outra estratégia interessante pode ser pedir que os estudantes simplifiquem, reduzindo os números, analisem e busquem generalizações para esse caso.

		É importante que consigam diferenciar o que foi resolvido no item anterior e o que é solicitado nesse, mas que existe uma relação. Assim, identificar que duas informações são necessárias: a probabilidade de ser sorteada uma mulher no primeiro sorteio; e a probabilidade de ser sorteada uma mulher no segundo dado que foi sorteada uma mulher no primeiro. Estabelecer relação entre os valores dessas duas probabilidades e o resultado registrado para o item.	O professor deve solicitar que os estudantes busquem alguma relação entre esses valores. Isso irá fundamentar uma futura generalização. Para tentar estabelecer uma relação os valores encontrados, o professor pode solicitar que os estudantes façam essa avaliação: “qual a relação entre a probabilidade de uma mulher ser sorteada no primeiro sorteio $\left(\frac{2}{9}\right)$, a probabilidade do item (c) $\left(\frac{1}{8}\right)$ e a probabilidade de ser sorteada duas mulheres no item (d) $\left(\frac{2}{72}\right)$?”.
Fase 6: Seleção e sequenciação na parte 1	Ao longo das Fases 2 a 5	É importante que os estudantes compreendam que a sequenciação não objetiva a hierarquização e que todas as etapas individuais de construção matemática são igualmente importantes.	Acompanhar os registros dos estudantes, e tirar fotos à medida em que concluem algum item. A sequenciação será realizada item a item, considerando o nível crescente de adequação procedimental ao modelo clássico de medida de probabilidade, o nível crescente de complexidade e de uso correto de símbolos matemáticos e de organização/sistematização.
Fase 7: Socialização e discussão da Parte 1 Tarefa Matemática	20 min	Nesse momento, os grupos selecionados deverão ir até o quadro comunicar e justificar as suas respostas. Durante essas explicações, espera-se da turma interagir, estabelecer conexões entre as respostas, dialogar, confrontar estratégias, compreender e avaliar o que é válido na produção dos outros grupos. Relacionar as diferentes estratégias, sistematizações e representações. Avaliar as potencialidades, vantagens e equívocos nas resoluções. Sintetizar a ideia de probabilidade condicional e do cálculo de probabilidades em experimentações com diferentes estágios. No item (d), identificar que o resultado coincide com o produto entre a probabilidade de ser sorteada uma mulher no primeiro sorteio e a probabilidade de ser sorteada uma mulher no segundo, dado que foi sorteada uma mulher no primeiro $(P(A \cap B) = P(A\|B) \,.\, P(B))$ Ao longo dos itens, refletir se a	Apresentar, segundo a sequência escolhida, as respostas dos grupos item a item. Respostas parecidas ou próximas podem ser agrupadas e representada por uma delas. Pedir para que o respectivo grupo explique como chegou a essa resposta. Promover o diálogo avaliando as potencialidades, vantagens e equívocos na representação apresentada. Reforçar as ideias principais que devem se relacionar ao modelo clássico de medida de probabilidade, à probabilidade condicional e à probabilidade de eventos em estágios distintos de um experimento. Indagar sobre as reflexões críticas possíveis de se fazer a partir dos itens.

