Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional

Ensino Exploratório da Matemática e a Aprendizagem de Geometria: contribuições de uma Tarefa Matemática no ensino médio

Ana Paula Nunes da Silva

Brasília
2025

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Ensino Exploratório da Matemática e a Aprendizagem de Geometria: contribuições de uma Tarefa Matemática no ensino médio

Ana Paula Nunes da Silva

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Nacional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Profa. Dra. Raquel Carneiro Dörr

Brasília
2025

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

NS586ee

NUNES DA SILVA, ANA PAULA

Ensino Exploratório da Matemática e a Aprendizagem de Geometria: contribuições de uma Tarefa Matemática no ensino médio / ANA PAULA NUNES DA SILVA; orientador Raquel Carneiro Dörr. Brasília, 2025.

114 p.

Dissertação(Mestrado Profissional em Matemática) Universidade de Brasília, 2025.

1. Ensino médio. 2. Geometria. 3. Ensino Exploratório. 4. Tarefas Matemáticas. 5. Aprendizagem significativa. I. Carneiro Dörr, Raquel, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Ensino Exploratório da Matemática e a Aprendizagem de Geometria: contribuições de uma Tarefa Matemática no ensino médio

por

Ana Paula Nunes da Silva

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Nacional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT para obtenção do grau de

Mestre em Matemática

Brasília, 15 agosto de 2025.

Comissão Examinadora:

Profa. Dra. Raquel Carneiro Dörr - MAT/UnB (Orientador)

Profa. Dra. Regina da Silva Pina Neves - MAT/UnB (Membro Interno)

Prof. Dr. Thiago Williams Siqueira Ramos - IFB (Membro Externo)

AGRADECIMENTOS

Primeiro, agradeço a quem esteve mais próximo de tudo o que vivenciei nesses pouco mais de dois anos: meu esposo, Pedro. Desde o dia em que prestei o ENA, ele tinha certeza da minha aprovação, e, desde então, foi meu principal incentivador para chegar até aqui. Não tenho palavras para descrever o quanto o seu apoio me fortaleceu e foi abrigo diante das minhas incertezas. Além de ter que ser "pai solo" em muitos momentos para que eu pudesse me dedicar, me ajudou com demonstrações, me deu segurança na escrita e vibrou a cada etapa que eu concluía. Obrigada por ser esse "baita" companheiro de vida.

Um agradecimento especial ao meu bem mais precioso, meu filho Caetano, que, com tão pouca idade, teve que lidar com a minha ausência constante. Eu nunca vou esquecer a sua acolhida quando esbarrei no primeiro ENQ e cheguei aos prantos: você me abraçou e disse "Vai ficar tudo bem, mamãe." Obrigada por ser essa criança meiga e amorosa, meu filho.

À minha mãe, que sempre me apoiou — muitas vezes ficando com meu filho para que eu assistisse a uma aula noturna, ou simplesmente me proporcionando um vale *day*, porque descansar é preciso e mãe é tudo nessa vida! Aos meus irmãos, que estiveram presentes nesse processo, me confortando em muitos momentos, seja com uma comidinha gostosa, um espaço tranquilo para estudar ou palavras de incentivo quando eu queria desanimar. E ao meu pai, que, mesmo passando por um momento difícil, reconheço que sua vinda a Brasília foi para nos proporcionar o acesso à universidade. Obrigada por tudo, família.

Expresso meus agradecimentos aos professores do PROFMAT/UnB: professor Rogério César, a quem admiro muito e que despertou o meu interesse em escrever sobre Geometria; professor Mauro Rabelo, que cativava um auditório inteiro até às 22h30 de uma sexta-feira falando sobre avaliação educacional. E, em especial, à professora Regina Pina e à professora Raquel Dörr, minha orientadora, por me apresentarem essa abordagem didática linda que é o Ensino Exploratório e me ajudarem a dar os "primeiros passos". Minha admiração a vocês, queridos professores.

Indo no embalo dos professores, há uma que tem morada cativa no meu coração — a tenho como uma segunda mãe — Liesi. Poderia estar desfrutando de uma aposentadoria tranquila, mas, pelo amor que tem à educação (e por mim), passou madrugadas revisando meus textos. Obrigada por fazer isso com tanto carinho.

À Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal, pelo programa de afastamento remunerado para estudos, sem o qual seria muito mais difícil a obtenção deste título.

Aos estudantes que, em pleno dezembro, toparam participar de uma aula de Matemática extra, mesmo sabendo que não valeria ponto, pois as notas já estavam fechadas, meus sinceros agradecimentos. Vocês possibilitaram a conclusão desta etapa com compromisso, entusiasmo e colaboração.

Aos meus amigos que compreenderam minha ausência durante encontros ou festas de aniversário, mas que eu sei que vibram com as minhas conquistas: mesmo eu dando uma de "mestre dos magos", sei que ainda me amam e me receberão de braços abertos. Agora bora marcar aquele churras, aquele café, aquela viagem?

Durante esta jornada, fiz novos amigos, aqueles que tornaram o programa mais leve e descontraído. Obrigada, Clube dos Cinco. Elciane, com o caderno completo e seu humor um tanto "ácido", mas sempre disposta a ajudar. Marcos, às vezes "Seu Lunga", implicando com tudo, outras com a piadinha pronta, arrancando sorrisos de todos. José, com aquela letra insuportavelmente bonita e atento à hora de "merendar" — generosidade também te define, meu amigo. Você cedeu suas aulas para que essa pesquisa se tornasse real: gratidão. Por último, mas não menos importante (até porque, pelo tamanho dele, impossível não ver — assim como seu coração): meu companheiro de escrita, que cresceu comigo nesta etapa, escutou minhas angústias, compartilhou seus conhecimentos e sempre tinha um livro "na manga" para me emprestar, Tiagão, obrigada por ser tanto nesse final meio eterno. Por ter conhecido vocês, essa experiência já valeu a pena.

“Para isso existem as escolas: não para ensinar as respostas, mas para ensinar as perguntas. As respostas nos permitem andar sobre a terra firme. Mas somente as perguntas nos permitem entrar pelo mar desconhecido”.

Rubem Alves

RESUMO

Esta pesquisa, de caráter qualitativo, investigou a implementação de uma Tarefa Matemática (TM), elaborada segundo os princípios do Ensino Exploratório, em duas turmas do 1º ano do ensino médio da rede pública do Distrito Federal. Diante das dificuldades históricas no ensino e na aprendizagem de Geometria, o objetivo foi analisar as contribuições dessa proposta para a construção de aprendizagens significativas, em contraste com a mera memorização de fórmulas. Além da TM, foram elaborados pela professora-pesquisadora uma avaliação diagnóstica e um questionário inicial, com o intuito de traçar um panorama prévio das turmas. Os dados foram coletados por meio de registros escritos dos estudantes, gravações das interações em grupo e anotações realizadas durante a prática. A análise combinou a técnica de análise de conteúdo temática com uma abordagem interpretativa, orientada pelos princípios do Ensino Exploratório. Os resultados revelam que a proposta favoreceu a exploração ativa do conteúdo, o engajamento dos estudantes, a mobilização de estratégias próprias e a construção de significados, ainda que poucos grupos tenham alcançado a lei de formação da propriedade geométrica estudada. A maioria foi capaz de identificar a regularidade entre o número de lados e a soma dos ângulos internos dos polígonos, indicando avanços no raciocínio geométrico. A prática também evidenciou o papel central da mediação docente e os desafios de fomentar a autonomia dos estudantes e conduzir discussões coletivas significativas. Como desdobramento, aponta-se a importância do apoio institucional e do planejamento colaborativo entre professores para a consolidação dessa abordagem no contexto da escola pública.

Palavras-chave: Ensino médio; Geometria; Ensino Exploratório; Tarefas Matemáticas; Aprendizagem significativa.

ABSTRACT

This qualitative research investigated the implementation of a Mathematical Task (MT), designed according to the principles of Exploratory Teaching, in two first-year high school classes from the public school system of the Federal District, Brazil. Considering the historical challenges in teaching and learning Geometry, the study aimed to analyze the contributions of this proposal to the construction of meaningful learning, in contrast to the mere memorization of formulas. In addition to the MT, a diagnostic assessment and an initial questionnaire were developed by the teacher-researcher to provide a preliminary overview of the classes. Data were collected through students' written records, audio recordings of group interactions, and field notes. The analysis combined the technique of thematic content analysis with an interpretative approach guided by the principles of Exploratory Teaching. The results reveal that the proposal encouraged active exploration of the content, student engagement, the development of individual strategies, and the construction of meaning, even though only a few groups reached the general formula for the studied geometric property. Most students were able to identify the pattern between the number of sides and the sum of the internal angles of polygons, indicating progress in geometric reasoning. The practice also highlighted the central role of teacher mediation and the challenges of fostering student autonomy and leading meaningful collective discussions. As a follow-up, the study points to the importance of institutional support and collaborative planning among teachers for the consolidation of this approach in the context of public education.
Keywords: High school; Geometry; Exploratory Teaching; Mathematical Tasks; Meaningful learning.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Até os seis anos de idade, minha professora foi minha mãe, que desenhava comigo e me apresentava as primeiras letras e números. A partir dessa idade, em 1992, fui matriculada na pré-escola, em uma escola municipal localizada em Ijuí/RS. Confesso que fiquei completamente deslumbrada pela minha primeira professora; ela era muito acolhedora e me transmitia muita segurança. Por ter sido uma experiência positiva, guardo-a com muito amor na minha primeira memória escolar, pois serviu como base para meu desenvolvimento futuro.

Em 1993, ao ingressar na 1ª série - atual 2º ano do ensino fundamental I – mudei de cidade e de estado: do Rio Grande do Sul para Príncipe da Beira, em Costa Marques/RO, uma região de fronteira, onde estudei por dois anos. Basicamente moravam famílias ribeirinhas e um pequeno grupo de famílias de militares, como era o caso da minha família. Nesse pontinho, no meio da selva, estudei na única escola de 1º grau da região, com um corpo docente formado, principalmente, pelas esposas e/ou militares que ali serviam. Nessa escola e nesse contexto familiar, social e nacional eu fui alfabetizada.

Com algumas lacunas de aprendizado, em razão da falta de base em alguns conteúdos, regressei à minha cidade natal já na 3ª série, atual 4º ano do fundamental I. Já na minha primeira aula, havia uma proposta de atividade de Matemática no quadro que eu desconhecia. Deduzi ser a operação de divisão; fui até a mesa da professora e disse que eu não sabia resolvê-la, pois não tinha aprendido essa operação. Carinhosamente, a professora me acolheu, dizendo que eu não precisava me preocupar e, então, solicitou que eu ficasse sentada na mesa dela. A seguir, voltou com alguns copinhos descartáveis de café e uns canudos cortados. Ao perceber que eu seguia envergonhada, aproximou-se e cochichou em meu ouvido, “Está tudo bem, eles também já passaram por isso. Você vai tirar de letra”. E dessa forma, acrescida de alguns exemplos, fui apresentada à divisão e logo a seguir, ao algoritmo que estava representado no quadro. Foi um momento marcante para mim. Logo percebi a minha preferência pela disciplina de Matemática, que se desenvolveu pelo estilo de ensino da professora, que me proporcionou um ambiente escolar acolhedor e estimulante, usando recursos simples e atividades variadas e práticas da matéria. Nessa escola, concluí o Ensino Fundamental.

Para o 2º grau na época, atual ensino médio, havia duas opções de escolas públicas na minha cidade: o magistério e o ensino técnico. Naquela época, eu sequer cogitava a possibilidade de cursar magistério, pois não me julgava habilidosa em ensinar crianças. Optei pelo curso técnico, porém, como não havia vagas suficientes para todos os alunos, havia processo seletivo para ingressar na escola com provas de conhecimento nas áreas de Matemática e Português. Não me lembro de nenhuma questão de Português, no entanto, uma questão de Geometria para aplicação do Teorema de Tales ficou gravada em minha memória. Talvez tenha sido por acertá-la que eu tivesse garantido minha vaga na escola.

Iniciei meu ensino médio, na escola que eu queria, estava em êxtase, mas, ao final do primeiro semestre, meu pai foi transferido para Brasília. Logo, precisei me adaptar à nova escola, bem como às suas exigências e estudar mais para acompanhar as disciplinas, muitas das quais eu não tinha na escola anterior. Uma delas era o Desenho Geométrico (DG); tínhamos aulas regulares e eu ampliei consideravelmente a minha compreensão da Geometria, até então bem negligenciada na minha formação. As aulas de DG proporcionaram impactos positivos: aumento do meu interesse nas atividades, bem como na assimilação do conteúdo de Matemática nesse ano. Em consonância com Wagner (2009, p. i):

> As construções geométricas continuam até hoje a ter grande importância na compreensão da Matemática elementar. Seus problemas desafiam o raciocínio e exigem sólido conhecimento dos teoremas de geometria e das propriedades das figuras e não é exagero dizer que não há nada melhor para aprender geometria do que praticar as construções geométricas.

Durante o último ano do ensino médio, em que tínhamos aulas de revisão dos anos anteriores e do conteúdo do 3° ano, eu passei a compartilhar o que sabia com os colegas de turma que tinham mais dificuldade, numa espécie de monitoria, e eles compreendiam o que eu explicava; dessa forma, eu também acabava assimilando mais o conhecimento. Foi dessa troca de experiência que eu decidi que seria professora. Tenho orgulho em dizer que tive excelentes professores ao longo do ensino médio e passei a admirar a profissão e a me inspirar neles.

Ao final do 3º ano, optei pela Matemática e então entrei para o curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade de Brasília (UnB) no ano de 2004. Em meados de agosto daquele ano, tive minha primeira aula de Cálculo I com um professor excepcional. O professor conduziu a aula de forma única, sua capacidade de guiar os alunos através do conteúdo, de forma clara e organizada me deixou encantada. Foi uma aula imperdível, em que observávamos a desenvoltura com que ele conduzia a turma, bem como sua capacidade de manter a atenção e o engajamento dos alunos. Lembro que o achei genial e nele eu encontrava a professora que eu gostaria de ser. Após essa aula eu tive a certeza de que estava no curso certo.

Foi um curso muito requisitante e desafiador e eu me dediquei ao máximo que estava ao meu alcance, dado que precisava trabalhar ao mesmo tempo. E mais uma vez minha família iria mudar de estado, porém, dessa vez, eu optei por ficar em Brasília, sozinha, para concluir a graduação. Foi uma fase muito difícil, em muitos momentos eu pensei em desistir, tive algumas reprovações, fiz muitas matérias à noite, pois trabalhava durante o dia. No final do curso, voltei a me encontrar: tive duas professoras incríveis, que foram muito importantes nesse processo. Elas lecionaram as disciplinas de Álgebra para o Ensino e Geometria para o Ensino e, por intermédio delas, pude resgatar o sentimento daquela primeira aula de Cálculo I. No último semestre, eu tive a felicidade de fazer o Estágio Supervisionado de Regência em Matemática com uma delas; e mais uma vez tive a felicidade de voltar a me impressionar com a didática, conhecimento e amor pelo fazer pedagógico. Assim, concluí minha graduação da melhor forma possível: ao lado de professoras que seriam minhas inspirações profissionais. Esses bons exemplos, por meio de suas posturas em sala de aula e a paixão pela docência, influenciariam diretamente a minha práxis e, consequentemente, a qualidade das aulas que ofereceria aos meus futuros alunos.

Tão logo concluí a graduação, prestei concurso para a Secretaria de Estado da Educação do Distrito Federal (SEEDF), entretanto, foi demorada a convocação. Como precisava de experiência como professora regente, aceitei um convite para assumir quatro turmas em outro estado, um 9° ano e três turmas de ensino médio. Assim, eu conciliava dois dias por semana aqui em Brasília e os outros três a 550 km de distância. Foi um ano de trabalho intenso e deslocamento constante, no qual eu percebi que a persistência e amor pela profissão são fundamentais para a superação dos desafios que a carreira docente nos impõe. Apesar do desafio, foi um período de muito aprendizado, afinal, terminar a graduação não é suficiente para se tornar um professor, é por meio da prática pedagógica e da troca de experiências com outros colegas que o docente vai aprender a ser professor (Lorenzato, 1995).

Após a experiência como professora regente, consegui permanecer aqui em Brasília. Comecei a lecionar pelo contrato temporário da SEEDF na Educação de

Jovens e Adultos (EJA) à noite. Durante o dia, lecionava a disciplina de Jogos Educativos para a Matemática, do 1º ao 5º ano, em uma escola particular de ensino fundamental e médio. Era uma disciplina muito interessante, em que eu produzia ou adaptava jogos para auxiliar na assimilação do conteúdo de Matemática que a professora regente da turma estava trabalhando. Como professora, foi muito enriquecedor e satisfatório trabalhar a disciplina Jogos Matemáticos, pois era visível a interação dos estudantes, a motivação e a colaboração em sala de aula. Também foi muito gratificante o retorno dos colegas que afirmavam "o quanto a disciplina tornava o aprendizado da Matemática mais dinâmico, prazeroso e eficaz". Ter esse retorno dos colegas e perceber o quanto a disciplina é uma ferramenta valiosa não só para a disciplina da Matemática, como para explorar temas transversais de outras disciplinas, enriquecendo o aprendizado e mostrando a aplicação da Matemática em diferentes contextos, foi um espaço de aprendizado como docente.

