Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

O TRUQUE DAS TAMPINHAS E SUAS GENERALIZAÇÕES: UMA ATIVIDADE LÚDICA PARA O ENSINO DE SISTEMAS LINEARES

Thiago Henrique Campos Santos

Brasília
2025

Thiago Henrique Campos Santos

O TRUQUE DAS TAMPINHAS E SUAS GENERALIZAÇÕES: UMA ATIVIDADE LÚDICA PARA O ENSINO DE SISTEMAS LINEARES

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional — PROFMAT, para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Universidade de Brasília — UnB
Departamento de Matemática — MAT
PROFMAT — SBM

Orientador: Prof. Dr. Rogério César dos Santos — Universidade de Brasília

Brasília, 1 de julho de 2025

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

CS237t

Campos Santos, Thiago Henrique
O TRUQUE DAS TAMPINHAS E SUAS GENERALIZAÇÕES: UMA ATIVIDADE LÚDICA PARA O ENSINO DE SISTEMAS LINEARES / Thiago Henrique Campos Santos; orientador Rogério César dos Santos. Brasília, 2025.
98 p.

Dissertação(Mestrado Profissional em Matemática) Universidade de Brasília, 2025.

1. Ludicidade. 2. Matemágicas. 3. Truque das tampinhas. 4. Atividades lúdicas. 5. Sistemas lineares. I. César dos Santos, Rogério, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

O TRUQUE DAS TAMPINHAS E SUAS GENERALIZAÇÕES: UMA ATIVIDADE LÚDICA PARA O ENSINO DE SISTEMAS LINEARES

Por

Thiago Henrique Campos Santos

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional — PROFMAT, para obtenção de grau de

Mestre em Matemática

Brasília, 1 de julho de 2025

Banca Examinadora:

Professor Dr. Rogério César dos Santos
Universidade de Brasília
Orientador

Professor Dr. Lineu da Costa Araújo Neto
Universidade de Brasília
Avaliador interno

Professor Dr. Thiago Williams Siqueira Ramos
Instituto Federal de Brasília
Avaliador externo

AGRADECIMENTOS

A realização deste trabalho não seria possível sem o apoio de muitas pessoas que estiveram ao meu lado ao longo de seu desenvolvimento.

Agradeço ao professor Rogério pelas inúmeras orientações, pela generosidade com seu tempo, pelas discussões inspiradoras, apoio constante e pela partilha de ideias que ampliaram minha forma de pensar a Geometria e a Educação Matemática. Sua orientação foi fundamental para a construção deste trabalho.

Aos meus pais, meu mais sincero reconhecimento. Foram eles que, desde cedo, me ensinaram a importância de estudar, o que se tornou a base da minha trajetória pessoal e profissional. Às minhas irmãs, que sempre me apoiaram com carinho, meu "muito obrigado".

À minha companheira, Ingrid, deixo um agradecimento especial. Por todo amor, pelo incentivo constante, pela paciência nos momentos difíceis. Quando tudo parece difícil, você está lá e isso basta. Obrigado por caminhar comigo.

Aos meus estudantes, deixo minha profunda gratidão. Vocês são fonte diária de motivação e de inspiração. Cada dificuldade que enfrentam e cada superação me fazem refletir sobre novas maneiras de ensinar, de acolher e de tornar a matemática acessível àqueles que ainda não encontraram seu caminho.

Um agradecimento aos profissionais da enfermaria do segundo andar do Hospital Regional de Santa Maria (HRSM). Em um dos momentos mais difíceis da minha vida, encontrei cuidado, empatia e humanidade. Durante a internação, escrevi várias páginas deste trabalho e não poderia deixar de recordá-los.

Por fim, agradeço à CAPES[1] e à UnB, com destaque ao Departamento de Matemática no âmbito do PROFMAT, que tornam possível o acesso à pesquisa, ao conhecimento e à formação. Sem o suporte dessas instituições, muitos trajetos como o meu seriam impossíveis.

---

[1]O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior — Brasil (CAPES) — Código de Financiamento 001.

"O educador que [...] 'castra' a curiosidade do educando em nome da eficácia da memorização mecânica do ensino dos conteúdos, tolhe a liberdade do educando, a sua capacidade de aventurar-se. Não forma, domestica".

Paulo Freire — Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa, 1996.

RESUMO

A matemática, historicamente marcada por uma abordagem abstrata e, muitas vezes, desconectada do cotidiano de estudantes, enfrenta o desafio de superar a imagem de disciplina difícil e inacessível, frequentemente associada à desmotivação e à ansiedade no ambiente escolar. Nesse contexto, esse componente curricular pode encontrar nas práticas lúdicas uma possibilidade concreta de ressignificação. Diante da diversidade presente nas salas de aula, onde coexistem alunos com diferentes níveis de conhecimento e ritmos de aprendizagem, atividades que integrem o contexto e a prática ao processo educativo tornam-se estratégicas para favorecer a participação e a construção significativa de saberes. Neste trabalho, que adotou a concepção de ludicidade posta por Luckesi (2023), propôs-se a aplicação de uma atividade lúdica baseada no "truque das tampinhas distribuídas", na qual, o apresentador é capaz de determinar a quantidade de tampinhas que um participante distribuiu previamente em suas mãos por intermédio do resultado de algumas operações algébricas realizadas pelo voluntário. A pesquisa adotou o estudo de caso como metodologia, utilizando a observação participante e questionários individuais como instrumentos de coleta de dados, analisados por meio de uma abordagem qualiquantitativa. Os resultados indicam o êxito da atividade lúdica ao evidenciar que o truque das tampinhas despertou interesse e motivação, incentivando a mobilização de conhecimentos matemáticos prévios para a resolução de um problema, além de facilitar a compreensão de conceitos relativos aos sistemas lineares por meio da conexão entre prática e teoria, estimulando a curiosidade e o raciocínio lógico.

Palavras-chave: Truque das tampinhas. Matemágicas. Ludicidade. Atividades lúdicas. Sistemas lineares.

ABSTRACT

Mathematics, historically characterized by its abstract approach and often perceived as disconnected from students' everyday lives, faces the challenge of overcoming its image as a difficult and inaccessible subject — a perception that frequently leads to demotivation and anxiety in the school environment. In this context, playful practices offer a concrete opportunity for re-signifying the subject. Given the diversity within classrooms, where students with varying levels of knowledge and learning paces coexist, activities that integrate context and practice into the educational process become strategic for fostering participation and meaningful knowledge construction. This study, grounded in Luckesi's (2023) conception of playfulness, proposed the implementation of a ludic activity based on the "bottle cap trick," in which a presenter is able to determine the number of bottle caps a participant has distributed between their hands by using the result of a few algebraic operations performed by the volunteer. The research adopted a case study methodology, using participant observation and individual questionnaires as data collection instruments, analyzed through a qualitative-quantitative approach. The results indicate the success of the ludic activity, showing that the bottle cap trick sparked interest and motivation, encouraged the use of prior mathematical knowledge to solve problems, and facilitated the understanding of concepts related to linear systems through the connection between practice and theory, while stimulating curiosity and logical reasoning.

Keywords: Bottle cap trick. Mathemagics. Ludicity. Ludic activities. Linear systems.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Em salas de aula cada vez mais diversas, onde coexistem alunos com diferentes níveis de conhecimento e ritmos de aprendizagem, o professor de matemática enfrenta o desafio adicional de combater a percepção de que a disciplina é difícil, abstrata ou desinteressante (Silveira, 2011). Nesse contexto, as atividades lúdicas se apresentam como uma alternativa pedagógica capaz de tornar o aprendizado mais acessível e envolvente. A ludicidade, ao integrar o processo educativo, favorece a participação ativa dos estudantes e promove a construção de conhecimentos, seja por meio da contextualização de conteúdos, seja pelo seu caráter prático (Silva, 2015).

A ludicidade, enquanto conceito, apresenta múltiplas facetas que se entrelaçam a diferentes contextos históricos, culturais, pedagógicos e ao longo do tempo foi interpretada de diversas maneiras. Massa (2015), ao investigar a origem etimológica da palavra ludicidade, revela que há momentos históricos em que a ludicidade foi interpretada tanto como uma manifestação espontânea da natureza humana, quanto como uma prática educativa ou uma forma de entretenimento. Diversos autores, como Huizinga (2008), Spada (2010) e Luckesi (2023), contribuíram para o entendimento da ludicidade a partir de olhares antropológicos, sociológicos e pedagógicos, ampliando sua compreensão para além do brincar. Nesse panorama, a contribuição de Luckesi se destaca ao conceber a ludicidade como um estado interno de consciência, caracterizado pela vivência plena da atividade lúdica.

Nesse contexto, este trabalho propõe uma atividade lúdica para o ensino de sistemas de equações lineares e o fortalecimento de conceitos envoltos a esse tema com foco em estudantes do ensino médio. A atividade perpassa pela apresentação de um truque com fundamentação matemática envolvendo quantidades de tampinhas que são distribuídas nas mãos, no qual, o apresentador é capaz de determinar a quantidade de tampinhas que um participante distribuiu previamente em suas mãos por intermédio de pouquíssimas informações. A atividade objetiva aguçar a curiosidade dos estudantes e estimulá-los a buscar os porquês da mágica por meio do uso do raciocínio lógico, de estratégias e procedimentos matemáticos.

Este trabalho adota como metodologia o estudo de caso, uma abordagem qualitativa que visa à análise aprofundada de um fenômeno específico em seu contexto material, permitindo inferências analíticas para situações análogas. Fundamentado nas definições de Yin (2001) e Severino (2013), o estudo de caso foi escolhido por sua capacidade de gerar compreensões significativas a partir da investigação de um caso representativo. O objetivo central da pesquisa é avaliar a efetividade do uso de mágicas matemáticas como recurso didático no ensino médio, com foco especial no truque das tampinhas distribuídas, analisando seu potencial como atividade lúdica para o ensino de matemática e seu impacto no despertar do estado lúdico nos estudantes, conforme a perspectiva de Luckesi (2023). Para garantir a confiabilidade dos dados, a pesquisa utilizou duas fontes principais: a observação participante, em que o pesquisador atuou também como professor, e a aplicação de questionários individuais, preenchidos voluntariamente pelos estudantes. A análise dos dados seguiu uma abordagem qualiquantitativa, articulando informações subjetivas e numéricas.

1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, apresenta-se reflexões acerca do conceito de ludicidade, termo amplo que, a depender do contexto, toma diversos significados. Além disso, discute-se o papel das atividades lúdicas no processo educativo, com foco especial nos truques fundamentados em princípios matemáticos, aqui chamados de matemágicas. A proposta é refletir sobre o potencial dessas práticas como ferramentas de apoio ao trabalho do professor, oferecendo caminhos para tornar o ensino da matemática mais interessante, dinâmico e significativo. A discussão parte tanto das orientações presentes em documentos oficiais, quanto de experiências de professores brasileiros que já utilizam as matemágicas em suas salas de aula. Ao longo do capítulo, busca-se mostrar como a ludicidade, aliada ao raciocínio matemático, pode transformar o ambiente de aprendizagem e envolver os estudantes por meio da contextualização dos conteúdos e da resolução de problemas.

1.1. Ludicidade e atividades lúdicas

O termo "ludicidade" é usualmente utilizado e compreendido como alusão a um amplo conjunto de atividades que inclui desde jogos e brincadeiras a atividades realizadas em grupo ou até mesmo de lazer. Entretanto, seu significado epistemológico é um conceito em construção, segue-se buscando sua compreensão precisa, extensão e limites (Luckesi, 2023).

Com isso, torna-se necessário analisar e confrontar diferentes entendimentos no que tange à compreensão do que vem a ser a ludicidade. Spada (2010) diferencia o lúdico de atividades lúdicas. Ela entende que o lúdico é um conceito amplo e que as atividades lúdicas são constituídas por elementos do lúdico. Nas palavras da autora (Spada, 2010, p. 34), "O lúdico é compreendido como sendo um conjunto de ações, situações ou atividades capazes de envolver o imaginário e os sentimentos do sujeito envolvido na ação". Já o termo "ludicidade" é pouco utilizado pela autora e semanticamente remete ao termo "lúdico".

Por outro lado, Massa (2015) busca investigar o termo "ludicidade" partindo de sua origem etimológica, afirmando que ludicidade tem origem no latim "*ludus*", que pode significar jogo, exercício ou imitação. Seguindo a mesma linha investigativa, Huizinga (2008, p. 41) reitera: "o latim cobre todo o terreno do jogo com uma única palavra: *ludus*, de *ludere*, de onde deriva diretamente *lusus*. [...] *Ludus* abrange os jogos infantis, a recreação, as competições, as representações litúrgicas e teatrais e os jogos de azar".

A abordagem de Huizinga (2008) sobre o jogo é filosófica. Seu trabalho evidencia como os jogos moldam a cultura e a organização social. Para ele, essa relação tem caráter tão intrínseco que o termo "*Homo Ludens*" é cunhado em dimensão equivalente ao termo "*Homo Sapiens*". O autor destaca a dificuldade em definir o jogo de forma absoluta, pois considera que o termo tem origem em diversas línguas, portanto, seus significados podem ser diversos, não sendo originado num pensamento lógico/acadêmico.

Por conseguinte, relacionar os termos "jogos" e "ludicidade" torna a busca pela definição de ludicidade paradoxalmente ainda mais imprecisa, visto que a própria definição e uso da palavra "jogo" varia com o tempo histórico considerado, dando, assim, caráter polissêmico à "ludicidade". Isso condiz com a obra de Massa (2015) ao argumentar que a ludicidade é um conceito complexo e multifacetado, que transcende as fronteiras linguísticas e culturais. A falta de uma definição única reflete a diversidade de formas como a ludicidade se manifesta na vida humana.

Contudo, algumas características da ludicidade são evidentes quando consideradas a partir de uma experiência interna do sujeito, visto que quem experimenta a ludicidade o faz de forma própria, pois cada indivíduo carrega consigo uma história de vida única que molda sua dinâmica psicológica e circunstância existencial. Se, em virtude dela, uma atividade causar desconforto ou incômodo ao participante, nela não haverá ludicidade, ainda que usualmente seja lúdica para outros. Portanto, uma atividade, por si só, não é lúdica e nem não lúdica (Luckesi, 2023).

É importante destacar que a abordagem tratada no parágrafo anterior não tem como objeto de estudo as experiências internas dos sujeitos, mas a fenomenologia[2] externa a eles, dando caráter objetivo ao conceito de "ludicidade" que, por consequência, tem como fonte de dados relatos pessoais e informações fornecidas acerca da experiência vivida, conforme Luckesi (2023, p. 20):

> Nesse contexto, a ludicidade, como estado psicológico lúdico, só pode ser vivenciada e, por isso mesmo, percebida e relatada pelo próprio sujeito da experiência.

---

[2]A fenomenologia é uma corrente filosófica que busca a compreensão dos fenômenos a partir da experiência consciente e subjetiva do indivíduo. Opondo-se a explicações objetivas e universais, a fenomenologia se concentra na análise daquilo que se apresenta à consciência, ou seja, nos fenômenos como eles se manifestam para o sujeito — Núcleo de Estudo e Pesquisa em Filosofia e Educação, UFG. Disponível em:https://nepefe.fe.ufg.br/n/3175-que-e-isto-a-fenomenologia#:~:text=A%20Fenomenologia%2C%20nascida%20na%20segunda,que%20se%20apresentam%20%C3%A0%20percep%C3%A7%C3%A3o. Acesso em: 20 out. 2024.

> Observando de fora, podemos descrever a situação observada, contudo, não há como o observador ter ciência da experiência interna daquele que a vivencia. Essa experiência só pode ser descrita por quem a vivencia.

Em síntese, a experiência lúdica, ou simplesmente, ludicidade é uma experiência interna do sujeito, tida como um estado de consciência, praticada ao experimentar uma atividade lúdica que, por sua vez, pertence ao domínio externo ao indivíduo; portanto, tem caráter objetivo e, por isso, passível de observação e descrição. Desta forma, “ludicidade" e “atividades lúdicas” são conceitos distinguíveis, mas inseparáveis (Luckesi, 2023).

A compreensão da ludicidade permeia diferentes investigações empíricas em contextos educacionais. Embora muitas dessas pesquisas não tratem diretamente da dimensão subjetiva da ludicidade, seus resultados evidenciam, em algum grau, a relevância do envolvimento subjetivo do sujeito com a tarefa proposta. Fraga e Albuquerque (2017), buscaram compreender a contribuição da ludicidade nos processos de ensino e aprendizagem de Geografia em turmas do curso de licenciatura em Geografia e em turmas de ensino médio. É interessante destacar que, no referido trabalho, há menção a uma pesquisa que buscou compreender a percepção dos alunos sobre as aulas de Geografia. Ao serem questionados sobre o que falta ou o que mudariam nas aulas de Geografia, 44% dos alunos sugeriram a inclusão de brincadeiras e jogos relacionados aos conteúdos, 31% apontaram a necessidade de mais aulas práticas. Além disso, como conclusão central quanto às práticas lúdicas na investigação com alunos do ensino médio, as autoras apontam (Fraga e Albuquerque, 2017, p.11):

> concluímos que o lúdico constitui uma possibilidade importante para os processos de ensino e aprendizagem da Geografia. O conceito de ludicidade aqui defendido está vinculado à dinâmica interna e externa, ou seja, a ideia de que o desejo do sujeito e a inserção de recursos no cotidiano escolar, articulados, podem influenciar em sua aprendizagem.

Já o estudo desenvolvido por Bacelar (2009), analisa o papel da ludicidade na educação infantil, tendo como público crianças com idades entre um e três anos que, em sua maioria, ainda não havia adquirido plenamente a fala. A pesquisa, de caráter teórico-prático, dialoga com autores como Piaget, Lapierre, Vygotsky e, especialmente, Luckesi, cujas ideias foram fundamentais para compreender a ludicidade como um estado interno de plenitude capaz de impulsionar o desenvolvimento integral da criança. A pesquisa chama a atenção, pois diante da impossibilidade de utilizar a linguagem verbal como principal meio de avaliação, a análise concentrou-se na observação corporal das crianças — seus gestos, expressões e interações durante as atividades lúdicas. Os resultados indicaram que, de fato, era possível utilizar a linguagem corporal para a avaliação da ludicidade entre as crianças. Além disso, as atividades lúdicas favoreceram a construção da autonomia, da criatividade e dos vínculos afetivos, consolidando-se como elemento central e indispensável ao processo de ensino e aprendizagem na educação infantil.

Em trabalhos voltados à área de matemática destacam-se as contribuições de Silva Neto e Pacheco (2017) e Pereira (2024). Silva Neto e Pacheco (2017) dedicaram-se a uma revisão bibliográfica investigando a ludicidade, principalmente, a partir das contribuições de Freire, Luckesi, Friedman, Kishimoto e Vigotsky, evidenciando a importância de desenvolver ações lúdicas de forma coletiva no ambiente da sala de aula, reconhecendo essa prática como fundamental para a construção de aprendizagens significativas e colaborativas, além de promover no estudante uma relação mais prazerosa e positiva com a matemática.

Pereira (2024) não considerou o impacto das experiências internas ao sujeito quando convidado a experienciar uma atividade, isto é, a própria ludicidade, mas investigou o impacto de atividades baseadas em explorações matemáticas a partir de truques de matemágicas aplicadas a estudantes da EJA — Educação de Jovens e Adultos — do ensino médio. A análise dos resultados foi feita por meio da resolução de situações-problema, demonstrações matemáticas e comparações entre desempenhos de pré-testes e pós-testes aplicados aos alunos. Os resultados mostraram que a utilização das matemágicas contribuiu significativamente para a melhoria da compreensão dos alunos em relação aos conteúdos de álgebra e aritmética. Observou-se também maior interesse, participação e capacidade de resolução de problemas entre os estudantes.

As correlações entre os estudos reforçam, portanto, que práticas lúdicas intencionais, que articulam dimensões internas e externas da aprendizagem, constituem caminhos potenciais para transformar a experiência educativa e promover aprendizagens significativas.

1.2. Atividades lúdicas e as matemágicas no ensino de matemática

As atividades lúdicas visam propiciar a experiência lúdica aos sujeitos envolvidos nela, possuem caráter objetivo, pois pertencem a dimensão externa aos indivíduos, portanto, podem ser observadas e descritas por outros enquanto são realizadas, individualmente ou em grupo (Bacelar, 2009). No contexto escolar, tais atividades pressupõem um grau de maior complexidade, pois auxiliam o professor no cumprimento de um objetivo pedagógico, logo, são atividades dotadas de intenção, que exigem um planejamento para a construção de aprendizagens.

Como exemplo, considere a seguinte situação: um professor dividiu sua classe em grupos de n estudantes, postos em roda com um líder previamente escolhido, de modo que um estudante de cada grupo seria escolhido para receber um prêmio. Em cada grupo, a escolha seria feita da seguinte forma: cada um dos n estudantes fala um número inteiro maior ou igual a zero. O líder do time faz a soma S dos números indicados, em seguida, começando pelo vizinho da esquerda, vai apontando um a um na roda, contando: 1, 2, 3, ... , S. Aquele que recebe a contagem S ganhará o prêmio. As seguintes questões podem ser investigadas em meio a vivência da atividade: é possível prever o vencedor antes da contagem realizada pelo líder? Quais estratégias podem ser realizadas para conhecer o vencedor a partir do valor S? Quais técnicas de contagem e cálculos matemáticos podem ser realizados para que a contagem realizada pelo líder não perpasse por S números, isto é, seja mínima? Apesar de simples, o exemplo ilustra uma atividade lúdica: a brincadeira de roda proposta pelo professor; já a ludicidade vem a ser estado interior de consciência, plenitude e prazer com o qual os estudantes tiveram contato. A maneira como cada estudante vivencia a atividade é particular e pode variar de um para outro, podendo esta atividade ser lúdica para alguns estudantes e para outros, não. Assim, para determinar se o estado lúdico foi atingido, a interação por meio do diálogo e registros produzidos acerca das percepções sobre a vivência são ferramentas avaliativas inerentes a este propósito.

No que tange ao contexto do ensino de matemática, D'Ambrósio (1986) aponta que essa disciplina é prevalecente com relação às taxas de exclusão dos sistemas escolares e reitera a necessidade de busca de novas formas de ensiná-la e aprendê-la, sobretudo, àquelas que reconhecem a matemática como atividade inerente ao ser humano, portanto, praticada de forma espontânea, resultante do ambiente sociocultural ao qual se está inserido. Desta forma, o autor defende que é necessária uma abordagem mais contextualizada do ensino da matemática e conectada à realidade dos estudantes, com o objetivo de tornar a disciplina mais acessível e interessante para os discentes.

Silva (2015) indica a dicotomia entre o avanço tecnológico e seus impactos e transformações nos diversos segmentos da sociedade frente à metodologia tradicionalmente adotada para o ensino de matemática, afirmando que ela é pouco atrativa aos estudantes e afastada da realidade. Além disso, para superar tais dificuldades, propõe o uso de didáticas relacionadas ao fazer lúdico em que, nas palavras do autor, "os educandos precisem utilizar-se do raciocínio lógico, de sua capacidade de observar e analisar criticamente os caminhos para soluções dos problemas” (Silva, 2015, p. 7).

Assim, as atividades lúdicas para o ensino de matemática contribuem para a formação intelectual do estudante, promovendo a interação entre os diversos atores que compõem a sala de aula. Deste modo, a prática de atividade lúdicas demanda que os envolvidos no processo educativo portem-se de forma ativa e crítica (Almeida, 1998).

A atividade lúdica escolhida para utilização nesta pesquisa foi planejada a partir de um truque de adivinhação fundamentado na matemática, no qual, professor e estudantes interagem buscando desvendar os porquês da mágica. Esses tipos de truques podem envolver diversas áreas da matemática como álgebra, geometria, probabilidade, topologia e usam os mais diversos materiais para envolver o público, como calendários, cartões, cartas e outros objetos manipuláveis — essas estratégias são comumente chamadas de matemágicas em sua literatura de referência.