		equiprobabilidade no sorteio corresponde a equidade de oportunidades de mulheres e homens em atuar na área de eletrotécnica. Avaliar a relevância de políticas afirmativas nesse quesito.	
Fase 8: Formalização/ Sistematização das aprendizagens	5 min	Generalizar o modelo clássico de probabilidade para o contexto; Identificar a relação que define a probabilidade condicional; Partir da relação da probabilidade condicional para o cálculo da probabilidade de interseção de dois eventos.	É importante que todas as conclusões sejam formalizadas com o uso da linguagem matemática para que os estudantes possam atribuir significado a essas representações. Registrar a definição de probabilidade condicional como exposto em Lima *et al* (2006, p. 152): "Dados dois eventos A e B, com P(A)≠0, a probabilidade condicional de B na certeza de A é o número $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ " Donde também se conclui que: $P(A \cap B) = P(A).P(B\|A)$.
Fase 9: resposta ao item (e), (f) e (g)	10 min	Retomar a relação entre a frequência relativa em um fenômeno e a estimativa de probabilidade. Identificar que o espaço amostral será todos os estudantes que ingressaram até 2020 e os eventos requeridos são "estudante obter êxito" e "estudante evadir". No item *(e)*, o evento que se quer analisar é *estudantes que obtiveram êxito*. Observando os dados da tabela fornecida, então a estimativa de probabilidade requerida é dada pela razão $\frac{64}{294} = \frac{32}{147}$ ou aproximadamente $0{,}2177$ ou $21{,}77\%$. Já na segunda pergunta, o evento que se quer analisar é *estudantes que evadiram*. Então, a estimativa de probabilidade é dada pela razão $\frac{197}{294}$ ou aproximadamente $0{,}6701$ ou $67{,}01\%$. Aplicar o modelo clássico de cálculo de probabilidade nessa situação. A fluidez na resposta ao item (f) será uma consequência da mobilização dos conhecimentos para responder o item anterior, já que a modificação se dá apenas no número de casos favoráveis aos eventos que se pretende calcular a probabilidade. Na primeira pergunta do item *(f)*, o evento que se quer avaliar é *estudante mulher evadir do curso*.	Reforçar as ideias de incerteza e previsibilidade no que o item solicita e auxiliar o estudante a entender como a observação da situação ocorrida até então pode fomentar a previsão e as tomadas de decisão em relação ao curso. Estimular a utilização dos dados estatísticos para realizar estimativas de probabilidade.

		Nesse caso, a probabilidade será a razão $\frac{27}{40}$ ou $0{,}675$ ou $67{,}5\%$. Na segunda pergunta, o evento é *estudante homem evadir do curso*. A probabilidade estimada para esse evento será a razão $\frac{170}{254}$ ou aproximadamente $0{,}6693$ ou $66{,}93\%$. Espera-se um debate sobre a equidade de gênero na área do curso e quebra de possíveis impressões equivocadas sobre a diferenciação entre os gêneros. Realizar a comparação entre os resultados alcançados e as concepções prévias de probabilidade no contexto dado. É possível que os estudantes tenham a impressão de que a probabilidade de evasão das estudantes mulheres no curso seja maior que da evasão dos homens, mas os dados irão confrontar isso. Isso é importante para que possam desconstruir certas visões alicerçadas na desigualdade atribuída aos gêneros.	O professor pode retomar as perguntas colocadas no início da tarefa: quais as suas visões iniciais? Imaginava que a evasão do curso era alta ou baixa? Acreditava que as chances de uma estudante mulher e de um estudante homem evadir ou concluir o curso seriam muito diferentes?
Fase 10: resposta ao item (h)	10 min	De forma parecida da parte 1, os estudantes podem ter dificuldade em perceber a evasão de uma estudante mulher como um evento e, logo, a evasão de cinco mulheres como cinco eventos. Em seguida, é importante perceber que esses eventos são independentes. Desse modo, a resposta esperada é: a probabilidade de evasão das cinco será $\frac{27}{40} \cdot \frac{27}{40} \cdot \frac{27}{40} \cdot \frac{27}{40} \cdot \frac{27}{40} = \left(\frac{27}{40}\right)^5 \cong 0{,}1401$ ou $14{,}01\%$. Relacionar o cálculo de fenômenos em estágios da parte 1 da tarefa com esse item e, a partir disso, obter a probabilidade de evasão das cinco estudantes como o produto da probabilidade de evasão de cada uma.	Perguntar qual era o evento que se calculou no item (f) para que entendam que se tratava da evasão de uma estudante individualmente. Perguntar então a probabilidade de cada uma das cinco estudantes, individualmente, evadirem. Direcionar os estudantes por meio de dicas: "qual o evento que vai ser analisado?"; "esse evento possuiu estágios ou etapas? Quais?"; "A probabilidade de evasão de uma estudante, de uma maneira objetiva, interfere na probabilidade de evasão de outra estudante?"; "na parte 1, como formalizamos o cálculo da probabilidade de diferentes eventos?"; "o que muda nesse contexto?"; "como você adaptaria essa estratégia?".
Fase 11: Seleção e sequenciação na parte 2	Ao longo das Fases 9 e 10	É importante que os estudantes compreendam que a sequenciação não objetiva a hierarquização e que todas as etapas individuais de construção	Acompanhar os registros dos estudantes, e tirar fotos à medida em que concluem algum item. A sequenciação será realizada item a item, considerando o nível