Em julho de 2012, tomei posse, na SEEDF, como professora efetiva da rede de ensino. Assim, passei a trabalhar 60h por semana, as 20h do EJA no contrato temporário e mais 40h diurno. Assumi uma turma de 7º ano e tamanha foi minha surpresa ao descobrir que, durante o primeiro semestre, eles não tinham visto nenhum conteúdo de Geometria. Os alunos, em sua maioria, não sabiam o que era Geometria e não tinham visto o conteúdo nos anos anteriores. Providenciei uma caixa com material de uso coletivo, contendo réguas e compassos para as nossas aulas e aproveitei ao máximo o tempo que nos restava para explorar construções geométricas que despertassem o interesse e facilitassem o aprendizado da turma.

No ano seguinte, decidi pegar um 6º ano para oportunizar, desde o início do ensino fundamental II, o estudo da Geometria em consonância com a álgebra a que eles eram submetidos. Neste ano, construímos geoplanos e disponibilizamos para todos os professores que quisessem usá-los. Na disciplina de Parte Diversificada (PD), que era distribuída de acordo com a modulação de cada escola, o docente poderia adaptar os seus currículos e práticas à realidade escolar; fizemos um trabalho em conjunto, focado no ensino da Geometria e foi um sucesso. Incomodava-me a omissão do estudo da Geometria em sala (Lorenzato, 1995) e, nas escolas por onde passei, tentei melhorar essa realidade. Surgia, então, a dúvida se essa era uma questão isolada ou a realidade de mais escolas. Muitos autores trazem diferentes razões para isso, "No entanto, nenhuma razão tenta colocar em dúvida os méritos próprios da Geometria. Talvez, o maior de todos eles seja o fato de a Geometria exigir do aluno uma maneira específica de raciocinar” (Lorenzato, 1995, p. 5).

Em 2014, eu comecei a trabalhar com o Ensino Médio, saí da EJA e passei a me dedicar às 40h diurnas somente. Identifico-me com essa faixa etária e gosto de participar da preparação desses alunos para o ingresso nas universidades. Eles, em sua maioria, apresentavam falta de pré-requisitos matemáticos, principalmente de conceitos geométricos. Os professores não trabalhavam alinhados, era recorrente que estudantes da mesma série estivessem vendo conteúdos de Matemática diferentes. Isso acarretava uma discrepância de conteúdos ensinados dentro do próprio turno escolar. Um dos desafios era que os professores começassem a trabalhar de forma colaborativa e integrada a fim de garantir aos estudantes uma base sólida em Geometria.

Nos anos seguintes, participei de alguns Programas de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio (PAPMEM), promovidos pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), dentro da UnB, com intuito de não perder o vínculo com a universidade e a formação continuada. Nesse período, dois colegas da cadeira de Matemática estavam cursando o Mestrado Profissional em Rede Nacional em Matemática (PROFMAT), me esclareceram sobre o programa e eu tentei o ingresso por dois anos, mas sem sucesso, e acabei deixando esse plano para o futuro.

Com as mudanças advindas do Novo Ensino Médio, não só os estudantes, mas também as escolas e os professores tiveram que se adaptar. Para a disciplina de Matemática eu vi uma oportunidade de oferecer algo que até então eu não conseguia trabalhar nas aulas regulares da disciplina, uma janela para abordar Geometria de forma mais significativa para os estudantes. Portanto, decidi voltar a estudar para ampliar meus conhecimentos, principalmente na área de Geometria, e melhorar minha prática nesse campo. Resgatei o desejo de ingressar no PROFMAT, oferecido no polo da UnB, o que foi concretizado em 2023.

No PROFMAT, as matérias voltadas à Matemática Pura me proporcionaram o resgate de conteúdo acadêmico necessário. Nas disciplinas Avaliação Educacional e Tópicos em Matemática, eram promovidos debates sobre nossas práticas de sala de aula. Durante essas discussões, trocávamos experiências valiosas, o que me fez refletir sobre minha prática pedagógica e me motivou a buscar melhorias no ensino e na aprendizagem de Geometria, adotando abordagens pedagógicas inovadoras que tornem o aprendizado mais atraente e eficaz. Isso inclui o uso de metodologias ativas e a contextualização da Geometria no cotidiano dos alunos.

Os professores, em todas as etapas da educação básica, ainda hoje encontram dificuldade de trabalhar com Geometria. Professores do primeiro segmento do ensino fundamental omitem esses conteúdos, muitas vezes por “não saberem o que fazer (nem como e nem por quê)” (Fonseca *et al*., 2009, p. 6-7). As dificuldades no ensino e aprendizagem de Geometria nos anos finais do ensino fundamental não são recentes, nem pontuais, mas sim um problema sistêmico que reflete a realidade do contexto global atual (Frantz e Bisognin, 2022). No ensino médio, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, Brasil, 2018), na área de Matemática e suas Tecnologias, “[...] os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração” (p. 471). No entanto, ao chegarem ao ensino médio, os estudantes apresentam lacunas no aprendizado de Geometria e encontram dificuldades para desenvolver as habilidades e competências esperadas para o final desta etapa da educação básica.

Assim, a partir dessa problemática vivenciada em torno da Geometria, seja como estudante ou professora, e que também é vivenciada em outras escolas do país (Frantz e Bisognin, 2022), vejo, na abordagem didática do Ensino Exploratório, uma oportunidade para o ensino e a aprendizagem de Geometria, uma vez que permite que os estudantes reflitam a partir do envolvimento com Tarefas Matemáticas cuidadosamente preparadas pelos professores (Ponte 2005). Em consonância com Abrantes (1999), “A Geometria parece ser, dentro da Matemática escolar, uma área particularmente propícia à realização de atividades de natureza exploratória e investigativa” (Abrantes, 1999, p. 52). Para a pesquisa, selecionei uma Tarefa Matemática no ramo da Geometria e adaptei-a para uma aula, na perspectiva exploratória, que foi desenvolvida em quatro etapas e aplicada a duas turmas de 1° ano do Ensino Médio. Isso possibilitou trabalhar a Geometria com qualidade e de forma mais significativa, colocando os estudantes como protagonistas da construção do seu conhecimento, refletindo e fazendo conexões com outros conceitos (Canavarro, 2011; Ponte, 2005).

A partir dessa perspectiva, procuramos responder ao seguinte problema de pesquisa: Como uma Tarefa Matemática planejada na perspectiva do Ensino

Exploratório contribui para a aprendizagem significativa de Geometria por estudantes do Ensino Médio?

Dentro dessa problemática, o objetivo geral dessa pesquisa é investigar as contribuições de uma Tarefa Matemática, elaborada a partir dos pressupostos do Ensino Exploratório, para a promoção da aprendizagem significativa de Geometria entre estudantes do ensino médio.

Objetivos Específicos:

a) Elaborar uma Tarefa Matemática fundamentada nos princípios do Ensino Exploratório, voltada ao desenvolvimento de conteúdos geométricos;

b) Implementar a tarefa em turmas do ensino médio, buscando fomentar um ambiente investigativo e participativo;

c) Registrar e sistematizar os dados produzidos durante o desenvolvimento da tarefa, por meio de produções escritas, áudios, fotografias e observações de campo;

d) Analisar os registros dos estudantes à luz de indicadores de aprendizagem dos conceitos geométricos abordados;

e) Discutir as potencialidades e limitações do Ensino Exploratório como estratégia para o ensino de Geometria na educação básica.

No contexto desta pesquisa, "aprendizagem significativa" refere-se ao processo em que os estudantes participam ativamente na construção de seu conhecimento, indo além da memorização e atribuindo significados aos conceitos aprendidos. Ao explorar e investigar conceitos geométricos por meio da Tarefa Matemática, os estudantes tornam o conteúdo relevante e útil para si, o que permite uma compreensão mais profunda e duradoura.

Com base nesse objetivo e fundamentação, esta dissertação está organizada de tal forma que na seção 2 expõe o referencial teórico, abordando as dificuldades históricas no ensino e aprendizagem de Geometria, os fundamentos do Ensino Exploratório da Matemática, o conteúdo de Geometria abordado na tarefa e o papel das Tarefas Matemáticas na abordagem exploratória.

Na seção 3, são descritos os procedimentos metodológicos, incluindo a caracterização da pesquisa, o contexto de aplicação e os caminhos seguidos desde a construção até o desenvolvimento da Tarefa Matemática.

A seção 4 traz o relato da prática em sala de aula, com destaque para os principais movimentos observados durante o desenvolvimento da proposta pelos estudantes.

Em seguida, a seção 5 apresenta a análise dos registros dos estudantes, à luz dos princípios do Ensino Exploratório e da aprendizagem significativa.

Por fim, a seção 6 traz os resultados e conclusões, destacando as contribuições do trabalho, suas limitações e possibilidades de continuidade.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O estudo da Geometria no ensino médio representa um desafio significativo. Muitos estudantes chegam a essa etapa com lacunas acumuladas desde os anos anteriores, e o professor, por sua vez, enfrenta dificuldades para trabalhar os conteúdos previstos no currículo em razão da defasagem conceitual dos estudantes, da descontinuidade no ensino da área e da ausência de estratégias metodológicas eficazes (Bissolotti; Titon, 2022; Frantz; Bisognin, 2022). É importante reconhecer que, nas últimas décadas, a Geometria tem ganhado maior visibilidade nos currículos escolares e nas propostas oficiais de ensino, além de manter uma presença significativa nas avaliações externas em larga escala. No entanto, esse movimento de valorização formal ainda não foi suficiente para reverter os prejuízos acumulados historicamente, tampouco para garantir um ensino que favoreça o desenvolvimento do raciocínio geométrico de forma significativa (Caldatto; Pavanello, 2015). Essa realidade tem sido amplamente discutida por diferentes autores, que analisam tanto os fatores históricos quanto os obstáculos contemporâneos relacionados ao ensino e à aprendizagem da Geometria.

2.1 Dificuldades no ensino e na aprendizagem de Geometria

A Geometria foi afastada da sala de aula, mas isso foi há muito tempo (Gazire, 2000). A fragilidade histórica do ensino dessa área no Brasil foi amplamente discutida por diversos autores, como Lorenzato (1995), Caldatto e Pavanello (2015), entre outros, que apontam múltiplas causas para essa negligência. Entre elas, destaca-se a precariedade na formação docente, que historicamente resultou em um ensino limitado, fragmentado e pouco exploratório. Essa limitação já se manifesta nos ciclos iniciais da escolarização: como argumentam Fonseca *et al*. (2009), muitos professores do ensino fundamental I não sabem o que fazer com os conteúdos geométricos, nem como ou por que abordá-los. As autoras atuam junto a formação continuada, especialmente dedicadas aos anos iniciais do ensino fundamental.

Nas últimas décadas, a área passou a conquistar maior presença nos currículos oficiais, especialmente a partir dos *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCN) (Brasil, 1997) e, mais recentemente, com a BNCC (Brasil, 2018), que estabelece competências e habilidades específicas relacionadas à Geometria. No entanto, essa valorização formal ainda não tem garantido um ensino eficiente e significativo, como destaca a professora Regina Maria Pavanello em entrevista recente (Moran *et al*., 2023, p. 6), ao afirmar que “o grande problema é a falta do ensino da Geometria na formação escolar dos professores”, já que esse contato costuma ocorrer apenas na graduação e de forma muitas vezes inadequada à realidade da sala de aula. A autora, que tem atuado diretamente na formação de professores, observa que essa lacuna repercute diretamente nas práticas pedagógicas e pode explicar a permanência de dificuldades importantes no ensino da área.

O conteúdo de Geometria é muito cobrado nas avaliações, principalmente nas de larga escala como é o caso do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). De acordo com Santos e Araújo (2022), aproximadamente 33% das 495 questões de Matemática do ENEM, aplicadas entre os anos de 2010 e 2020, abordavam conhecimentos geométricos. Entre os conteúdos mais frequentes, destacam-se comprimentos, áreas e volumes (30,91%), características de figuras geométricas planas e espaciais (13,33%) e grandezas, unidades de medida e escalas (18,18%). Ainda segundo as autoras, “as questões sobre Geometria enfatizam conteúdos já vistos pelos estudantes desde o ensino fundamental e que são revisados e aprofundados no ensino médio [...] enquanto a Geometria Analítica [...] aparece com menor frequência nos exames”. Além disso, a Habilidade 8 da Matriz de Referência de Matemática — “resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma” — aparece como a mais recorrente entre as 165 questões de Geometria analisadas, representando cerca de 38,79% do total (Brasil, 2009, p. 5, *apud* Santos; Araújo, 2022, p.14). A alta frequência dessa habilidade está relacionada à ênfase dada à Geometria Plana e Espacial nas provas do exame. Esses dados sugerem que a aprendizagem da Geometria no ensino fundamental pode impactar no desempenho dos estudantes no ensino médio e, consequentemente, nas avaliações externas.

Entretanto, a recorrência desses conteúdos nas avaliações não tem sido acompanhada por um desempenho satisfatório dos estudantes. Como observam Caldatto e Pavanello (2015), apesar das tentativas de restabelecimento do ensino da Geometria no Brasil — principalmente por meio da inclusão de seus conteúdos nos currículos nacionais — os resultados obtidos pelos estudantes não têm refletido avanços significativos. Essa constatação aponta que a presença formal nos documentos oficiais não é suficiente para garantir práticas pedagógicas eficazes em sala de aula.

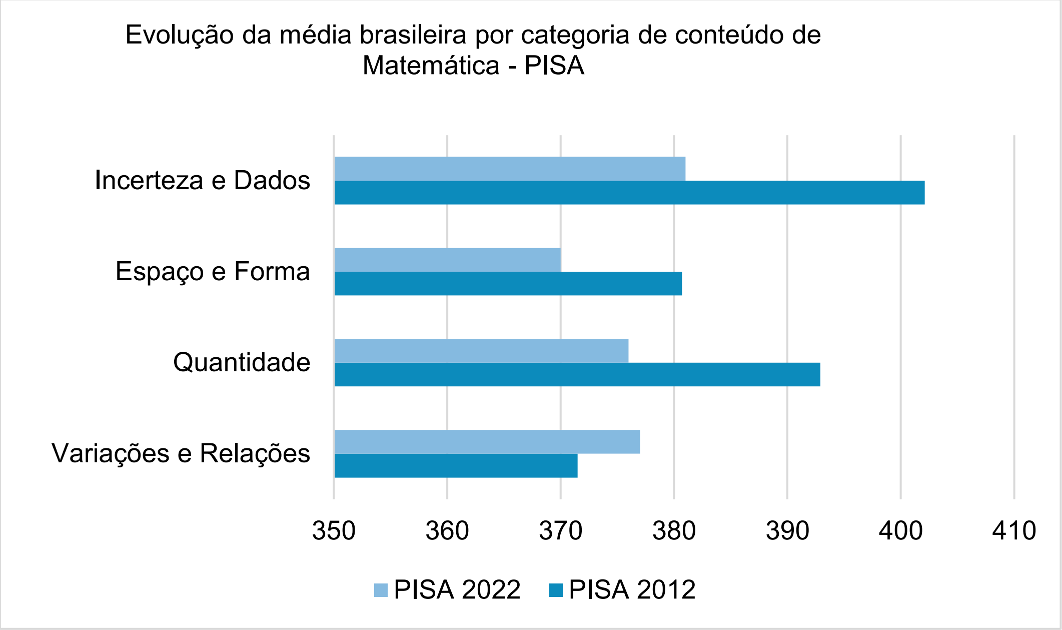
Frantz e Bisognin (2022) reforçam essa perspectiva ao investigarem a percepção de professores dos anos finais do ensino fundamental. As autoras evidenciam que a Geometria continua sendo, para os professores, um dos conteúdos mais desafiadores de ensinar, especialmente pela deficiência na formação inicial e pela ausência de estratégias adequadas, levando à insegurança na prática docente. Conforme relatado, os estudantes muitas vezes não conseguem estabelecer conexões entre os conteúdos geométricos e seus conhecimentos prévios, o que dificulta ainda mais o processo de ensino. Essa fragilidade, de acordo com Frantz e Bisognin (2022), compromete a aprendizagem dos estudantes e repercute diretamente nas etapas posteriores.

As autoras fazem uma análise do baixo desempenho dos estudantes brasileiros em Matemática nas edições de 2012 a 2018 do *Programme for International Student Assessment* (PISA), com destaque para a edição de 2012, cujo foco foi a Matemática. Nesta edição, segundo sua análise, a categoria de conteúdo “espaço e forma” apresentava cerca de 70,9% dos estudantes brasileiros avaliados nos níveis 1 e abaixo de 1 – patamar considerado muito abaixo da média da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE).

Essa constatação serve de base para a análise aqui realizada, que retoma esse panorama dez anos depois, à luz dos dados do PISA 2022 — edição também com ênfase em Matemática. Os resultados mais recentes indicam a persistência de baixos desempenhos: entre as quatro categorias de conteúdo avaliadas (variações e relações; espaço e forma; quantidade; incerteza e dados), “espaço e forma” voltou a registrar o menor desempenho médio, revelando uma tendência de estagnação ou leve retrocesso ao longo da década, como já apontavam as autoras. Essa situação está ilustrada no Gráfico 1.