Sherard (1998) remonta à origem das matemágicas. O autor explana que esses tipos de truques podem ser encontrados em publicações desde o século XVII e detalha que alguns truques aritméticos são encontrados em “Problèmes plaisons et délectables”, de Claude Gaspar Bachet, publicado em 1612, e em “Recréations mathématiques et physiques”, de Jacques Ozanam, publicado em 1694. Além disso, o autor salienta que alguns dos problemas apresentados por Bachet foram baseados em escritos anteriores de Alcuin, Luca Pacioli di Burgo, Tartaglia e Cardano.

Contemporaneamente, os escritos de Walter William Rouse Ball (1850-1925) e Martin Gardner (1914-2010) contribuíram para a divulgação de matemágicas. Ball foi professor no Trinity College, em Cambridge e, em 1892, escreveu o livro “Mathematical Recreations & Essays”, que se tornou uma fonte de consulta de matemágicas. Gardner, por sua vez, destacou-se pela publicação dos artigos "Mathematical Games" na revista Scientific American, de 1957 a 1981, muitos deles dedicados à comunicação sobre matemágicas, e por seu famoso livro "Mathematics, Magic and Mystery", publicado em 1956 (Sherard, 1998). Atualmente, a literatura sobre matemágicas cresce rapidamente e inclui uma grande variedade de truques, que vão desde aqueles com elevada complexidade de execução até aqueles que são facilmente dominados (Sherard, 1998).

No Brasil, os professores da Universidade Federal de São Carlos, Pedro Luiz Aparecido Malagutti e João Carlos Vieira Sampaio, produzem frequentemente literatura sobre as matemágicas, com foco na perspectiva educacional e na divulgação científica. Entre suas obras, destacam-se os livros “Mágicas, matemática e outros mistérios”, publicado em 2008, e

"Mágicas com papel, geometria e outros mistérios", publicado em 2014. Além da produção literária, os autores também ministram palestras e oficinas em simpósios e congressos da área de matemática[3]. Nessas atividades, eles incluem a apresentação de truques matemáticos, alguns vinculados até mesmo a questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas — OBMEP.

A nível da educação básica, são noticiados casos de professores que utilizam as matemágicas como ferramenta de ensino. É o caso da professora Leila Graziela de Mendonça e Castro[4], que leciona na rede estadual de São Paulo. A docente implementou truques fundamentados em matemática durante suas aulas, em uma disciplina eletiva no ensino médio e, posteriormente, nas aulas da disciplina de matemática. Além de capturar a atenção de seus alunos, os truques ajudaram a produzir aprendizagem significativa.

Iniciativas similares são encontradas também no ensino fundamental e em eventos de popularização da matemática para o público geral. Em São Carlos, aulas ministradas em escolas municipais utilizam jogos com dados, cores e outros materiais para prender a atenção dos alunos e facilitar a compreensão de conceitos complexos, os estudantes avaliaram a prática de forma positiva[5]. Em Brasília, durante edição local do festival Pint of Science, iniciativa global que visa aproximar a ciência e a sociedade de forma descontraída e acessível ocupando, para isso, espaços não acadêmicos, como bares e restaurantes, o professor Rogério César dos Santos e dois de seus orientandos, Thiago Henrique Campos Santos, autor desta dissertação, e Hanna Carolina da Silva Rezende, utilizaram truques fundamentados em matemática, em que a audiência — clientes do estabelecimento comercial — participou como voluntários. O objetivo era mostrar que há caminhos para ensinar matemática de maneira divertida e envolvente. A apresentação foi bem recebida pelos presentes, que demostraram entusiasmo e participação ativa[6].

As matemágicas, truques fundamentados na matemática, têm um grande potencial de envolver e fascinar o público. Quando a plateia busca desvendar os porquês do truque, mobiliza a matemática que traz consigo na busca de um encadeamento lógico que a leve a uma resposta,

---

[3]Nos links a seguir, é possível assistir à participação dos autores no evento de lançamento do Congresso Internacional de Matemáticos (ICM) de 2018, realizado no Brasil, apresentando a palestra "Matemágicas" (Partes 1 e 2). Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=Z_-EWxT5JVE. Acesso em: 13 fev 2025. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=oZjPOIQDp_0. Acesso em 13 fev 2025.

[4]Disponível em: https://ultimosegundo.ig.com.br/educacao/2017-04-04/matematica-magica.html. Acesso em: 13 fev. 2025.

[5]Disponível em: https://g1.globo.com/sp/sao-carlos-regiao/noticia/estudantes-ensinam-matematica-com-truques-de-magica-em-sao-carlos-sp.ghtml. Acesso em: 13 fev. 2025.

[6]Disponível em: https://sbm.org.br/noticias/pint-of-science-2024-evento-chega-a-10a-edicao-no-brasil-e-alia-matematica-e-truques-ludicos-em-brasilia/. Acesso em: 13 fev. 2025.

portanto, os indivíduos envolvidos estão resolvendo problemas. Nesse contexto, a utilização das matemágicas como ferramenta de ensino tem como objetivo o estímulo à resolução de problemas e o incentivo ao desenvolvimento do raciocínio lógico, do pensamento crítico e da criatividade dos estudantes. Para Polya (1995, p. 3), o processo de resolução de problemas e o papel do professor que deseja desenvolver tal habilidade em seus estudantes podem ser caracterizados da seguinte maneira.

> A resolução de problemas é uma habilitação prática como, digamos, o é a natação. Adquirimos qualquer habilitação por imitação e prática. [...] Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os [...] O professor que deseja desenvolver nos estudantes a capacidade de resolver problemas deve incutir em suas mentes algum interesse por problemas e proporcionar-lhes muitas oportunidades de imitar e de praticar. Além disso, quando o professor resolve um problema em aula, deve dramatizar um pouco as suas ideias e fazer a si próprio as mesmas indagações que utiliza para ajudar os alunos. Graças a esta orientação, o estudante acabará por descobrir o uso correto das indagações e sugestões e, ao fazê-lo, adquirirá algo mais importante do que o simples conhecimento de um fato matemático qualquer.

1.3. Políticas educacionais e o lugar da ludicidade na escola

Considerando os principais documentos que regem a educação nacional — a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) — para a compreensão de como abordam o tema ludicidade, observa-se que, na BNCC, os termos “lúdico” e “ludicidade” são tratados de maneira explícita. Já nos PCN, embora haja menção ao termo “lúdico”, a valorização das atividades lúdicas ocorre de forma implícita, especialmente no que se refere ao ensino de matemática. Ainda que os PCN tenham sido, em grande medida, substituídos pela BNCC como principal diretriz normativa, sua inclusão nesta análise se justifica pelo valor histórico e pela contribuição que oferecem ao entendimento da evolução das orientações curriculares no Brasil, particularmente no que se refere à presença e ao tratamento da ludicidade no contexto educacional.

Os termos “lúdico” e “ludicidade” são mais frequentemente referenciados na BNCC ao tratar da educação infantil e dos anos iniciais do ensino fundamental. O documento classifica como competência específica, no âmbito da disciplina de Arte, experienciar a ludicidade, a percepção, a expressividade e a expressão da imaginação como forma de ressignificação do ambiente escolar. Ao considerar a prática corporal no contexto da Educação Física escolar, o documento aprofunda-se ao destacar os benefícios educacionais que as atividades lúdicas podem trazer para além da ludicidade (Brasil, 2018, p. 220):

> Ao brincar, dançar, jogar, praticar esportes, ginásticas ou atividades de aventura, para além da ludicidade, os estudantes se apropriam das lógicas intrínsecas (regras, códigos, rituais, sistemáticas de funcionamento, organização, táticas etc.)

Não há, na BNCC, menções explícitas aos elementos lúdicos no contexto do ensino de matemática para o ensino médio. O apelo à ludicidade é encontrado somente de forma implícita, quando o documento versa sobre a utilização de jogos (digitais ou não) como forma de articular o conhecimento matemático à ação prática.

As diretrizes orientadoras dos PCN, em linhas gerais, ao tratar da temática lúdica, apresentam-se com perspectiva próxima à BNCC, no que diz respeito, principalmente, à Educação Infantil. O documento destaca a importância das atividades lúdicas na aquisição do repertório cultural dos estudantes por meio de jogos e brincadeiras.

No contexto do ensino fundamental, em particular, ao tratar das orientações para o ensino de matemática, os PCN entendem o jogo como objeto sociocultural em que a matemática está presente, além de uma atividade natural no desenvolvimento de processos psicológicos básicos. Ademais, toma como consideração preliminar que os jogos, enquanto recursos didáticos,

> têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância, a base da atividade matemática (Brasil, 1997, p.19).

Apesar das orientações dos PCN em relação ao ensino de matemática restringirem as atividades lúdicas, em sua maioria, ao uso de jogos, e embora não usem o termo “ludicidade” ou “atividade lúdica” de forma explicita, o texto utiliza uma linguagem que sugere a importância dessas atividades, ao considerar a relevância de atividades prazerosas e desafiadoras na construção da aprendizagem.

2. METODOLOGIA

A metodologia de pesquisa adotada neste trabalho é o estudo de caso. Este fundamenta-se como uma metodologia qualitativa que visa a análise de um caso particular, aprofundando-se na investigação de fenômenos específicos, considerando seu contexto material. Embora o estudo de caso tenha como foco a compreensão aprofundada de um caso específico, isso não impede a possibilidade de formulações gerais a partir dele. Tais formulações partem de pressupostos analíticos e superam a lógica da simples "amostragem". Desta forma, podem-se gerar formulações extensíveis a contextos semelhantes (Yin, 2001).

Severino (2013, p. 105), ao tratar do estudo de caso, entende que esta é uma metodologia

> que se concentra no estudo de um caso particular, considerado representativo de um conjunto de casos análogos, por ele significativamente representativo. A coleta dos dados e sua análise se dão da mesma forma que nas pesquisas de campo, em geral. O caso escolhido para a pesquisa deve ser significativo e bem representativo, de modo a ser apto a fundamentar uma generalização para situações análogas, autorizando inferências.

Neste trabalho, o estudo de caso justifica-se ao avaliar a efetividade do uso de mágicas matemáticas como recurso didático no âmbito do ensino médio, sobretudo ao investigar o potencial do truque das tampinhas distribuídas como atividade lúdica para o ensino de matemática. Há de se considerar, também, a perspectiva de ludicidade posta por Luckesi (2023) como um estado de consciência, visto que trabalhos análogos que investigaram a ludicidade partindo desse referencial teórico o fizeram, em sua maioria, com o público infantil ou em contextos distintos ao do ensino de matemática, tornando este estudo representativo.

Assim, investigar o uso de mágicas matemáticas como ferramenta de ensino de matemática e seu potencial em despertar o estado lúdico em adolescentes pode ser uma tarefa desafiadora, pois, nesta etapa, esses jovens, distantes da fase infantil e querendo cada vez mais distanciar-se dela, podem tender a desconsiderar a linguagem da atividade, visto que, de maneira geral, as atividades lúdicas são mais comumente destinadas ao contexto e às práticas das etapas iniciais da educação formal.

A fim de garantir a confiabilidade do estudo, este trabalho considerou duas fontes independentes para a coleta de dados: a observação participante e, a nível documental, um questionário de pesquisa, que registrou a percepção dos estudantes frente à prática pedagógica realizada. O questionário foi preenchido de maneira individual e independente pelos estudantes que se voluntariaram para o estudo de caso. Ademais, todos os instrumentos e procedimentos do estudo são descritos ao longo do trabalho, possibilitando sua replicabilidade de modo a garantir a possibilidade de testes das conclusões obtidas em contexto similares no futuro.

Yin (2001, p. 116) avalia que a observação participante oferece ao pesquisador oportunidades incomuns, como

> a capacidade de perceber a realidade do ponto de vista de alguém de "dentro" do estudo de caso, e não de um ponto de vista externo. Muitas pessoas argumentam que essa perspectiva é de valor inestimável quando se produz um retrato acurado do estudo de caso.

Assim, ao optar pela observação participante, o pesquisador que, neste trabalho, cumpriu o papel de professor na observação participante do estudo de caso, teve a oportunidade de observar atento e diretamente o envolvimento dos estudantes com a atividade lúdica proposta e de mediar a argumentação matemática dos estudantes na busca pelos porquês do truque.

No tocante à análise de dados dos questionários respondidos pelos participantes do estudo de caso, serão utilizadas abordagens metodológicas características da pesquisa qualiquantitativa, explorando aspectos subjetivos e contextuais integrados à análise de dados numéricos.

3. CONCEITOS INICIAIS

Neste capítulo, serão apresentadas as bases matemáticas que fundamentam o truque das tampinhas distribuídas, buscando esclarecer os conceitos que sustentam seus mecanismos de funcionamento. A análise parte de princípios fundamentais da aritmética e dos sistemas lineares, abordando definições, propriedades e relações essenciais para a compreensão dos porquês do truque.

3.1. Múltiplos e divisores

A divisão no conjunto dos números inteiros nem sempre é possível, sendo essa possibilidade caracterizada pela relação de divisibilidade (Hefez, 2022). Há uma série de conceitos e propriedades envoltos a esta relação e que alicerçam as discussões acerca dos múltiplos e divisores. O trabalho de Alencar Filho (1981) constitui-se como principal fonte de consulta para definições e resultados apresentados nesta seção.

Definição 3.1.1. Sejam a,$b \in \mathbb{Z}$, com $a \neq 0$. Diz-se que a divide b, e representa-se por $a \mid b$, quando existe um número inteiro c tal que $b = ac$.

Observe que a notação $a|b$ não denota uma fração, tampouco uma operação em $\mathbb{Z}$, ela simplesmente verifica se é verdade a existência de $c \in \mathbb{Z}$ tal que satisfaça $b = ac$. A relação $a|b$ denomina-se a relação de divisibilidade em $\mathbb{Z}$. Se a divide b, também se diz que b é um múltiplo de a, que a é um divisor de b ou, ainda, que b é divisível por a.

Exemplo 3.1.2.

$a|0$, pois $0 = a \cdot 0$, para todo inteiro a não nulo;

-2|6, pois $6 = (-2) \cdot (-3)$;

No entanto, 6 não divide -2, pois não existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $-2 = 6 \cdot c$.

Proposição 3.1.3. Sejam a,$b \in \mathbb{Z}$.

(i) Se $a|b$ e $a|c$, então $a|(bx + cy)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$;

(ii) Se $a|b$ e $b \neq 0$, então $|a| \leq |b|$.

Demonstração: De fato,

(i) se $a|b$, então $b = aj_1$, para algum $j_1 \in \mathbb{Z}$. Se $a|c$, então $c = aj_2$, para algum $j_2 \in \mathbb{Z}$. Portanto, para x, $y \in \mathbb{Z}$, segue que:

$$bx + cy = aj_1x + aj_2y = a(j_1x + j_2y)$$

Como o conjunto dos números inteiros é fechado para as operações usuais de soma e produto, tem-se $j_1x + j_2y \in \mathbb{Z}$, isto é, $a|(bx + cy)$. Uma generalização imediata, a partir dessa demonstração, é: se $a|b_k$, para $k = 1, 2, 3, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$. Então, quaisquer que sejam os inteiros $x_1, x_2, \dots, x_n$, $a|(b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n)$.

(ii) se $a|b$, existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ca$. Tomando o módulo em ambos os lados da igualdade tem-se, $|b| = |ac| = |a||c|$. Como $b \neq 0$, segue que $c \neq 0$, assim, $1 \leq |c|$, portanto, $|a| \leq |a||c| = |b|$. □

Definição 3.1.4. Seja $a \in \mathbb{Z}$. O conjunto de todos os divisores de a, indica-se por $D(a)$, isto é, $D(a) = \{x \in \mathbb{Z}^* : x|a\}$, em que $\mathbb{Z}^*$ denota o conjunto dos números inteiros não nulos.

Exemplo 3.1.5.

$D(0) = \{x \in \mathbb{Z}^* : x|0\} = \mathbb{Z}^*$;

$D(1) = \{x \in \mathbb{Z}^* : x|1\} = \{-1,1\}$;

$D(-4) = \{x \in \mathbb{Z}^* : x|-4\} = \{\pm1, \pm2, \pm4\}$.

É imediato que, para todo $a \in \mathbb{Z}$, $D(a) = D(-a)$, além disso, como $a \cdot 1 = a = (-a) \cdot (-1)$, conclui-se que $1, -1, a$ e $-a$ são divisores de a, chamados divisores triviais de a. Além disso, dado $a \in \mathbb{Z}^*$, se $x|a$, então $0 < |x| \leq |a|$. Logo, $D(a) \subset [-|a|, |a|]$, isto é, a possui um número finito de divisores.

Definição 3.1.6. O conjunto de todos os múltiplos de $a \in \mathbb{Z}^*$ indica-se por $M(a)$, isto é, $M(a) = \{x \in \mathbb{Z} : a|x\} = \{a \cdot n : n \in \mathbb{Z}\}$.

Conforme a definição, tem-se que $a \in \mathbb{Z}^*$ possui infinitos múltiplos e $M(a) = M(-a)$. Para exemplificar a definição, encontra-se $M(1) = M(-1) = \mathbb{Z}$ e $M(3) = \{3 \cdot n : n \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm3, \pm6, \pm9, \dots\}$.

Definição 3.1.7. Dados a,$b \in \mathbb{Z}$. Todo número $d \in \mathbb{Z}^*$ é dito um divisor comum de a e b se $d|a$ e $d|b$.

Nos termos da definição 3.1.4 $d \in \mathbb{Z}^*$ é um divisor comum de a,$b \in \mathbb{Z}$ se d pertence simultaneamente a $D(a)$ e $D(b)$. Denotando o conjunto de todos os divisores comuns de a e b por $D(a, b)$, isto é, $D(a, b) = \{x \in \mathbb{Z}^* : x|a \text{ e } x|b\} = \{x \in \mathbb{Z}^* : x \in D(a) \text{ e } x \in D(b)\} = D(a) \cap D(b)$. Evidentemente, $D(a) \cap D(b) = D(b) \cap D(a)$, ou seja, $D(a, b) = D(b, a)$.

Exemplo 3.1.8.

Como $D(12) = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12\}$ e $D(14) = \{\pm1, \pm2, \pm7, \pm14\}$, portanto $D(12,14) = D(12) \cap D(14) = \{\pm1, \pm2\}$.

Definição 3.1.9. Sejam $a,b \in \mathbb{Z}$ não simultaneamente nulos, isto é, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Denomina-se máximo divisor comum de a e b, o inteiro positivo d que satisfaz as condições:

(i) $d \in D(a,b)$;

(ii) Se $c \in D(a,b)$, então $c \leq d$.

Em outras palavras, o máximo divisor comum de a e b, mais comumente chamado de mdc de a e b, é o maior inteiro positivo que divide tanto a quanto b. Em símbolos, se d é o mdc de a e b, escreve-se $mdc\ (a,b) = d$.

No exemplo 3.1.8 nota-se que $mdc(12,14) = 2$. Além disso, é imediato que $mdc(a,b) = mdc(b,a)$, $mdc(0,0)$ não existe e que o $mdc(1,a) = 1$. Se $a|b$, então o $mdc(a,b) = |a|$. Pois, se $x \in \mathbb{Z}$ é um divisor comum de a e b, em particular, $x|a$, com $a \neq 0$, já que $a|b$. Então, pela Proposição 3.1.3, tem-se $x \leq |x| \leq |a|$. Por outro lado, como $a|b$, $|a| \in D(a,b)$. Assim, $|a|$ é o maior dentre todos os outros divisores comuns de a e b, isto é, $mdc(a,b) = |a|$. A próxima proposição garantirá a existência e a unicidade do $mdc(a,b)$.

Proposição 3.1.10. Sejam $a,b \in \mathbb{Z}$ não simultaneamente nulos, então existe e é único o $mdc(a,b)$. Além disso, existem inteiros x e y tais que

$$mdc(a,b) = ax + by.$$

Isto é, o $mdc(a,b)$ é escrito como uma combinação linear de a e b.

Demonstração: Seja S o conjunto de todos os inteiros positivos da forma $au + bv$, com $u, v \in \mathbb{Z}$, isto é:

$$S = \{au + bv : \ au + bv > 0 \text{ e } u, v \in \mathbb{Z}\}.$$

O conjunto S, assim definido, é não vazio. De fato, sem perda de generalidade, suponha $a \neq 0$, nesse caso, tem-se que um dos inteiros $a = a \cdot 1 + b \cdot 0$, ou $-a = a(-1) + b \cdot 0$ é positivo e, portanto, pertence a S. Como S é um subconjunto do conjunto dos números naturais, segue, pelo Princípio da Boa Ordenação[7], que S possui um único elemento mínimo d, sendo d elemento de S, tem-se $d > 0$ e que existem x, $y \in \mathbb{Z}$ tais que $d = ax + by$.

Resta mostrar que $d = mdc(a,b)$. De fato, pelo algoritmo da divisão euclidiana[8], tem-se:

$$a = dq + r, \text{ com } 0 \leq r < d.$$

Que resulta em:

---

[7]O Princípio da Boa Ordenação, ou simplesmente PBO, afirma que todo subconjunto não-vazio do conjunto dos números naturais possui um menor elemento. Para uma leitura mais aprofundada, o leitor pode consultar a referência Hefez, 2022, p. 10.

[8]O algoritmo da divisão euclidiana garante que, dados dois números inteiros a e b $\neq 0$, determina-se de forma única inteiros q e r, tais que $a = b \cdot q + r$, em que $0 \leq r < |b|$. Uma demonstração para esse fato pode ser encontrada em Hefez, 2022, p. 44.

$$r = a - dq = a - (ax + by)q = a(1 - qx) + b(-qy).$$

Assim, o resto r é uma combinação linear de a e b, isto é, $r \in S$. Como $0 \leq r < d$ e $d > 0$ é o elemento mínimo de S, segue que $r = 0$, caso contrário, r seria um elemento de S menor que seu elemento mínimo, o que é impossível. Com isso, $a = dq$, isto é, $d|a$. De forma inteiramente análoga, conclui-se que $d|b$. Logo, $d \in D(a, b)$, com $d > 0$.

Por fim, se $c \in D(a, b)$, com $c > 0$, então $c|a$, e $c|b$. Pela Proposição 3.1.3, $c|ax + by$, assim, $c|d$ e, por isso, $c = |c| \leq |d| = d$. Portanto, d é o maior divisor comum positivo de a e b, ou seja:

$$mdc(a, b) = d = ax + by$$

O que conclui a demonstração. □

A demonstração da Proposição 3.1.10 explicita que o $mdc(a, b)$ é o menor inteiro positivo da forma $ax + by$ — uma combinação linear de a e b. Note que, essa representação não é única , pois $d = mdc(a, b) = a(x + bt) + b(y - at)$, para todo $t \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 3.1.11. Sejam $a = 3$ e $b = 24$. Tem-se $mdc(3, 24) = 3 = 3 \cdot (-7) + 24 \cdot 1$, ou ainda, para $t \in \mathbb{Z}$, $mdc(3, 24) = 3 = 3(-7 + 24t) + 24(1 - 3t)$**.**

Definição 3.1.12. Dados a, $b \in \mathbb{Z}$, não simultaneamente nulos. Os números a e b são ditos primos entre si quando $mdc(a, b) = 1$.

Proposição 3.1.13. Sejam a e $b \in \mathbb{Z}$, não simultaneamente nulos. Os números a e b são primos entre si se, e somente se, existem inteiros x e y tais que $1 = ax + by$.

Demonstração: Se a e b são primos entre si, então $mdc(a, b) = 1$. Pela Proposição 3.1.10, existem x,$y \in \mathbb{Z}$ tais que $1 = ax + by$. Reciprocamente, suponha que existam $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $1 = ax + by$, com a e b não simultaneamente nulos. Seja $d = mdc(a, b)$. Como $d|a$ e $d|b$, a Proposição 3.1.3 garante que $d|(ax + by)$,isto é, $d|1$, o que implica $d = 1$. Portanto, o $mdc(a, b) = 1$ e conclui-se, assim, que a e b são primos entre si. □

Com isso, verifica-se que, no conjunto dos números naturais, um número e seu sucessor sempre serão primos entre si. De fato, dado n um inteiro positivo, os números n e $n + 1$, são tais que $1 = (n + 1) \cdot 1 + n \cdot (-1)$. □

Proposição 3.1.14. Sejam a,b,$c \in \mathbb{Z}$ tais que $a|bc$ e o $mdc(a, b) = 1$, então $a|c$.