		matemática são igualmente importantes.	crescente de adequação procedimental ao modelo clássico de medida de probabilidade, o nível crescente de complexidade e de uso correto de símbolos matemáticos e de organização/sistematização.
Fase 7: Socialização e discussão da Parte 1 Tarefa Matemática	15 min	Nesse momento, os grupos selecionados deverão ir até o quadro comunicar e justificar as suas respostas. Durante essas explicações, espera-se da turma interagir, estabelecer conexões entre as respostas, dialogar, confrontar estratégias, compreender e avaliar o que é válido na produção dos outros grupos. Relacionar as diferentes estratégias, sistematizações e representações. Avaliar as potencialidades, vantagens e equívocos nas resoluções. Sintetizar a ideia do cálculo de probabilidades de eventos independentes. $(P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B))$ Na discussão sobre o item (g), refletir sobre as diferenciações impostas aos gêneros mediante uma sociedade sexista. Também refletir sobre possibilidades de incentivo ao ingresso de mulheres no curso, bem como dos motivos que justificam a menor procura.	Apresentar, segundo a sequência escolhida, as respostas dos grupos item a item. Respostas parecidas ou próximas podem ser agrupadas e representada por uma delas. Pedir para que o respectivo grupo explique como chegou a essa resposta. Promover o diálogo avaliando as potencialidades, vantagens e equívocos na representação apresentada. Reforçar as ideias principais do cálculo de probabilidade de eventos em estágios distintos de um experimento. Indagar sobre as reflexões críticas possíveis de se fazer a partir dos itens.
Fase 9: Formalização/ Sistematização das aprendizagens	5 min	Generalizar o cálculo da probabilidade de interseção de dois eventos independentes.	É importante que todas as conclusões sejam formalizadas com o uso da linguagem matemática para que os estudantes possam atribuir significado a essas representações. Registrar o método de cálculo da probabilidade de interseção de dois eventos independentes: $P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$

Avaliação

Análise das produções dos estudantes na Tarefa 4 e dos diálogos realizados.

Referências bibliográficas para a elaboração da tarefa

IFG. **Sistema Unificado de Administração Pública**. Disponível em: https://suap.ifg.edu.br/. Acessado em: 29 dez. 2024.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**: volume 2. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

APÊNDICE I – Tarefa Matemática 5

Tarefa 05: Uma retomada ao Jogos dos 2 dados[1]

Vocês se lembram dos Jogos dos 2 dados? A partir da análise de repetidas rodadas pudemos estimar uma aproximação para as probabilidades de vitória de cada jogador em cada jogo. Mas perceba que as possibilidades de resultados nos dois dados nos dão um espaço amostral finito. Então não será possível determinar com exatidão essas probabilidades?

Primeiramente, vamos nos lembrar das regras dos jogos.

Figura 1: Dados coloridos

Fonte: https://pxhere.com/pt/photo/757368

(Jogo 1) *Jogo do par ou ímpar aditivo*: Joga-se os dois dados. Realiza-se a adição dos resultados obtidos nos dois dados. O primeiro jogador vence se a soma das duas faces obtidas for par e o segundo jogador vence se a soma for ímpar.

(Jogo 2) *Jogo do par ou ímpar multiplicativo*: Joga-se os dois dados. Realiza-se a multiplicação dos resultados obtidos nos dois dados. O primeiro jogador vence se o produto das duas faces obtidas for par e o segundo jogador vence se o produto for ímpar.

(Jogo 3) *Jogo dos diferentes*: Joga-se os dois dados. O primeiro jogador vence se as faces forem diferentes e o segundo jogador vence se forem iguais.

(Jogo 4) *Jogo do máximo*: Joga-se os dois dados. O primeiro jogador vence se a maior face obtida for 1, 2, 3 ou 4 e o segundo jogador se a maior face for 5 ou 6.

Agora vamos refletir um pouco sobre os jogos.

Notas:
[1] Adaptado de BRUNEHILDE, B., CORDEIRO, N. J., OLIVEIRA, F. R. *Jogando com Probabilidade e Estatística*. Rio de Janeiro: SBM, 2018.

Item 1. Considerando a experiência aleatória de lançar dois dados sucessivamente, determine o seu espaço amostral, ou seja, todos os resultados possíveis. Qual a quantidade total?

Item 2: Para cada um dos jogos, conte quantos resultados possíveis dá a vitória ao jogador 1 e quantos dá a vitória ao jogador 2.