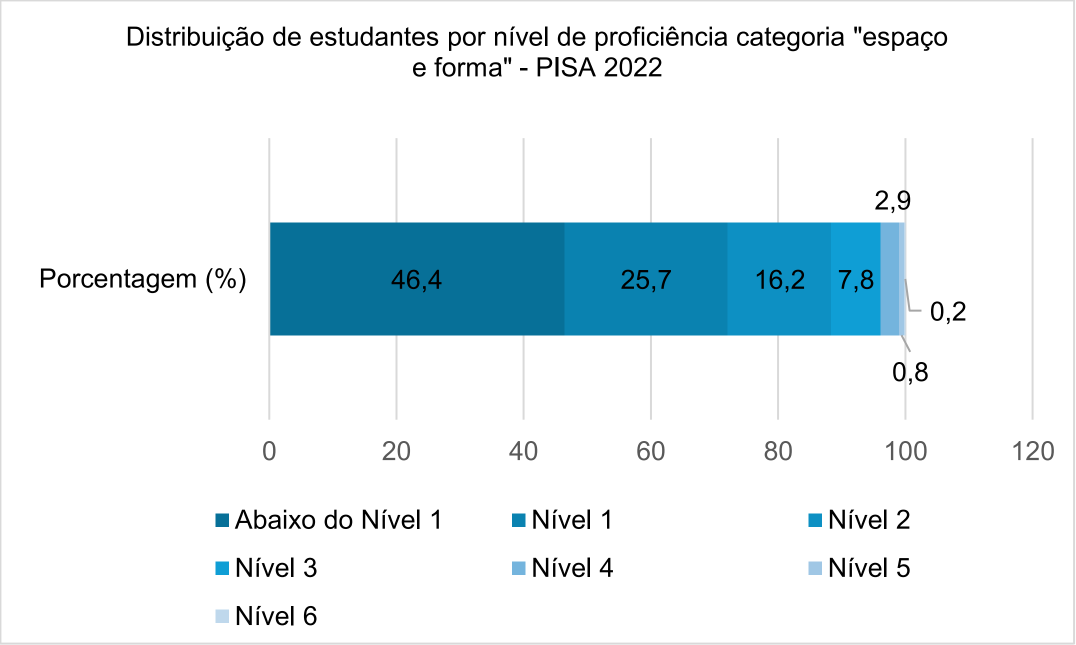
Além disso, os dados do PISA de 2022, apontam que 46,4% dos estudantes brasileiros se encontram abaixo do nível 1 na escala de proficiência da subescala “espaço e forma”, e outros 25,7% no nível 1, ou seja, mais de 72% dos estudantes não atingiram sequer o nível mínimo de proficiência definido pela OCDE. Resultado semelhante ao encontrado pelas autoras ao analisarem os dados do PISA de 2012. De acordo com o relatório da OCDE, o nível 2 é considerado o limiar da proficiência básica, pois representa o mínimo necessário para que os estudantes consigam usar a Matemática em situações do cotidiano de forma autônoma. A estrutura do gráfico a seguir foi inspirada em representação semelhante feita por Frantz e Bisognin (2022), agora atualizada com os dados do PISA 2022 (Gráfico 2).

Gráfico 1 — Comparação das médias por categorias de conteúdo em Matemática – Brasil, PISA 2012 e 2022.



Fonte: Elaborado pela autora com base em dados da OCDE (2023) e relatório Nacional PISA (Brasil, 2012).

Gráfico 2 — Níveis de proficiência dos estudantes brasileiros na categoria "espaço e forma" (PISA 2022).



Fonte: Elaborado pela autora com base em dados do relatório da OCDE (2023). Estrutura inspirada em Frantz e Bisognin (2022).

Segundo a definição apresentada no relatório da OCDE (2023), a categoria “espaço e forma” refere-se à

> capacidade de lidar com padrões, propriedades de objetos, visualizações espaciais, posições e orientações, representações de objetos, decodificação e codificação de informações visuais, navegação e interação dinâmica com formas reais ou representações, bem como à habilidade de antecipar ações no espaço (OCDE, 2023, p. 244, tradução nossa).

No que se refere aos níveis de proficiência[1], os estudantes no nível 1 e abaixo de 1 nessa categoria:

> conseguem reconhecer e resolver problemas simples em um contexto familiar, utilizando imagens ou desenhos de objetos geométricos conhecidos e aplicando habilidades espaciais básicas, como reconhecer propriedades elementares de simetria, comparar comprimentos ou medidas de ângulos, ou utilizar procedimentos como a dissecação de formas (OCDE, 2023, p. 245, tradução nossa).

As dificuldades no ensino e na aprendizagem da Geometria são confirmadas por diferentes estudos, seja por meio da análise de exames, seja por meio de relatos de professores em formação ou em exercício. Nesse sentido, Bissolotti e Titon (2022), ao realizarem uma pesquisa qualitativa baseada na análise de oito trabalhos acadêmicos publicados entre 2001 e 2019, identificaram como principal entrave a escassez de aulas de Geometria — compreendida, segundo os próprios trabalhos analisados, como a prática recorrente de postergar ou suprimir o ensino da Geometria em função de outros conteúdos, resultando em abordagens superficiais e descontínuas. Além disso, os autores destacam a desmotivação de discentes e docentes e a má formação dos professores como fatores que dificultam o avanço do ensino geométrico. As análises dos trabalhos apontam que muitos estudantes chegam ao ensino médio sem os conhecimentos geométricos básicos e que, mesmo quando o conteúdo é abordado, tende a ser tratado de forma repetitiva, teórica e desvinculada da realidade dos estudantes. Nesse cenário, a Geometria acaba sendo reduzida a fórmulas e procedimentos sem significado, dificultando o desenvolvimento de uma aprendizagem efetiva e contextualizada. Por outro lado, os autores ressaltam que parte dos trabalhos analisados apresenta experiências promissoras, como o uso de sequências didáticas investigativas, materiais manipulativos e propostas que estimulam a participação ativa dos estudantes na construção dos conhecimentos geométricos. Esses achados reforçam a atualidade das reflexões já presentes na

---

[1] Tabela I.A1.7 – onde se apresentam os níveis de proficiência específicos da categoria *“espaço e forma” – (OCDE, 2023, p.245).*

literatura desde a década de 1990, que há muito alertava para as dificuldades no ensino e na aprendizagem da Geometria nas salas de aula brasileiras — como apontado por Lorenzato (1995), ao destacar os prejuízos de um ensino pautado apenas na repetição e na memorização, sem significado ou conexão com a realidade dos estudantes.

Essa situação descrita é bastante comum em muitas escolas públicas brasileiras, e ficou evidente no contexto desta pesquisa. Em dezembro do ano letivo de 2024, uma boa parte dos estudantes participantes da pesquisa a ser descrita relatou que não teve aulas de Geometria, o que mostra que essa questão ainda é muito relevante hoje em dia. A experiência vivenciada nesta investigação, por sua vez, permitiu perceber que conteúdos normalmente trabalhados no ensino fundamental continuam sendo desafiadores para os estudantes do ensino médio. Isso indica que as dificuldades apontadas por diversos estudos ainda fazem parte do dia a dia escolar.

2.2 Ensino Exploratório da Matemática

Diante das dificuldades recorrentes no ensino e na aprendizagem da Geometria, evidencia-se a necessidade de metodologias que atribuam sentido aos conteúdos e promovam o engajamento dos estudantes (Bissolotti; Titon, 2022; Frantz; Bisognin, 2022). Trata-se de uma demanda que não parte apenas dos discentes, mas também dos próprios professores, que muitas vezes se sentem inseguros diante dos desafios de ensinar Geometria de forma significativa.

O Ensino Exploratório constitui uma abordagem didática alternativa ao ensino tradicional ou direto, como explica Ponte (2005), no qual o professor apresenta previamente os conceitos e os estudantes os exercitam com o objetivo de fixá-los. No Ensino Exploratório, essa lógica se inverte: o professor propõe tarefas cuidadosamente elaboradas ou adaptadas para promover a exploração por parte dos estudantes, com base em seus conhecimentos prévios e nas estratégias que possam emergir ao longo do trabalho, geralmente realizado em duplas ou pequenos grupos (Ponte, 2005, 2014).

O professor assume uma postura de escuta atenta e media o processo, sem antecipar respostas, valorizando a participação dos estudantes, suas dúvidas e descobertas (Canavarro, 2011). A apresentação formal da matéria ocorre apenas no momento final da aula, durante a discussão coletiva das resoluções, mediada pelo professor. Em vez de iniciar pela explicação conceitual, valoriza-se o envolvimento ativo dos estudantes na construção do conhecimento. Como destaca Ponte (2005, p.

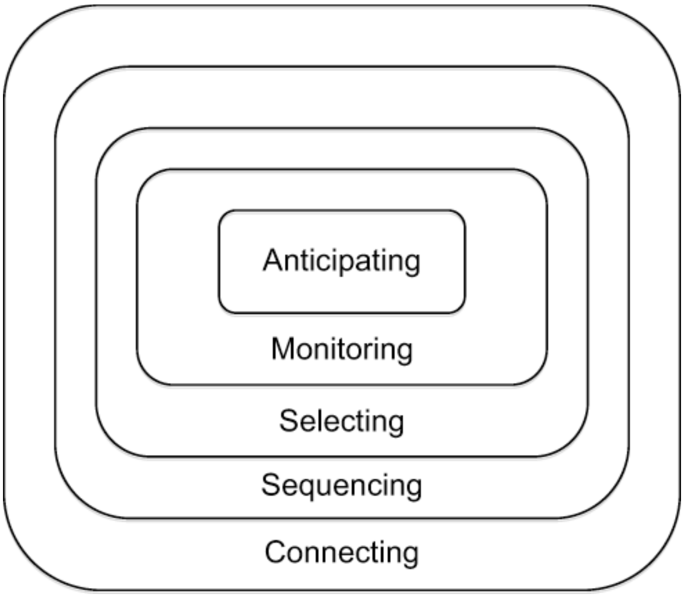
13), “a sua característica principal é que o professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem”.

Dessa forma, o Ensino Exploratório propõe um papel mais participativo e significativo aos estudantes. Em consonância com essa perspectiva, Canavarro (2011, p. 11) destaca que, através do Ensino Exploratório, “os alunos têm a possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgir com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática”. Ao passo que é uma abordagem considerada complexa e difícil por muitos autores, pois exige que o professor seja dinâmico e desempenhe diversos papéis ao longo da aula exploratória (Stein *et al*., 2008; Canavarro, 2011).

Para melhor eficácia da abordagem, a aula é estruturada em três ou em quatro fases (Canavarro, Oliveira, Menezes, 2012; Stein *et al*., 2008; Ponte, Quaresma, Mata-Pereira, 2020). Adotaremos nesta dissertação um modelo de aula dividido em quatro fases: (1) introdução da tarefa aos estudantes, (2) realização da tarefa em grupos, (3) socialização e discussão coletiva, e (4) sistematização das aprendizagens. Com o objetivo de “viabilizar a constituição de ambientes de sala de aula favorecedores do ensino exploratório" (Dörr, Pina Neves & Ribeiro, 2023, p. 6), associadas a essas fases devem ser observadas as práticas para orquestração das discussões coletivas propostas por Stein *et al*. (2008): antecipar, monitorar, selecionar, sequenciar e estabelecer conexões.

Essas práticas funcionam como suporte para que a discussão em sala de aula vá além da simples exposição de respostas, promovendo a construção compartilhada do conhecimento matemático e valorizando o raciocínio dos estudantes. Segundo Canavarro, ao adotar essas práticas, o professor é capaz de “orquestrar produtivamente as discussões matemáticas” (Canavarro, 2011, p. 13). A Figura 1 apresenta um diagrama esquemático das cinco práticas docentes propostas por Stein *et al*. (2008), representadas de forma concêntrica para destacar sua articulação contínua e a centralidade da antecipação no planejamento da aula exploratória.

Figura 1 — Esquema das cinco práticas docentes propostas por Stein *et al*. (2008).



Fonte: Stein *et al*., 2008, p. 322 (original em inglês).

A prática de *antecipar* é a única que acontece anterior à aula. Essa prática diz respeito a todo planejamento prévio do professor para a realização da aula exploratória. Canavarro (2011) destaca que essa é uma das componentes mais importantes da abordagem, e que se trata basicamente de fazer uma previsão de como os estudantes irão abordar a tarefa. Neste momento, prepara-se a Tarefa Matemática (TM) adequada ao propósito da aula e elencam-se, além dos materiais didáticos necessários, estratégias (corretas, incorretas ou incompletas) e possíveis interações dos estudantes, para poder antever intervenções que serão realizadas durante a fase de desenvolvimento da TM. Como destaca Lorenzato, citado por Biani:

> [...] é preciso reconhecer que ensinar por meio da descoberta pode causar alguma dificuldade ao professor, tendo em vista que podem surgir descobertas de alunos que não constam do planejamento de aula, ou, até mesmo, nem eram do conhecimento próprio docente. Mas, ser professor também é ser aluno. Aprendemos muito com nossos alunos, o que torna mais amplo o significado da velha crença de que 'é ensinando que se aprende' (Lorenzato, 2006 [2008], p. 82, *apud* Biani, 2008, p. 74).

Na fase (1), introdução da tarefa aos estudantes, o professor deve fazer a apresentação da proposta à turma. Realiza-se a leitura da TM garantindo que os estudantes entendam os objetivos e o contexto dela, de forma a desafiá-los (Canavarro, 2011), pois, desta forma, garante-se que eles se envolvam com a proposta. É importante que não restem dúvidas sobre a interpretação da TM para a execução das fases seguintes.

Na etapa (2), desenvolvimento da TM pelos estudantes, normalmente em pequenos grupos e de forma autônoma, o professor, na prática de monitorar, fica atento ao progresso dos estudantes durante a exploração da TM. Ele deve observar as estratégias levantadas, discussões realizadas e dificuldades enfrentadas pelos estudantes. É importante que o professor não interfira diretamente no trabalho dos grupos, realizando intervenções apenas quando necessário e de forma a levá-los à reflexão para evoluírem na execução da TM (Canavarro, 2011), mas com cuidado para não validar respostas, indicar claramente um caminho a seguir, e "sem fornecer demasiadas indicações que possam reduzir o nível de desafio cognitivo da tarefa" (Stein; Smith, 2009, *apud* Canavarro, 2011, p. 115).

Durante essa fase de trabalho autônomo dos estudantes, são realizadas também as práticas docentes de *selecionar* e *sequenciar*. Por meio da monitorização, o professor escolhe resoluções dos grupos que julgar adequadas à etapa seguinte — a discussão coletiva — incluindo também produções incompletas ou incorretas, quando essas oferecem boas oportunidades de aprendizagem (Canavarro, 2011; Ponte, 2005). Ao mesmo tempo, organiza a ordem em que essas produções serão apresentadas (sequenciar), de modo a favorecer uma compreensão progressiva e estruturada dos conceitos matemáticos previstos para a aula (Stein *et al*., 2008). Nesse processo, cabe ao professor "decidir em quais aspectos deverá focar na discussão subsequente" (Dörr; Neves; Ribeiro, 2023, p. 6), considerando os objetivos da aula e o potencial formativo das resoluções observadas.

É importante observar que, para garantir a profundidade das aprendizagens, tanto Canavarro (2011) quanto Ponte (2005) destacam a necessidade de equilíbrio entre o tempo destinado ao trabalho em grupo e à discussão coletiva. Reservar um tempo equivalente para esses dois momentos contribui para que as ideias dos estudantes sejam efetivamente exploradas, compartilhadas e consolidadas em sala de aula.

As últimas duas fases em que a aula é estruturada, (3) socialização e discussão coletiva e (4) sistematização das aprendizagens, podem e normalmente acontecem em simultâneo. Neste momento, é realizada a prática estabelecer conexões. O professor deve assegurar "um ambiente de comunicação na sala de aula capaz de favorecer a participação e reflexão por parte dos alunos, com relevo para os momentos de discussão coletiva" (Ponte; Quaresma; Mata-Pereira, 2020, p. 10). Assim, apoiados na fase anterior, os estudantes vão compartilhar suas estratégias de resolução com a turma, para que juntos, professor e estudantes, a partir do diálogo, consigam comparar diferentes caminhos, discutir a validade matemática dos procedimentos adotados e refletir sobre os conceitos envolvidos.

Nesse processo, destaca-se que a aprendizagem resulta não apenas da realização de atividades, mas, sobretudo, da reflexão promovida sobre elas. Como salienta Ponte (2005, p. 10), “o que os alunos aprendem resulta de dois factores principais: a actividade que realizam e a reflexão que sobre ela efectuam”. Por isso, nas aulas exploratórias, a discussão coletiva assume um papel central: é nesse momento que se busca clarificar, organizar e sistematizar as aprendizagens construídas, favorecendo o desenvolvimento de uma compreensão coletiva dos conteúdos matemáticos, por meio da articulação das diferentes estratégias dos estudantes com os conceitos matemáticos centrais da aula (Stein *et al*., 2008).