Demonstração: Se $a|bc$, então existe $j \in \mathbb{Z}$, tal que $bc = aj$. Sendo o $mdc(a, b) = 1$, pela Proposição 3.1.13, segue que existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $ax + by = 1$. Multiplicando ambos os membros da igualdade anterior por c, resulta em $acx + bcy = c$. Portanto, $c = acx + ajy = a(cx + jy)$, como $cx + jy \in \mathbb{Z}$, segue que, $a|c$. □

Vale ressaltar que a condição $a|bc$ não é suficiente para garantir que $a|c$, por exemplo $12|9 \cdot 8$, mas 12 não divide 9 e nem 8. Analisando o caso em que $a|bc$ e a não divide b, em substituição a hipótese de a e b números primos entre si, nota-se que esta propriedade ainda não seria válida, basta utilizar o mesmo exemplo tomando $a = 12$, $b = 8$ e $c = 9$.

3.2. Sistemas lineares

Os documentos curriculares norteadores da educação nacional, ao tratar do ensino de matemática, constantemente destacam a importância do ensino dessa disciplina atrelado a situações práticas para que os conceitos possam ter significado concreto. Por sua vez, é notório o potencial que os sistemas lineares apresentam enquanto ferramenta para equacionar e modelar situações reais.

Portanto, quando os professores utilizam os sistemas lineares para articular os conhecimentos matemáticos a situações do cotidiano na perspectiva da resolução de problemas, eles estão não apenas cumprindo as diretrizes curriculares, mas também proporcionando aos estudantes uma experiência de aprendizagem mais engajadora, significativa e que contribui para o desenvolvimento crítico dos mesmos. Alguns aspectos teóricos para a compreensão dos sistemas lineares são apresentados a seguir, considerando os estudos de Hoffman e Kunze (1970) e Coelho (2001) como principais fontes de consulta.

Definição 3.2.1. Um sistema de equações lineares com coeficientes reais a_{ij} com $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$, incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ e termos independentes $b_1, b_2, \dots, b_m$ é um conjunto de equações da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{3.1}$$

em que, $x_1, x_2, \dots, x_n$ e $b_1, b_2, \dots, b_m$ são números reais. Toda n-upla de números reais $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que satisfaz a cada uma das equações postas é dita uma **solução** do sistema. Se $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ o sistema é dito **homogêneo**.

Uma estratégia para encontrar-se uma solução para um sistema linear é o processo de eliminar incógnitas. Nele, objetiva-se efetuar certas operações nessas equações para obter-se um sistema que possa ser facilmente resolvido e que possua o mesmo conjunto solução do sistema inicial. Esse processo será ilustrado a seguir.

Exemplo 3.2.2. Considere o sistema linear $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$.

Somando-se (-2) vezes a segunda equação à primeira equação obtém-se $-7x_2 - 7x_3 = 0$, ou equivalentemente, $x_2 = -x_3$. Somando 3 vezes a primeira equação à segunda equação, obtém-se $7x_1 + 7x_3 = 0$, isto é, $x_1 = -x_3$. Desta forma, conclui-se que, se (x_1, x_2, x_3) é uma solução, então $x_1 = x_2 = -x_3$. Por outro lado, toda tripla ordenada deste tipo é uma solução, pois, se a é um número real ,então $(a, a, -a)$ é tal que $\begin{cases} 2a - a - a = 0 \\ a + 3a - 4a = 0 \end{cases}$, assim, toda tripla ordenada deste tipo é solução do sistema.

O processo ilustrado no exemplo acima consiste em multiplicar as equações do sistema inicial por escalares convenientes e, então, somá-las para eliminar incógnitas, isto é, obter novas equações em que alguns dos x_j, $1 \leq j \leq n$, não estejam presentes.

Observe que, para um sistema genérico como em (3.1), tomando m escalares $c_1, c_2, \ldots, c_m$ e multiplicando a j-ésima equação por c_j, tem-se:

$$\begin{cases} c_1 a_{11} x_1 + c_1 a_{12} x_2 + \cdots + c_1 a_{1n} x_n = c_1 b_1 \\ c_2 a_{21} x_1 + c_2 a_{22} x_2 + \cdots + c_2 a_{2n} x_n = c_2 b_2 \\ \vdots \\ c_m a_{m1} x_1 + c_m a_{m2} x_2 + \cdots + c_m a_{mn} x_n = c_m b_m \end{cases},$$

somando essas equações, obtém-se a equação a seguir:

$$(c_1 a_{11} + c_2 a_{21} + \cdots + c_m a_{m1}) x_1 + (c_1 a_{12} + c_2 a_{22} + \cdots + c_m a_{m2}) x_2 +$$
$$\ldots + (c_1 a_{1n} + c_2 a_{2n} + \cdots + c_m a_{mn}) x_n = c_1 b_1 + c_2 b_2 + \cdots + c_m b_m.$$

Essa equação será chamada uma **combinação linear** das equações de (3.1). Note que, toda solução do sistema (3.1), também é solução desta nova equação. Essa é a ideia central do processo de eliminação. Considere um outro sistema de equações lineares

$$\begin{cases} b_{11} x_1 + b_{12} x_2 + \cdots + b_{1n} x_n = d_1 \\ b_{21} x_1 + b_{22} x_2 + \cdots + b_{2n} x_n = d_2 \\ \vdots \\ b_{k1} x_1 + b_{k2} x_2 + \cdots + b_{kn} x_n = d_k \end{cases}, \tag{3.2}$$

em que cada uma de suas k equações é uma combinação linear das equações de (3.1), então toda solução de (3.1) é uma solução de (3.2). Note que, nessas condições, podem existir soluções de (3.2) que não são soluções de (3.1), o que evidentemente não ocorreria se cada equação de (3.1) também fosse uma combinação linear das equações de (3.2). Desta forma, dois sistemas de equações lineares são ditos **equivalentes** quando cada equação de cada sistema é uma combinação linear das equações do outro sistema .

As observações postas no parágrafo anterior são suficientes para justificar o resultado a seguir.

Proposição 3.2.3. Sistemas de equações lineares equivalentes possuem exatamente as mesmas soluções.

Para que o processo ilustrado no exemplo 3.2.2 seja eficiente para determinar soluções de sistemas de equações lineares como em (3.1), é necessário que o novo sistema seja equivalente ao sistema inicial e que ele seja mais facilmente resolvível. Os parágrafos seguintes dedicam-se a argumentar que sempre é possível produzir tais sistemas.

Inicialmente, observa-se que, realizando combinações lineares de equações de sistemas lineares, os cálculos são realizados apenas com os coeficientes e os termos independentes do sistema. Isto é, o sistema (3.1) pode ser convenientemente expresso pela equação matricial $AX = B$, em que:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

A matriz A é dita matriz dos coeficientes do sistema e a matriz $A|B$ definida por:

$$A|B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\, b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \;\; b_2 \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} b_m \end{bmatrix},$$

é denominada matriz ampliada do sistema.

Considere, a seguir, 3 operações elementares sobre as linhas da matriz A. Quando aplicadas à matriz $A|B$, tais operações correspondem à substituição de equações do sistema (3.1) por combinações lineares de suas equações. Uma **operação elementar sobre linhas** de uma matriz A de coeficientes reais, é uma função e_k que associa a cada matriz $A_{m\times n}$ uma matriz $e_k(A)_{m\times n}$, $k = 1,2$ ou 3, e seus elementos são assim descritos:

(i) $e_1(A)_{ij} = a_{ij}$ se $i \neq r, e_1(A)_{rj} = ca_{rj}$, se $i = r$, $1 \leq r \leq m$, o que corresponde à multiplicação da r-ésima linha de A por um escalar $c \neq 0$.

(ii) $e_2(A)_{ij} = a_{ij}$ se $i \neq r, e_2(A)_{rj} = a_{rj} + ca_{sj}$, se $i = r, 1 \leq r, s \leq m$, o que corresponde à substituição da r-ésima linha de A pela linha r mais c vezes a linha s, sendo c um escalar qualquer e $r \neq s$.

(iii) $e_3(A)_{ij} = a_{ij}$ se $i \neq r$ e $i \neq s$, $e_3(A)_{rj} = a_{sj}$, se $i = r$ e $e_3(A)_{sj} = a_{rj}$, se $i = s$, $1 \leq r, s \leq m$, o que corresponde à transposição da linha r pela linha s.

Note que, a partir de cada nova matriz obtida pela aplicação de uma operação elementar sobre linhas, é possível retomar a matriz original aplicando uma outra operação elementar sobre linhas.

Proposição 3.2.4. A cada operação elementar sobre linhas e_k, $k = 1,2$ ou 3, corresponde uma operação elementar $[e_k]^{-1}$, da mesma forma de e_k, tal que $[e_k]^{-1}\big(e(A)\big) = e([e_k]^{-1}(A)) =$

A, para qualquer matriz $A_{m\times n}$. Em outras palavras, a operação inversa de uma operação elementar sobre linhas existe e é uma operação elementar sobre linhas equivalente.

Demonstração: De fato, defina a inversa de:

(i) e_1 por $[e_1]^{-1}$ como sendo a operação que multiplica a linha r por c^{-1}, isto é, $[e_1]^{-1}(A)_{ij} = a_{ij}$ se $i \neq r$, $[e_1]^{-1}(A)_{rj} = c^{-1}a_{rj}$, se $i = r$, $1 \leq r \leq m$.

(ii) e_2 por $[e_2]^{-1}$ como sendo a operação que substitui a linha r pela linha r mais $(-c)$ vezes a linha s, isto é, $[e_2]^{-1}(A)_{ij} = a_{ij}$ se $i \neq r$, $[e_2]^{-1}(A)_{rj} = a_{rj} + (-c)a_{sj}$, se $i = r, 1 \leq r, s \leq m$.

(iii) e_3 por $[e_3]^{-1}$ como sendo a operação que transpõe as linhas r e s, isto é, $e_3 = [e_3]^{-1}$.

É evidente que em cada um dos três casos tem-se $[e_k]^{-1}\big(e(A)\big) = e([e_k]^{-1}(A) = A$, com $k = 1{,}2$ ou 3 e A uma matriz $m \times n$ qualquer. □

Definição 3.2.5. Se A e B são matrizes $m \times n$ de coeficientes reais, diz-se que B é linha-equivalente a A, se B pode ser obtida de A por uma sequência finita de operações elementares sobre linhas.

Definição 3.2.6. Uma matriz $R_{m\times n}$ é dita linha-reduzida se:

(a) o primeiro elemento não-nulo em cada linha não-nula de R é igual a 1;

(b) cada coluna de R que contém o primeiro elemento não-nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos nulos.

No exemplo 3.2.2., buscava-se uma maneira de transformar o sistema dado em um sistema equivalente de fácil resolução, na verdade, a matriz linha-reduzida é a denominação formal da forma matricial desejada. Observe que ao considerarmos $A|B$ a matriz aumentada do sistema (3.1), é possível obter uma matriz linha-reduzida, da seguinte forma (Hoffman e Kunze, 1970): se todo elemento da primeira linha de $A|B$ é 0, então a condição (a) é satisfeita para a primeira linha. Caso a linha 1 tenha um elemento não-nulo, tome k, $1 \leq k \leq n$, o menor inteiro positivo para o qual o elemento $a_{1k} \neq 0$. Multiplicando a linha 1 por $\frac{1}{a_{1k}}$ a condição (a) fica então satisfeita para a linha 1. Além disso, para cada $i \geq 2$ faça $(-a_{ik})$ vezes a linha mais à linha i, assim, o primeiro elemento não-nulo da linha 1 ocorre na coluna k, este elemento é 1 e todos os demais elementos da coluna k são nulos.

A partir da matriz resultante das operações acima, pode-se dedicar a linha 2. Se todo elemento da linha 2 é nulo, não é necessário que nada seja feito. Se algum elemento da linha 2 é diferente de 0, proceda de forma análoga a linha 1 e multiplique a linha 2 por um escalar conveniente de modo que o primeiro elemento não-nulo seja 1. Caso a linha 1 tenha um primeiro elemento não nulo na coluna k, este primeiro elemento não-nulo na linha 2 não pode ocorrer na coluna k, considere que este ocorra na coluna $k' > k$. De forma análoga a primeira etapa, somando múltiplos convenientes da linha 2 às demais linhas, faz-se com que os elementos da coluna k' sejam nulos com exceção ao elemento igual a 1, produzido na linha 2. Com isso, note que, as operações realizadas não alteram nem os elementos da linha 1 nas colunas $1,2, \dots, k$, tampouco, os elementos da coluna k. Desta forma, operando uma linha de cada vez para que satisfaçam as condições (a) e (b), produz-se, com um número finito de passos, utilizando-se apenas operações elementares sobre linhas, uma matriz linha reduzida a partir de $A|B$, transformando o sistema (3.1) em um sistema equivalente que pode ser mais facilmente resolvível (Hoffman e Kunze, 1970). Além disso, a discussão acima fornece uma justificativa para o próximo resultado.

Proposição 3.2.7. Toda matriz de coeficientes reais $A_{m\times n}$ é linha-equivalente a uma matriz linha-reduzida.

Exemplo 3.2.8. Considere o sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_4 = 1 \\ -6x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases} \tag{3.3}$$

Utilizando apenas operações elementares sobre linhas, encontra-se uma matriz na forma linha-reduzida e que é linha-equivalente a matriz ampliada do sistema (3.3), a partir dela determinam-se as soluções do sistema. Note que, a matriz ampliada do sistema dado é:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 4| & 1 \\ -6 & 4 & -1 & 1| & 3 \\ -3 & 2 & -1 & 5| & 4 \end{bmatrix}.$$

Substituindo a linha 2 pela soma da linha 2 a duas vezes a linha 1 tem-se:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 4| & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 9| & 5 \\ -3 & 2 & -1 & 5| & 4 \end{bmatrix}.$$

Substituindo, na matriz anterior, a linha 3 pela soma das linhas 1 e 3, e na sequência, subtraindo o resultado a linha 2, fica:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 4| & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 9| & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0| & 0 \end{bmatrix}.$$

Por fim, para que essa última matriz seja transformada em uma linha-reduzida, basta multiplicar a linha 1 por $\frac{1}{3}$ e a linha 2 por (-1), assim:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \tag{3.4}$$

desta forma, essa última matriz apresenta-se na forma linha-reduzida e é linha-equivalente à matriz $A|B$, portanto, o sistema (3.3) é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_4 = \frac{1}{3}, \\ x_3 - 9x_4 = -5 \end{cases}$$

que tem, como soluções procuradas, $(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}s - \frac{4}{3}t, s, -5 + 9t, t)$, fazendo $x_2 = s$ e $x_3 = t$, com s e t números reais.

Definição 3.2.9. Uma matriz $R_{m \times n}$ é dita linha-reduzida à forma escada se:

(a) R é linha-reduzida;

(b) toda linha de R cujos elementos são todos nulos ocorre abaixo de todas as linhas que possuem um elemento não-nulo;

(c) se as linhas $1, 2, \dots, r$ são linhas não-nulas de R e se o primeiro elemento não-nulo da linha i ocorre na coluna k_i, $i = 1, 2, \dots, r$, então $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$.

A matriz dos coeficientes obtida a partir da matriz ampliada (3.5) é um exemplo de matriz linha-reduzida à forma escada. Além disso, observe que, se $A_{m \times n}$ é uma matriz, então pela Proposição 3.2.7 A é linha-equivalente a uma matriz linha-reduzida. Portanto, efetuando um número finito de permutações convenientes das linhas de uma matriz linha-reduzida, obtém-se uma matriz linha-reduzida à forma escada, o que se traduz no próximo resultado.

Proposição 3.2.10. Toda matriz de coeficientes reais $A_{m \times n}$ é linha-equivalente a uma matriz linha-reduzida à forma escada.

Definição 3.2.11. O posto de uma matriz A é o número de linhas não-nulas de sua forma equivalente a uma matriz linha-reduzida à forma escada.

Proposição 3.2.12. Considere um sistema linear com m equações e n incógnitas $AX = B$, em que A é a matriz dos coeficientes, X a matriz das incógnitas e B a matriz dos termos independentes. Seja p_{AB} o posto da matriz ampliada do sistema e p_A o posto da matriz dos coeficientes do sistema, então[9]:

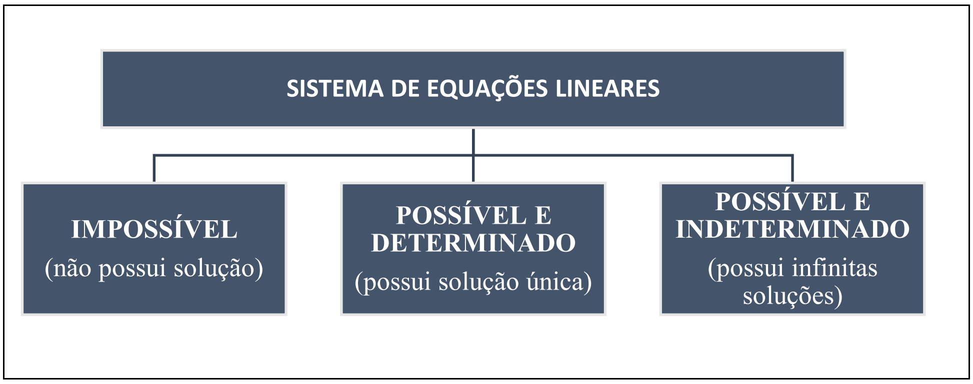
(i) o sistema não admite solução se, e somente se, $p_{AB} \neq p_A$;

(ii) o sistema admite uma única solução se, e somente se, $p_{AB} = p_A = n$;

(iii) o sistema admite infinitas soluções se, e somente se, $p_{AB} = p_A < n$.

Assim, um sistema de equações lineares pode ser classificado com relação as suas soluções em: sistema possível e determinado (S.P.D.), quando admite uma única solução, sistema possível e indeterminado (S.P.I.), quando admite infinitas soluções e sistema impossível (S.I.) quando não admite soluções. A figura abaixo ilustra essa classificação:

Figura 1 — Classificação de sistemas lineares



Fonte: elaboração própria.

Cardoso (2014) constata, no âmbito do ensino superior, que grande parte dos estudantes do primeiro ano de graduação possui pouco preparo para lidar com elementos da matemática abstrata, como os da álgebra linear, devido à falta de contato com tais conceitos no ensino básico. Esse panorama indica que, sobretudo nas séries do ensino médio, a última etapa antes do ingresso na graduação, o estudo de tópicos envolvendo álgebra linear, em particular, os sistemas lineares, podem apoiar o enfrentamento a este cenário.

Para Pedrini (2013), o estudo de sistemas lineares oferece uma oportunidade valiosa para que o aluno desenvolva e aprimore sua capacidade de abstração e generalização, além de fornecer uma ferramenta formidável para a resolução de problemas.

Além disso, Silva (2015) destaca que o aprendizado se torna mais eficaz quando o aluno tem a oportunidade de interagir ativamente com o conteúdo. Isso significa estabelecer conexões

[9]O Teorema do Posto é uma ferramenta poderosa para analisar sistemas lineares sem precisar resolver as equações explicitamente. Para uma demonstração dos fatos apresentados, consultar: HEFEZ, Abramo; FERNANDEZ, Cecília de Souza. Introdução à álgebra linear. Rio de Janeiro: SBM, v. 146, 2012.

com seus conhecimentos prévios, realizar experimentos práticos e manipular materiais concretos. Assim, a inovação em sala de aula perpassa, necessariamente, por relacionar o conteúdo com a realidade vivida pelo educando, explorando exemplos e situações do seu cotidiano. Nessa perspectiva, os capítulos seguintes serão dedicados a explorar o truque das tampinhas distribuídas e delinear uma atividade lúdica que envolva a apresentação de conceitos abstratos por meio de materiais concretos e manipuláveis.

4. O TRUQUE DAS TAMPINHAS

Considerando as reflexões e pressupostos teóricos acerca das atividades lúdicas, optou-se pelo uso de um truque matemático para apoiar a prática pedagógica do professor. Ele foi utilizado como ferramenta de apoio à pesquisa no tocante às aprendizagens matemáticas que poderia gerar e seu potencial lúdico em despertar o interesse de estudantes. Essa matemágica será apresentada em 3 versões no decorrer das próximas seções; a cada nova versão, o truque torna-se mais desafiador. Ao final, apresentam-se contribuições matemáticas para a formulação de novas versões.

4.1. Um truque envolvendo sistemas lineares

A mágica matemática tomada como ponto de partida para a atividade lúdica proposta é referenciada no livro de Chemale e Kruse (1999). Nesse truque, o apresentador:

(1) Pede para que o voluntário segure 7 bolinhas ou quaisquer objetos pequenos como tampinhas ou moedas, distribuindo-as secretamente nas mãos (nenhuma mão pode ficar vazia).

(2) Em seguida, solicita que duplique a quantidade que está na mão esquerda e triplique a que está na direita, mentalmente, e lhe diga a soma z dos dois resultados. Suponha que a soma z tenha dado 19.

(3) Já pode, então, adivinhar quantos objetos há em cada mão: 2 na esquerda e 5 na direita. Mas como?

A mágica pode ser operacionalizada por meio dos sistemas lineares. Se x e y representam, respectivamente, as quantidades de bolinhas na mão esquerda e na mão direita, e z a soma informada pelo participante, ou seja, a soma do dobro da quantidade na mão esquerda com o triplo da quantidade na mão direita, então o problema traduz-se na solução do seguinte sistema linear — vale lembrar que z será informado pelo participante:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 3y = z \end{cases}$$

Como o posto da matriz aumentada do sistema coincide com o posto da matriz dos coeficientes do sistema e ambos valem 2, segue pela Proposição 3.2.12 que a solução do sistema é única para qualquer z previamente informado. Para propiciar a rápida operacionalização dos cálculos, percebe-se que o sistema anterior é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} 3x + 3y = 21 \\ 2x + 3y = z \end{cases}$$

E subtraindo as equações, obtém-se como solução, $x = 21 - z$ e $y = 7 - x = 7 - (21 - z) = -14 + z = z - 14$. Portanto, no caso em que $z = 19$, $x = 21 - 19 = 2$ e $y = 19 - 14 = 5$, deste modo, $2x + 3y = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 19$.

Na segunda versão, a mágica é modificada e torna-se mais intrigante. Nela, o participante determina o número de objetos que serão utilizados para dar início ao truque — nessa versão optou-se por tampinhas para a descrição dos objetos utilizados. Assim, esta é uma generalização da versão anteriormente mostrada e foi apresentada por Santos e Gontijo (2018) da seguinte maneira:

(1) Peça que um voluntário segure 7 tampinhas e escolha, secretamente, um número w de 3 a 7 e, também secretamente, distribua essa quantidade de tampinhas nas mãos, com a ressalva de que nenhuma mão pode ficar vazia. Suponha, por exemplo, que a escolha tenha sido 4 tampinhas, distribuindo 1 tampinha em uma das mãos e 3 na outra. Nenhum desses dados é informado a quem apresenta a mágica.

(2) Em seguida, solicite que, mentalmente, dobre a menor quantidade de tampinhas e triplique a maior quantidade, informando a soma z dos resultados. Se a distribuição de tampinhas tiver sido igual nas duas mãos, continue normalmente. No exemplo apresentado, z será $2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 11$.

(3) Já é possível adivinhar quantas tampinhas ao todo ele escolheu inicialmente: $w = 4$. E sua distribuição foi 1 e 3.

Como? Se x e y representam, respectivamente, a menor e a maior quantidade de tampinhas nas mãos do voluntário após a distribuição inicial, de maneira análoga ao truque anterior, adivinhar a distribuição escolhida pelo participante traduz-se na resolução do sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = z \\ x + y = w \end{cases}$$

Entretanto, apenas o valor z é informado pelo voluntário, o valor w permanece desconhecido.

O mágico, então, procede da seguinte forma, toma x como o primeiro valor positivo que torna $x + z$ um múltiplo de 3. No exemplo trabalhado, $z = 11$, então $x = 1$, pois 12 é múltiplo de 3. Consequentemente, y será obtido como a solução da primeira equação do sistema, com z

e x como dados, isto é, $y = \frac{z-2\cdot x}{3} = \frac{11-2\cdot 1}{3} = 3$, portanto, $w = x + y = 1 + 3 = 4$ (Santos e Gontijo, 2018).