Item 3: Sabendo disso, como vocês definiriam a probabilidade de vitória de cada jogador em cada jogo?

Item 4: Qual a probabilidade de o jogador 1 vencer o jogo 2 e o resultado de algum dos dados lançados ser ímpar?

Item 5: Lembrem-se que para uma mesma jogada, vocês analisavam quem ganhava em cada um dos quatro jogos. Em uma determinada jogada sabe-se que o jogador 2 venceu o jogo 4. Qual a probabilidade de ele também ter vencido o jogo 3?

Item 6: Dois jogadores vão realizar três rodadas de lançamento de dados. Qual a probabilidade do jogador 1 vencer no jogo 2 nas duas primeiras rodadas, mas perder na terceira?

APÊNDICE J – Plano de aula da seção 5

Plano da aula 05

Curso: Técnico Integrado em Eletrotécnica na Modalidade da EJA
Período: 3º Ano
Disciplina: Matemática
Temática: probabilidade clássica; probabilidade condicional; probabilidade de dois eventos (independentes ou não).

Pré-requisitos de conhecimento matemático

Operações aritméticas básicas.

Objetivos educacionais

Objetivo geral: sintetizar os conhecimentos e habilidades relacionados à definição e representação do espaço amostral e de eventos de um experimento aleatório, ao cálculo de probabilidade de um ou mais eventos e à probabilidade condicional.

Reitera-se que essa seção tem como objetivo para o professor a complementação do processo avaliativo por meio da coleta de dados sobre os conhecimentos assimilados pelos estudantes.

Materiais necessários

Tarefa Matemática 5 impressa para cada estudante; materiais de escrita (lápis, caneta, borracha); quadro e pincéis.

Abordagem didática

Ensino Exploratório.

Descrição metodológica

Desenvolvimento da aula			
Desenvolvimento das tarefas/Fases do Ensino Exploratório	**Duração esperada**	**Ações esperadas dos estudantes e possíveis dificuldades enfrentadas**	**Respostas do(a) professor(a) e aspectos a ter atenção**
Fase 1: Motivação/ Apresentação da Tarefa Matemática	5 min	Apresentação de dúvidas relativas à dinâmica da aula. Retomar os saberes construídos na seção 2 com a aplicação dos jogos dos 2 dados. Diferenciar a relacionar o modelo frequentista e o modelo clássico de calcular probabilidades.	Explicar o objetivo da aula enquanto etapa do processo avaliativo. Solicitar que os estudantes relatem uma distinção entre as estratégias utilizadas na seção 2 das demais.

			Organização em duplas. Preparação para o desenvolvimento da tarefa.	Auxiliar na organização.
Fase 2: desenvolvimento da tarefa	**Orientações gerais**	45 min	Responder aos itens buscando sempre fazer a justificação das estratégias, dos recursos e da sistematização utilizados.	Observar as possíveis dificuldades em acessar e mobilizar os conhecimentos relacionados aos conteúdos já estudados, buscando sempre auxiliar na superação de obstáculos e na rememoração dos aspectos necessários.
	Item 1		Identificar todos os elementos do espaço amostral, utilizando a representação mais sistematizada que a dupla conseguir, avaliando as vantagens da organização dos dados. Uma possiblidade é a apresentação de todos os resultados possíveis em uma matriz $M_{6\times6}$, onde o elemento $a_{ij} = (i\,,j)$ representa o valor i obtido no primeiro dado e j obtido no segundo dado. Compreender que, por serem dados distintos ou lançamentos distintos, esses resultados são também distintos. Estabelecer a contagem do número de elementos do espaço amostral, seja a partir da lista anterior, seja por meio de recursos da análise combinatória.	Professor pode indagar: “você pode exemplificar resultados possíveis no lançamento de dois dados?”; “qual a estratégia para contabilizar todos?”; “sendo os dados distintos, os resultados (3, 1) e (1, 3) são possibilidades distintas nessa contabilização?”; “qual a melhor maneira de representar esses resultados?”; “você se lembra de uma maneira de contabilizar esses resultados sem precisar listar todos?”.
	Item 2		Os estudantes podem identificar na lista do espaço amostral quais resultados são favoráveis à vitória de cada jogador em cada jogo e suceder à contagem desses resultados. Também podem, a partir das regras e de propriedades específicas dos entes aritméticos requeridos (operação ou comparação), utilizar a análise combinatória para essa quantificação. A resposta para esse item deve ter como resultados: • Jogo 1: jogador 1 vence em 18 resultados; jogador 2 vence em 18 resultados. • Jogo 2: jogador 1 vence em 27 resultados; jogador 2 vence em 9 resultados. • Jogo 3: jogador 1 vence em 30 resultados; jogador 2 vence em 6 resultados. • Jogo 4: jogador 1 vence em 16 resultados; jogador 2 vence em 20 resultados.	Verificar se os estudantes a reconhecem as propriedades que caracterizam o conjunto de resultados favoráveis à vitória de cada jogador em cada jogo. Exemplo: “quais os tipos de resultados possíveis para que o jogador 2 vença o jogo 2?”. Incentivar os estudantes a buscarem estratégias da análise combinatória para a quantificação desses eventos.
	Item 3		Utilizar a contagem de elementos dos eventos e do espaço amostral para o cálculo de probabilidade no modelo clássico.	O professor deve verificar se os estudantes estão conseguindo reunir os dados coletados nos itens anteriores para aplicar no