Na prática de *estabelecer conexões*, o professor pode ainda ampliar a discussão, relacionando os conceitos trabalhados com conteúdos já abordados anteriormente ou antecipando ideias que serão retomadas em aulas futuras (Canavarro, 2011). Essa articulação amplia o significado das aprendizagens e contribui para a construção de uma visão mais integrada da Matemática.

Outro aspecto relevante é que todas as fases devem ser executadas de forma contínua e integrada. Interromper o fluxo da aula, por exemplo, realizando a tarefa exploratória em um dia e postergando a discussão coletiva para outro momento, pode comprometer a aprendizagem, uma vez que os estudantes tendem a esquecer detalhes importantes das estratégias utilizadas e das ideias construídas durante o processo (Canavarro, 2011).

2.3 Tarefas Matemáticas na abordagem exploratória

Como discutido anteriormente, o Ensino Exploratório da Matemática tem como um de seus pilares fundamentais as TMs. Para compreender melhor esse conceito, é necessário distinguir os termos "tarefa" e "atividade". No cotidiano escolar, costuma-se chamar de "atividade" qualquer proposta feita aos estudantes: listas de exercícios, deveres de casa, pesquisas, projetos, resolução de problemas, entre outros. No entanto, essa distinção é relevante para compreender o papel que as tarefas desempenham no ensino de Matemática.

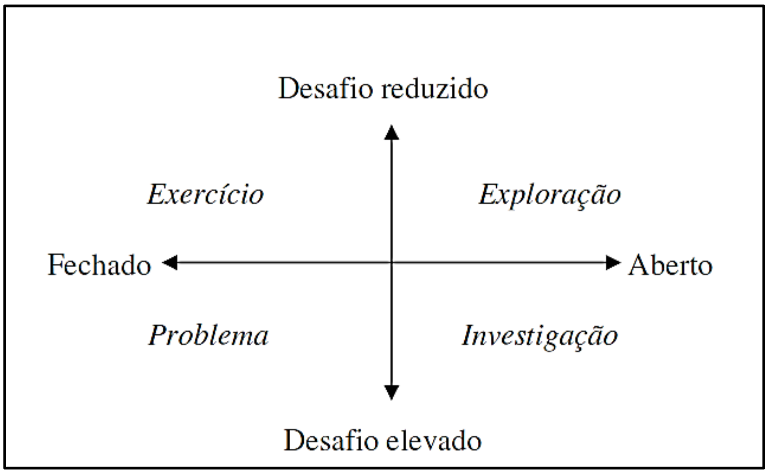
Segundo Ponte (2005), a *atividade* resulta das ações realizadas com o objetivo de desenvolver uma tarefa. Essa distinção é reforçada por Lamonato e Passos (2011), ao afirmarem que a tarefa é a proposta em si, enquanto a *atividade* corresponde à ação do estudante frente a essa proposta. Os autores ainda afirmam que as tarefas podem ser apresentadas de forma oral ou escrita, tanto pelo professor quanto surgir, de forma espontânea, dos próprios estudantes.

Desse modo, a atividade matemática ocorre quando o estudante se envolve com uma tarefa em determinado contexto, e essa interação é que dá origem à atividade propriamente dita (Ponte, 2005, 2014). A qualidade da tarefa, a forma como é apresentada, o modo de organização do trabalho e o ambiente da sala de aula são fatores determinantes para o tipo de atividade que poderá emergir. Ainda segundo o autor, ao elaborar tarefas adequadas, o professor tem o potencial de estimular a exploração, a descoberta e a construção ativa de conhecimentos pelos estudantes.

Ponte (2014) enfatiza que "[...] as tarefas são ferramentas de mediação fundamentais no ensino e na aprendizagem da matemática" (p. 16). Ainda que o aprendizado aconteça pela atividade e pela reflexão sobre ela, esse processo está diretamente condicionado à qualidade da tarefa e à situação didática criada (Canavarro, 2011; Ponte, 2005). Nesse sentido, é fundamental compreender os diferentes tipos de TMs e suas contribuições para a aprendizagem, especialmente na abordagem exploratória.

Para classificar as tarefas, Ponte (2005) propõe duas dimensões principais: o grau de desafio matemático e o grau de abertura. O grau de desafio varia entre “reduzido” e “elevado”, enquanto o grau de abertura varia entre “fechada” e “aberta”. Combinando essas duas dimensões, surgem, como pontua o autor, quatro tipos de tarefas: exercício (fechada com desafio reduzido), problema (fechada com desafio elevado), exploração (aberta com desafio reduzido) e investigação (aberta com desafio elevado). De acordo com o autor, “Numa tarefa fechada é claramente dito o que é dado e o que é pedido e uma tarefa aberta comporta alguma indeterminação pelo menos num desses aspectos” (Ponte, 2014, p. 20). A figura 2 ilustra esse enquadramento:

Figura 2 — Relação entre diversos tipos de tarefas, em relação ao seu grau de desafio e abertura.



Fonte: Ponte, 2005, p. 8.

No entanto, é importante destacar que para Ponte (2005) essa classificação não é estática, o limiar entre uma e outra tarefa não é nítido, e isso depende também das condições em que a tarefa é proposta. Em consonância com Stein e Smith (1998, tradução de 2009)[2], que argumentam que a natureza das TMs pode mudar significativamente no percurso entre o currículo, a apresentação feita pelo professor e a forma como os estudantes, de fato, as interpretam e realizam em sala de aula.

Além dessa tipologia, é relevante considerar as características que tornam certas tarefas especialmente potentes no contexto do Ensino Exploratório. Segundo Oliveira; Canavarro e Menezes (2016), as TMs — sejam elas problemas, investigações ou explorações — podem promover uma atividade matemática significativa quando:

- partem de uma situação desafiadora e apelativa;
- admitem o uso de diferentes estratégias e representações, com variados níveis de sofisticação matemática, permitindo ao aluno apoiar-se em sua experiência para resolvê-las;
- favorecem o pensamento matemático, especialmente as capacidades cognitivas de nível superior;
- visam uma compreensão aprofundada dos conceitos e processos matemáticos ou ideias ligadas ao conhecimento construído em sala de aula;
- promovem articulações entre conhecimentos matemáticos e extra matemáticos
- e permitem evidenciar aquilo que o aluno sabe ou é capaz de fazer (Oliveira; Canavarro; Menezes, 2016, p. 53).

---

[2] Tradução publicada na revista *Educação e Matemática*, n. 105, 2009, disponível em: https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1809. Acesso em: 25 out. 2024.

No Ensino Exploratório, podem ser propostas tarefas do 1º ou do 4º quadrante (Figura 2). Contudo, a ênfase desta abordagem está no 4º quadrante, caracterizado pelas TMs Exploratórias. Tarefas investigativas, como projeto e pesquisas, são relevantes por promoverem o engajamento dos estudantes desde o início do processo e exigirem participação ativa, mas podem causar dispersão por sua complexidade e duração (Ponte, 2005).

Já as TMs Exploratórias, permitem que todos os estudantes interajam com a proposta em diferentes níveis de imediato. Nessas tarefas, o estudante é convidado a assumir uma postura "que se aproxima de um pesquisador" (Lamonato; Passos, 2011, p. 55). São propostas que estimulam experimentações, levantamento de conjecturas, produções próprias, argumentações e reflexões sobre hipóteses, respeitando o nível de desenvolvimento de cada estudante. O objetivo dessas tarefas não é levar os estudantes a uma resposta correta, mas incentivá-los a criar possibilidades, serem ativos na construção de aprendizagens com significado e, acima de tudo, sentirem-se capazes de compreender a Matemática. Essas tarefas favorecem a recuperação da confiança e do entusiasmo dos estudantes com a disciplina (Ponte, 2005, 2014; Lamonato; Passos, 2011; Canavarro, 2011). Em consonância com Stein e Smith (1998):

> [...] tarefas que exigem que os alunos pensem conceptualmente e que os estimulem a fazer conexões representam um tipo diferente de oportunidade para os alunos pensarem. O efeito cumulativo, dia após dia, de exploração, na sala de aula, de diferentes tipos de tarefas conduz ao desenvolvimento de ideias implícitas nos alunos sobre a natureza da Matemática – sobre se a Matemática é algo de que eles podem pessoalmente compreender o sentido e quão longa e arduamente devem trabalhar para o conseguir (Stein; Smith, 1998, p. 22).

O Currículo em Movimento do Novo Ensino Médio (Distrito Federal, 2020), em consonância com as diretrizes da BNCC (Brasil, 2018), destaca a necessidade de superar práticas tradicionais centradas na transmissão de conteúdos e no papel ativo do professor. Em seu lugar, valoriza-se uma abordagem metodológica que coloque o estudante no centro do processo de aprendizagem, favorecendo sua autonomia e protagonismo. Como explicita o documento:

> O alcance desse propósito ocorrerá quando os estudantes do Ensino Médio conseguirem atingir objetivos de aprendizagem que abordem processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. [...] a metodologia para o ensino da Matemática deve ser centrada no estudante e, portanto, oferecer-lhe experiências pedagógicas nas quais ele possa refletir sobre seu próprio desempenho (Distrito Federal, 2020, p. 77–78).

A BNCC (Brasil, 2018) orienta que o trabalho com Geometria deve contribuir para o desenvolvimento de competências associadas ao raciocínio matemático, destacando a importância da investigação, da explicação e da justificativa das soluções apresentadas, com ênfase na argumentação. Conforme o documento:

> para o desenvolvimento de competências que envolvem raciocinar, é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática. Embora todos esses processos pressuponham o raciocínio matemático, em muitas situações são também mobilizadas habilidades relativas à representação e à comunicação para expressar as generalizações, bem como à construção de uma argumentação consistente para justificar o raciocínio utilizado (Brasil, 2018, p. 529).

Assim, o ensino de Geometria se mostra especialmente propício à exploração de tarefas investigativas e exploratórias, conforme destacam autores como Lorenzato (1995): “A Geometria valoriza o descobrir, o conjecturar e o experimentar” (p. 6) e Abrantes (1999):

> Na geometria, há um imenso campo para a escolha de tarefas de natureza exploratória e investigativa, que podem ser desenvolvidas na sala de aula, sem necessidade de um grande número de pré-requisitos e evitando, sem grande dificuldade, uma visão da Matemática centrada na execução de algoritmos e em 'receitas' para resolver exercícios-tipo (Abrantes, 1999, p. 4).

As atividades investigativas em Geometria, como também ressalta Abrantes (1999), promovem a formulação e resolução de problemas, a elaboração de conjecturas, a generalização de ideias e a construção de argumentos — elementos essenciais ao desenvolvimento do pensamento matemático e, portanto, fortemente alinhados à proposta do Ensino Exploratório.

Dessa forma, compreender as potencialidades das TMs é essencial para o desenvolvimento de propostas didáticas na abordagem didática do Ensino Exploratório, como será discutido no próximo tópico, a partir de um conteúdo específico: a soma dos ângulos internos de um polígono.

2.4 A soma dos ângulos internos de um polígono: aspectos conceituais e potencial exploratório

O conteúdo da soma dos ângulos internos de um polígono apresenta um grande potencial exploratório, por permitir que os estudantes observem regularidades e construam generalizações a partir de casos particulares. Por meio de representações visuais e manipulação de figuras, é possível promover a compreensão dos conceitos geométricos envolvidos. No entanto, muitos estudantes chegam ao ensino médio sem atribuir significado a essa propriedade, apenas memorizando a fórmula.

Lima (2007) observa que, embora seja amplamente conhecido que a soma dos ângulos internos de um triângulo equivale a dois ângulos retos — e, por consequência, que a de um polígono (convexo ou não) com n lados equivale a $(n - 2) \cdot 180°$ — muitos livros didáticos elementares tendem a restringir esse estudo aos polígonos convexos, o que pode levar à percepção equivocada de que a fórmula não se aplica a polígonos não convexos ou de que, nesses casos, a soma dos ângulos externos possa não ser 360°.

Segundo o autor, essa confusão decorre principalmente de dois fatores: a dificuldade de decompor polígonos não convexos em triângulos adjacentes por meio de diagonais que não se cruzem; e a própria definição de ângulo externo em vértices reentrantes, que nem sempre é apresentada com clareza.

O objetivo deste tópico é justamente esclarecer essas questões, demonstrando que a fórmula para a soma dos ângulos internos continua válida para qualquer polígono, convexo ou não, desde que sejam considerados adequadamente os conceitos envolvidos. A seguir, apresentamos os fundamentos conceituais e as demonstrações que sustentam esse resultado.

2.4.1 *Soma dos ângulos internos de um triângulo*

Teorema 1: A soma dos ângulos internos de um triângulo equivale a dois ângulos retos. (2R).

A demonstração que apresentamos a seguir é amplamente difundida nos livros didáticos e costuma ser reproduzida com frequência nas salas de aula.

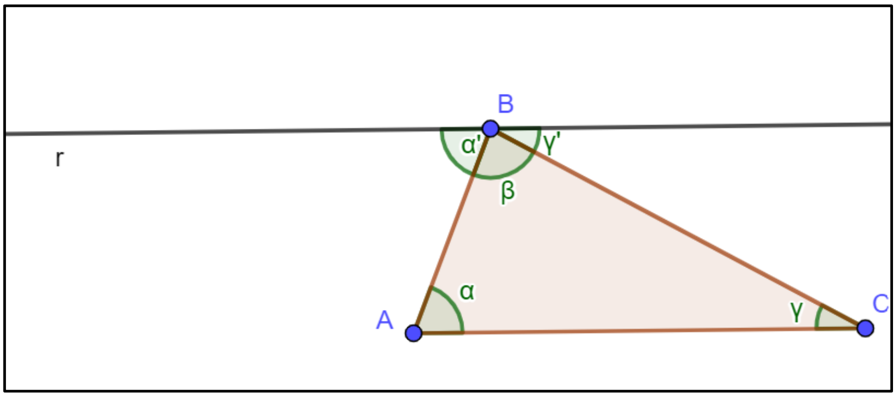
Demonstração: Considere um triângulo ABC, cujos ângulos internos serão denotados por α, β e γ. Traça-se a reta r paralela à reta suporte do lado AC, passando pelo vértice B (com base no postulado de que, por um ponto fora de uma reta dada, passa uma única reta paralela a ela). A partir dessa construção formam-se os ângulos α' e γ', como mostra a Figura 3. Os pares de ângulos α e α', bem como γ e γ', são alternos internos. Assim, podemos afirmar que são congruentes: $\alpha \equiv \alpha'$ e $\gamma \equiv \gamma'$. Portanto, a soma dos ângulos internos do triângulo ABC é dada por:

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta + \gamma' = 2R = 180^{\circ}.$$

Concluindo que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180º.

C.Q.D

Figura 3 — Demonstração tradicional.



Fonte: Elaborado pela autora, (2025).

Lima (2007) ainda apresenta outras duas demonstrações para este resultado. A primeira considera inicialmente um triângulo retângulo, e em seguida generaliza o raciocínio para qualquer tipo de triângulo. A segunda abordagem parte da análise dos ângulos externos do triângulo ABC, demonstrando que sua soma é 360° e, utilizando o fato de que ângulos internos e externos são suplementares, também conclui que $\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}$ (tal como provou Euclides).

Cabe destacar que o objetivo desta dissertação não é apresentar uma coleção exaustiva de demonstrações, mas sim discutir aquelas que são mais pertinentes à prática investigativa desenvolvida em sala.

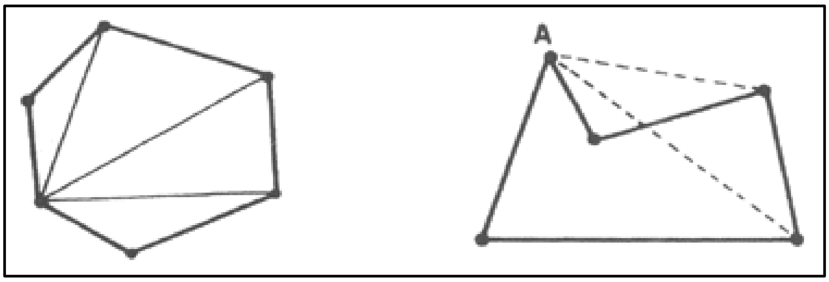
2.4.2 Soma dos ângulos internos de um polígono

Inicialmente, é importante esclarecer o sentido atribuído ao termo *polígono* neste trabalho. Seguindo a definição de Lima (2007), consideramos polígono como sendo, sempre, um polígono simples, ou seja, uma linha poligonal fechada que pode ser inteiramente percorrida sem que se passe mais de uma vez por qualquer dos seus pontos. Em alguns contextos, o termo também se refere à região do plano delimitada por essa linha poligonal. Além dos lados e vértices que compõem a figura, define-se como diagonal todo segmento de reta que une dois vértices não consecutivos de um polígono.

Utilizaremos, a seguir, as demonstrações apresentadas por Lima (2007). Para isso, o autor parte da propriedade previamente demonstrada sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo, e do fato de que qualquer polígono com n lados pode ser decomposto, por meio de $(n - 3)$ diagonais, em $(n - 2)$ triângulos.