Note que, somando x em ambos os membros da equação $2x + 3y = z$, tem-se $3x + 3y = z + x$, o que implica que $z + x$ é um múltiplo de 3. Nesse caso, existem infinitos valores que podem ser atribuídos a x. Por que tomar x o menor inteiro positivo com essa propriedade? (Santos e Gontijo, 2018). Observando a tabela 1, verifica-se que, se x for o segundo ou terceiro valor com a propriedade citada, então, o valor do y correspondente torna-se menor do que x, o que contradiz sua definição inicial. Assim, o valor de y pode ser obtido por substituição.

Por meio da tabela 1, verifica-se que não há respostas duplicadas para essa mágica, pois examinando todas as possibilidades para w de 3 a 7, vê-se que não é possível distribuir as tampinhas de tal forma que a soma z se repita em duas situações distintas, com $x \leq y$ (Santos e Gontijo, 2018).

Tabela 1 — Demonstração da viabilidade do truque

$w = 3$			$w = 4$			$w = 5$			$w = 6$			$w = 7$		
x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
1	2	8	1	3	11	1	4	14	1	5	17	1	6	20
			2	2	10	2	3	13	2	4	16	2	5	19
									3	3	15	3	4	18

Fonte: Santos e Gontijo, 2018, p. 59.

Observe que a viabilidade do truque depende da quantidade w de tampinhas disponibilizada para o participante, por exemplo, se o valor $w = 8$ fosse incluído, então, a configuração x = 4 e y = 4 resultaria na soma $z = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 20$, que é a mesma soma oriunda do caso $w = 7$, com a distribuição, x = 1 e y = 6, o que tornaria a adivinhação impossível (Santos e Gontijo, 2018).

Os autores propõem ainda, uma variação adicional da mágica, sugerindo a escolha de tampinhas w de 3 a 8, incluindo uma instrução para que sejam descartadas as distribuições em que ambas as mãos recebam a mesma quantidade de tampinhas.

Para analisar a viabilidade dessa versão, convém ressaltar que, ao se comparar os dados da Tabela 2 com os da Tabela 1, desconsiderando os casos em que $x = y$, observa-se que a introdução do valor $w = 8$ impede a repetição da soma z para diferentes distribuições x e y. No entanto, a inclusão do valor $w = 9$ geraria repetições para a soma $z = 23$, tornando impossível determinar a distribuição inicialmente escolhida pelo participante unicamente a partir de z.

Tabela 2 — Análise dos casos $w = 8$ e $w = 9$

$w = 8$			$w = 9$		
x	y	z	x	y	z
1	7	23	1	8	26
2	6	22	2	7	25
3	5	21	3	6	24
			4	5	23

Fonte: Santos e Gontijo, 2018, p. 60.

4.2. Uma generalização do truque envolvendo números primos entre si

O próximo ponto a ser investigado sobre a mágica apresentada refere-se aos coeficientes 2 e 3 na equação $2x + 3y = z$, que vêm da instrução (2) da segunda versão da mágica apresentada na seção 4.1. Como visto anteriormente, nem sempre o truque pode ser realizado, sua viabilidade depende da garantia de que cada soma z, produzida pela equação anterior, produza distribuições únicas x e y, como soluções do sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} 2x + 3y = z \\ x + y = w \end{cases}$$

A partir disso, seguem ainda algumas indagações: há um número limite de tampinhas w para o qual o truque pode ser realizado? Quais outros coeficientes podem ser usados em substituição ao 2 e ao 3? Há relações que esses números devem guardar entre si? A próxima proposição mostra uma condição necessária para a escolha dos coeficientes que garante a viabilidade da mágica.

Antes de mais nada, a fim de generalizar a segunda versão do truque descrito na seção anterior, considere T o total de tampinhas disponibilizadas para a escolha do participante. No exemplo citado $3 \leq T \leq 7$, u e v são os coeficientes utilizados pelo mágico para a produção da instrução (2), de modo que, u e v multipliquem, respectivamente, a menor e a maior quantidade de tampinhas distribuídas nas mãos do voluntário, no caso da seção anterior $u = 2$ e $v = 3$. Caso as quantidades distribuídas sejam iguais, o voluntário procede com a instrução dada, desconsiderando a relação de ordem posta sobre as quantidades distribuídas em cada uma das mãos. Como postos, u e v serão chamados multiplicadores.

Desta forma, considere que um participante 1 tenha escolhido uma quantidade w_1 de um conjunto de T tampinhas e distribuído em suas mãos, isto é, $w_1 = x_1 + y_1$ e $0 \leq x_1 \leq y_1$. Suponha, ainda, que um participante 2 tenha escolhido uma quantidade w_2 de um outro conjunto, também de T tampinhas, ou seja, $w_2 = x_2 + y_2$ e $0 \leq x_2 \leq y_2$. Para que a mágica seja viável, é preciso que as somas $z_1 = ux_1 + vy_1$ e $z_2 = ux_2 + vy_2$ sejam sempre distintas, as condições para que isso ocorra são descritas precisamente por Santos et al. (2020) como demonstrado a seguir.

Proposição 4.2.1. Dado $T \geq 0$, considere $N \geq 0$ o quociente da divisão de T por 2 e $v > u \geq N$, sendo u e v primos entre si e maiores do que zero, os multiplicadores. Tome $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$, com $x_1 \leq y_1\ e\ x_2 \leq y_2$ naturais tais que $w_i = x_i + y_i \leq T$, com i = 1, 2. Defina

$$z_i = ux_i + vy_i, \text{ para } i = 1, 2.$$

Então, garante-se que $z_1 \neq z_2$.

Demonstração:

Suponha, por contradição, que existam inteiros positivos $T, N, u, v, x_1, y_1, x_2$ e y_2 que cumpram as hipóteses da proposição e sejam tais que:

$$z_1 = ux_1 + vy_1 = z_2 = ux_2 + vy_2$$

Ou equivalentemente,

$$v(y_1 - y_2) = u(x_2 - x_1)$$

Desta forma, se $x_1 = x_2$, então $y_1 = y_2$, pois $v > 0$, contrariando as hipóteses iniciais postas. Assim, deve-se ter $x_1 \neq x_2$ e, consequentemente, $y_1 \neq y_2$. Além disso, tem-se u e v primos entre si e $v | u(x_2 - x_1)$, então, pela Proposição 3.1.14, segue $v | (x_2 - x_1)$, isto é,

$$(x_2 - x_1) = vk, \text{ com } k \in \mathbb{Z}/\{0\}$$

A análise será dividida em dois casos $k > 0$ e $k < 0$.

(i) Suponha $k > 0$, então:

$$v(y_1 - y_2) = ukv$$

Dividindo pelo inteiro não nulo v, ambos os membros da equação tem-se,

$$y_1 - y_2 = uk$$

De k$\geq$ 1 e somando $x_2 - x_1 = kv$ com $y_1 - y_2 = uk$, conclui-se $(x_2 - x_1) + (y_1 - y_2) = kv + uk \geq v + u \geq v + N > N + N = 2N$, ou seja, $x_2 - x_1 + y_1 - y_2 \geq 2N + 1$.

Por hipótese, N é o quociente da divisão de T por 2, então, conforme sua paridade, $T = 2N$ ou $T = 2N + 1$, e em qualquer dos casos, $T \leq 2n + 1$. Também por hipótese, $x_2 \leq y_2 \Leftrightarrow x_2 - y_2 \leq 0$, então:

$$x_2 - x_1 + y_1 - y_2 \leq y_1 - x_1 \leq y_1 \leq T \leq 2N + 1$$

Logo, $x_2 - x_1 + y_1 - y_2 = 2N + 1$ e a cadeia de desigualdades acima reescreve-se como uma cadeia de igualdades. Assim, $y_1 - x_1 = y_1 = 2N + 1$, o que só é possível se $x_1 = 0$. Desta forma, $x_2 - 0 + 2N + 1 - y2 = 2N + 1$, de onde segue, $x_2 = y_2$. Portanto, $kv = x_2 - x_1 = x_2 = y_2$. Com isso,

$$w_2 = x_2 + y_2 = vk + vk \geq 2v \geq 2(u + 1) = 2u + 2 \geq 2N + 2 > 2N + 1 \geq T$$

Ou seja, uma contradição $w_2 > T$.

(ii) Suponha agora $k < 0$ para a equação:

$$y_1 - y_2 = uk$$

Faça $j = -k > 0$, assim, de forma análoga ao caso anterior, tem-se, $y_2 - y_1 = uj$ e $x_1 - x_2 = vj$. De $j \geq 1$ e somando membro a membro essas equações, conclui-se $(x_1 - x_2) + (y_2 - y_1) = vj + uj \geq v + u \geq v + N > N + N = 2N$. Isto é, $x_1 - x_2 + y_2 - y_1 \geq 2N + 1$.

Por hipótese, $x_1 \leq y_1 \Leftrightarrow x_1 - y_1 \leq 0$ e conforme discutido $T \leq 2N + 1$, então:

$$x_1 - x_2 + y_2 - y_1 \leq y_2 - x_2 \leq y_2 \leq T \leq 2N + 1$$

portanto, $x_1 - x_2 + y_2 - y_1 = 2N + 1$ e a cadeia de desigualdades acima reescreve-se como uma cadeia de igualdades. Logo, $y_2 - x_2 = y_2 = 2N + 1$, o que só ocorre se $x_2 = 0$. Desta forma, $x_1 - 0 + 2N + 1 - y_1 = 2N + 1$, então, $x_1 = y_1$. Logo, $vj = x_1 - x_2 = x_1 = y_1$. Por fim,

$$w_1 = x_1 + y_1 = vj + vj \geq 2v \geq 2(u + 1) = 2u + 2 \geq 2N + 2 > 2N + 1 \geq T$$

isto é, $w_1 > T$, o que é uma contradição. Ela surge ao considerar-se a existência de inteiros T, N, u, v, x_1, y_1, x_2 e y_2 como posto nas hipóteses desta proposição, tais que $z_1 = z_2$. Portanto, nas condições exibidas sempre se tem $z_1 \neq z_2$ o que garante a viabilidade da mágica. □

De posse desse resultado, o mágico pode escolher infinitos u e v que tornam a mágica possível. Para determinar a distribuição x e y a partir da soma $z = ux + vy$ informada pelo participante, faça $v - u = m$ e note que:

$$z = ux + (u + m)y = xu + yu + my$$

Então, somando-se mx em ambos os membros da equação:

$$z + mx = ux + uy + my + mx =$$
$$u(x + y) + m(x + y) =$$
$$(u + m)(x + y) =$$
$$v(x + y)$$

Isto é, $z + mx = v(x + y)$. Logo, x será aquele valor que, multiplicado por m e somado a z, resulta em um múltiplo de v o que determina a descoberta de x. Por outro lado, fazendo o processo análogo subtraindo my em ambos os lados de

$z = ux + (u+m)y = xu + yu + my,$ obtém-se $z - my = ux + (u+m)y - my = u(x + y)$. Assim, y será aquele valor que, multiplicado por m e subtraído de z, resulta em um múltiplo de u.

O processo apresentado, em geral, não é simples, mas se u e v forem naturais consecutivos, portanto, primos entre si, então $m = 1$ e y será o número que subtraído de z resulta em múltiplo de u, o que simplifica as operações.

Exemplo 4.2.2. (Santos et al, 2020) Considere o diálogo entre uma pessoa no papel de mágico e um voluntário como se segue:

Mágico: — Escolha uma quantidade qualquer de tampinhas entre 0 e 100. Depois, distribua essa quantidade secretamente entre suas duas mãos. Multiplique a maior quantidade por 51 e a menor por 50. Se as duas mãos tiverem a mesma quantidade, tudo bem. Nesse caso, multiplique esse número por 50 e depois por 51.

Voluntário: — Pronto, já fiz!

Mágico: — Agora some os dois resultados e me diga o total.

Voluntário: — O total deu 1871.

Mágico: — Então, das 100 tampinhas disponíveis, você escolheu 37 tampinhas, divididas em 16 em uma mão e 21 na outra.

Voluntário: — Como você conseguiu descobrir isso?

Nas condições dadas no diálogo, $u = 50$, $v = 51$, $T = 100$ e $z = 1871$. Então, y é o valor que, subtraído de 1871, resulta num múltiplo de 50. Como 1871 – 21 = 1850, então, y = 21 é a maior quantidade distribuída numa das mãos. Por sua vez, x é encontrado resolvendo a equação, $z = 1871 = 50x + 51 \cdot 21$, isto é, $x = \frac{1871 - 51 \cdot 21}{50} = 16$, portanto, a escolha inicial w de tampinhas é $21 + 16 = 37$ tampinhas.

4.3. Outras contribuições para o truque

Durante o desenvolvimento deste trabalho, utilizando a segunda versão da mágica apresentada na seção 4.1 e considerando o resultado apresentado por Santos et al (2020) na Proposição 4.2.1, percebeu-se que é possível ampliar as condições para a escolha dos multiplicadores u e v, que tornam a mágica possível. Isto é, que garantem que cada distribuição (x,y) escolhida pelo voluntário produza somas $z = ux + vy$ distinta das demais.

Note que, escolhendo $u = 2$ e $v = 3$ como multiplicadores, um total de tampinhas $T = 7$ para a realização do truque e restringindo a escolha inicial w de tampinhas que o participante pode optar para iniciar a mágica a $3 \leq w \leq 7$ recai-se no caso apresentado na tabela 1, isto é, uma escolha de números u, v e T que garantem êxito para a execução da mágica. Entretanto, ao comparar estas condições às hipóteses da Proposição 4.2.1, tem-se o quociente N da divisão de T por 2 igual a 3. Nesse caso não se verifica a hipótese $v > u \geq N$ e, ainda assim, a mágica é viável. Deste modo, verifica-se que as escolhas possíveis para u, v e T podem ser ampliadas.

Assim, iniciou-se a busca por novas escolhas de multiplicadores que tornassem a mágica viável, mas que não cumprissem as hipóteses da Proposição 4.2.1, ou seja, números u e v primos entre si que não satisfaçam as desigualdades $v > u \geq N$ ou que possuam um divisor comum diferente de 1.

Utilizando o suporte computacional para o teste de novos multiplicadores determinou-se escolhas, em ambas as condições descritas anteriormente, que garantem a viabilidade da mágica. O primeiro caso de destaque vem da escolha $u = 3$ $v = 5$ e $T = 10$. Note que, u e v são coprimos, com v > u , mas não simultaneamente maiores ou iguais a $N = \frac{10}{2} = 5$. Portanto, a Proposição 4.2.1 não se aplica, mas a mágica pode ser apresentada da seguinte forma:

(1) Peça que um voluntário segure 10 tampinhas e escolha, secretamente, um número w de 3 a 10 e, também, secretamente, distribua essa quantidade de tampinhas nas mãos, com a ressalva de que nenhuma mão pode ficar vazia.
(2) Em seguida, solicite que, mentalmente, triplique a menor quantidade de tampinhas e quintuplique a maior quantidade, informando a soma z dos resultados.
(3) Já é possível adivinhar quantas tampinhas ao todo ele escolheu inicialmente.

De forma análoga ao truque apresentado na seção 4.2, se x e y representam, respectivamente, a menor e a maior quantidade de tampinhas nas mãos do voluntário após a distribuição inicial, adivinhar a distribuição escolhida pelo participante traduz-se na resolução do sistema:

$$\begin{cases} 3x + 5y = z \\ x + y = w \end{cases}$$

Mas, apenas o valor z é informado pelo voluntário, o valor w permanece desconhecido. O mágico, então, procede da seguinte forma, toma $2x$ como o primeiro valor positivo que torna a soma $2x + z$ um múltiplo de 5 de modo que x permaneça um inteiro positivo. Por exemplo, suponha que o voluntário tenha escolhido $w = 7$ tampinhas para iniciar o truque, distribuindo 3 tampinhas em uma mão e 4 tampinhas na outra. Então, a soma informada ao mágico é $z = 3 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 29$. Nesse caso, o menor valor positivo que somado a $z = 29$ o torna um múltiplo de 5 é 1, isto é, $2x = 1$, mas nesse caso, x não seria um inteiro positivo. Assim, o menor valor positivo que torna $z = 29$ um múltiplo de 5 e x um inteiro positivo é 35, desta forma, $2x = 6$, o que implica $x = 3$. Após descobrir a menor quantidade de tampinhas em uma das mãos do voluntário, basta obter y como a solução da primeira equação do sistema, com z e x como dados, isto é, $y = \frac{z-3\cdot x}{5} = \frac{29-3\cdot 3}{5} = 4$, portanto, $w = x + y = 3 + 4 = 7$. Possibilitando, assim, que o mágico seja capaz de determinar a quantidade de tampinhas que o voluntário escolheu inicialmente e sua distribuição utilizando somente o valor da soma z informada.

Ao somar $2x$ a ambos os membros da equação $3x + 5y = z$, tem-se $5x + 5y = z + 2x$, o que implica que $z + 2x$ é um múltiplo de 5 e, como x representa a menor quantidade de tampinhas na mão do voluntário, esse deve ser um valor inteiro positivo. Ainda assim, existem infinitos valores que podem ser atribuídos a x, mas observando a tabela 3 verifica-se que se x for maior que o segundo valor que cumpre as condições solicitadas, então o valor do y correspondente torna-se menor do que x, o que contradiz sua definição inicial. Em seguida o valor de y pode ser obtido por substituição, como ilustrado no exemplo. Portanto, sempre é possível determinar o total de tampinhas escolhidas pelo voluntário para iniciar o truque e sua distribuição inicial conhecendo apenas a soma z informada pelo voluntário.

Tabela 3 — Demonstração da viabilidade do truque com os multiplicadores u=3 e v=5

$w = 3$			$w = 4$			$w = 5$			$w = 6$			$w = 7$			$w = 8$			$w = 9$			$w = 10$		
x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
1	2	13	1	3	18	1	4	23	1	5	28	1	6	33	1	7	38	1	8	43	1	9	48
			2	2	16	2	3	21	2	4	26	2	5	31	2	6	36	2	7	41	2	8	46
									3	3	24	3	4	29	3	5	34	3	6	39	3	7	44
															4	4	32	4	5	37	4	6	42
																					5	5	40

Fonte: elaboração própria baseado em Santos e Gontijo (2018).

Perceba que a mágica não é válida para qualquer quantidade de tampinhas, pois se forem oferecidas 22 delas para o participante, a mágica não poderá ser realizada, pois $3 \cdot 5 + 5 \cdot 15 = 90 = 3 \cdot 10 + 12 \cdot 5$. Portanto, a viabilidade da mágica para a escolha dos multiplicadores $u = 3$ e $v = 5$ depende do total de tampinhas disponibilizadas para o participante.

Ao investigar escolhas de u e v tais que $mdc(u, v) \neq 1$ alguns padrões interessantes puderam ser observados em relação à viabilidade da mágica. Fazendo a escolha dos multiplicadores u e $v = u^2$ e, retirando a ressalva de que nenhuma mão pode ficar vazia, verifica-se o próximo resultado.

Proposição 4.3.1. Dado $T > 0$ inteiro, considerando, N o quociente da divisão de T por 2, $u \geq N$ um inteiro positivo e x_i, y_i inteiros maiores ou iguais a zero, com $i = 1,2$. Sendo $x_i \leq y_i$, $Q_i = x_i + y_i \leq T$ e $S_i = ux_i + u^2 y_i$ então, existem $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ tais que $S_1 = S_2$. Isto é, nessas condições, tendo u e u^2 como multiplicadores, a mágica não possui realização viável.

Demonstração: Tome $(x_1, y_1) = (u, u + 1)$ e $(x_2, y_2) = (0, u + 2)$. Dessa forma, $u < u + 1$ e $0 < u + 2$ para todo $u \in \mathbb{N}$. Além disso, $S_1 = u \cdot (u) + u^2(u + 1) = 2u^2 + u^3 = u \cdot (0) + u^2(u + 2) = S_2$. Note que, sendo N o quociente da divisão de T por 2, então há duas possibilidades: $T = 2N$ ou $T = 2N + 1$, já que T é um inteiro positivo.

Se $T = 2N + 1$, tem-se $Q_1 = x_1 + y_1 = u + u + 1 = 2u + 1$. Por hipótese, $Q_1 \leq T = 2N + 1$ e $u \geq N$, isto é, $2u + 1 \geq 2N + 1$, portanto, $2N + 1 \leq Q_1 \leq 2N + 1$, de onde segue, $Q_1 = 2N + 1 = T$. Assim, $2u + 1 = T$, ou de forma equivalente, $u = \frac{T-1}{2}$.

Além disso, $Q_2 = 0 + u + 2 = u + 2 \geq N + 2$, pois $u \geq N$. Por hipótese, $Q_2 \leq T = 2N + 1$, assim, $N + 2 \leq Q_2 \leq 2N + 1$, o que ocorre sempre que $N \geq 1$. Tem-se $u > 0$ e $u = \frac{T-1}{2} = \frac{2N+1-1}{2} = N$, então seguramente $N \geq 1$ e as desigualdades acima sempre se verificam.

Assim, se $T = 2N + 1$, os pares $(N, N + 1)$ e $(0, N + 2)$, são como procurados e tais que $S_1 = S_2$.

Por outro lado, se $T = 2N$, tendo $Q_1 = 2u + 1$ e, por hipótese, $Q_1 \leq T = 2N$, então, usando o fato que $u \geq N$, tem-se $2N + 1 \leq 2u + 1 \leq 2N$, isto é, $2N + 1 \leq 2N$, o que é um absurdo! Nesse caso, os pares escolhidos não produzem $S_1 = S_2$ nas condições impostas pela proposição.

Assim, se $T = 2N$, tome $(x_1, y_1) = (u, u)$ e $(x_2, y_2) = (0, u + 1)$, então $S_1 = u \cdot (u) + u^2(u) = u^2 + u^3 = u \cdot (0) + u^2(u + 1) = S_2$. Além disso, $Q_1 = u + u = 2u$, como $u \geq N$, tem-se $2N \leq Q_1 \leq T = 2N$, isto é, $u = N$ é a solução procurada. Note que, $Q_2 = 0 + u + 1 = u + 1$, e de forma análoga ao caso anteriormente tratado, tem-se $N + 1 \leq Q_2 \leq T = 2N$, estas desigualdades são satisfeitas sempre que $N \geq 1$, o que sempre ocorre, pois $u = N$ e $u > 0$.

Logo, se $T = 2N$, os pares (N, N) e $(0, N + 1)$ satisfazem as condições impostas e são tais que $S_1 = S_2$, o que conclui a demonstração. □

Exemplo 4.3.2. Para ilustrar a situação posta pela Proposição 4.3.1, suponha que um mágico desavisado tentasse realizar o truque das tampinhas distribuídas com um total de $T = 20$ tampinhas, tomando como multiplicadores $u = 10$ e $u^2 = 100$.

O mágico, então, pede que um voluntário segure 20 tampinhas e escolha, secretamente, um número w de 3 a 20 e, também, secretamente, distribua essa quantidade de tampinhas nas mãos. Em seguida, solicita que, mentalmente, o voluntário multiplique a menor quantidade de tampinhas por 10 e a maior quantidade por 100, informando a soma S dos resultados, se a quantidade de tampinhas for igual em ambas as mãos, basta realizar o produto normalmente. Caso a soma informada seja 1100 o mágico não poderá determinar com certeza a distribuição feita pelo voluntário! Pois, para $T = 20$, $N = 10$, as distribuições de tampinhas: 10 em uma das mãos e 10 na outra e 0 em uma mão e 11 na outra produzem a mesma soma, em concordância a Proposição 4.3.1. De fato, sendo S_1e S_2 as somas informadas na primeira e segunda distribuições, respectivamente, tem-se $S_1 = 10 \cdot (10) + 100 \cdot 10 = 1100 = 10 \cdot 0 + 100 \cdot 11 = S_2$.