			Representar o valor da probabilidade em diferentes maneiras (fração, decimal ou porcentagem). Considerando $J1$ como o evento jogador 1 ganhar e $J2$ o evento jogador 2 ganhar, a resposta esperada para esse item é: • Jogo 1: $P(J1) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} = 0{,}5\ ou\ 50\%$; $P(J2) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} = 0{,}5\ ou\ 50\%$. • Jogo 2: $P(J1) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4} = 0{,}75\ ou\ 75\%$; $P(J2) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0{,}25\ ou\ 25\%$.. • Jogo 3: $P(J1) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6} \cong 0{,}83\ ou\ 83\%$; $P(J2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \cong 0{,}17\ ou\ 17\%$.. • Jogo 4: $P(J1) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9} = 0{,}445\ ou\ 44{,}5\%$; $P(J2) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} = 0{,}555\ ou\ 55{,}5\%$..	modelo clássico. Nos casos em que os estudantes apresentarem dificuldades em iniciar, o professor pode solicitar que o estudante lembre como foi calculada probabilidade nas tarefas anteriores.
	Item 4		Perceber que existem resultados em um evento que não contempla o outro e vice-versa. Uma estratégia (provavelmente a recorrente) será contabilizar na lista do espaço amostral no item 1 quais resultados satisfazem tanto o evento “jogador 1 vencer o jogo 2”, quanto “pelo menos um dado com resultado ímpar”. Depois calcular a probabilidade no modelo clássico considerando todo o espaço amostral como casos possíveis. Desse modo, a probabilidade seria dada pela razão $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. Outra possibilidade se dá por meio da expressão que utiliza a probabilidade condicional: $P(A \cap B) = P(A\|B).P(B)$. Como $P(B) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$ e $P(A\|B) = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$, então $P(A \cap B) = \frac{3}{4}.\frac{2}{3} = \frac{1}{2}$.	Nesse momento é interessante que o professor questione ou explique ao colega o porquê de cada etapa realizada. O professor pode, em caso de dificuldade, perguntar quais os casos que satisfazem a cada um dos eventos.
			Alguma confusão pode ser manifestada em relação à probabilidade condicional.	Verificar se essa dificuldade está vinculada a resistência de um viés mecânico para o cálculo de probabilidades. Ou se está relacionada à interpretação do enunciado e no processo de transformação da linguagem natural em linguagem técnica. Ou se está relacionada a alguma dificuldade conceitual em específico.
			Pode ser que seja utilizada a estratégia de cálculo por meio da	Incentivar que os estudantes, mesmo que tenham utilizado a