Essa decomposição pode ser feita com facilidade em um polígono convexo, traçando-se todas as diagonais a partir de um mesmo vértice. No entanto, se o polígono for não convexo, é necessário um cuidado maior, pois algumas diagonais podem estar fora do interior da figura ou cortar lados do polígono, como ilustrado na Figura 4.

Figura 4 — Diagonais partindo de um mesmo vértice em um pentágono convexo e em um não convexo.



Fonte: Lima (2007, p. 21-22).

Nesta subseção, apresentamos dois teoremas fundamentais que sustentam a fórmula geral da soma dos ângulos internos de um polígono, conforme discutido por Lima (2007). Ambos os resultados se apoiam na ideia de que qualquer polígono, convexo ou não, pode ser decomposto em triângulos justapostos por meio de diagonais que não se interceptam. As demonstrações aqui expostas seguem as construções apresentadas pelo autor.

Teorema 2: Traçando-se diagonais internas que não se cortam, pode-se decompor qualquer polígono em triângulos justapostos (Lima, 2007, p.22).

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que exista um polígono P com n lados que não possa ser decomposto em triângulos justapostos por meio de diagonais que não se cruzem.

Escolhemos P de modo que n seja o menor número de lados para o qual essa propriedade não valha.

Traçamos uma reta r que não intersecta P, isto é, $r \cap P = \emptyset$. Sejam A, B e C vértices consecutivos de P, sendo B o vértice mais próximo da reta r, isto é, um vértice saliente. Temos então dois casos a considerar, ilustrados na Figura 5:

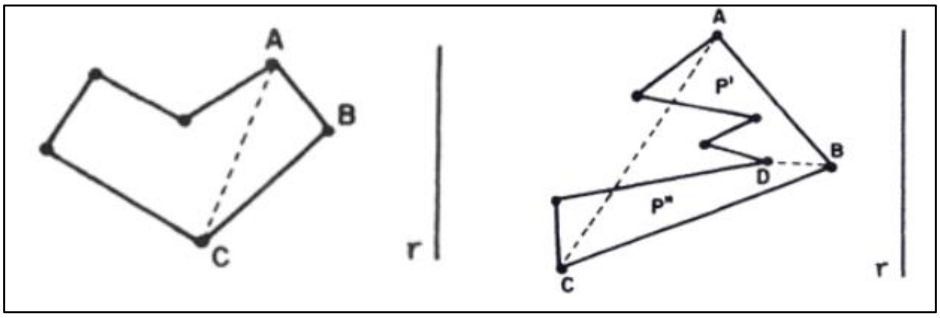
Caso (i): O triângulo ABC não contém outros vértices de P. Nesse caso, seja P′ o polígono obtido a partir de P pela exclusão do vértice B e dos lados AB e BC, ou seja, P′ possui $(n-1)$ lados. Como, por hipótese, n é o menor número para o qual a propriedade não valeria, P′ pode ser decomposto em triângulos justapostos. Adicionando a essa decomposição o triângulo ABC, obtemos uma decomposição completa de P, o que contradiz nossa suposição. Logo, o teorema é válido nesse caso.

Caso (ii): O triângulo ABC contém outros vértices de P. Seja D o vértice de P, situado dentro do triângulo ABC, que esteja à maior distância do segmento AC. Nesse caso, a diagonal BD pode ser traçada sem cruzar outros lados ou vértices de P, dividindo-o em dois polígonos, P′ e P″, ambos com menos de n lados. Pela hipótese de menor número de lados, ambos podem ser decompostos em triângulos justapostos. Assim, unindo essas decomposições por meio da diagonal BD, obtemos uma decomposição completa de P, o que também contradiz a suposição inicial.

Portanto, concluímos que qualquer polígono pode ser decomposto em triângulos justapostos por meio de diagonais que não se cruzem.

C.Q.D.

Figura 5 — caso (i) e (ii) a considerar na decomposição de P por AC.



Fonte: Lima (2007, p. 23-24).

Teorema 3: Quando um polígono P de n lados é decomposto, traçando-se diagonais internas que não se cortam, em triângulos justapostos, o número de triângulos é sempre (n – 2) e o número de diagonais é (n – 3) (Lima, 2007, p. 25).

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que o teorema seja falso. Ou seja, existe um polígono P com n lados que, ao ser decomposto por diagonais internas não concorrentes, não resulta exatamente em (n−2) triângulos ou em (n−3) diagonais. Escolhemos P com o menor número de lados possível para que essa propriedade falhe. Suponha que P seja decomposto por d diagonais em t triângulos, com d ≠ (n−3) ou t ≠ (n−2).

Tomemos uma das diagonais utilizadas nessa decomposição. Essa diagonal divide o polígono P em dois polígonos adjacentes, P′ e P″, com n′ e n″ lados, respectivamente. Como ambos têm menos lados que P (isto é, $n' < n$ e $n'' < n$), o teorema vale para P′ e P″, segundo nossa suposição inicial.

Sabemos que:

- $n = n' + n'' - 2$,
- $t = t' + t''$,
- $d = d' + d'' + 1$ (soma das diagonais internas de P′ e P″, mais a que os separa).

Como para P′ e P″ o teorema é válido:

- $t' = n' - 2$, $t'' = n'' - 2$, logo $t = t' + t'' = n' + n'' - 4 = n - 2$,
- $d' = n' - 3$, $d'' = n'' - 3$, logo $d = d' + d'' + 1 = n' + n'' - 5 = n - 3$.

Portanto, os valores de t e d para o polígono P também satisfazem o teorema, o que contradiz nossa hipótese inicial. Assim, concluímos que a propriedade vale para qualquer polígono com n lados.

C.Q.D.

Dessa forma, conforme os dois teoremas demonstrados, a fórmula para a soma dos ângulos internos de um polígono é garantida para qualquer polígono simples, convexo ou não. Como sintetiza Lima (2007), temos o seguinte corolário:

Corolário 4: A soma dos ângulos internos de qualquer polígono (simples) de n lados é igual a $(n - 2) \times 2R$.

Demonstração: Com efeito, o polígono decompõe-se em $(n - 2)$ triângulos justapostos e a soma dos ângulos internos de cada um deles é 2R (Lima, 2007, p. 25). Assim, $S = (n - 2).\ 180^{\circ}$.

C.Q.D

Esse resultado formaliza o conteúdo trabalhado na TM utilizada na presente pesquisa. Como será detalhado na seção seguinte, os estudantes, a partir de casos particulares, foram incentivados a observar padrões, formular hipóteses e realizar generalizações, nos pressupostos do Ensino Exploratório da Matemática. O objetivo foi que pudessem, de maneira ativa, atribuir significado à fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono, indo além da simples memorização e compreendendo suas bases conceituais.

3 METODOLOGIA

A presente investigação insere-se no campo da pesquisa qualitativa, por estar voltada à compreensão dos processos de aprendizagem dos estudantes ao vivenciarem uma TM, desenvolvida no contexto do Ensino Exploratório da Matemática, com base na análise das produções dos próprios estudantes.

Segundo D'Ambrosio (2013), essa abordagem "lida e dá atenção às pessoas e às suas ideias, procura fazer sentido de discursos e narrativas que estariam silenciosas" (p. 21). Nessa perspectiva, o foco desloca-se da quantificação para a compreensão dos significados atribuídos pelos sujeitos às suas ações e experiências (Borba; Araújo, 2013). Assim, a pesquisa qualitativa busca interpretar os fenômenos a partir do ponto de vista dos participantes, compreendendo como constroem sentido em suas vivências.

Como destacam Denzin e Lincoln (*apud* Gil, 2025), trata-se de uma modalidade de caráter essencialmente interpretativo, na qual os pesquisadores estudam os fenômenos em seus contextos naturais, procurando entender os significados atribuídos pelas pessoas envolvidas. Nessa abordagem, a ênfase recai sobre os aspectos subjetivos e sociais da realidade, as múltiplas interpretações possíveis e a interação entre pesquisador e participantes.

Garnica (2013) reforça essa concepção ao considerar que a pesquisa qualitativa reconhece a não neutralidade do pesquisador e o caráter processual da compreensão: as interpretações são construídas ao longo da trajetória da pesquisa e influenciadas pelos filtros e vivências do próprio pesquisador. Desse modo, assume-se que os dados não são apenas coletados, mas também construídos na interação entre pesquisador e participantes.

Gil (2025) sistematiza as principais características da pesquisa qualitativa, destacando:

i. o reconhecimento da existência de múltiplas realidades;
ii. a compreensão de que o pesquisador é o principal instrumento da pesquisa;
iii. a ênfase no processo indutivo de análise;
iv. o foco nos significados e compreensões dos participantes;
v. a menor preocupação com a generalização dos resultados.

Essas características se alinham aos objetivos desta investigação, que busca compreender como os estudantes interpretam e constroem conhecimento ao explorarem uma TM no ramo da Geometria.

Além disso, a pesquisa realizada pode ser caracterizada como uma pesquisa qualitativa básica (Merriam; Tisdell, 2016, *apud* Gil, 2025), cujo propósito central é proporcionar uma descrição rica e detalhada da experiência vivida pelos estudantes, sem a pretensão de desenvolver teorias ou realizar generalizações. O interesse reside em compreender uma situação específica — a realização de uma TM em uma aula de cunho exploratório — com base nas experiências e registros produzidos pelos estudantes.

A seguir, apresenta-se o cenário em que a pesquisa foi desenvolvida, bem como o perfil dos participantes envolvidos e o percurso metodológico adotado para o desenvolvimento da TM.

3.1 Contexto da pesquisa e participantes

A pesquisa foi realizada em uma escola pública de ensino médio da Regional de Santa Maria, localizada no entorno do Distrito Federal, que funciona nos turnos matutino e vespertino. A atividade investigativa foi desenvolvida com duas turmas do 1º ano do ensino médio do turno matutino, totalizando 48 estudantes, sendo 22 do sexo masculino e 26 do sexo feminino, com idades entre 15 e 17 anos.

A professora-pesquisadora encontrava-se afastada de suas funções docentes em virtude de sua vinculação ao PROFMAT/UnB. Em razão disso, contou com a colaboração de um colega de mestrado, também professor da rede pública do Distrito Federal, que cedeu suas turmas para a realização da pesquisa.

O planejamento inicial da professora-pesquisadora previa três encontros com as turmas. No primeiro momento, ela se apresentaria aos estudantes, explicaria os objetivos do estudo e aplicaria um questionário inicial intitulado "Seu contato com a geometria", composto por quatro questões abertas voltadas à investigação das experiências anteriores dos estudantes com esse campo da Matemática. No segundo encontro, seria aplicada uma avaliação diagnóstica com seis questões abertas, cujo objetivo era identificar conhecimentos prévios dos estudantes sobre polígonos e ângulos internos. Essas atividades estavam previstas para ocorrer em aulas simples, com duração de 45 minutos, e seriam seguidas da participação da pesquisadora na rotina da aula conduzida pelo professor regente, como forma de aproximar-se das turmas.

Entretanto, devido às alterações no calendário escolar ao final do ano letivo, não foi possível realizar os encontros nos moldes planejados. O professor regente das turmas aplicou, em momento oportuno e na ausência da pesquisadora, o questionário inicial (Apêndice B) e a avaliação diagnóstica (Apêndice A). Assim, a professora-pesquisadora teve apenas um encontro com as turmas, no qual conduziu a aula na perspectiva do Ensino Exploratório, utilizando uma TM previamente planejada para esse fim.

A atividade foi desenvolvida em uma aula dupla, com duração de 90 minutos, cuja estrutura está apresentada no tópico 3.2 desta dissertação. O desenvolvimento da aula será descrito na seção 4 – *Relato da prática*. Durante a realização da atividade, foram utilizados diferentes instrumentos de coleta de dados: gravações de áudio das interações nos grupos, registros escritos produzidos pelos estudantes, registros fotográficos realizados pelo professor regente com o celular da pesquisadora e anotações feitas pela própria pesquisadora durante o desenvolvimento da aula.

Os dados coletados por meio dos registros escritos produzidos pelos estudantes, das gravações de áudio das interações nos grupos e das anotações da professora-pesquisadora foram analisados à luz da abordagem qualitativa (Gil, 2025). A análise dos registros escritos será conduzida por meio da técnica de análise de conteúdo temática, conforme proposta por Bardin (2020), com o objetivo de identificar unidades de significado relacionadas à aprendizagem significativa de Geometria. As categorias de análise serão construídas durante o processo investigativo, com base na leitura aprofundada do material e orientadas pelos objetivos da pesquisa. Já os dados provenientes das gravações de áudio e das anotações de campo serão analisados interpretativamente, à luz dos princípios do Ensino Exploratório, buscando compreender como as interações e os comportamentos observados revelam indícios de construção de significados, mobilização de estratégias e compreensão conceitual no decorrer da realização da TM.

Algumas questões nortearam esse processo analítico, de acordo com os objetivos desta pesquisa: Como se manifesta a aprendizagem do conteúdo de Geometria trabalhado nas discussões realizadas durante a exploração da TM e nos registros escritos dos estudantes? Que tipos de erros conceituais foram observados durante o desenvolvimento da TM? Que estratégias foram utilizadas pelos estudantes para resolvê-la? Os dados revelam indícios de que tarefas diferenciadas favorecem a aprendizagem de Geometria? É possível identificar, nessa abordagem, elementos que atribuem significado às aprendizagens construídas pelos estudantes?

3.2 Planejamento da Tarefa Matemática e do seu desenvolvimento em sala de aula.

Esse planejamento insere-se na prática docente de *antecipar*, conforme proposta por Stein *et al*. (2008) e detalhada no referencial teórico desta dissertação. Trata-se da preparação cuidadosa da professora-pesquisadora, desde a escolha do conteúdo até a organização da TM e seu desenvolvimento em sala, orientada pelos princípios do Ensino Exploratório.

Considerando as dificuldades historicamente enfrentadas no ensino e na aprendizagem da Geometria, conforme discutido anteriormente, a TM desenvolvida nesta pesquisa abordou o conteúdo de *soma dos ângulos internos de polígonos*, pertencente ao campo da Geometria Plana. Esse conteúdo foi escolhido por sua relevância para a compreensão e construção ativa de conhecimentos geométricos e por seu potencial de ser explorado por meio de estratégias investigativas.

O conteúdo de *soma dos ângulos internos de um polígono* é muitas vezes introduzido nas salas de aula a partir da memorização de fórmulas, sem que os estudantes tenham a oportunidade de compreender sua origem ou significado. Como destaca Moriconi (2019, p. 1), embora provar resultados seja uma prática fundamental na Matemática, "há uma diferença entre provar e entender", e compreender conceitos exige mais do que a simples exposição formal. Da mesma forma, Lima (2007), ao discutir a soma dos ângulos internos e externos de um polígono, propõe um tratamento conceitual cuidadoso e rigoroso, o que reforça a importância de abordagens que favoreçam a construção de significados. Essas ideias sustentam a escolha de uma proposta didática que privilegia a exploração ativa do conteúdo, com base na investigação e na observação de regularidades, em contraste com o *ensino direto* centrado na transmissão de procedimentos (Ponte, 2005).

A TM utilizada foi originalmente elaborada em 2023 por professores integrantes do grupo de pesquisa Formação Matemática para o Ensino (ForMatE[3]), da

[3] Grupo de Pesquisa vinculado ao Programa de Pós-graduação em Ensino e História das Ciências e da Matemática (PEHCM) da Universidade Federal do ABC e cadastrado no Diretório de Grupos de Pesquisa do CNPq. Mais informações disponíveis em: http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/774793.

Universidade Federal do ABC – São Paulo (Aguiar; Ribeiro, 2024), e posteriormente adaptada para o contexto desta pesquisa. A versão original da tarefa continha duas partes: uma relacionada à soma dos ângulos internos e outra ao número de diagonais dos polígonos. Para os fins desta investigação, a tarefa foi adaptada com foco exclusivo na exploração da soma dos ângulos internos. Optou-se por retirar a parte referente ao número de diagonais, considerando o tempo limitado da aula dupla (90 minutos), priorizando-se a abordagem aprofundada de um único conceito para favorecer a aprendizagem significativa.

Uma das principais adaptações consistiu na inclusão de uma atividade de experimentação com recorte, voltada à visualização da soma dos ângulos internos de um triângulo. Esse procedimento não constava na versão original da tarefa, que apenas solicitava o valor da soma e uma justificativa. Considerando que muitos estudantes poderiam conhecer o resultado (180º) sem compreender seu significado — por tê-lo apenas memorizado ou visto em uma demonstração formal pouco acessível —, optou-se por iniciar a atividade com uma experiência visual e exploratória, que permitisse a construção ativa desse conhecimento. Essa decisão também se justifica pelo fato de que toda a sequência da TM dependia dessa informação como ponto de partida, reforçando a importância de que os estudantes a compreendessem de forma significativa. Nesse sentido, conforme pontua Ponte (2005, p. 12), “não basta, no entanto, selecionar boas tarefas – é preciso ter atenção ao modo de as propor e de conduzir a sua realização na sala de aula”, o que reforça a centralidade do planejamento cuidadoso da mediação didática da proposta adotada.