Observe que na Proposição 4.3.1 utilizando os pares $(x_1, y_1) = (u, u)$ e $(x_2, y_2) = (0, u + 1)$ para $T = 2N + 1$ tampinhas, tem-se $2N \leq 2u = Q_1 \leq T = 2N + 1$, assim, as desigualdades são sempre satisfeitas, pois $2N \leq 2N + 1$, para qualquer N. Além disso, $2N \leq 2u \leq 2N + 1 \Leftrightarrow N \leq u \leq \frac{2N+1}{2} = N + \frac{1}{2}$, como u é um inteiro positivo, segue que, $u = N$. Logo, os pares (N, N) e $(0, N + 1)$ satisfazem as hipóteses da Proposição 4.2.1 e tais que $S_1 = S_2$. Assim, para T ímpar foi possível exibir 2 tipos de distribuições que inviabilizam a mágica, ao passo que para T par apenas 1 tipo de distribuição foi encontrado, como ilustrado na tabela a seguir.

Tabela 4 — Distribuições utilizadas para a demonstração da Proposição 4.3.1

<table>
<tr><th colspan="2">Pares que inviabilizam a mágica para T ímpar</th><th>Pares que inviabilizam a mágica para T par</th></tr>
<tr><td>$(u, u + 1)$ e $(0, u + 2)$</td><td>(u, u) e $(0, u + 1)$</td><td>(u, u) e $(0, u + 1)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Para $u = N$</td><td>Para $u = N$</td></tr>
</table>

Fonte: elaboração própria.

Infelizmente, a Proposição 4.3.1 prova casos em que a viabilidade da mágica não é garantida e, para utilizar o truque como uma atividade lúdica em uma sala de aula, é essencial que sua viabilidade seja garantida. Ao continuar investigando padrões com auxílio computacional buscando novos multiplicadores u,v tais que o $mdc(u, v) \neq 1$, pode-se perceber um comportamento interessante escolhendo u e u^3 como multiplicadores. Na verdade, a viabilidade da mágica para eles foi demonstrada com hipóteses semelhantes às da Proposição 4.3.1, em parceria com outros autores e deu origem a publicação “O truque das tampinhas distribuídas: uma atividade lúdica para o ensino de matemática”, em 2024.

Proposição 4.3.3. (Santos et al, 2024) Dado $N > 0$ um inteiro, $u \geq N > 0$ inteiro positivo, com $u > 1$, sendo o domínio $D = \{(x, y)$ tais que x e y são números naturais, com $x \leq y$ e $0 < Q = x + y \leq 2N + 1\}$. Então, a função:

$$\begin{gathered} \mathrm{f(x,y)}: \mathrm{D} \rightarrow \mathrm{Z}_+ \\ (\mathrm{x},\mathrm{y}) \rightarrow \mathrm{S} = \mathrm{ux} + \mathrm{u}^3\mathrm{y} \end{gathered}$$

é injetora, isto é, a mágica tem a viabilidade garantida para estes multiplicadores[10].

[10]A demonstração deste resultado e uma outra versão do truque das tampinhas distribuídas é encontrado no artigo a seguir:
SANTOS, R. C. dos; MELO, A. L. de; BEZERRA, W. W. V.; CASTILHO, J. E.; SANTOS, T. H. C. O truque das tampinhas distribuídas: uma atividade lúdica para o ensino de matemática. CONTRIBUCIONES A LAS CIENCIAS SOCIALES, *[S. l.]*, v. 17, n. 6, p. e7757, 2024. DOI: 10.55905/revconv.17n.6-279. Disponível em: https://ojs.revistacontribuciones.com/ojs/index.php/clcs/article/view/7757/4927. Acesso em 03 mar. 2025.

5. PROPOSTA DE UTILIZAÇÃO EM SALA DE AULA

Neste capítulo, apresenta-se o plano de aula elaborado para orientar a realização de uma atividade didática baseada no truque das tampinhas distribuídas. O plano contém os procedimentos metodológicos que nortearam a prática, detalhando os objetivos, a organização da atividade, sugestão de avaliação e as estratégias de mediação propostas. Além da descrição do planejamento, este capítulo traz também o relato de experiência do professor-pesquisador, que atuou como observador participante durante a aplicação da atividade, registrando percepções, desafios e contribuições observadas no processo de ensino e aprendizagem durante a prática pedagógica.

5.1. Plano de aula

Tempo sugerido: 45 minutos.
Conteúdo: sistemas lineares.

OBJETIVO GERAL: compreender uma aplicação prática de sistemas lineares através da investigação de um truque matemático, reconhecendo diferentes métodos de resolução e o papel das incógnitas na modelagem de problemas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Modelar situações-problema utilizando sistemas lineares;
- Realizar operações elementares em sistemas lineares e solucioná-los;
- Analisar a quantidade de soluções de um sistema.

Procedimentos didático-pedagógicos

O professor inicia a aula realizando o primeiro truque descrito na seção 4.1 com 2 voluntários, em seguida, desafia os estudantes a desvendarem o “segredo do truque”. Para isso, organiza o grupo em duplas e entrega 7 tampinhas a cada uma delas. Posteriormente, fixa um cartaz em local visível a todos, com uma tabela similar a tabela 1, porém preenchida apenas com as células relativas a w, x, y e z, como mostrado na imagem abaixo.

Figura 2 — Tabela utilizada como suporte pelos estudantes

$w =$			$w =$			$w =$			$w =$			$w = 7$		
x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z

$\boldsymbol{x}$: denota a **menor** quantidade de tampinhas nas mãos do participante.

$\boldsymbol{y}$:denota a **maior** quantidade de tampinhas nas mãos do participante.

$\boldsymbol{z}$: denota a soma informada ao estudante no papel de mágico.

Fonte: adaptado de Santos e Gontijo, 2018.

Após a organização inicial, solicita-se aos estudantes que façam uma rodada de mágicas, como apresentado pelo professor. É importante destacar que, nesse momento, os estudantes, talvez, não conseguirão realizar as adivinhações de maneira precisa, por desconhecerem os porquês do truque. Mas essa etapa é importante e objetiva que os mesmos se coloquem no papel do mágico e, por meio de suas tentativas de adivinhação, mobilizem os conhecimentos que possuem, a fim de reconhecer a matemática que trazem consigo e sua capacidade em realizá-la. Ao fim de cada rodada, os estudantes deverão, com o auxílio de pequenos papéis adesivos, completar a tabela mostrada na figura 2 ($w = 7$ inicialmente está fixado), com a soma informada pelo participante e a distribuição inicial escolhida por ele. Nesse momento, o professor dá um significado às letras x, y, z e w. Após algumas rodadas, os estudantes poderão perceber que os valores da soma z sempre se repetem, permitindo a quem propõe a mágica realizar a adivinhação baseando-se nas 3 configurações de mão possíveis.

Na sequência, o professor apresenta a segunda versão do truque, descrita na seção 4.1, isto é, permitindo que o estudante, em segredo, escolha a quantidade de tampinhas que irá distribuir nas mãos, uma quantidade de 3 a 7, sem que nenhuma das mãos fique vazia. Com o auxílio das tampinhas e da tabela, o professor pede que os estudantes realizem uma nova rodada de mágicas, com a nova regra e registrem os resultados no cartaz, como fizeram anteriormente.

Nessa etapa, os estudantes de cada dupla invertem o papel que assumiram inicialmente — o voluntário faz o papel de mágico e vice-versa.

Em seguida, o professor propõe as seguintes questões para investigação:

- Quais os principais desafios encontrados na tentantativa de realizar as adivinhações? Nesse sentido, como vocês avaliam as dificuldades enfrentadas comparando as duas versões da mágica?
- E se w=8 fosse um valor possível?
- Sempre é possível realizar a adivinhação com certeza?

Com isso, serão ouvidas as conclusões dos estudantes e, então, o professor poderá mediar o debate para que o grupo possa construir coletivamente uma conclusão para a investigação, apresentando, ao final, a modelagem matemática de cada um dos truques. Isto é, na primeira versão, fixados z e w, encontrar a distribuição escolhida pelo participante é encontrar o par ordenado (x,y) que soluciona um sistema linear. E, na segunda versão do truque, apresentar um método incomum de resolução de sistemas lineares oriundos da modelagem advinda da mágica.

Para concluir, serão retomados os conceitos importantes abordados na aula, a fim de sintetizar as principais ideias discutidas.

Recursos Necessários: equipamento de projeção visual (*data show*), computador, quadro branco, pincel, 7 tampinhas por dupla de estudantes e folhas adesivas.

Sugestão de Avaliação: as avaliações para esta atividade podem ser feitas de diversas formas, tanto qualitativamente, por meio da observação da participação dos estudantes e da análise das soluções sugeridas durante a realização da atividade; quanto quantitativamente, por intermédio de atividades escritas que avaliem a capacidade de modelar e resolver situações-problema semelhantes.

5.2. Relato das atividades

A prática pedagógica foi realizada com um grupo de 13 estudantes da rede pública estadual de Goiás, em fase de conclusão da 3ª série do ensino médio, com média de 17 anos de idade. A seleção dos participantes ocorreu a partir de convite aberto feito nas turmas em que eram matriculados, nas quais o projeto de pesquisa foi explanado. Aqueles que demonstraram interesse em participar voluntariamente da pesquisa foram incluídos no estudo e orientados a apresentar a proposta a seus responsáveis por meio do termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE)[11], documento recolhido assinado posteriormente. A escolha de estudantes da 3ª série justificou-se, pois, para os objetivos de investigação, era necessário que eles já tivessem estudado o conteúdo de sistemas lineares, o que na rede supracitada é conteúdo programático do 3° bimestre da terceira série.

As atividades foram realizadas no contraturno de estudo dos voluntários, no auditório de sua escola e, devido a um atraso na chegada de parte do grupo, houve o adiamento do início das atividades em cerca de 20 minutos.

A prática iniciou-se e seguiu as etapas subsequentes, conforme o plano de aula. Durante a atividade, optou-se por utilizar balinhas no lugar de tampinhas com o objetivo de quebrar a expectativa dos estudantes. No entanto, para manter a coerência com a proposta original e facilitar a compreensão do leitor, o termo **"tampinhas"** foi mantido ao longo do texto, sem causar prejuízo ao entendimento ou à condução da análise. Assim, houve a apresentação da primeira versão da mágica, ocasião em que se pôde perceber o espanto e o entusiasmo dos estudantes a cada vez que o professor acertava a distribuição das tampinhas em suas mãos a partir da soma informada.

Na sequência, após a apresentação da segunda versão da mágica, o professor solicitou que os estudantes formassem duplas e escolhessem um membro como mágico e outro como voluntário. Como havia um número ímpar de participantes, o professor formou dupla com um dos estudantes. Assim, foi solicitado que os estudantes fizessem algumas rodadas de mágicas e com o auxílio de papéis adesivos anotassem os resultados obtidos na tabela.

[11]O termo de consentimento livre e esclarecido utilizado para esta pesquisa pode ser observado no Anexo I deste trabalho.

Figura 3 — Estudantes utilizando o truque das tapinhas distribuídas para preencher a tabela de possibilidades

Fonte: arquivo pessoal do autor.

Após a primeira rodada, fixando $w = 7$, um grupo de estudantes comunicou sua primeira descoberta, de que as somas informadas pelos voluntários das duplas, muitas vezes, estavam coincidindo e restringindo-se a três valores: 20, 19 e 18. Então, o professor os indagou sobre qual conclusão poderia ser tomada a partir desta informação e, após alguns instantes pensando, eles perceberam que poderiam, então, sempre realizar a adivinhação com certeza ao utilizar a distribuição associada a cada um dos valores.

Para a segunda rodada de mágicas, o professor solicitou que os estudantes realizassem a segunda versão da mágica, previamente apresentada, permitindo que o voluntário escolhesse o número de tampinhas que iria utilizar para iniciar o truque. Além disso, foi solicitado que os membros da dupla invertessem os papéis de mágico e voluntário, objetivando que todos tivessem a oportunidade de pôr-se no papel de mágico tentando realizar as adivinhações.

Com as rodadas de mágica subsequente, a tabela mostrada na figura 2 foi completada e os estudantes perceberam que era simples adivinhar a quantidade de tampinhas escolhida pelo voluntário e sua distribuição a partir da tabela construída.

Nesta etapa, foi possível observar que os estudantes estavam plenamente envolvidos com a realização da atividade proposta. Os estudantes no papel de mágico mantinham-se concentrados tentando encontrar caminhos para descobrir a distribuição de tampinhas escolhidas pelo colega, ao passo que, os estudantes envolvidos no papel de voluntários da mágica, permaneceram envolvidos em realizar os cálculos solicitados pelos seus parceiros com máximo cuidado, contando e recontando para que não houvesse erros. Além disso, foi possível notar, durante as primeiras rodadas, que uma estudante já havia percebido, a partir de cálculos mentais utilizando sistemas lineares, como descobrir a distribuição escolhida por sua parceira.

Ao fim das realizações de rodadas de mágicas pelos estudantes, deu-se início à socialização das conclusões obtidas por eles, com o uso das questões norteadoras postas no plano de aula. Inicialmente, os estudantes pareciam um pouco receosos em compartilhar suas ideias, entretanto, à medida em que os primeiros tomaram a palavra, os demais estudantes tendiam a complementar as respostas.

De maneira geral, os estudantes avaliaram a segunda versão da mágica como mais desafiadora, quando comparada à primeira e apresentaram conclusões sólidas a respeito da primeira versão da mágica, sobretudo porque uma das voluntárias conseguiu desvendar o truque e compartilhou sua descoberta com os demais. Ela comparou a primeira com a segunda versão e apontou o porquê do uso da mesma estratégia utilizada para solucionar a primeira versão da mágica não funcionar para a segunda.

Quando perguntados a respeito da viabilidade da segunda versão da mágica para $w = 8$ tampinhas, os estudantes, em sua maioria, inclinaram-se a responder que seria possível a realização do truque. Com essa resposta, o professor mediou o diálogo e, com o auxílio dos estudantes, completou a tabela da figura 2, incluindo uma nova coluna para $w = 8$, então, tomou 8 tampinhas nas mãos as distribuiu e informou a soma $z = 20$ para os alunos. Na sequência, perguntou a eles qual foi a distribuição realizada e , prontamente, os jovens responderam que deveria ser 4 tampinhas em uma das mãos e 4 na outra, pois eles acreditavam que, necessariamente, o professor iria utilizar as 8 tampinhas. O professor ajustou a comunicação e falou que não necessariamente iria usar o total de tampinhas disponibilizadas e os indagou se a distribuição de tampinhas escolhida por ele poderia ter sido 1 e 6. Nesse momento, os estudantes perceberam que sim e que, neste caso, era impossível determinar a distribuição escolhida apenas utilizando a soma z informada.

Assim, os estudantes conseguiram responder, facilmente, à última questão norteadora, revelando que nem sempre era possível realizar a mágica e que as condições avaliadas na tabela da figura 2 garantiam a viabilidade da mágica para $3 \leq w \leq 7$.

Em seguida, o professor perguntou aos estudantes se alguém foi capaz de resolver a mágica algebriamente. Uma estudante se manifestou dizendo que havia conseguido desvendar a primeira versão da mágica e a explicou corretamente. Com isso, o professor retomou a explicação feita por ela e revelou o segredo da segunda versão utilizada, apresentando a solução algébrica do problema. Isto é, mostrou que não era necessário decorar os valores da tabela construída por eles. Na sequência, estabeleceu conexões entre a mágica e os conceitos estudados em sistemas lineares — mais especificamente, com as equações lineares decorrentes do problema, as operações elementares aplicadas ao sistema que conduzem à sua resolução, e à discussão da quantidade de soluções possíveis ao sistema por meio do cálculo de determinantes. Ao final, o professor realizou uma síntese das principais discussões tidas até ali e, utilizando os conhecimentos acerca dos sistemas lineares trazidos pelos estudantes, investigou se as conclusões iniciais se mantinham.

6. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Ao final da prática descrita na seção anterior, os estudantes responderam, de forma independente e autônoma, a um questionário de pesquisa[12] acerca de suas percepções a respeito da atividade proposta. Eles foram indexados pelas letras de A a M; quando for necessário mencionar o estudante que preencheu o formulário C, por exemplo, este será referido como estudante C.

Tendo como proposta inicial deste estudo de caso investigar a efetividade do truque das tampinhas distribuídas enquanto atividade lúdica, no âmbito do ensino médio, para o ensino de sistemas lineares, considerando a perspectiva de ludicidade e atividade lúdica posta por Luckesi (2023), buscou-se apurar se os participantes do estudo de caso, ao experimentarem a atividade lúdica, puderam ou não experienciar a ludicidade. Isto é, experienciar um estado de consciência positivo frente à atividade proposta utilizando o truque das tampinhas. Além disso, buscou-se avaliar as percepções dos estudantes no que tange à matemágica apresentada e às evidências de aprendizagem que esta pôde produzir.

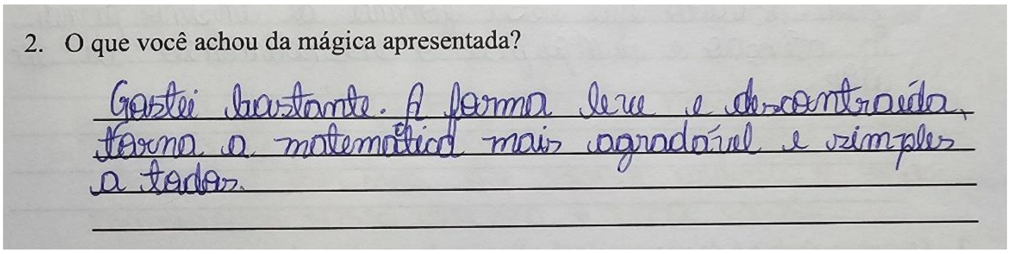
Previamente, houve uma inquietação relacionada à adequação metodológica da prática pedagógica planejada, visto que, o público ao qual a atividade se destinava era de adolescentes. Essa etapa do desenvolvimento humano é marcada por uma busca crescente por identidade e autonomia, que os leva a rejeitarem comportamentos, objetos e símbolos associados à infância, o que de certo ponto de vista é corroborado pelos estágios do desenvolvimento cognitivo de Piaget (1970), pois na adolescência os jovens ingressam no estágio das operações formais — caracterizada pela presença do pensamento abstrato e a capacidade de realização de operações sobre hipóteses, em oposição ao estágio operatório concreto, estágio que o precede, no qual a criança só é capaz de operar sobre objetos e eventos concretos. Essas considerações destacam o desafio de utilizar uma matemágica como recurso didático com tal público-alvo, indicando que as dificuldades não estão apenas na estrutura da atividade, mas também em como ela é percebida pelos estudantes em termos simbólicos.

Apesar do exposto anteriormente, durante o estudo de caso, pôde ser percebido grande engajamento dos participantes por meio de suas expressões não verbais e verbais. Havia olhares atentos e sorrisos durante o clímax da matemágica, bem como, cochichos indagando sobre

[12]Os questionários serviram como fonte primária de dados para o estudo de caso aqui proposto e estão disponíveis nos anexos deste trabalho para os olhares de outros pesquisadores que tenham interesse em versar sobre ludicidade e atividades lúdicas, sobretudo, no ensino de matemática.

como aquelas adivinhações eram possíveis. Além disso, por meio da análise do questionário, quando perguntados sobre o que acharam da mágica, todos os participantes a avaliaram positivamente indicando que houve total aceitação da estratégia empregada, apesar da faixa etária dos mesmos. Cabe destaque o fato de que cerca de 77% dos participantes utilizaram os vocábulos “interessante” ou “curiosa” para caracterizar a mágica apresentada. A seguir, exemplo de avaliação de um participante.

Figura 4 — Avaliação do estudante B sobre o truque das tampinhas

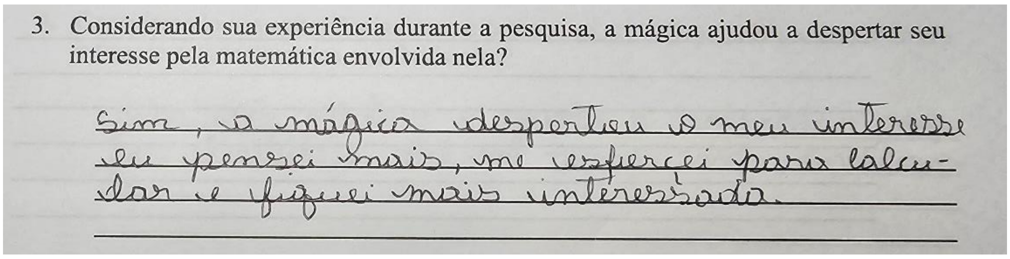

2. O que você achou da mágica apresentada?

Gostei bastante. A forma leve e descontraída, torna a matemática mais agradável e simples a todos.

Fonte: arquivo pessoal do autor.

Quando perguntados se a mágica apresentada ajudou a despertar o interesse pela matemática envolvida nela, todos os estudantes disseram que sim, a mágica os intrigou a compreender os porquês matemáticos do truque e muitos destacaram que se sentiram estimulados e empenhados em realizar cálculos mentais durante a atividade proposta, com relatos similares ao da estudante A, exposto na figura abaixo.

Figura 5 — Avaliação da estudante A com relação aos estímulos provocados pelo truque das tampinhas

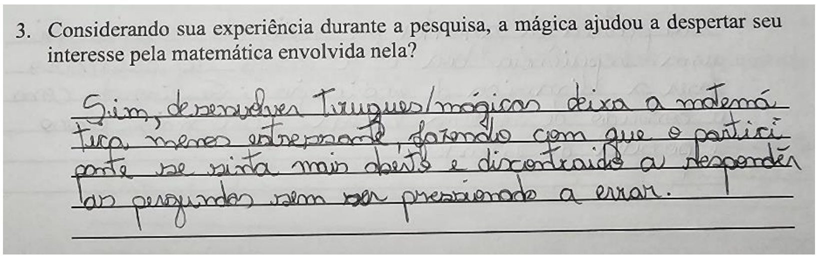

3. Considerando sua experiência durante a pesquisa, a mágica ajudou a despertar seu interesse pela matemática envolvida nela?

Sim, a mágica despertou o meu interesse eu pensei mais, me esforcei para calcular e fiquei mais interessada.

Fonte: arquivo pessoal do autor.

Cabe ressaltar os relatos dos estudantes que alegaram não gostar da disciplina, mas tinham curiosidade com relação ao truque e aos seus porquês, evidenciando que este tipo de prática pode ser uma ferramenta importante para superar bloqueios relacionados à matemática, trazidos pelos jovens. Nesse sentido, o estudante D, destacou que a atividade desenvolvida no estudo de caso criou um ambiente aberto para a escuta dos posicionamentos dos participantes sem pressioná-los com relação à alcunha de respostas certas e erradas, todas as hipóteses levantadas foram ouvidas e sua razoabilidade era discutida pelo grupo, como pode ser visto a seguir.

Figura 6 — Avaliação do estudante D com relação ao ambiente promovido pela atividade proposta



3. Considerando sua experiência durante a pesquisa, a mágica ajudou a despertar seu interesse pela matemática envolvida nela?

Sim, desenvolver Truques/mágicas deixa a matemática menos estressante, fazendo com que o participante se sinta mais aberto e descontraído a responder as perguntas sem ser pressionado a errar.

Fonte: arquivo pessoal do autor.

Além do destaque ao fomento aos cálculos mentais, muitos estudantes relataram que realizaram tentativas de reconhecimento de padrões ou outras ferramentas lógicas para desvendar como as adivinhações eram possíveis nas diferentes versões da mágica apresentada. Isso demonstra que o truque das tampinhas distribuídas possui potencial para despertar o interesse dos estudantes, envolvê-los e estimulá-los a mobilizar a matemática que trazem consigo para a resolução de um problema. Isto é, reconhecer a sua capacidade de fazer matemática. Outro dado compatível com essa afirmação é que 84% dos participantes relataram que, durante o desenvolvimento da prática, tentaram usar ferramentas matemáticas para desvendar o truque.

Ademais, o ambiente aberto a reflexões acerca dos modelos matemáticos possíveis que caracterizassem as condições para que a mágica pudesse ser realizada dotou a atividade proposta das características de um cenário para a investigação, nos moldes de Skovsmose (2000) em oposição ao paradigma do exercício. O paradigma do exercício, amplamente presente na educação matemática tradicional, pressupõe que, de maneira geral, observa-se a aula de matemática dívida em dois momentos. No primeiro, o professor expõe ideias acerca de um determinado tema e, no segundo momento, os estudantes trabalham com exercícios selecionados, sendo a prática centrada na resolução de tarefas com respostas únicas e pré-determinadas, frequentemente descontextualizadas. Como contraponto, os cenários para investigação propostos por Skovsmose (2000) oferecem um ambiente em que os alunos são convidados a explorar, levantar hipóteses e justificar ideias, assumindo papel ativo na construção do conhecimento.