			expressão: $P(A \cap B) = P(A \mid B)\,.P(B)$	primeira estratégia, reflitam sobre o uso dessa expressão.
	Item 5		A estratégia mais recorrente deve ser também pela contagem dos resultados favoráveis e possíveis. A primeira etapa é compreender o caráter apriorístico do evento "jogador 2 vencer o jogo 4" e que o número de casos possíveis se reduz aos resultados que satisfazem a esse evento. Em seguida, identificar dentro desses casos, aqueles que também satisfazem ao evento "jogador 2 vencer jogo 3". Calcular a probabilidade por meio da razão entre essas quantidades Assim, a probabilidade solicitada é dada por $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$. Caso um estudante não compreenda essa restrição que a condição atribui ao espaço amostral, é possível que ele calcule a probabilidade como $\frac{2}{36}$, por exemplo. Ou ainda, que ele insira todos os casos favoráveis ao evento C (6), resultando em $\frac{6}{20}$ ou até em $\frac{6}{36}$.	Verificar se estão fazendo as devidas interpretações. Questionar: "qual a característica essencial dos casos possíveis nesse item?"; "exemplifique quais os casos em que a condição é satisfeita. Quantos são?"; "Existem casos em que o jogador vence o jogo 3, mas não o 4?".
			Outra possibilidade é utilizar a expressão de definição da probabilidade condicional. $P(C \mid D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)}$ ou $\frac{n(C \cap D)}{n(D)}$	Perguntar se os estudantes se lembram dessa expressão e pedir para dizerem as vantagens e desvantagens de seu uso.
	Item 6		O estudante pode identificar "o jogador 1 vence jogo 2 nas duas primeiras rodadas e perde na terceira rodada" como um evento único. Nesse caso precisará indicar um espaço amostral de 〚 6^6 ou 36^3 ou 46.656 elementos (lançamento de 2 dois dados em três rodadas). E os casos favoráveis será dado por $27\,.27\,.9 = 6.561$. Calculando a probabilidade por meio da razão entre casos favoráveis e possíveis, o resultado será $$\frac{6.561}{46.656} = \frac{9}{64}$$	Caso o estudante opte por essa estratégia, o professor deve incentivá-lo e auxiliá-lo nos processos de contagem, ainda que essa não seja a estratégia mais vantajosa, nem em termos de cálculo, nem em termos de interpretação dos eventos. Essa reflexão pode ser suscitada ao final da resolução ou no momento de discussão coletiva.
			Outra estratégia pressupõe identificar que há três eventos distintos e independentes: • "jogador 1 vence jogo 2 na 1ª rodada". • "jogador 1 vence jogo 2 na 2ª rodada". • "jogador 1 perde jogo 2 na 3ª rodada". Consultar a probabilidade de cada	No caso de os estudantes não conseguirem perceber que se trata de três eventos distintos e não conseguir construir a estratégia exemplificada acima, o professor pode estimular a identificação desses três eventos e de sua independência.

		uma delas na resposta ao item 2. Calcular a probabilidade requerida por meio do produto das probabilidades de cada evento.	
Fase 3: Seleção e sequenciação	Ao longo da Fase 2	É importante que os estudantes compreendam que a sequenciação não objetiva a hierarquização e que todas as etapas individuais de construção matemática são igualmente importantes.	Acompanhar os registros dos estudantes, e tirar fotos à medida em que concluem algum item para coleta de dados para a avaliação. A seleção e sequenciação será realizada item a item, buscando as diferentes estratégias de resolução. Outros aspectos considerados para sequenciação dizem respeito ao nível crescente de adequação procedimental, de uso correto de símbolos matemáticos e de organização/sistematização.
Fase 4: Discussão da Tarefa Matemática	30 min	Interagir, estabelecer conexões entre as respostas, dialogar, explicar a sua estratégia, compreender e avaliar o que é válido na produção dos outros grupos. Relacionar as diferentes estratégias, sistematizações e representações. Avaliar as potencialidades, vantagens e equívocos nas resoluções.	Apresentar, segundo a sequência escolhida, as respostas dos grupos item a item. Respostas parecidas ou próximas podem ser agrupadas e representada por uma delas. Pedir para que o respectivo grupo explique como chegou a essa resposta. Promover o diálogo avaliando as potencialidades, vantagens e equívocos na representação apresentada.
Fase 9: Formalização/ Sistematização das aprendizagens	10 min	Institucionalizar os conceitos, propriedades, ideias e procedimentos relacionados à temática de probabilidade.	Reforçar conceitos, propriedades, ideias e procedimentos relacionados à temática de probabilidade.

Avaliação

Análise das produções dos estudantes na Tarefa 5 e dos diálogos realizados.

Referências bibliográficas para a elaboração da tarefa

BRUNEHILDE, B., CORDEIRO, N. J., OLIVEIRA, F. R. **Jogando com Probabilidade e Estatística**. Rio de Janeiro: SBM, 2018.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**: volume 2. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.