Ainda em relação à adaptação da tarefa, como a professora-pesquisadora não conhecia os estudantes, o planejamento incluiu a elaboração de uma extensão da TM — um problema sobre ladrilhamento no plano (Parte III) (Alves; Dalcin,1999) — para ser aplicada às turmas caso houvesse tempo disponível ou por grupos com ritmo mais acelerado. O problema proposto representa uma aplicação dos conteúdos trabalhados nas Partes I e II, permitindo que os estudantes estabelecessem conexões com outros conceitos matemáticos.

Para viabilizar a execução da TM em sala de aula, foi necessário organizar previamente os materiais a serem utilizados. A professora-pesquisadora listou e providenciou: tesouras, réguas, folhas brancas, gravadores de áudio, impressões da tarefa e prancheta para anotações da professora. Também foram preparados seis kits com polígonos regulares coloridos — triângulos, quadrados, pentágonos, hexágonos e octógonos — com foco na exploração prevista na Parte III, embora pudessem ser utilizados em outras etapas da aula.

Após essas adaptações, a versão final da TM, intitulada “Soma dos ângulos internos de um polígono” (disponível no Apêndice C), foi dividida em três partes: Parte I – Soma dos ângulos internos de um triângulo (manipulação concreta); Parte II – Soma dos ângulos internos de um polígono; Parte III – Ladrilhamento no plano (extensão). O objetivo da TM é promover a identificação de regularidades entre o número de lados de um polígono e a soma de seus ângulos internos, conduzindo à lei de formação por meio da exploração e interação entre os estudantes. Alinhada com a abordagem do Ensino Exploratório, a TM é uma tarefa aberta, de desafio reduzido, acessível e que permite diversas estratégias de resolução (Ponte, 2005). A resolução detalhada da TM está disponível no Apêndice D e na Figura 6 é possível visualizar a Parte I e II que foi desenvolvida pelos estudantes.

Figura 6 — Tarefa Matemática - Parte I e II.

PROFMAT

Tarefa Matemática – Soma dos ângulos internos de um polígono.

Parte I – Soma dos ângulos internos de um triângulo.

Encontrar a soma dos ângulos internos de um triângulo usando recorte.

<u>Recorte</u>

- Faça um desenho de um triângulo qualquer em uma folha de papel. Marque e pinte os três ângulos internos com cores diferentes. Recorte o triângulo.
- Recorte as três pontas do triângulo e organize-as juntando os três ângulos coloridos.
- O que vocês observam? Registrem suas conclusões e responda:

- Qual é o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo? Justifique sua resposta.

Parte II – Soma dos ângulos internos de um polígono.

Com base no que vocês fizeram na parte I, responda às questões a seguir registrando o máximo de informações possíveis.

a) Como poderíamos calcular o valor da soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo? Justifique sua resposta.

b) A partir das respostas anteriores, como você calcularia a soma dos ângulos internos de um pentágono (5 lados) convexo? Explique sua resposta.

c) Como você calcularia a soma dos ângulos internos de um hexágono (6 lados) convexo? Explique sua resposta.

d) Como você calcularia a soma dos ângulos internos de um polígono de 25 lados convexo? Explique sua resposta.

e) É possível observar alguma regra que relacione a quantidade de lados de um polígono convexo e a soma de seus ângulos internos? Explique sua resposta.

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

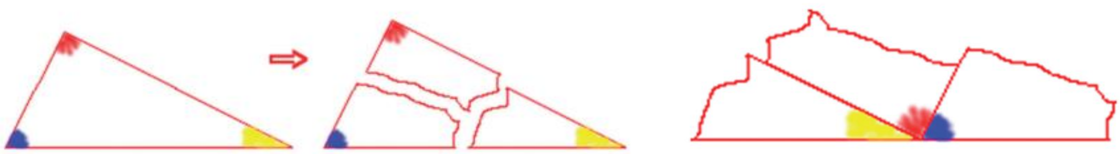
A TM proposta nesta pesquisa também foi elaborada considerando as diretrizes da BNCC (Brasil, 2018). Ela retoma e aprofunda habilidades desenvolvidas no ensino fundamental, como a EF07MA27, que propõe “calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos” (Brasil, 2018, p. 309), e avança para uma abordagem compatível com o ensino médio, conforme a habilidade EM13MAT505, que envolve “a resolução de problemas sobre ladrilhamentos no plano e a generalização de padrões por meio da exploração de composições de polígonos” (Brasil, 2018, p. 543).

Durante o planejamento, a professora-pesquisadora *antecipou* diferentes possibilidades de resolução, erros e dificuldades dos estudantes, e pensou em intervenções que favorecessem a reflexão, sem conduzir diretamente às respostas. As antecipações elencadas incluíram:

a) Estratégias previstas:

- Parte I: Diversas formas de expressar a visualização do ângulo raso após a atividade prática - “ângulo de meia volta”, “ângulo raso”, “ângulo de meia volta, então vale 180º”, “180º” - Figura 7, abaixo:

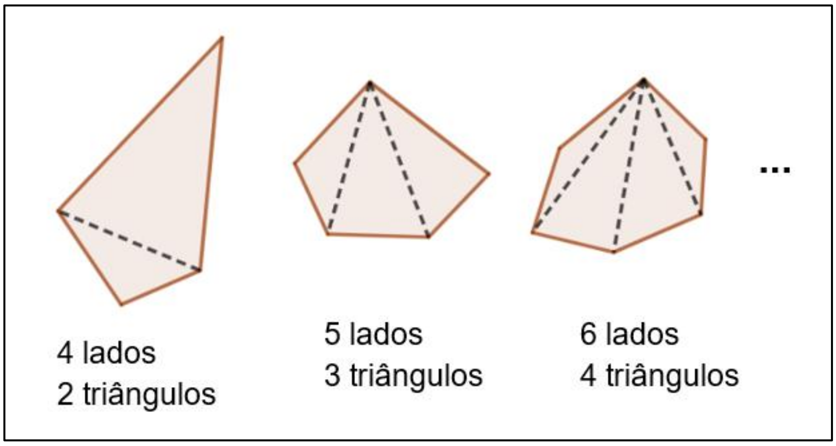
Figura 7 — Resolução prevista pela autora – Soma dos ângulos internos de um triângulo.



Fonte: Adaptado de https://canal.cecierj.edu.br/122016/487b52e9a98a330eec812a84cbb1042a.pdf

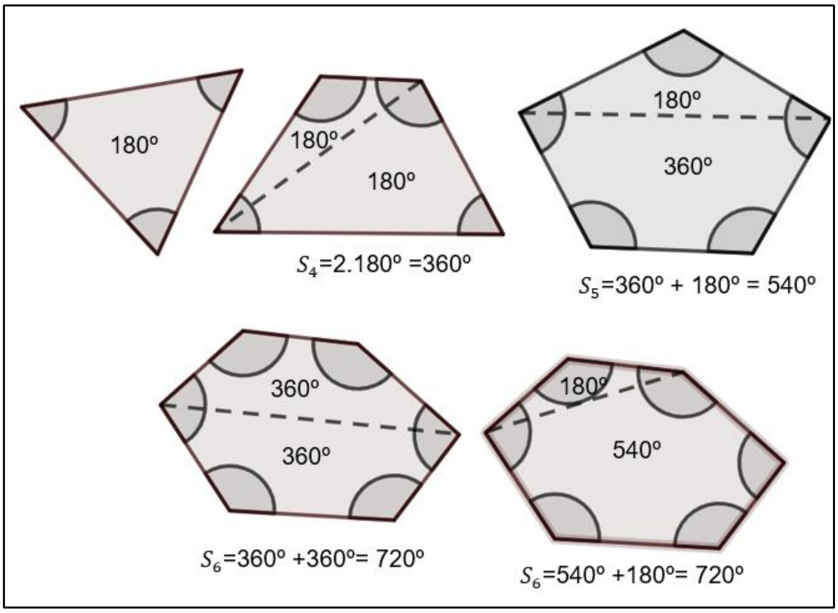
- Parte II: Estratégias de decomposição em triângulos justapostos por meio de diagonais que não se cruzem ou a decomposição mista de polígonos, utilizando quadriláteros, pentágonos e triângulos. Como pode ser verificado nas Figuras (8 e 9), abaixo. E a partir dessas decomposições os estudantes iriam realizando as somas pretendidas e visualizando a regularidade entre o número de lados e o número de triângulos obtidos.

Figura 8 — Resolução prevista pela autora - triângulos justapostos por meio de diagonais que não se cruzem.



Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Figura 9 — Resolução previstas pela autora - Decomposições mista.



Fonte: Elaborado pela autora (2024).

- Parte III: Estratégias experimentais com polígonos regulares disponíveis nos kits, soma dos ângulos internos dos polígonos e cálculos envolvendo divisores de 360°.

b) Possíveis erros, dificuldades e respectivas intervenções:

1. Dúvidas conceituais (polígonos, polígono convexo, polígono não convexo, ângulos internos).

Intervenção: Abordar esses conceitos coletivamente, de forma participativa, durante a apresentação da tarefa.

2. Falta de autonomia na atividade prática (como desenhar o triângulo, seu tamanho e posição, como recortar e juntar os ângulos).

Intervenção: Demonstrar um exemplo inicial com orientação mínima, incentivando que os estudantes façam seus próprios testes com os materiais disponíveis.

3. Dificuldade com a medida de ângulos rasos e completos.

Intervenção: Retomar a definição de ângulos raso e completo com o grupo, incentivando que se lembrem de onde esse conhecimento foi visto.

4. Resistência para desenhar e registrar estratégias.

Intervenção: Encorajar os estudantes a registrarem inclusive as tentativas iniciais e enfatizar a importância do registro para a construção do raciocínio matemático. Pedir que diferentes estudantes façam as representações.

5. Desenhar polígonos não convexos e dificultar a decomposição deles em triângulos justapostos por meio de diagonais que não se cruzem.

Intervenção: Pedir que verifiquem quais ângulos da decomposição feita são de fato ângulos internos do polígono em questão. Sugerir que experimentem com diferentes desenhos de polígonos convexos para facilitar a decomposição (embora a fórmula seja válida para polígonos não convexos).

6. Dificuldade em avançar da Parte I para a Parte II da tarefa.

Intervenção: Relembrar com o grupo o que foi aprendido na Parte I e perguntar como isso pode ajudar na resolução da Parte II.

7. Decompor os polígonos em outros polígonos e não em triângulos justapostos por meio de diagonais que não se cruzem, o que acarretaria dificuldade para se chegar na lei de formação pretendida.

Intervenção: Perguntar se é possível decompor o polígono de alguma outra maneira e o que eles observam. Estimular a observação das decomposições já feitas, sugerindo construir uma tabela que relacione o número de lados com o número de triângulos.

8. Tentar desenhar polígonos com número elevado de lados (ex: 25), sem perceber a regularidade.

Intervenção: Pedir que observem o que aconteceu com os polígonos desenhados anteriormente (quatro, cinco e seis lados), e perguntar se observar alguma regularidade. Incentivar o uso da tabela e a identificação de padrões mais simples primeiro, antes de extrapolar para casos mais complexos.

9. Uso de linguagem natural sem formalização da lei de formação.

Intervenção: Insistir que registrem as resoluções com o máximo de detalhes e o uso de tabela como sugerido no item 9. Incentivar a tradução da observação verbal para expressões algébricas ou generalizações.

10. Formação de "faixas" ao invés de ladrilhamento no plano.

Intervenção: Pedir que os estudantes tentem cobrir uma área específica (ex: capa do caderno), reforçando a ideia de cobertura sem sobreposição ou lacunas.

11. Dificuldade em identificar as propriedades dos polígonos regulares (lados e ângulos iguais).

Intervenção: Reforçar o conceito de polígono regular na leitura da TM e pedir aos estudantes que comparem diferentes exemplos do kit.

12. Não percepção de que a soma dos ângulos nos vértices no ladrilhamento é 360°.

Intervenção: Sugerir a comparação entre exemplos com ladrilhamento possível e impossível, e construir com o grupo a ideia do fechamento angular em torno de um ponto.

13. Dificuldade com o conceito de múltiplos e divisores.

Intervenção: Retomar os conceitos com exemplos simples e sugerir a criação de uma tabela com ângulos internos e sua relação com 360°.

14. Misturar mais de um tipo de polígono para verificar o ladrilhamento no plano.

Intervenção: Reforçar a leitura atenta do enunciado e propor que os estudantes verifiquem as implicações da mistura de polígonos nos encontros dos vértices que deve ser usada no último item da TM.

A implementação da TM foi planejada para uma aula dupla de 90 minutos, e estruturada em quatro fases, com tempos pré-estabelecidos. Essa organização segue o modelo característico de uma aula exploratória típica, conforme descrito por (Stein *et al.*,2008): (1) introdução da TM aos estudantes, (2) realização da TM em grupos, (3) socialização e discussão coletiva e (4) sistematização das aprendizagens.

1) Introdução da tarefa (12 minutos): Breve apresentação da professora-pesquisadora, lançamento da TM e, orientações iniciais, mostrando os materiais disponíveis;

2) Realização da tarefa em grupos (45 minutos): Resolução da TM com registro das estratégias pelos estudantes.

3) Socialização e discussão coletiva (25 minutos): Compartilhamento de estratégias por grupos selecionados, com discussão coletiva;

4) Sistematização das aprendizagens (8 minutos): Fechamento da aula com esclarecimento de conceitos e formalização da lei de formação.

Para a condução da aula, a professora-pesquisadora elaborou um *quadro de referência para a prática de Ensino Exploratório da Matemática* com base em Canavarro, Oliveira e Menezes (2012) (Quadro 1), com os objetivos de gerir a aula e promover a aprendizagem Matemática. Essa etapa de planejamento, vinculada à prática de antecipar (Stein *et al.*, 2008), foi essencial para que a professora pudesse se debruçar sobre a tarefa e, como propõe Canavarro (2011, p. 13), "orquestrar produtivamente discussões matemáticas".

Quadro 1 — Quadro de referência para a prática de Ensino Exploratório

	Promoção da aprendizagem matemática	**Gestão da aula**
FASE 1: Introdução da tarefa **12 min**	*Garantir que os alunos entendam a tarefa:* - Falar sobre as fases bem como o tempo da aula destinado a cada uma; - Esclarecer a interpretação da tarefa: Mostrar os materiais que vão utilizar (tesoura, polígonos, impressão da TM, folhas em branco). Falar sobre o gravador de áudio. - Estabelecer objetivos: O que queremos saber. - Realizar a leitura coletiva da TM;	*Organizar o trabalho dos alunos:* -Deixar a sala organizada em 6 grupos e com os materiais sobre as mesas antes da entrada dos estudantes; -Definir o número de estudantes por grupo; -Entregar a folha com a TM;

FASE 2: Realização da tarefa **45 min**	*Garantir o desenvolvimento da tarefa pelos alunos:* -Levantar questões que levem a reflexão; - Sugerir representações; - Pedir justificativas e que anotem as conclusões; *Manter o desafio cognitivo e autonomia dos alunos:* - Conduzir para a promoção do raciocínio próprio dos alunos; - Não validar as respostas dos alunos (nem respostas, nem expressões faciais) - O professor deve incentivar a discussão entre os alunos, permitindo que compartilhem suas descobertas e estratégias.	*Promover o trabalho de grupos:* - Regular as interações entre alunos; -Providenciar materiais para o grupo; *Organizar a discussão para próxima fase:* - Identificar e selecionar resoluções variadas; - Há erros comuns nas soluções? -Sequenciar as resoluções selecionadas. -Providenciar materiais necessários (fotos das resoluções para projetar, pincéis para escrever no quadro,...);
FASE 3: Socialização e discussão da TM **25 min**	*Promover a qualidade matemática das apresentações dos alunos*: - Pedir explicações claras das resoluções (por quê?) - Justificativas sobre os resultados e as formas de representação utilizadas - Discutir a diferença e eficácia matemática das resoluções apresentadas (tabelas, desenhos, expressões algébricas) *Regular as interações entre os alunos na discussão:* - Incentivar o questionamento para clarificação de ideias apresentadas ou esclarecimento de dúvidas - Incentivar a resposta às questões colocadas;	*Criar ambiente propício à apresentação e discussão:* -Comunicar que o tempo de resolução da TM terminou; -Organização dos lugares/espaço para a discussão -Exigir respeito com os colegas que estão apresentando; *Gerir relações entre os alunos:* -Definir a ordem das apresentações; -Promover e gerir as participações dos alunos na discussão;
FASE 4: Sistematização das aprendizagens **8 min**	*Institucionalizar ideias ou procedimentos relativos às aprendizagens geométricas promovidas pela exploração da TM:* -Identificar representações produtivas para obter generalizações (decomposição dos polígonos, tabelas, desenhos); *Estabelecer conexões com aprendizagens anteriores:* - Evidenciar ligações com conceitos matemáticos e procedimentos anteriormente trabalhados (Polígonos regulares, ângulos, lei de formação que relaciona a soma dos ângulos internos de um polígono com número de lados, que normalmente é vista por eles, mas não compreendida.) -Formalização da lei de formação desejada.	*Criar ambiente adequado à sistematização:* - Chamar atenção para o momento de sistematização coletiva; -Promover o reconhecimento da importância de apurar conhecimento matemático a partir da TM realizada; *Garantir o registo escrito das ideias resultantes da sistematização:* -Registro pela professora no quadro se assim for necessário.