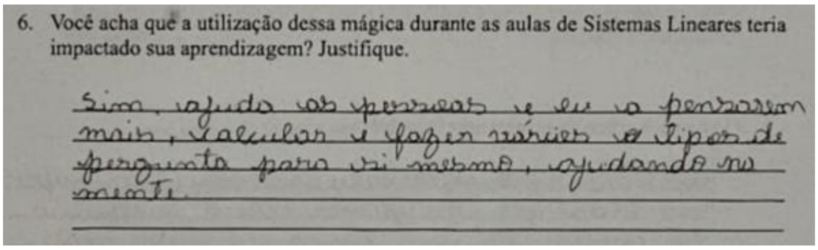
Usualmente, os problemas da realidade material não se apresentam como problemas de matemática, tampouco como problemas com uma única solução. Desta forma, estudantes que são estimulados a formular e a refletir criticamente sobre a razoabilidade de seus argumentos estarão mais bem preparados para enfrentar situações complexas que exigem tomadas de decisões fundamentadas. Logo, oportunizar atividades que desenvolvam a capacidade reflexiva e crítica dos estudantes favorece o domínio dos conteúdos matemáticos envolvidos e possibilita que os mesmos se apropriem da matemática como uma ferramenta para compreender, interpretar e transformar a realidade em que vivem. Vale destacar que, como Skovsmose (2000) prevê, esse caminho não tem como propósito abominar a metodologia tradicional com uso de aulas expositivas e exercícios, tampouco apresentar as matemágicas como recurso didático definitivo para a aprendizagem e uso diário. A ideia aqui é discutir diferentes maneiras de oportunizar a aprendizagem da matemática, sobretudo considerando o contexto atual de salas de aula com alunos em diferentes níveis de aquisição do conhecimento matemático.

No contexto da atividade, cerca de 84% dos estudantes relataram que tentaram desvendar o truque com o uso do raciocínio lógico e matemático, evidenciando alguns aspectos importantes. Apesar da linguagem lúdica, em geral, ser mais comumente utilizada e pesquisada no âmbito da educação infantil e no ensino fundamental, a linguagem das matemágicas, mais especificamente, do truque das tampinhas distribuídas, mostrou-se adequada e interessante aos adolescentes integrantes do estudo de caso. Além disso, a prática evidenciou que a atividade ancorada no truque das tampinhas distribuídas foi capaz de estimular e desafiar os estudantes a utilizarem ferramentas matemáticas trazidas a priori para tentar desvendar o truque, isto é, reconhecer a matemática que trazem consigo e aplicá-la.

As principais estratégias adotadas pelos estudantes consistiram no emprego de operações algébricas simples, formas de tornar os cálculos mentais mais velozes para tentar cobrir todas as possibilidades ou reconhecimento de padrões de forma própria. Um estudante, por exemplo, buscou empregar estratégias envolvendo a paridade da soma z informada pelo voluntário da mágica, enquanto outro, buscou organizar e resolver um sistema linear com os valores apresentados, o que é consistente com o relato das atividades na seção 5.2. Nele, foi constatado que uma estudante foi capaz de rapidamente desvendar a primeira versão da mágica, por meio da formulação e da resolução de um sistema linear tradicional, e se sentiu mais desafiada a solucionar a segunda versão, ambas as versões descritas na seção 4.1.

Apesar da maior parte das estratégias empregadas pelos estudantes não os levarem ao total êxito, vemos que, em sua totalidade, superaram algumas barreiras rotineiras da sala, como a inércia do pensamento ao serem questionados diante de um exercício. O grupo tentou, dentro de suas possibilidades, encontrar soluções próprias e criativas dando o primeiro passo, e talvez, o mais difícil, em direção ao êxito: os estudantes estavam buscando resolver um problema. Isso é corroborado pelo pensamento de Polya (1995), pois, para ele, o professor que busca desenvolver nos alunos a habilidade de resolver problemas precisa despertar neles o interesse por esse tipo de atividade e oferecer diversas oportunidades para que possam praticar e experimentar. Além disso, ao resolver um problema durante a aula, o professor deve expressar suas ideias com certa ênfase, questionando-se de forma semelhante àquela que utiliza para orientar os alunos. Com esse tipo de abordagem, o estudante aprende a empregar adequadamente perguntas e sugestões, adquirindo, assim, algo mais valioso do que apenas o conhecimento de um fato matemático específico. O que pode ser observado no relato a seguir:

Figura 7 — Avaliação do estudante A quanto a utilização do truque em aulas sobre sistemas lineares

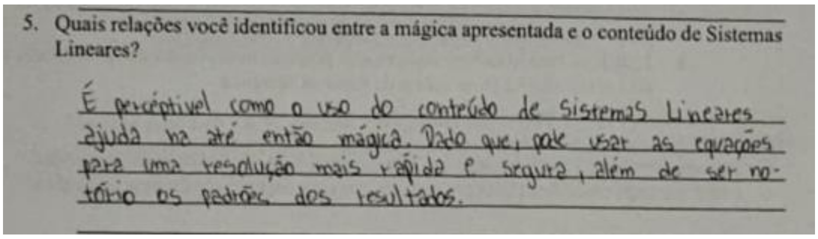

6. Você acha que a utilização dessa mágica durante as aulas de Sistemas Lineares teria impactado sua aprendizagem? Justifique.

Sim, ajuda as pessoas e eu a pensarem mais, calcular e fazer vários tipos de pergunta para si mesmo, ajudando na mente.

Fonte: arquivo pessoal do autor.

Embora a maioria dos alunos tenha conseguido estabelecer conexões entre a mágica apresentada e o conteúdo de sistemas lineares, um dos estudantes encontrou dificuldades em traçar essas relações com precisão. Entre os que reconheceram as ligações propostas, prevaleceram conexões superficiais, evidenciada pelas formulações pouco aprofundadas nos registros escritos. Tais aspectos podem ser observados com mais detalhes nos relatos apresentados a seguir.

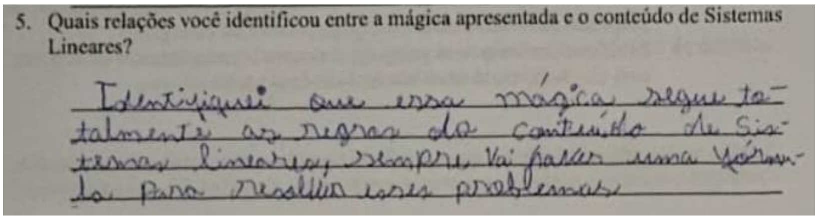
Figura 8 — Relações identificadas entre a mágica apresentada e os sistemas lineares pelo estudante E


5. Quais relações você identificou entre a mágica apresentada e o conteúdo de Sistemas Lineares?

É perceptível como o uso do conteúdo de Sistemas Lineares
ajuda na até então mágica. Dado que, pode usar as equações
para uma resolução mais rápida e segura, além de ser no-
tório os padrões dos resultados.

Fonte: arquivo pessoal do autor.

Figura 9 — Relações identificadas entre a mágica apresentada e os sistemas lineares pelo estudante L

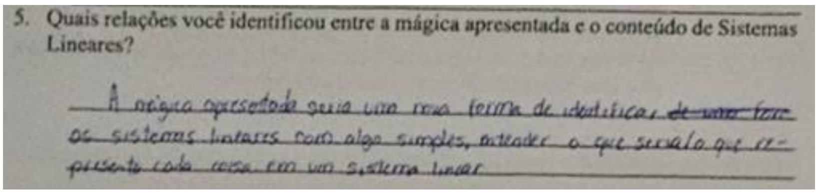

5. Quais relações você identificou entre a mágica apresentada e o conteúdo de Sistemas Lineares?

Identifiquei que essa mágica segue to-
talmente as regras do conteúdo de Sis-
temas lineares, sempre vai haver uma fórmu-
la para resolver esses problemas.

Fonte: arquivo pessoal do autor.

Apesar da dificuldade com a expressão escrita, oralmente, no momento das discussões, os conceitos foram utilizados de maneira correta e coerente ao conteúdo de sistemas lineares. Eles foram capazes de associar as incógnitas x e y às respectivas quantidades de objetos na mão esquerda e na mão direita, modelar as equações lineares relativas à situação problema apresentada e, no âmbito da solução efetiva via sistemas lineares, compreender os métodos empregados para a resolução. Alguns estudantes conseguiram expressar isso também nos formulários de pesquisa, como mostrado abaixo:

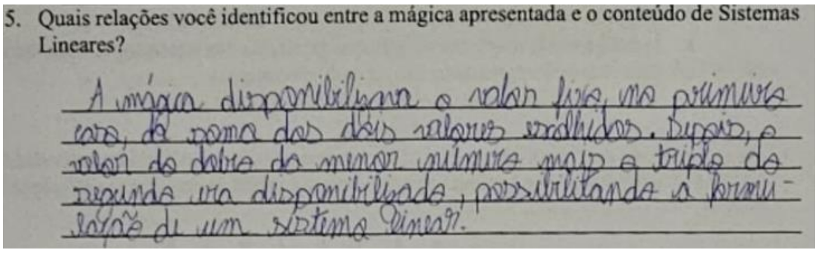
Figura 10 — Relações identificadas entre a mágica apresentada e os sistemas lineares pelo estudante G


5. Quais relações você identificou entre a mágica apresentada e o conteúdo de Sistemas Lineares?

A mágica apresentada seria uma nova forma de identificar ~~de uma for~~
os sistemas lineares como algo simples, entender o que seria o que re-
presenta cada coisa em um sistema linear

Fonte: arquivo pessoal do autor.

Figura 11 — Relações identificadas entre a mágica apresentada e os sistemas lineares pelo estudante J


5. Quais relações você identificou entre a mágica apresentada e o conteúdo de Sistemas Lineares?

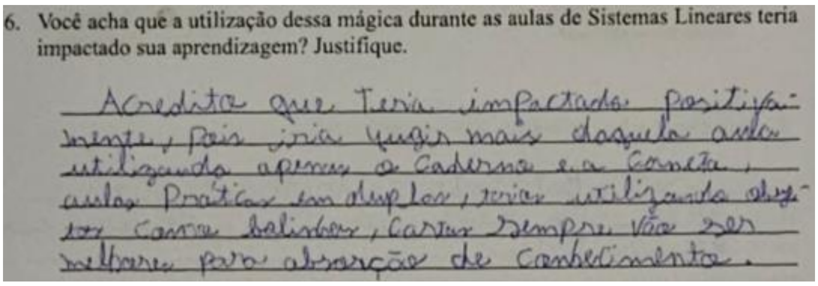
A mágica disponibilizava o valor fixo, no primeiro caso, da soma dos dois valores escolhidos. Depois, o valor do dobro do menor número mais o triplo do segundo era disponibilizado, possibilitando a formulação de um sistema linear.

Fonte: arquivo pessoal do autor.

Os participantes do estudo de caso eram estudantes cumprindo a fase final do ciclo da educação básica. Assim, fez-se pertinente à investigação a percepção dos estudantes acerca do impacto da atividade proposta em sua aprendizagem, quando tiveram suas aulas de sistemas lineares. As respostas foram diversas e retomando, muitas vezes, o diálogo com o referencial teórico inicialmente proposto.

Cerca de 92% dos estudantes acreditam que o uso da prática pedagógica apoiada pelo truque das tampinhas distribuídas teria impactado positivamente sua aprendizagem em sistemas lineares. Apenas um estudante avaliou que o impacto seria indiferente. De maneira geral, as percepções expostas pelos estudantes centraram-se em explanar que, se tivessem tido contato com a atividade realizada no estudo de caso, as aulas poderiam ter sido mais interessantes pelo dinamismo e por sua capacidade de prender a atenção e simplificar o entendimento de conceitos que, por vezes, podem parecer complexos. Além disso, os registros dos estudantes permitem concluir e ressaltar que a atividade lúdica proposta fez com que eles explorassem os princípios matemáticos por trás do truque, numa perspectiva reflexiva e investigativa, o que alça a atividade envolvendo o truque das tampinhas distribuídas a uma alternativa possível a variações de aulas, visando superar o paradigma do exercício. Em parte, essas reflexões também foram percebidas no relato do estudante L, ao apresentar sua percepção sobre o impacto que a mágica poderia ter causado em sua aprendizagem quando estudou sistemas lineares, a seguir.

Figura 12 — Reflexões do estudante L

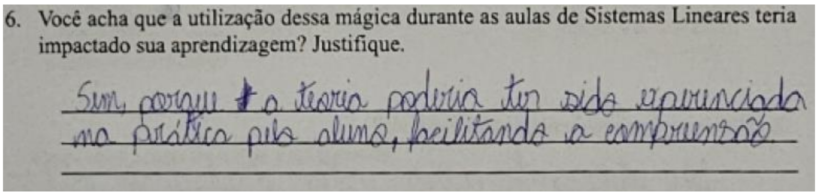

6. Você acha que a utilização dessa mágica durante as aulas de Sistemas Lineares teria impactado sua aprendizagem? Justifique.

Acredito que teria impactado positivamente, pois iria fugir mais daquela aula utilizando apenas o caderno e a caneta, aulas práticas em duplas, tendo utilizando objetos como bolinhas, cartas sempre vão ser melhores para absorção de conhecimento.

Fonte: arquivo pessoal do autor.

Outrossim, as reflexões do estudante J acerca do potencial pedagógico da atividade com o truque das tampinhas para o ensino de sistemas lineares ecoam o diálogo com D'Ambrósio (1986) ao defender a busca por formas de ensinar e aprender matemática reconhecendo-a como atividade inerente ao ser humano, praticada de forma espontânea, resultante do ambiente sociocultural ao qual se está inserido. Isto é, uma busca por formas de ensinar que contextualizem a matemática e a aproxime da realidade dos estudantes:

Figura 13 — Reflexões do estudante J



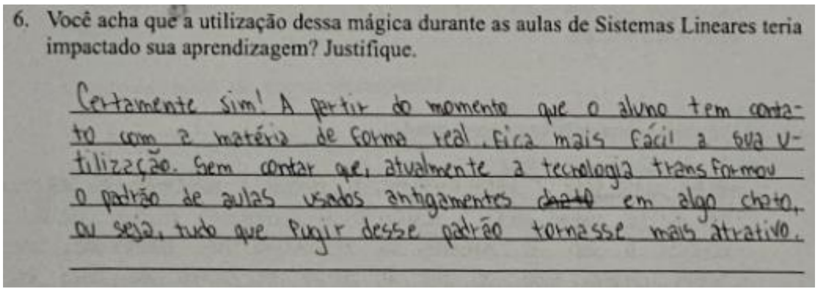
6. Você acha que a utilização dessa mágica durante as aulas de Sistemas Lineares teria impactado sua aprendizagem? Justifique.

Sim, porque a teoria poderia ter sido experienciada na prática pelo aluno, facilitando a compreensão

Fonte: arquivo pessoal do autor.

O estudante E, em consonância ao J, destaca que ter contato com o conteúdo de forma concreta e conectada à realidade facilita a compreensão e a aplicação dos conceitos. E vai além, ao relatar que o contato constante com a tecnologia, natural da juventude, contribui com a valoração de sentido negativo ao padrão tradicional de aulas. Além disso, o estudante E enfatizou que abordagens diferenciadas, como o uso do truque das tampinhas distribuídas, tornam as aulas mais atrativas, como pode ser observado na imagem abaixo.

Figura 14 — Reflexões do estudante E



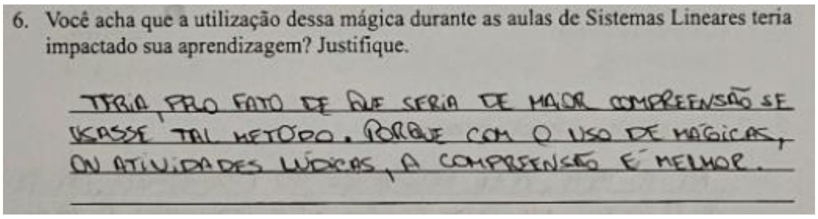
6. Você acha que a utilização dessa mágica durante as aulas de Sistemas Lineares teria impactado sua aprendizagem? Justifique.

Certamente sim! A partir do momento que o aluno tem contato com a matéria de forma real, fica mais fácil a sua utilização. Sem contar que, atualmente a tecnologia transformou o padrão de aulas usados antigamente ~~chato~~ em algo chato, ou seja, tudo que fugir desse padrão tornasse mais atrativo.

Fonte: arquivo pessoal do autor.

A percepção do estudante E também corrobora com apontamentos teóricos utilizados para o preparo deste estudo de caso, pois Silva (2015) evidencia que, apesar dos avanços tecnológicos e de suas implicações e transformações nos diversos segmentos da sociedade, o ensino de matemática ainda segue um modelo tradicional, desinteressante e distante da realidade dos alunos. Como alternativa, o autor sugere o uso de práticas lúdicas que incentivem o raciocínio lógico e a análise crítica na resolução de problemas. O que se sustenta nas percepções do estudante F, abaixo.

Figura 15 — Reflexões do estudante F

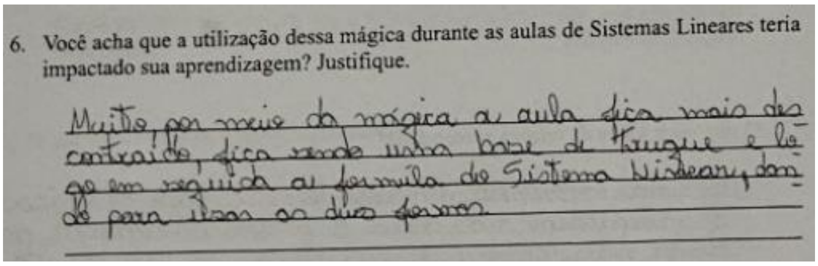

6. Você acha que a utilização dessa mágica durante as aulas de Sistemas Lineares teria impactado sua aprendizagem? Justifique.

TERIA, PELO FATO DE QUE SERIA DE MAIOR COMPREENSÃO SE USASSE TAL MÉTODO. PORQUE COM O USO DE MÁGICAS, OU ATIVIDADES LÚDICAS, A COMPREENSÃO É MELHOR.

Fonte: arquivo pessoal do autor.

Paralelamente, para aqueles que possam considerar as atividades lúdicas apenas como brincadeiras bobas e sem propósito, as reflexões tecidas pelo estudante D evidenciam o extremo oposto. Isto é, quando bem planejada, a atividade lúdica tem grande potencial educativo estimulando o raciocínio lógico e o engajamento dos alunos, servindo como base para a apresentação dos rudimentos clássicos dos conteúdos matemáticos, como disposto a seguir.

Figura 16 — Reflexões do estudante D

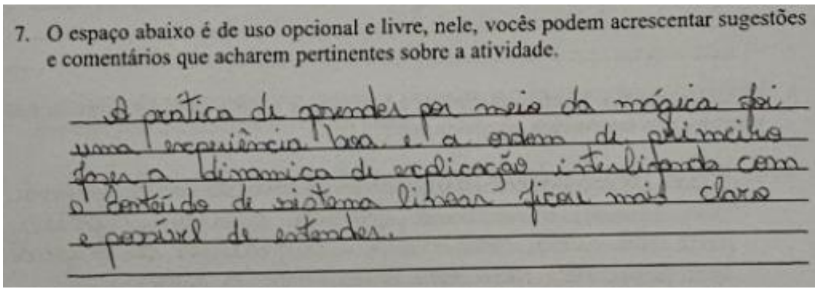

6. Você acha que a utilização dessa mágica durante as aulas de Sistemas Lineares teria impactado sua aprendizagem? Justifique.

Muito, por meio da mágica a aula fica mais descontraída, fica sendo uma base de truque e logo em seguida a fórmula do Sistema Linear, dando para usar os dois formas.

Fonte: arquivo pessoal do autor.

Ao final do questionário de pesquisa, os estudantes dispunham de um campo de livre preenchimento para comentários gerais, cinco estudantes utilizaram esse espaço. As respostas revelaram uma avaliação majoritariamente positiva, com elogios direcionados à clareza da explicação e à temática da atividade. Um estudante, inclusive, sugeriu que a atividade fosse incorporada às aulas regulares, reconhecendo seu potencial pedagógico. No entanto, também surgiram críticas relacionadas ao ritmo acelerado da explicação, em pontos específicos durante a atividade, apontado como um dificultador da compreensão. Essa percepção, em parte, pode ser atribuída aos atrasos na chegada de alguns estudantes ao local da atividade, o que comprometeu o andamento ideal do planejamento. Estes fatos são ilustrados pelos registros a seguir.

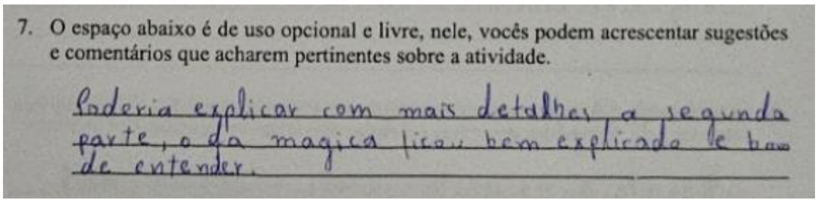
Figura 17 — Comentários livres do estudante D


7. O espaço abaixo é de uso opcional e livre, nele, vocês podem acrescentar sugestões e comentários que acharem pertinentes sobre a atividade.

A prática de aprender por meio da mágica foi uma experiência boa e a ordem de primeiro fazer a dinâmica de explicação interligando com o conteúdo de sistema linear ficou mais claro e possível de entender.

Fonte: arquivo pessoal do autor.

Figura 18 — Comentários livres do estudante H


7. O espaço abaixo é de uso opcional e livre, nele, vocês podem acrescentar sugestões e comentários que acharem pertinentes sobre a atividade.

Poderia explicar com mais detalhes a segunda parte, o da magica ficou bem explicado e bom de entender.

Fonte: arquivo pessoal do autor.

Os dados obtidos indicam que a utilização do truque das tampinhas distribuídas como recurso didático no ensino de sistemas lineares mostrou-se eficaz, uma vez que a proposta promoveu o envolvimento ativo dos estudantes e incentivou, de forma espontânea e positiva, o desenvolvimento do raciocínio lógico. Ademais, a utilização da matemágica foi percebida, de forma geral, como uma estratégia eficaz para tornar a aprendizagem do conteúdo mais acessível e significativa. As percepções dos estudantes participantes do estudo de caso foram classificadas e tratadas mais detalhadamente, como disposto abaixo:

Figura 19 — Classificação geral de dados do formulário de pesquisa

Pergunta/Estudante	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Em uma escala de 1 a 10, em que 1 é 'não me senti bem nem envolvido na atividade' e 10 é 'me senti muito bem', como você avaliaria sua experiência durante a atividade?	10	10	10	9	10	10	10	10	9	10	8	10	9
O que você achou da mágica apresentada?	Avaliou Positivamente	Avaliou Positivamente	Avaliou Positivamente	Avaliou Positivamente	Avaliou Positivamente	Avaliou Positivamente	Avaliou Positivamente	Avaliou Positivamente	Avaliou Positivamente	Avaliou Positivamente	Avaliou Positivamente	Avaliou Positivamente	Avaliou Positivamente
Considerando sua experiência durante a pesquisa, a mágica ajudou a despertar seu interesse pela matemática envolvida nela?	Avaliou que a mágica despertou seu interesse pela matemática	Avaliou que a mágica despertou seu interesse pela matemática	Avaliou que a mágica despertou seu interesse pela matemática	Avaliou que a mágica despertou seu interesse pela matemática	Avaliou que a mágica despertou seu interesse pela matemática	Avaliou que a mágica despertou seu interesse pela matemática	Avaliou que a mágica despertou seu interesse pela matemática	Avaliou que a mágica despertou seu interesse pela matemática (com observações)	Avaliou que a mágica despertou seu interesse pela matemática (com observações)	Avaliou que a mágica despertou seu interesse pela matemática	Avaliou que a mágica despertou seu interesse pela matemática	Avaliou que a mágica despertou seu interesse pela matemática	Avaliou que a mágica despertou seu interesse pela matemática
Durante a apresentação, você tentou desvendar o truque com o uso do raciocínio lógico e matemático? Se sim, qual(ais)?	Sim	Não	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Não	Sim
Quais relações você identificou entre a mágica apresentada e o conteúdo de Sistemas Lineares?	O estudante fez relações entre a mágica e o conteúdo de sistemas lineares	O estudante fez relações entre a mágica e o conteúdo de sistemas lineares	O estudante fez relações entre a mágica e o conteúdo de sistemas lineares	O estudante fez relações entre a mágica e o conteúdo de sistemas lineares	O estudante fez relações entre a mágica e o conteúdo de sistemas lineares	O estudante fez relações entre a mágica e o conteúdo de sistemas lineares	O estudante fez relações entre a mágica e o conteúdo de sistemas lineares	O estudante fez relações entre a mágica e o conteúdo de sistemas lineares	O estudante fez relações entre a mágica e o conteúdo de sistemas lineares (mas não identificou com precisão)	O estudante fez relações entre a mágica e o conteúdo de sistemas lineares	O estudante fez relações entre a mágica e o conteúdo de sistemas lineares	O estudante fez relações entre a mágica e o conteúdo de sistemas lineares	O estudante fez relações entre a mágica e o conteúdo de sistemas lineares
Você acha que a utilização dessa mágica durante as aulas de Sistemas Lineares teria impactado sua aprendizagem?	O estudante acredita que a utilização da mágica teria impactado sua aprendizagem em sistemas lineares de forma positiva	O estudante acredita que a utilização da mágica teria impactado sua aprendizagem em sistemas lineares de forma positiva	O estudante acredita que a utilização da mágica teria impactado sua aprendizagem em sistemas lineares de forma positiva	O estudante acredita que a utilização da mágica teria impactado sua aprendizagem em sistemas lineares de forma positiva	O estudante acredita que a utilização da mágica teria impactado sua aprendizagem em sistemas lineares de forma positiva	O estudante acredita que a utilização da mágica teria impactado sua aprendizagem em sistemas lineares de forma positiva	O estudante acredita que a utilização da mágica teria impactado sua aprendizagem em sistemas lineares de forma positiva	O estudante acredita que a utilização da mágica teria impactado sua aprendizagem em sistemas lineares de forma positiva	O estudante acredita que a utilização da mágica teria impactado sua aprendizagem em sistemas lineares de forma indiferente	O estudante acredita que a utilização da mágica teria impactado sua aprendizagem em sistemas lineares de forma positiva	O estudante acredita que a utilização da mágica teria impactado sua aprendizagem em sistemas lineares de forma positiva	O estudante acredita que a utilização da mágica teria impactado sua aprendizagem em sistemas lineares de forma positiva	O estudante acredita que a utilização da mágica teria impactado sua aprendizagem em sistemas lineares de forma positiva

Fonte: elaboração própria, 2025.

Os resultados da pesquisa indicam que há evidências de que o estado lúdico foi alcançado conforme os critérios definidos por Luckesi (2023), uma vez que todos os estudantes relataram não ter sentimentos negativos em relação à atividade proposta. Na escala de percepção, nenhuma resposta foi inferior a 8, sendo que a pontuação máxima, 10, representava o estado “me senti muito bem” durante a atividade.

Observou-se, também, que o truque das tampinhas distribuídas despertou grande interesse entre os adolescentes, que se mostraram motivados a compreender os mecanismos por trás do truque, mobilizando, para isso, os conhecimentos matemáticos que já possuíam, operando-os de forma espontânea e natural. A atividade baseada na mágica demonstrou possuir um potencial didático significativo, permitindo que os estudantes fizessem a transposição do conteúdo da prática para a teoria, compreendendo conceitos relacionados aos sistemas lineares, como o uso de modelos matemáticos na resolução de problemas. Ademais, utilizaram estratégias para revisar um método usual de resolução de sistemas lineares e compreender uma forma não usual de resolvê-los.

Os participantes, de maneira geral, avaliaram com entusiasmo o impacto do truque das tampinhas em sua aprendizagem. Relataram que a atividade foi envolvente, despertou curiosidade e facilitou a compreensão dos conceitos matemáticos abordados. Além disso, destacaram que o formato diferenciado da proposta contribuiu para tornar o conteúdo mais acessível e interessante.

Por fim, ressalta-se que esses resultados podem ser confrontados em estudos de maior abrangência, tanto para verificar sua generalidade quanto para explorar novas versões do truque, ainda há multiplicadores a serem descobertos!

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Não é incomum escutar relatos de estudantes nas escolas com relação às suas percepções sobre aulas de matemática. Em geral, eles demonstram queixas sobre a dificuldade de aprendizagem dos conteúdos porque consideram que esses são muito difíceis, complicados ou mesmo desinteressantes. Nesse contexto, práticas pedagógicas que incentivem o fazer matemático, resgatando sua essência sem renunciar à fundamentação matemática, surgem como uma alternativa ao cenário de dificuldades e desinteresse, vivenciado cotidianamente no âmbito da sala de aula.

Dessa forma, apresentou-se o truque das tampinhas distribuídas como instrumento de apoio a uma atividade lúdica. Nela, o professor desafia os estudantes a desvendarem um truque de adivinhação matemática, objetivando que a atividade propicie um cenário investigativo e motive o estudo de sistemas lineares por meio de elementos materiais imersos numa experiência lúdica.

Com isso, fez-se necessário explorar e compreender o conceito de ludicidade pela visão de diferentes autores, considerando seus pressupostos teóricos e metodológicos — em especial, as contribuições de Luckesi (2023); para quem, a ludicidade pode ser compreendida por meio de duas dimensões complementares: a interna e a externa. A dimensão interna refere-se ao estado de consciência do sujeito, um estado de ânimo de plenitude e envolvimento profundo na atividade que realiza, independentemente de seu formato. Já a dimensão externa se refere às atividades lúdicas propriamente ditas, às ações observáveis e às situações sociais que podem favorecer — mas não garantir — a emergência do estado lúdico (Luckesi, 2023).

Nesse sentido, a ludicidade não é meramente uma atividade ou recurso pedagógico, mas uma experiência integral que emerge da interação entre o sujeito e a proposta realizada. Promover a ludicidade na educação exige, portanto, mais do que oferecer jogos ou brincadeiras: requer a criação de contextos que façam sentido frente à realidade dos estudantes, nos quais eles possam envolver-se plenamente e experienciar outra forma de estudar matemática. Aqui, vale destacar outras experiência exitosas de professores brasileiros que buscaram utilizar-se das matemágicas como ferramenta de ensino e forma de divulgação científica a fim de ressignificá-la para diversos estudantes, como os trabalhos de Sampaio e Malagutti (2008), Silva Neto e Pacheco (2017) e Pereira (2024).

Os resultados desta pesquisa trazem evidencias que o estado lúdico foi alcançado pelos estudantes, conforme os critérios definidos por Luckesi (2023), uma vez que todos relataram experiências positivas em relação à atividade desenvolvida. Ademais, o truque das tampinhas distribuídas despertou elevado interesse e motivação entre os adolescentes, favorecendo o uso espontâneo de conhecimentos matemáticos prévios para a compreensão dos mecanismos envolvidos no truque. A atividade mostrou-se didaticamente relevante, ao possibilitar a transposição dos saberes da prática para a teoria, promovendo a compreensão de conceitos fundamentais dos sistemas lineares, como o uso de modelos matemáticos e métodos de resolução. Os dados obtidos mostram que práticas pedagógicas que respeitam e articulam essas dimensões têm grande potencial para tornar o aprendizado mais significativo, estimulando a curiosidade e o raciocínio lógico.

Portanto, futuras pesquisas podem explorar a replicação e variações dessa atividade, a fim de verificar sua eficácia em outros contextos educativos e ampliar seu potencial pedagógico. Além disso, do ponto de vista matemático, os critérios que caracterizam as condições para que a mágica funcione deixam abertas as investigações para outros pares de multiplicadores como u e u^4, u e u^5, etc.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALENCAR FILHO, Edgard de Alencar. **Teoria elementar dos números**. São Paulo: Nobel, 1981.

ALMEIDA, Paulo Nunes de. **Educação lúdica**: técnicas e jogos pedagógicos. São Paulo: Loyola, 1998.

BACELAR, Vera Lúcia da Encarnação. **Ludicidade e educação infantil**. Salvador: EDUFBA, 2009.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática / Secretaria de Educação Fundamental. — Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CARDOSO, Valdinei Cezar. **Ensino de aprendizagem de Álgebra Linear**: uma discussão acerca de aulas tradicionais, reversas e de vídeos digitais. 2014. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) — Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.

CHEMALE, Elena Haas; KRUSE, Fábio. **Curiosidades matemáticas**. Novo Hamburgo: Fevale, 1999.

COELHO, Flávio Ulhoa. **Curso de álgebra linear**. São Paulo: Edusp, 2001.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Da realidade à ação**: Reflexões sobre educação e matemática. 5ª ed. Campinas: Sammus Editorial, 1986.

SILVA NETO, José Emidio; PACHECO, Willyan Ramon de Souza. A ludicidade como ferramenta potencializadora do processo de ensino-aprendizagem da Matemática. *In:* CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO — CONEDU, 4. 2017. **Anais**. João Pessoa: Editora Realize, 2017.

FRAGA, Caroline de Cristo Viana; ALBUQUERQUE, Isabela Santos. A ludicidade nos processos de ensino e aprendizagem: reflexões a partir de experiências desenvolvidas no curso de Licenciatura em Geografia — IFBA. *In:* CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO — CONEDU, 4. 2017. **Anais**. João Pessoa: Editora Realize, 2017.

HEFEZ, Abramo. **Elementos da Aritmética**. 3ª edição. Textos Universitários. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

HEFEZ, Abramo; FERNANDEZ, Cecília de Souza. **Introdução à álgebra linear**. Rio de Janeiro: SBM, v. 146, 2012.

HOFFMAN, Kenneth., KUNZE, Ray. Trad.: Adalberto P. Bergamasco. **Álgebra linear**. São Paulo: Universidade de São Paulo / Polígono, 1970.

HUIZINGA, Johan. **Homo ludens**: o jogo como elemento da cultura. Trad.: João Paulo Monteiro. São Paulo: Perspectiva, 2008.

LUCKESI, Cipriano Carlos. **Ludicidade e atividades lúdicas na prática educativa**: compreensoes conceituais e proposições. São Paulo: Cortez Editora, 2023.

MASSA, Monica de Souza. Ludicidade: da etimologia da palavra à complexidade do conceito. **Aprender-Caderno de filosofia e psicologia da educação**, n. 15, 2015.

PEDRINI, Leandro Colombo. **O Estudo de Sistemas Lineares nos Ensinos Fundamental e Médio**. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Instituto de Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Mato Grosso do Sul, 2013.

PEREIRA, Francinaldo Domingos. **Atividades de explorações matemáticas utilizando matemágicas com baralho no ensino da álgebra e da aritmética**. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Departamento de Matemática, Universidade Estadual da Paraíba, 2024.

PIAGET, Jean. **Epistemologia Genética**. Petrópolis: Vozes, 1970

POLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas**: um novo aspecto do método matemático. Trad.: Heitor Lisboa de Araújo, 2ª reimpressão. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1995.

SAMPAIO, João Carlos Vieira; MALAGUTTI, Pedro Luiz Aparecido. **Mágicas, matemática e outros mistérios**. São Carlos: EDUFSCar, 2008.

SANTOS, Rogério César dos; GONTIJO, Cleyton Hércules. Generalizações de dois truques matemáticos envolvendo álgebra ao nível da educação básica. **C.Q.D. — Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 12, p. 57-65, jul. 2018.

SANTOS, Rogério César dos; MELO, Antônio Luiz de; BEZERRA, Wescley Well Vicente, CASTILHO, José Eduardo; SANTOS, Thiago Henrique Campos. O truque das tampinhas distribuídas: uma atividade lúdica para o ensino de matemática. **Contribuciones a las Ciencias Sociales**, v. 17, n. 6, p. e7757, 2024.

SANTOS Rogério César dos; BRITO, Paulo Eduardo de; BEZERRA, Wescley Well Vicente; CORNÉLIO, Carlos Derli Almeida. Generalização de um truque matemático. **Professor de Matemática Online**, v. 8, p. 195-201, 2020.

SEVERINO, Antônio Joaquim. **Metodologia do trabalho científico**. 1. ed. São Paulo: Cortez, 2013.

SHERARD, Wade. **Mathemagic in the Classroom**. Portland: Walch Publishing, 1998.

SILVA, Luciano Martins da. Ludicidade e matemática: Um novo olhar para aprendizagem. **Revista Psicologia & Saberes**, v. 4, n. 5, p. 10-22, 2015.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. A dificuldade da Matemática no dizer do aluno: ressonâncias de sentido de um discurso. **Educação & Realidade**, v. 36, n. 3, p. 939–956, 2011.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. Trad. Jonei Cerqueira Barbosa. **Bolema**, Rio Claro, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.

SPADA, Arlenes Buzatto Delabary. **A construção de jogos de regras na formação dos professores de Matemática**. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação) — Faculdade de Educação, Universidade de Brasília, 2010.

YIN, Robert Kuo-zuir. **Estudo de Caso**: planejamento e métodos. Trad.: Daniel Grassi. Porto Alegre: 2ª Edição, Bookman, 2001.

ANEXOS

I. Termo de consentimento livre e esclarecido

PROFMAT

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TCLE

Você está sendo convidado(a) a participar, como voluntário(a), da pesquisa intitulada**: "Explorando sistemas lineares com tampinhas: uma abordagem lúdica e interativa".** Meu nome é Thiago Henrique Campos Santos, sou o pesquisador responsável, sob a orientação do professor doutor Rogério César dos Santos, no âmbito do Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional — PROFMAT — da Universidade de Brasília (UnB) e minha área de atuação é Educação Matemática. O texto abaixo apresenta todas as informações necessárias sobre a pesquisa em andamento. A sua colaboração neste estudo será de muita importância para nós, mas se desistir a qualquer momento, isso não lhe causará nenhum prejuízo.

O nome deste documento que você está lendo é Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE). Após a leitura deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, se houver concordância em participar da pesquisa, você ou seus responsáveis, em caso de estudante com idade inferior a 18 anos, devem assiná-lo. Em respeito à Lei Geral de Proteção de Dados – LGPD (13.709/2018), seus dados não serão divulgados para fins comerciais sob HIPÓTESE NENHUMA. Antes de decidir se deseja participar (de livre e espontânea vontade), você deverá ler e compreender todo o conteúdo. Antes de assinar, faça perguntas sobre tudo o que não tiver entendido bem.

A pesquisa denominada **"Explorando sistemas lineares com tampinhas: uma abordagem lúdica e interativa"** tem por objetivo avaliar a efetividade do uso de uma mágica matemática como recurso didático para o ensino de Sistemas Lineares e sua capacidade de despertar o interesse e a curiosidade dos estudantes como uma atividade lúdica.

Os convidadas que aceitarem ingressar na pesquisa participarão dela, com outros estudantes do Ensino Médio, ingressando numa aula de 50 minutos, cujo foco será o estudo de Sistemas Lineares por meio da investigação dos porquês de uma mágica matemática. Ao final da aula, com o intuito de coletar dados acerca da experiência dos participantes voluntários, estes deverão responder a um questionário de pesquisa.

É garantido aos participantes da pesquisa: (i) o anonimato; (ii) a livre participação na pesquisa; (iii) a não indução de respostas; (iv) a mínima intervenção possível; (v) a imparcialidade e a objetividade na condução das atividades, buscando minimizar, ao máximo, os possíveis riscos. Aqui, também, os participantes têm a garantia da não participação na pesquisa, podendo interrompê-la em qualquer momento, conforme descrito no TCLE.

Você receberá todos os esclarecimentos necessários antes, durante e após a finalização da pesquisa, em caso de necessidade de contato, este pode ser feito via e-mail: thiagocampos.professor@gmail.com, lhe asseguro que o seu nome não será divulgado, sendo mantido o mais rigoroso sigilo mediante a omissão total de informações que permitam identificá-lo(a). Os dados provenientes da participação na pesquisa, advindos de questionários, ficarão sob a guarda do pesquisador responsável pela pesquisa e podem ser divulgados de forma parcial ou integral junto aos resultados da pesquisa. A sua participação é voluntária e livre de qualquer remuneração ou benefício. Você é livre para recusar a participação, retirar seu consentimento ou interromper a participação a qualquer momento. A recusa em participar não irá acarretar qualquer penalidade ou perda de benefícios. No entanto, não há formas de ressarcimento de despesas realizadas pelo participante durante a pesquisa, como, por exemplo, custo de transporte e alimentação.

Os resultados da pesquisa poderão ser divulgados de diversas formas a saber: eventos científicos e pedagógicos (mesas redondas, comunicações orais, apresentações de pôsteres ou painéis, palestras, workshops, entre outras modalidades); em anais de eventos científicos e pedagógicos, como cadernos de resumos ou cadernos de trabalhos completos; em revistas acadêmicas, científicas, pedagógicas ou outras publicações midiáticas, seja em formato impresso ou digital, com os devidos créditos aos autores, e com a garantia do anonimato dos participantes.

Então, diante dos esclarecimentos prestados:

Eu,..., responsável por ...., assino abaixo, após receber a explicação completa dos objetivos do estudo e dos procedimentos envolvidos nesta pesquisa, autorizo a participação voluntária do aluno sobre minha tutela legal no estudo intitulado **"Explorando sistemas lineares com tampinhas: uma abordagem lúdica e interativa"**. Fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) pelo pesquisador(a) responsável **Thiago Henrique Campos Santos** sobre a pesquisa, os procedimentos e métodos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes da minha participação no estudo. Foi-me garantido que posso retirar meu consentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade. Declaro, portanto, que concordo com a minha participação no projeto de pesquisa acima descrito.

Brasília, ... de .... de ....

____

Assinatura por extenso do responsável legal

____

Assinatura por extenso do(a) pesquisador(a) responsável

II. Dados coletados por meio dos formulários de pesquisa

PROFMAT

FORMULÁRIO DE PESQUISA

Agradecemos a sua participação nesta pesquisa **"Explorando sistemas lineares com tampinhas: uma abordagem lúdica e interativa"**, lembre-se de que **suas respostas são anônimas** e serão utilizadas apenas para fins de pesquisa, leia as instruções abaixo antes do preenchimento do formulário:

- Seja sincero(a)! Não se preocupe, não há respostas certas ou erradas, as perguntas são relacionadas a sua percepção da atividade.
- Justifique suas respostas sempre que possível com o máximo de detalhes, pois elas farão parte da coleta de dado da pesquisa.

1. Em uma escala de 1 a 10, em que 1 é 'não me senti bem nem envolvido na atividade' e 10 é 'me senti muito bem', como você avaliaria sua experiência durante a atividade?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Não me senti bem nem envolvido na atividade	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	Me senti muito bem

2. O que você achou da mágica apresentada?

foi ótimo, o jeito que a mágica foi apresentado foi de forma clara e objetiva, no começo foi um pouco confuso, mas depois ficou muito legal.

3. Considerando sua experiência durante a pesquisa, a mágica ajudou a despertar seu interesse pela matemática envolvida nela?

Sim, a mágica despertou o meu interesse eu pensei mais, me esforcei para calcular e fiquei mais interessada.

A

A

4. Durante a apresentação, você tentou desvendar o truque com o uso do raciocínio lógico e matemático? Se sim, qual(ais)?

☐ Não ☒ Sim

Sim, eu fiz possíveis calculos na minha cabeça para ver se chegava ao resultado final e fiz vários raciocinio lógico mas não consegui.

5. Quais relações você identificou entre a mágica apresentada e o conteúdo de Sistemas Lineares?

Identifiquei os métodos entre os dois a multiplicação e um exemplo disso nos dois acontece multiplicações e subtração.

6. Você acha que a utilização dessa mágica durante as aulas de Sistemas Lineares teria impactado sua aprendizagem? Justifique.

Sim, ajuda as pessoas e eu a pensarem mais, calcular e fazer vários tipos de pergunta para si mesmo, ajudando na mente.

7. O espaço abaixo é de uso opcional e livre, nele, vocês podem acrescentar sugestões e comentários que acharem pertinentes sobre a atividade.

PROFMAT

FORMULÁRIO DE PESQUISA

Agradecemos a sua participação nesta pesquisa **"Explorando sistemas lineares com tampinhas: uma abordagem lúdica e interativa"**, lembre-se de que **suas respostas são anônimas** e serão utilizadas apenas para fins de pesquisa, leia as instruções abaixo antes do preenchimento do formulário:

- Seja sincero(a)! Não se preocupe, não há respostas certas ou erradas, as perguntas são relacionadas a sua percepção da atividade.
- Justifique suas respostas sempre que possível com o máximo de detalhes, pois elas farão parte da coleta de dado da pesquisa.

1. Em uma escala de 1 a 10, em que 1 é 'não me senti bem nem envolvido na atividade' e 10 é 'me senti muito bem', como você avaliaria sua experiência durante a atividade?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Não me senti bem nem envolvido na atividade	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	Me senti muito bem

2. O que você achou da mágica apresentada?

Gostei bastante. A forma leve e descontraída, torna a matemática mais agradável e simples a todos.

3. Considerando sua experiência durante a pesquisa, a mágica ajudou a despertar seu interesse pela matemática envolvida nela?

Sim, pois mostrou o quanto a matematica pode ser divertida e útil em nossas vidas diariamente.

B

4. Durante a apresentação, você tentou desvendar o truque com o uso do raciocínio lógico e matemático? Se sim, qual(ais)?

☒ Não ☐ Sim

Eu apenas pensei em números aleatórios e segui os comandos dados para obter o resultado.

5. Quais relações você identificou entre a mágica apresentada e o conteúdo de Sistemas Lineares?

Os valores dados possibilitam a formulação dos sistemas lineares.

6. Você acha que a utilização dessa mágica durante as aulas de Sistemas Lineares teria impactado sua aprendizagem? Justifique.

Sim. Acredito que essa forma de ensino prende a atenção e simplifica o entendimento de todos.

7. O espaço abaixo é de uso opcional e livre, nele, vocês podem acrescentar sugestões e comentários que acharem pertinentes sobre a atividade.

PROFMAT

FORMULÁRIO DE PESQUISA

Agradecemos a sua participação nesta pesquisa **"Explorando sistemas lineares com tampinhas: uma abordagem lúdica e interativa"**, lembre-se de que **suas respostas são anônimas** e serão utilizadas apenas para fins de pesquisa, leia as instruções abaixo antes do preenchimento do formulário:

- Seja sincero(a)! Não se preocupe, não há respostas certas ou erradas, as perguntas são relacionadas a sua percepção da atividade.
- Justifique suas respostas sempre que possível com o máximo de detalhes, pois elas farão parte da coleta de dado da pesquisa.

1. Em uma escala de 1 a 10, em que 1 é 'não me senti bem nem envolvido na atividade' e 10 é 'me senti muito bem', como você avaliaria sua experiência durante a atividade?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Não me senti bem nem envolvido na atividade	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	Me senti muito bem

2. O que você achou da mágica apresentada?

Achei interessante e boa, a apresentação foi ótima e bem explicada, deu para entender muito bem.

3. Considerando sua experiência durante a pesquisa, a mágica ajudou a despertar seu interesse pela matemática envolvida nela?

Sim, a saber usar a lógica e a multiplicar com mais frequência.

C

4. Durante a apresentação, você tentou desvendar o truque com o uso do raciocínio lógico e matemático? Se sim, qual(ais)?

☐ Não ☒ Sim

Tentei multiplicar e subtrair, adivinhar os números e somar também, foi difícil para mim, mas depois da explicação eu compreendi.

5. Quais relações você identificou entre a mágica apresentada e o conteúdo de Sistemas Lineares?

O sistema linear, seria uma forma mais fácil de resolver o problema e com mais facilidade.

6. Você acha que a utilização dessa mágica durante as aulas de Sistemas Lineares teria impactado sua aprendizagem? Justifique.

Talvez Sim, Teria uma noção maior sobre o assunto e seria uma aula mais dinâmica.