Fonte: Produzido pela autora (2024).
Observação: Quadro elaborado segundo a referência de Canavarro, Oliveira e Menezes (2012).

4 RELATO DA PRÁTICA EM SALA DE AULA

Esta seção tem como objetivo relatar o desenvolvimento da TM *"Soma dos ângulos internos de um polígono"* em duas turmas do 1º ano do Ensino Médio, utilizando a abordagem didática do Ensino Exploratório da Matemática. A tarefa foi planejada para investigar como os estudantes podem desenvolver uma compreensão significativa dos conceitos geométricos, explorando e analisando regularidades entre os lados e ângulos internos dos polígonos.

A prática ocorreu em uma aula dupla de 90 minutos, envolvendo interações diretas com os conceitos de Geometria, promovendo discussões, descobertas e resolução colaborativa de problemas. Nesta seção, serão detalhados a organização da aula (dividida em quatro fases), a dinâmica de implementação da TM e as principais observações feitas durante a interação dos estudantes com a proposta.

Além disso, o relato abordará não apenas as ações dos estudantes, mas também a atuação da professora-pesquisadora durante o processo, os principais momentos, as intervenções realizadas e os desafios enfrentados ao longo do desenvolvimento da TM em sala de aula.

A TM foi aplicada no dia 02/12/2024, em uma escola de ensino médio do entorno do DF, no turno matutino. Realizaram a tarefa duas turmas, totalizando 48 estudantes — 22 homens e 26 mulheres, com idades entre 15 e 17 anos. A aula foi desenvolvida em quatro fases, que serão descritas a seguir.

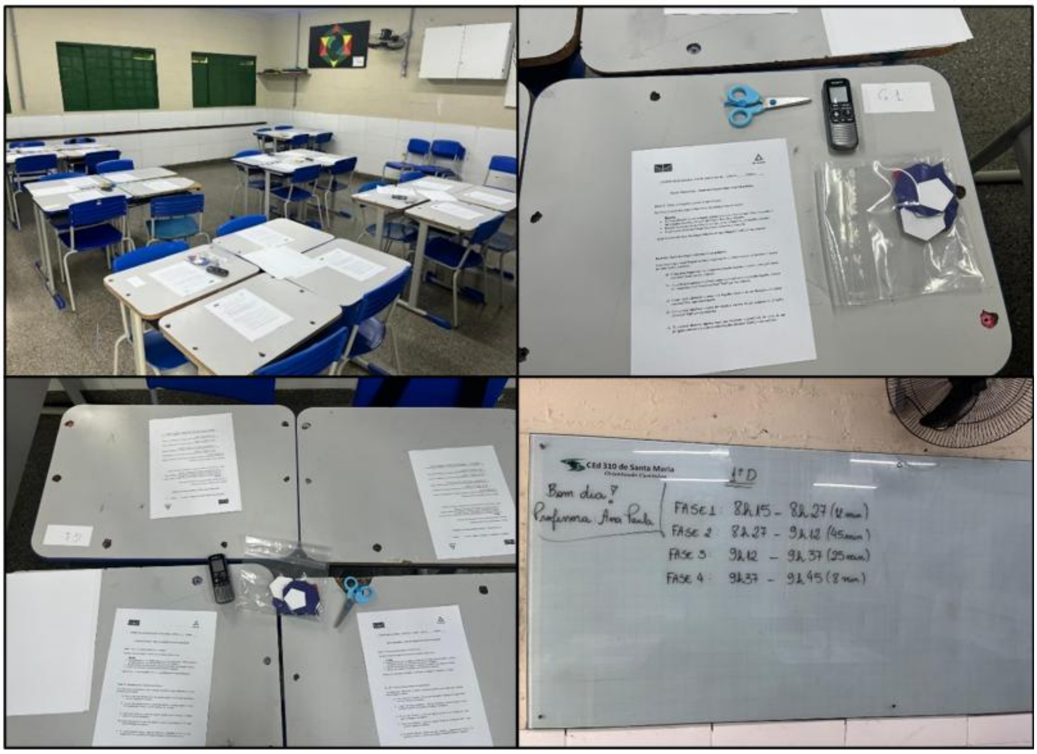
Durante todo o desenvolvimento da TM, o professor regente da turma esteve presente na sala, apoiando a professora-pesquisadora e os estudantes. Apesar de sua participação, a falta de familiaridade com a teoria do Ensino Exploratório em alguns momentos específicos dificultou a atuação da pesquisadora, o que será detalhado mais adiante no relato.

- **Fase 1: Apresentação da tarefa.**

Como o gerenciamento de tempo é fundamental em uma prática de Ensino Exploratório, a professora-pesquisadora chegou antes do horário e organizou a sala, distribuindo as carteiras em seis grupos de quatro cadeiras e dispondo os materiais necessários: impressões do comando da TM, folhas em branco, tesoura, um kit com polígonos regulares coloridos, um gravador e etiquetas de identificação para os grupos. Durante a organização, um dos grupos ficou sem gravador devido à falha de um aparelho. No quadro, a professora escreveu os horários das quatro fases da aula, com o objetivo de explicar a estrutura da aula e orientá-los quanto à gestão do tempo.

Quando os estudantes chegaram, foram orientados a se sentarem nos grupos previamente formados. Nas duas turmas, os seis grupos ficaram completos com quatro integrantes, e foram instruídos a se familiarizarem com os materiais disponíveis. A organização prévia da sala de aula permitiu que encontrassem um ambiente propício para a realização da TM e despertou a curiosidade inicial deles. Tal organização pode ser verificada na Figura 10:

Figura 10 — Organização da sala de aula.



Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Após acomodar todos os estudantes, a professora-pesquisadora se apresentou e explicou o objetivo da aula. Em seguida, foi até o quadro e detalhou rapidamente as quatro fases da atividade, incluindo os horários de cada uma, para que os estudantes soubessem o que esperar e não houvesse necessidade de interrupções durante o trabalho. Abaixo temos os horários que foram registrados no quadro para cada uma das turmas.

Fase 1: 8h15 – 8h27 (1°D) / 10h00 – 10h12 (1°C)

Fase 2: 8h27 – 9h12 (1°D) / 10h12 – 10h57 (1°C)

Fase 3: 9h12 – 9h37 (1°D) / 10h57 – 11h22 (1°C)

Fase 4: 9h37 – 9h45 (1°D) e 11h22 – 11h30 (1°C)

Passaram-se cerca de 15 minutos entre a acolhida dos estudantes, a apresentação da professora e a explicação das fases da aula, o que comprometeu o cronograma inicial. Em seguida, a professora-pesquisadora fez a leitura coletiva da Parte I da TM, na qual uma das atividades era desenhar um triângulo qualquer na folha branca. Ela destacou a palavra “qualquer” e questionou os estudantes sobre o seu significado. Após um breve esclarecimento coletivo, orientou-os a realizar esta etapa antes de retomar a leitura da Parte II. Com aproximadamente 5 minutos de atraso, os estudantes iniciaram o trabalho em grupo.

- **Fase 2: Realização da tarefa em grupos**

Durante a fase de trabalho autônomo, os estudantes puderam explorar a tarefa de forma independente. Eles leram novamente o comando entre si, se organizaram com os materiais e encontraram certa dificuldade para resolvê-la sem as validações e dicas excessivas às quais estão acostumados. Ao circular pela sala, acompanhando as discussões dos grupos, a professora-pesquisadora foi solicitada várias vezes, assim como o professor regente da turma. Foi necessário um momento adicional para explicar que uma folha seria destinada aos registros e a outra ao desenho do triângulo, que deveria ser recortado e ter as pontas com os ângulos destacados e coloridos. Na primeira turma, os estudantes levaram cerca de 15 minutos para concluir a Parte I da tarefa, enquanto na segunda turma, esse tempo foi reduzido para aproximadamente 10 minutos.

Os estudantes se envolveram com a primeira parte da tarefa e, aos poucos, foram atingindo o objetivo de visualizar, por meio da atividade prática, que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Em alguns grupos, no entanto, ainda surgiram conclusões alternativas, como a ideia de que cada um dos ângulos correspondia a 60°. Esse aspecto foi abordado durante a fase final da aula. Conforme pode ser verificado no recorte das transcrições de áudio gravadas, nos trechos 1 e 2, respectivamente, e nas Figuras 11 e 12 a seguir, que mostram os estudantes interagindo com a Parte I da tarefa. Para preservar a identidade dos participantes, os nomes dos estudantes foram substituídos por letras (A, B, C, etc.) nas transcrições.

Trecho 1

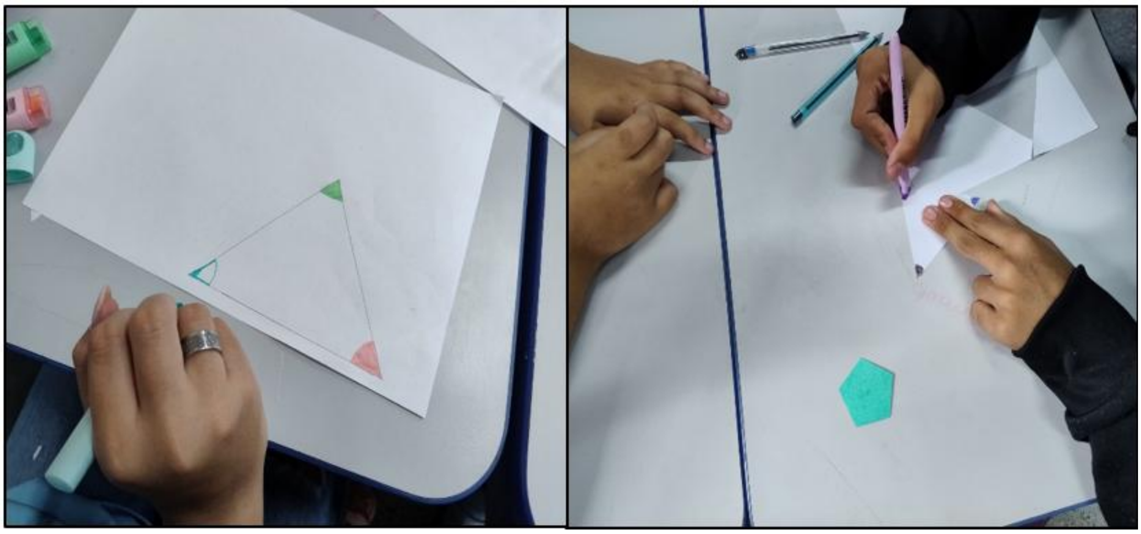
Estudante A: *Acho que é assim ó! Olha, olha, acho que é assim.*
Estudante B: *Né, assim não!*
Estudante C*: É um do lado do outro.*
Estudante B: *É, o Estudante C estava fazendo certo.*

Estudante C: *Uau! Metade de um círculo! Urrruullll!*
Estudante B: *Ai gente! É a metade de um círculo, cadê a folha de anotação?*

Trecho 2

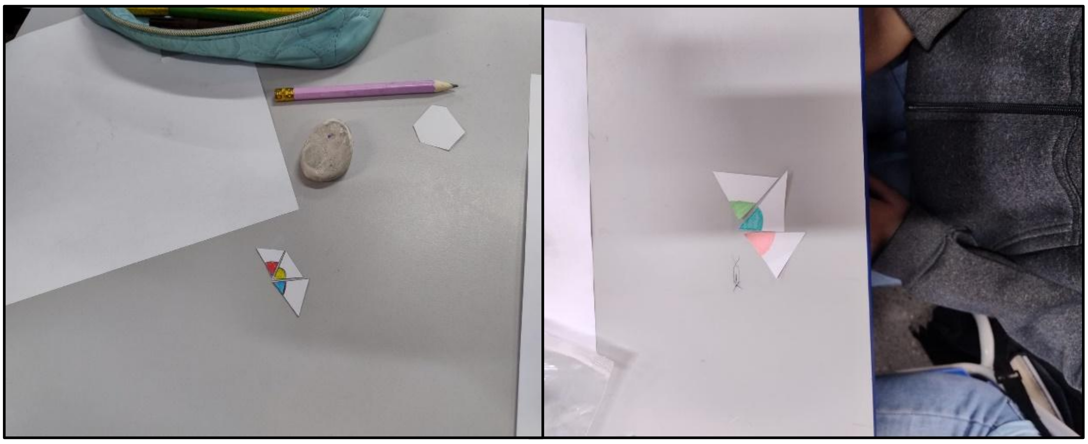
Estudante E*: Quanto é 180 dividido por três?*
Estudante F*: Quê?*
Estudante E: *180 dividido por três?*
Estudante G*: 45, não é?*
Estudante F*: Só um segundinho que vou descobrir agora. Fazer a continha aqui, como é que é?*
Estudante E: *Na calculadora?! (risos)*
Estudante F: *Sessenta!*
Todos: *Urruuullll!*
Estudante F: *Após recortar as três pontas... (sic). Após recortar os três ângulos de um triângulo e juntar... (sic).*
Estudante H: *O que é isso?!*
Estudante E: *Após recortar os três ângulos formados por um triângulo, que é uma figura de três lados, descobrimos que ao juntar... não sei!*
Estudante H: *Calma aí! Após juntar os ângulos de um triângulo que vale 60°... (sic).*

Figura 11 — Estudantes interagindo com a Parte I da TM.



Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Figura 12 — Estudantes interagindo com a Parte I da TM



Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Após perceber que a maioria dos grupos havia concluído a Parte I da tarefa, a professora-pesquisadora retoma a leitura da Parte II, na qual o termo “polígono convexo” aparece. Ela novamente questiona os estudantes sobre esse novo termo, desenha alguns polígonos convexos e não convexos no quadro e pede que os estudantes identifiquem as semelhanças e diferenças entre eles. O objetivo era garantir que todos compreendessem o significado do termo, evitando dificuldades durante a resolução da TM. Durante a explicação coletiva, os estudantes começaram a responder usando termos próprios, como “deformado”, “dentro da forma”, “deficiente”, entre outros, mas demonstraram saber diferenciar polígonos convexos de não convexos.

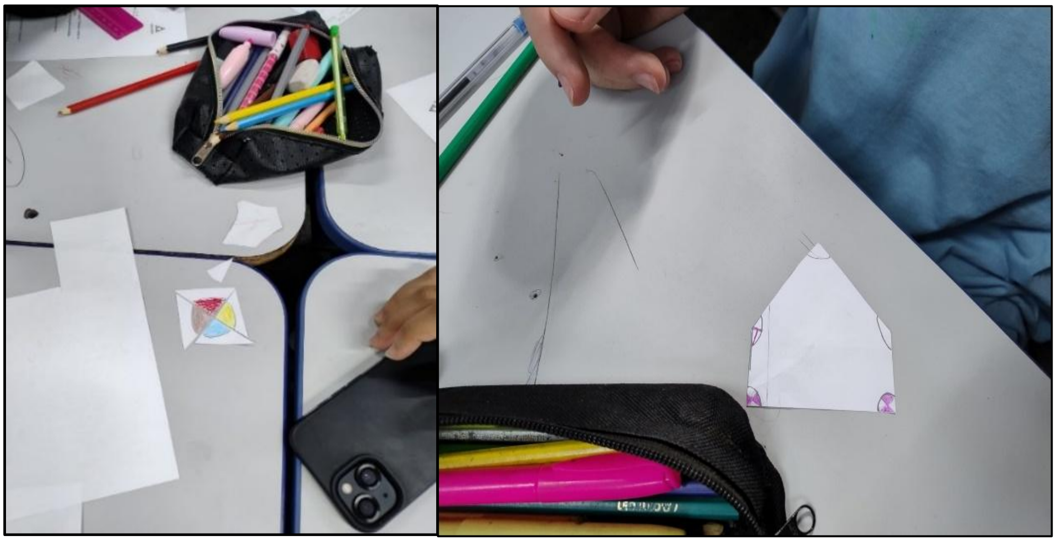
A Parte II da TM propôs que, com base no que foi realizado anteriormente, mas agora explorando figuras geométricas com maior número de lados, os estudantes fossem capazes de generalizar a fórmula da soma dos ângulos internos para qualquer polígono convexo ou não convexo. A seguir, são descritas algumas das estratégias adotadas por diferentes grupos para resolver essa parte da tarefa.