7. O espaço abaixo é de uso opcional e livre, nele, vocês podem acrescentar sugestões e comentários que acharem pertinentes sobre a atividade.

A explicação ficou ótima e bem didática, deu para entender a lógica e tudo, mas poderia explicar com mais calma, tirando isso, ficou maravilhoso!

PROFMAT

FORMULÁRIO DE PESQUISA

Agradecemos a sua participação nesta pesquisa **"Explorando sistemas lineares com tampinhas: uma abordagem lúdica e interativa"**, lembre-se de que **suas respostas são anônimas** e serão utilizadas apenas para fins de pesquisa, leia as instruções abaixo antes do preenchimento do formulário:

- Seja sincero(a)! Não se preocupe, não há respostas certas ou erradas, as perguntas são relacionadas a sua percepção da atividade.
- Justifique suas respostas sempre que possível com o máximo de detalhes, pois elas farão parte da coleta de dado da pesquisa.

1. Em uma escala de 1 a 10, em que 1 é 'não me senti bem nem envolvido na atividade' e 10 é 'me senti muito bem', como você avaliaria sua experiência durante a atividade?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Não me senti bem nem envolvido na atividade	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	Me senti muito bem

2. O que você achou da mágica apresentada?

Foi uma experiência interessante, que exige a lógica de mutiplicação, mas deixa a pessoa intrigada e que rendo saber como é possivel chegar em um resultado com apenas um truque.

3. Considerando sua experiência durante a pesquisa, a mágica ajudou a despertar seu interesse pela matemática envolvida nela?

Sim, desenvolver truques/mágicas deixa a matemática menos estressante, fazendo com que o participante se sinta mais aberto e descontraído a responder as perguntas sem ser pressionado a errar.

D

4. Durante a apresentação, você tentou desvendar o truque com o uso do raciocínio lógico e matemático? Se sim, qual(ais)?

☐ Não ☒ Sim

Sim, pois quando a pessoa falava o resultado, verifi-
quei primeiro se era um número par ou ímpar para
assim tentar achar o x e y e também o raciocínio para
multiplicar mais rápido.

5. Quais relações você identificou entre a mágica apresentada e o conteúdo de Sistemas Lineares?

Porque, na mágica não é sempre que vai funcionar
e decorar é cada vez mais difícil, já com o sistema
linear apresenta uma forma, e mesmo se utilizar
números maiores vai dar certo.

6. Você acha que a utilização dessa mágica durante as aulas de Sistemas Lineares teria impactado sua aprendizagem? Justifique.

Muito, por meio da mágica a aula fica mais des
contraída, fica sendo uma base de truque e lo-
go em seguida a fórmula do Sistema Linear, dan-
do para usar as duas formas.

7. O espaço abaixo é de uso opcional e livre, nele, vocês podem acrescentar sugestões e comentários que acharem pertinentes sobre a atividade.

A prática de aprender por meio da mágica foi
uma experiência boa, e a ordem de primeiro
fazer a dinâmica de explicação interligando com
o conteúdo de sistema linear ficou mais claro
e possível de entender.

PROFMAT

FORMULÁRIO DE PESQUISA

Agradecemos a sua participação nesta pesquisa **"Explorando sistemas lineares com tampinhas: uma abordagem lúdica e interativa"**, lembre-se de que **suas respostas são anônimas** e serão utilizadas apenas para fins de pesquisa, leia as instruções abaixo antes do preenchimento do formulário:

- Seja sincero(a)! Não se preocupe, não há respostas certas ou erradas, as perguntas são relacionadas a sua percepção da atividade.
- Justifique suas respostas sempre que possível com o máximo de detalhes, pois elas farão parte da coleta de dado da pesquisa.

1. Em uma escala de 1 a 10, em que 1 é 'não me senti bem nem envolvido na atividade' e 10 é 'me senti muito bem', como você avaliaria sua experiência durante a atividade?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Não me senti bem nem envolvido na atividade	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	Me senti muito bem

2. O que você achou da mágica apresentada?

Achei muito legal e interessante. É comum a matemática seguir um certo padrão para a resolução de problemas e não foi diferente o uso de balinhas na descoberta dos valores dos sistemas lineares, além de sair do padrão de ensino da área de exatas, tornando assim a aula mais interessante para o aluno.

3. Considerando sua experiência durante a pesquisa, a mágica ajudou a despertar seu interesse pela matemática envolvida nela?

Sim! Visto que eu facilmente poderia usar em um momento de descontração entre amigos, e isso só acontece porque utiliza poucos materiais e um padrão matemático fácil.

E

4. Durante a apresentação, você tentou desvendar o truque com o uso do raciocínio lógico e matemático? Se sim, qual(ais)?

☐ Não ☒ Sim

Pensei em descobrir primeiro o valor que foi multiplicado por 3, porque é a maior parte do valor, e assim ficaria mais fácil descobrir o outro, que foi multiplicado por dois.

5. Quais relações você identificou entre a mágica apresentada e o conteúdo de Sistemas Lineares?

É perceptível como o uso do conteúdo de Sistemas Lineares ajuda na até então mágica. Dado que, pode usar as equações para uma resolução mais rápida e segura, além de ser notório os padrões dos resultados.

6. Você acha que a utilização dessa mágica durante as aulas de Sistemas Lineares teria impactado sua aprendizagem? Justifique.

Certamente sim! A partir do momento que o aluno tem contato com a matéria de forma real, fica mais fácil a sua utilização. Sem contar que, atualmente a tecnologia transformou o padrão de aulas usados antigamentes ~~chato~~ em algo chato, ou seja, tudo que fugir desse padrão tornasse mais atrativo.

7. O espaço abaixo é de uso opcional e livre, nele, vocês podem acrescentar sugestões e comentários que acharem pertinentes sobre a atividade.

Acho que deveria fazer parte das aulas de matemática!

PROFMAT

FORMULÁRIO DE PESQUISA

Agradecemos a sua participação nesta pesquisa **“Explorando sistemas lineares com tampinhas: uma abordagem lúdica e interativa”**, lembre-se de que **suas respostas são anônimas** e serão utilizadas apenas para fins de pesquisa, leia as instruções abaixo antes do preenchimento do formulário:

- Seja sincero(a)! Não se preocupe, não há respostas certas ou erradas, as perguntas são relacionadas a sua percepção da atividade.
- Justifique suas respostas sempre que possível com o máximo de detalhes, pois elas farão parte da coleta de dado da pesquisa.

1. Em uma escala de 1 a 10, em que 1 é 'não me senti bem nem envolvido na atividade' e 10 é 'me senti muito bem', como você avaliaria sua experiência durante a atividade?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Não me senti bem nem envolvido na atividade	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	Me senti muito bem

2. O que você achou da mágica apresentada?

MUITO BOM, PELA MÁGICA QUE FOI APRESENTADA. DEU PARA PERCEBER UM CERTO PADRÃO PARA ADIVINHAR A QUANTIDADE DE BALINHAS QUE ESTAVA USANDO. E ASSIM ESTIMULANDO NOSSO CÉREBRO A FAZER CONTAS.

3. Considerando sua experiência durante a pesquisa, a mágica ajudou a despertar seu interesse pela matemática envolvida nela?

DE CERTA FORMA SIM, POIS COM A MÁGICA ESTIMULOU NOSSO CÉREBRO Á CALCULAR, E ASSIM TENTANDO DESVENDAR ALGUM JEITO DE SE CALCULAR.

F

4. Durante a apresentação, você tentou desvendar o truque com o uso do raciocínio lógico e matemático? Se sim, qual(ais)?

☐ Não ☒ Sim

EU TENTAVA DESCOBRIR A MÃO COM O NÚMERO MAIOR DE BALINHAS (TRIPLICANDO-AS) E ASSIM DESCOBRIA A MÃO COM MENOR QUANTIDADE.

5. Quais relações você identificou entre a mágica apresentada e o conteúdo de Sistemas Lineares?

FOI POSSÍVEL RESOLVER A MÁGICA AO UTILIZAR EQUAÇOES, ASSIM, COMO NO CONTEÚDO DE SISTEMAS LINEARES, ONDE ATRAVÉS DE TAIS EQUAÇÕES, DESCOBRIA-SE TAIS RESULTADOS COM MAIOR PRECISÃO.

6. Você acha que a utilização dessa mágica durante as aulas de Sistemas Lineares teria impactado sua aprendizagem? Justifique.

TERIA, PELO FATO DE QUE SERIA DE MAIOR COMPREENSÃO SE USASSE TAL METODO. PORQUE COM O USO DE MÁGICAS, OU ATIVIDADES LÚDICAS, A COMPREENSÃO É MELHOR.

7. O espaço abaixo é de uso opcional e livre, nele, vocês podem acrescentar sugestões e comentários que acharem pertinentes sobre a atividade.

PROFMAT

FORMULÁRIO DE PESQUISA

Agradecemos a sua participação nesta pesquisa **"Explorando sistemas lineares com tampinhas: uma abordagem lúdica e interativa"**, lembre-se de que **suas respostas são anônimas** e serão utilizadas apenas para fins de pesquisa, leia as instruções abaixo antes do preenchimento do formulário:

- Seja sincero(a)! Não se preocupe, não há respostas certas ou erradas, as perguntas são relacionadas a sua percepção da atividade.
- Justifique suas respostas sempre que possível com o máximo de detalhes, pois elas farão parte da coleta de dado da pesquisa.

1. Em uma escala de 1 a 10, em que 1 é 'não me senti bem nem envolvido na atividade' e 10 é 'me senti muito bem', como você avaliaria sua experiência durante a atividade?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Não me senti bem nem envolvido na atividade	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	Me senti muito bem

2. O que você achou da mágica apresentada?

Bem interessante e didática, algo simples que você pode encontrar no dia a dia e despertar o interesse em números, tentar descobrir padrões em coisas práticas.

3. Considerando sua experiência durante a pesquisa, a mágica ajudou a despertar seu interesse pela matemática envolvida nela?

Sim, tentei descobrir os padrões e o mistério por trás da mágica apresentada e os seus meios.

G

4. Durante a apresentação, você tentou desvendar o truque com o uso do raciocínio lógico e matemático? Se sim, qual(ais)?

☐ Não ☒ Sim

Sim, pensei em descobrir os padrões tentando achar o número que resultava no "w" e em como cada resultado tinha alguma relação com o outro.

5. Quais relações você identificou entre a mágica apresentada e o conteúdo de Sistemas Lineares?

A mágica apresentada seria uma nova forma de identificar ~~de uma form~~ os sistemas lineares com algo simples, entender o que seria/o que representa cada coisa em um sistema linear

6. Você acha que a utilização dessa mágica durante as aulas de Sistemas Lineares teria impactado sua aprendizagem? Justifique.

Sim, é uma forma de despertar o interesse com meios mais criativos que possam gerar a interação entre os alunos e, acabar com os medos/problemas com a matemática de uma maneira moderna e didática.

7. O espaço abaixo é de uso opcional e livre, nele, vocês podem acrescentar sugestões e comentários que acharem pertinentes sobre a atividade.

FORMULÁRIO DE PESQUISA

Agradecemos a sua participação nesta pesquisa **"Explorando sistemas lineares com tampinhas: uma abordagem lúdica e interativa"**, lembre-se de que **suas respostas são anônimas** e serão utilizadas apenas para fins de pesquisa, leia as instruções abaixo antes do preenchimento do formulário:

- Seja sincero(a)! Não se preocupe, não há respostas certas ou erradas, as perguntas são relacionadas a sua percepção da atividade.
- Justifique suas respostas sempre que possível com o máximo de detalhes, pois elas farão parte da coleta de dado da pesquisa.

1. Em uma escala de 1 a 10, em que 1 é 'não me senti bem nem envolvido na atividade' e 10 é 'me senti muito bem', como você avaliaria sua experiência durante a atividade?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Não me senti bem nem envolvido na atividade	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	Me senti muito bem

2. O que você achou da mágica apresentada?

A mágica apresentada é muito curiosa por ser um jeito de deixar a matemática melhor e mais contraída foi realmente boa a estratégia de usar mágica para resolver as contas.

3. Considerando sua experiência durante a pesquisa, a mágica ajudou a despertar seu interesse pela matemática envolvida nela?

Depende, a magica fo é boa e bem mais facil de pensar e solucionar o poblema, porém continuo achando a matemática complicada.

H

4. Durante a apresentação, você tentou desvendar o truque com o uso do raciocínio lógico e matemático? Se sim, qual(ais)?

☐ Não ☒ Sim

usei a multiplicação e pensei em como achar o resultado mais rapido isso me custou muito raciocínio.

5. Quais relações você identificou entre a mágica apresentada e o conteúdo de Sistemas Lineares?

Qualquer uma que ressolver vai obter o ressultado bom, já que tem o ~~b~~ mesmo objetivo de usar o raciocínio na mágica e as expressões no sistema linear.

6. Você acha que a utilização dessa mágica durante as aulas de Sistemas Lineares teria impactado sua aprendizagem? Justifique.

Sim, é uma otima maneira de deixar os alunos mais ~~interrad~~ interessados com o conteúdo, por ser divertido e facio de entender.

7. O espaço abaixo é de uso opcional e livre, nele, vocês podem acrescentar sugestões e comentários que acharem pertinentes sobre a atividade.

Poderia explicar com mais detalhes a segunda parte, o da magica ficou bem explicado e bom de entender.

PROFMAT

FORMULÁRIO DE PESQUISA

Agradecemos a sua participação nesta pesquisa **"Explorando sistemas lineares com tampinhas: uma abordagem lúdica e interativa"**, lembre-se de que **suas respostas são anônimas** e serão utilizadas apenas para fins de pesquisa, leia as instruções abaixo antes do preenchimento do formulário:

- Seja sincero(a)! Não se preocupe, não há respostas certas ou erradas, as perguntas são relacionadas a sua percepção da atividade.
- Justifique suas respostas sempre que possível com o máximo de detalhes, pois elas farão parte da coleta de dado da pesquisa.

1. Em uma escala de 1 a 10, em que 1 é 'não me senti bem nem envolvido na atividade' e 10 é 'me senti muito bem', como você avaliaria sua experiência durante a atividade?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Não me senti bem nem envolvido na atividade	○	○	○	○	○	○	○	○	⊛	○	Me senti muito bem

2. O que você achou da mágica apresentada?

Achei bem interessante pois queria Descobrir Como fazer e qual era a Truque, quem ama a matematica deve adorar porque é bem daora.

3. Considerando sua experiência durante a pesquisa, a mágica ajudou a despertar seu interesse pela matemática envolvida nela?

Diria que Sim e não, Eu não sou muito fãn de matematica, mais isso me deixou é bem Curiosa sobre. mais não de ter muito interesse pela a matematica

4. Durante a apresentação, você tentou desvendar o truque com o uso do raciocínio lógico e matemático? Se sim, qual(ais)?

☐ Não ☒ Sim

Eu tentei dividir apenas, pois se dividi-se poderia encontrar o resultado.

5. Quais relações você identificou entre a mágica apresentada e o conteúdo de Sistemas Lineares?

A relação deles de resolver, que isso pode ajudar a resolver a mágica de uma forma como fiz com um exercício de Sistemas lineares, mais não sei explicar o que exatamente.

6. Você acha que a utilização dessa mágica durante as aulas de Sistemas Lineares teria impactado sua aprendizagem? Justifique.

diria que mais ou menos, algumas coisas eu vi que tinha em comum, porém não consegui identificar, talvez a mesma forma de resolver os dois.

7. O espaço abaixo é de uso opcional e livre, nele, vocês podem acrescentar sugestões e comentários que acharem pertinentes sobre a atividade.

PROFMAT

FORMULÁRIO DE PESQUISA

Agradecemos a sua participação nesta pesquisa **"Explorando sistemas lineares com tampinhas: uma abordagem lúdica e interativa"**, lembre-se de que **suas respostas são anônimas** e serão utilizadas apenas para fins de pesquisa, leia as instruções abaixo antes do preenchimento do formulário:

- Seja sincero(a)! Não se preocupe, não há respostas certas ou erradas, as perguntas são relacionadas a sua percepção da atividade.
- Justifique suas respostas sempre que possível com o máximo de detalhes, pois elas farão parte da coleta de dado da pesquisa.

1. Em uma escala de 1 a 10, em que 1 é 'não me senti bem nem envolvido na atividade' e 10 é 'me senti muito bem', como você avaliaria sua experiência durante a atividade?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Não me senti bem nem envolvido na atividade	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	Me senti muito bem

2. O que você achou da mágica apresentada?

Achei interessante porque instiga o voluntário a tentar resolver a partir de uma perspectiva matemática.

3. Considerando sua experiência durante a pesquisa, a mágica ajudou a despertar seu interesse pela matemática envolvida nela?

Sim, porque mostrou a utilidade da matemática em problemas simples.

J

4. Durante a apresentação, você tentou desvendar o truque com o uso do raciocínio lógico e matemático? Se sim, qual(ais)?

☐ Não ☒ Sim

Eu tentei organizar um sistema de duas equações lineares com os valores apresentados.

5. Quais relações você identificou entre a mágica apresentada e o conteúdo de Sistemas Lineares?

A mágica disponibilizava o valor fixo, no primeiro caso, da soma dos dois valores escolhidos. Depois, o valor do dobro do menor número mais o triplo do segundo era disponibilizado, possibilitando a formulação de um sistema linear.

6. Você acha que a utilização dessa mágica durante as aulas de Sistemas Lineares teria impactado sua aprendizagem? Justifique.

Sim, porque a teoria poderia ter sido experienciada na prática pelo aluno, facilitando a compreensão.

7. O espaço abaixo é de uso opcional e livre, nele, vocês podem acrescentar sugestões e comentários que acharem pertinentes sobre a atividade.

PROFMAT

FORMULÁRIO DE PESQUISA

Agradecemos a sua participação nesta pesquisa **"Explorando sistemas lineares com tampinhas: uma abordagem lúdica e interativa"**, lembre-se de que **suas respostas são anônimas** e serão utilizadas apenas para fins de pesquisa, leia as instruções abaixo antes do preenchimento do formulário:

- Seja sincero(a)! Não se preocupe, não há respostas certas ou erradas, as perguntas são relacionadas a sua percepção da atividade.
- Justifique suas respostas sempre que possível com o máximo de detalhes, pois elas farão parte da coleta de dado da pesquisa.

1. Em uma escala de 1 a 10, em que 1 é 'não me senti bem nem envolvido na atividade' e 10 é 'me senti muito bem', como você avaliaria sua experiência durante a atividade?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Não me senti bem nem envolvido na atividade	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	Me senti muito bem

2. O que você achou da mágica apresentada?

Interessante, pois não tinha visto essa mágica antes, e é muito bom para aprimorar o raciocíneo e desenvolver melhor a matemática mentalmente sem o uso de calculadora.

3. Considerando sua experiência durante a pesquisa, a mágica ajudou a despertar seu interesse pela matemática envolvida nela?

Sim, pois já gosto de matématica e essa mágica despertou mais aprimoramento no raciocíneo, e a me desenvolver em uma certa área matematicamente.

K

4. Durante a apresentação, você tentou desvendar o truque com o uso do raciocínio lógico e matemático? Se sim, qual(ais)?

☐ Não ☒ Sim

Fazendo o uso da tabuada e da soma de ambos os resultados assim como a quantidade de bolinhas usadas até chegar no resultado.

5. Quais relações você identificou entre a mágica apresentada e o conteúdo de Sistemas Lineares?

Uma semelhança ao calcular e desvendar o "problema" para obter a resposta, ou seja, a forma como se calcula um e o outro (Sistemas... e a Mágica).

6. Você acha que a utilização dessa mágica durante as aulas de Sistemas Lineares teria impactado sua aprendizagem? Justifique.

Em partes sim, pois as aplicações matemáticas são bem semelhantes ao meu ver e poderia ter ajudado e auxiliado na aprendizagem.

7. O espaço abaixo é de uso opcional e livre, nele, vocês podem acrescentar sugestões e comentários que acharem pertinentes sobre a atividade.

PROFMAT

FORMULÁRIO DE PESQUISA

Agradecemos a sua participação nesta pesquisa **"Explorando sistemas lineares com tampinhas: uma abordagem lúdica e interativa"**, lembre-se de que **suas respostas são anônimas** e serão utilizadas apenas para fins de pesquisa, leia as instruções abaixo antes do preenchimento do formulário:

- Seja sincero(a)! Não se preocupe, não há respostas certas ou erradas, as perguntas são relacionadas a sua percepção da atividade.
- Justifique suas respostas sempre que possível com o máximo de detalhes, pois elas farão parte da coleta de dado da pesquisa.

1. Em uma escala de 1 a 10, em que 1 é 'não me senti bem nem envolvido na atividade' e 10 é 'me senti muito bem', como você avaliaria sua experiência durante a atividade?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Não me senti bem nem envolvido na atividade	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	Me senti muito bem

2. O que você achou da mágica apresentada?

Achei bastante interessante, Com a explicação sendo bem prática consegui entender bastante

3. Considerando sua experiência durante a pesquisa, a mágica ajudou a despertar seu interesse pela matemática envolvida nela?

Sim me despertou uma curiosidade e vontade de calcular essa mágica rápida

L

4. Durante a apresentação, você tentou desvendar o truque com o uso do raciocínio lógico e matemático? Se sim, qual(ais)?

☒ Não ☐ Sim

5. Quais relações você identificou entre a mágica apresentada e o conteúdo de Sistemas Lineares?

Identifiquei que essa mágica segue totalmente as regras do conteúdo de Sistemas lineares, sempre vai haver uma fórmula para resolver esses problemas.

6. Você acha que a utilização dessa mágica durante as aulas de Sistemas Lineares teria impactado sua aprendizagem? Justifique.

Acredito que Teria impactado positivamente, pois iria fugir mais daquela aula utilizando apenas o caderno e a caneta, aulas Práticas em duplas, trios utilizando objetos como balinhas, cartas sempre vão ser melhores para absorção de conhecimento.

7. O espaço abaixo é de uso opcional e livre, nele, vocês podem acrescentar sugestões e comentários que acharem pertinentes sobre a atividade.

PROFMAT

FORMULÁRIO DE PESQUISA

Agradecemos a sua participação nesta pesquisa "**Explorando sistemas lineares com tampinhas: uma abordagem lúdica e interativa**", lembre-se de que **suas respostas são anônimas** e serão utilizadas apenas para fins de pesquisa, leia as instruções abaixo antes do preenchimento do formulário:

- Seja sincero(a)! Não se preocupe, não há respostas certas ou erradas, as perguntas são relacionadas a sua percepção da atividade.
- Justifique suas respostas sempre que possível com o máximo de detalhes, pois elas farão parte da coleta de dado da pesquisa.

1. Em uma escala de 1 a 10, em que 1 é 'não me senti bem nem envolvido na atividade' e 10 é 'me senti muito bem', como você avaliaria sua experiência durante a atividade?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Não me senti bem nem envolvido na atividade	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	Me senti muito bem

2. O que você achou da mágica apresentada?

~~[illegible]~~ Interessante, consegui ter um bom entendimento do truque.

3. Considerando sua experiência durante a pesquisa, a mágica ajudou a despertar seu interesse pela matemática envolvida nela?

Sim. Durante a demonstração fui capaz de criar uma solução própria

M

4. Durante a apresentação, você tentou desvendar o truque com o uso do raciocínio lógico e matemático? Se sim, qual(ais)?

☐ Não ☒ Sim

1º truque Y = maior número, então eu previ = 4, 5 ou 6, que somados dão 12, 15, 18, e fiz o mesmo processo com X, o menor número, assim tendo = 1, 2, 3 = 2, 4, 6, depois apenas tirava a diferença de 3.
2º truque = fiz a mesma coisa, mas adicionei 3,2 no Y

5. Quais relações você identificou entre a mágica apresentada e o conteúdo de Sistemas Lineares?

A forma oficial de resolução.

6. Você acha que a utilização dessa mágica durante as aulas de Sistemas Lineares teria impactado sua aprendizagem? Justifique.

Acredito que sim, tornaria as aulas mais dinâmicas, o que facilita o aprendizado.

7. O espaço abaixo é de uso opcional e livre, nele, vocês podem acrescentar sugestões e comentários que acharem pertinentes sobre a atividade.

A forma explicada na Pergunta 4, ao meu ver, é uma maneira mais simples de resolver as questões.