Durante a resolução da Parte II da tarefa, surgiram duas estratégias espontâneas que não estavam previstas no planejamento inicial. A primeira surgiu quando alguns grupos, seguindo o comando da tarefa, recorreram ao desenho e recorte de um quadrilátero, tentando visualizar a soma dos ângulos internos da mesma forma que fizeram na Parte I. Ao fazerem isso, perceberam que, ao juntar os ângulos internos de um quadrilátero, formavam um ângulo completo, ou seja, uma volta de 360°. Essa abordagem também gerou dificuldades quando tentaram aplicar a mesma ideia ao pentágono, pois a junção dos ângulos resultava em um valor maior que 360°, impossibilitando o agrupamento dos ângulos em torno de um único vértice. A segunda estratégia envolveu o uso dos ângulos de 90° do quadrado para calcular a soma dos ângulos internos de um quadrilátero, permitindo que os estudantes chegassem rapidamente ao resultado de 360º. Nos dois casos, a professora-pesquisadora foi solicitada para ajudá-los a progredir na resolução da tarefa, buscando outras abordagens. Esses momentos foram registrados em interações, conforme pode ser verificado nos recortes das transcrições de áudio gravadas na sala de aula, nos trechos 3 e 4, respectivamente, e na Figura 13 a seguir:

Trecho 3:

Estudante N*: É desse jeito que é pra botar? Eu não sei.*
Professora: *Com quantos lados esse que vocês estão fazendo?*
Estudante O: *Esse daqui é do pentágono.*
Professora: *Você tá desenhando, aí?*
Professora: *Com quatro lados vocês fizeram né? Como é que foi com quatro lados? Como vocês fizeram para descobrir a soma?*
Estudante N: *A gente cortou as pontas e juntou.*
Professora: *Ah, vocês recortaram. E deu quanto?*
Juntos: *360.*
Professora: *Será que eu consigo usar essa mesma ideia para um polígono de cinco lados? Por quê?*
Estudante N: *A gente tentou, mas não deu certo... não encaixa*!

Figura 13 — Estudantes explorando polígonos usando o recorte dos ângulos.



Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Trecho 4:

Estudante D: *Mas é que tipo assim, no quadrado o ângulo é reto. Mas em outro que é conve... não sei o que, que é todo torto.*

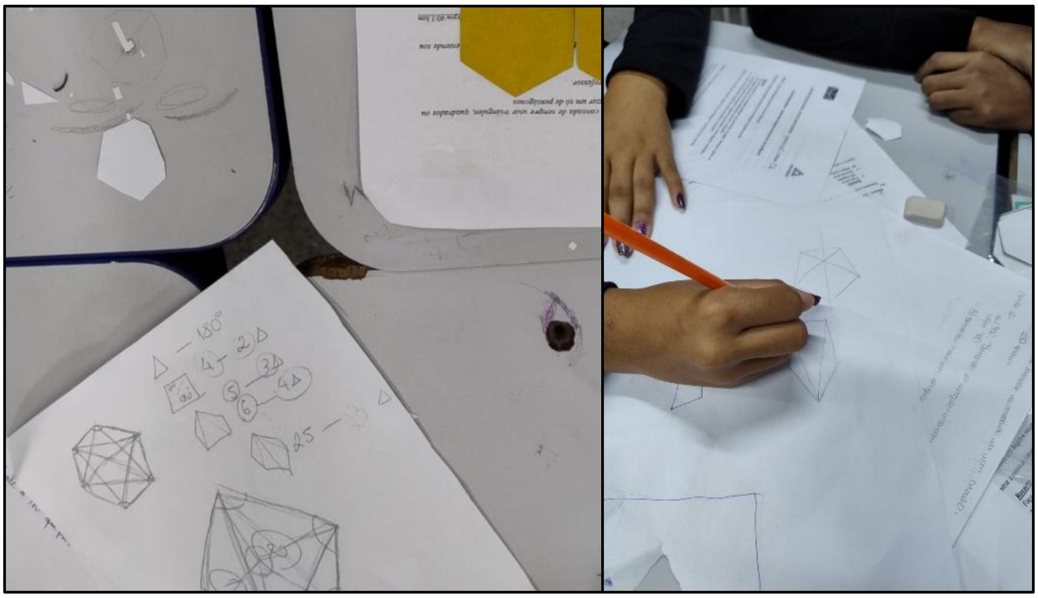
Professora*: No quadrilátero que eu desenhei lá no quadro, os ângulos são retos? As formas geométricas com quatro lados são todas quadrados? Pensem aí. É possível dividir essa figura em outras duas?*

Em outros grupos, seguiu-se as estratégias previstas pela professora-pesquisadora, com a decomposição dos polígonos em triângulos ou uma abordagem mista, decompondo o polígono em figuras menores, como quadriláteros e triângulos, para calcular a soma dos ângulos internos. Isso pode ser verificado no recorte da transcrição de áudio gravado na sala de aula, trecho 5, e na Figura 14, que mostra como os grupos estavam organizando seus materiais e realizando a tarefa:

Trecho 5

Estudante I: *Eu fiz um triângulo, eu fiz um triângulo. Na verdade, dois triângulos.*
Estudante J: *É, então, é tipo isso. Só que eu tava tentando fazer e não consegui!*
Estudante J: *É alguma coisa assim. Oh! Se a gente usar essa base aqui ó. Aqui vai ter um ângulo, aí aqui vai ter outro, aqui vai ter outro, e aqui vai ter outro.*
Estudante I: *Parece um campo de futebol!*
Estudante J: *Então tudo aqui vai dar 360º. Vocês concordam ou não?*
Estudante I: *Por que 360º?*
Estudante J: *Por que um quadrilátero a gente não chegou à conclusão que são dois triângulos?*
Estudante I: *Aham.*
Estudante J: *E um triângulo não tem 180º?*
Estudante I: *Ah, verdade! Tá bom, tá bom.*

Figura 14 — Estratégias de decomposição dos polígonos



Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Em alguns momentos, ao circular pelos grupos, o professor regente validava estratégias ou sugeria diretamente caminhos para os estudantes durante a resolução da TM. Essa postura, embora natural em abordagens tradicionais, foi um desafio adicional para a professora-pesquisadora administrar durante a prática. Como pode ser verificado pelos recortes das transcrições de áudio gravadas na sala de aula, trecho 6, a seguir:

Trecho 6

Estudante C: *Professor, vem cá! Vê se eu tô muito rápida.*
Estudante C: *Aí ela falou que tipo assim, a gente foi dividindo, aí deu dois, três e por aí vai. Aí eu cheguei no 23. Aí eu poderia fazer 23 vezes 180?*
Professor: *Pode!*
Estudante: *Tá certo?*
Professor: *Tá! São 23 triângulos, né?!*

Durante a fase de trabalho em grupos, enquanto circulava entre os grupos, a professora-pesquisadora percebeu que, em uma das turmas, um grupo estava utilizando o celular para resolver a TM. Esse grupo não foi selecionado para compartilhar suas soluções, pois não conseguiam explicar o processo que haviam seguido para chegar às respostas. A professora optou por não intervir diretamente, embora os estudantes tivessem sido alertados no início da aula sobre a proibição do uso de celulares.

À medida que se aproximavam dos dois últimos itens da TM, quase todos os grupos encontraram dificuldades. Era o momento em que a tarefa exigia que refletissem sobre os itens anteriores e como relacionar a soma dos ângulos internos a polígonos com maior número de lados. Alguns estudantes buscaram um polígono de 25 lados no kit, outros acreditavam que precisavam desenhá-lo, enquanto alguns perceberam que havia uma "conta matemática" a ser feita. A professora-pesquisadora interveio sugerindo que escrevessem o que haviam observado em polígonos com menos lados, incentivando-os a perceber as regularidades à medida que aumentavam o número de lados. Ela sugeriu a construção de uma tabela para visualizar essas regularidades. Muitos estudantes conseguiram perceber a relação, mas não conseguiram expressá-la matematicamente.

Após 45 minutos, a professora-pesquisadora avisou aos estudantes que a fase de trabalho em grupo estava terminando. Após alguns protestos, ela decidiu estender o tempo em 5 minutos, já que era a primeira vez que a turma e ela realizavam uma aula seguindo essa abordagem. Durante esse tempo adicional, a professora selecionou as resoluções e definiu a ordem em que seriam apresentadas na discussão coletiva. Embora tivesse observado boas soluções, não anotou a qual grupo pertenciam, o que exigiu sua atenção nos últimos minutos.

- **Fase 3: Socialização e discussão coletiva**

Na fase de socialização, como a sala não dispunha de projetor ou televisor, os estudantes foram chamados à frente para usar o quadro como recurso, desenhando e escrevendo de forma simplificada quando necessário. Não houve objeção dos estudantes em se deslocarem para a frente da sala; pelo contrário, a professora-pesquisadora precisou contê-los para não perder o controle da seleção das resoluções feita durante a fase de monitoração.

A professora-pesquisadora optou por não selecionar um único grupo para resolver todos os itens da TM de uma vez. Em vez disso, escolheu, conforme cada item, as soluções mais pertinentes ao que se pretendia que os estudantes aprendessem com cada um deles. Essa estratégia também tornou a atividade mais dinâmica, considerando que, já próximos do fim da aula, os estudantes estavam mais cansados e agitados.

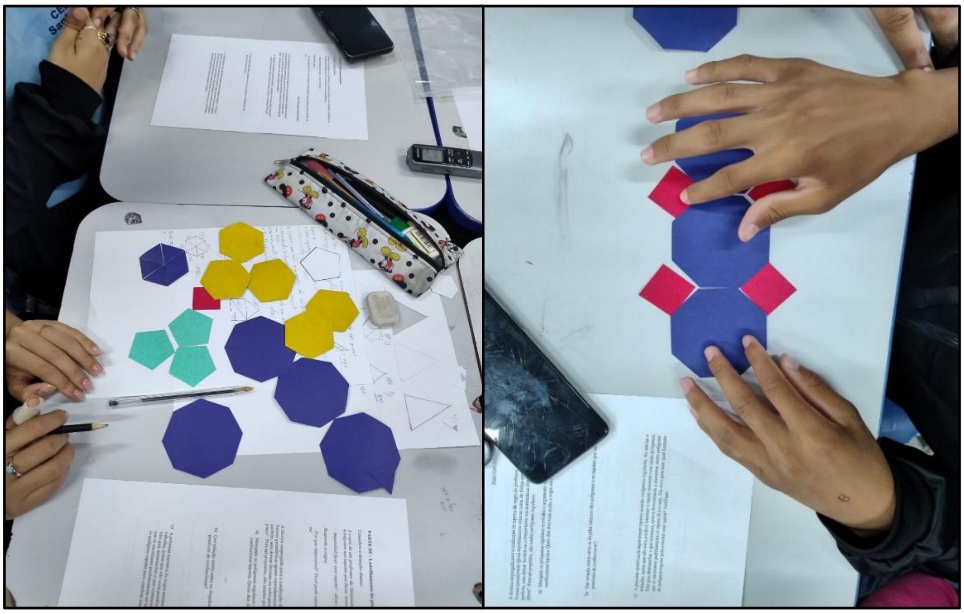
Foi escolhido um erro comum de interpretação para ser discutido, pois era relevante para clarificar conceitos e gerar uma reflexão sobre os conceitos geométricos envolvidos. Além disso, uma das resoluções previstas, que envolvia a decomposição dos polígonos, foi apresentada, assim como uma estratégia não prevista, que surgiu espontaneamente durante o trabalho dos estudantes. Essas escolhas permitiram à professora orientar a turma, promovendo uma reflexão sobre as diferentes abordagens para resolver a tarefa. As apresentações seguiram a ordem dos itens, começando pelas mais simples, utilizando recortes ou desenhos, até as que exigiam maior abstração e uma linguagem mais formal.

- **Fase 4: Sistematização das aprendizagens**

No estudo em questão, a autora começou essa fase junto com a anterior na medida em que as soluções iam sendo apresentadas. Ao final, a professora-pesquisadora mostrou como a relação que eles apresentaram, da soma dos ângulos internos de um polígono, normalmente aparece nos livros didáticos bem como usá-la nos itens propostos na tarefa em questão, fazendo a prova dos resultados encontrados.

Como o tempo não permitiu, a professora-pesquisadora não propôs a extensão da tarefa, que consistiria em usar as aprendizagens geométricas desenvolvidas para explorar problemas de ladrilhamento no plano. No entanto, alguns grupos mais rápidos tiveram a oportunidade de explorar livremente a Parte III, embora a resolução dessa parte não tenha sido retomada no final da aula. A seguir, na Figura 15, pode ser observada uma imagem que ilustra esse momento.

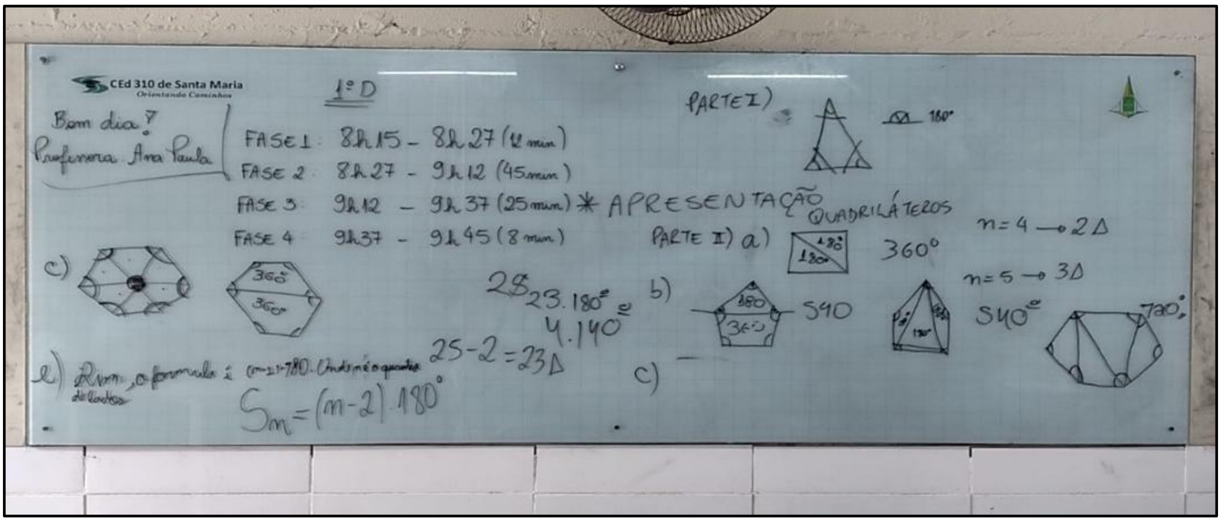
Figura 15 — Livre exploração da Parte III da TM.



Fonte: Dados da pesquisa (2024).

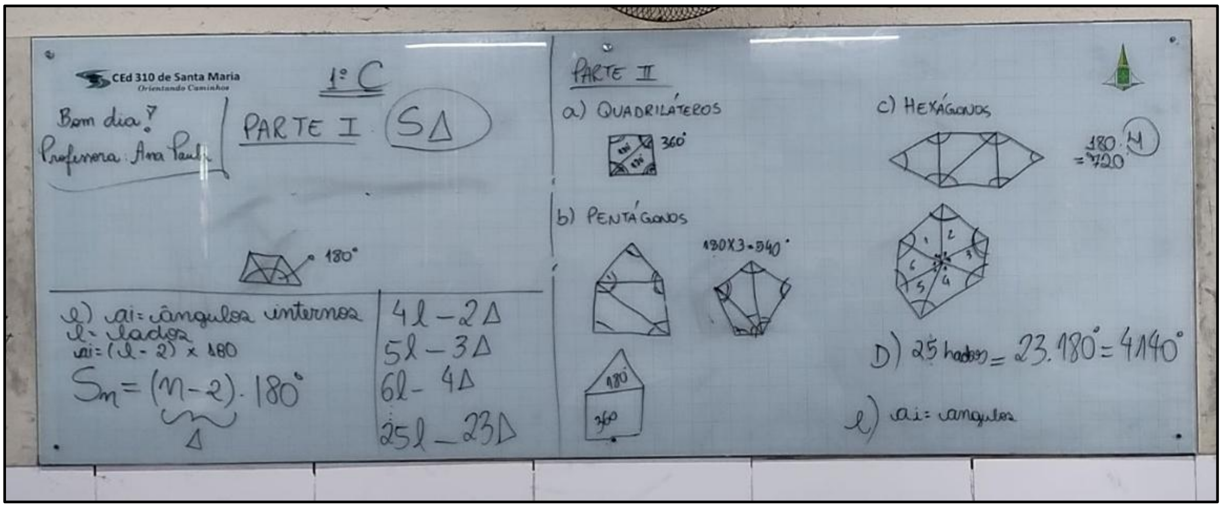
Embora as fases iniciais da aula tenham ultrapassado ligeiramente o tempo planejado, as duas últimas fases foram realizadas dentro do cronograma de 90 minutos. Ao final da aula, como gesto de agradecimento, a professora-pesquisadora entregou um chocolate a cada estudante. Durante a organização e guarda do material, percebeu-se a falta de um grampeador para juntar os registros de cada grupo, o que dificultou a organização posterior das produções. A seguir, apresentam-se as fotos do quadro, nas duas turmas, após as fases finais do estudo, com alguns registros feitos pelos estudantes, nas Figura 16 e 17.

Figura 16 — Quadro da turma após registros na discussão coletiva.



Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Figura 17 — Quadro da turma após registros na discussão coletiva.



Fonte: Dados da pesquisa (2024).

5 ANÁLISE DOS REGISTROS

5.1 Panorama Inicial dos Estudantes

Como mencionado na seção de metodologia, foram elaborados pela professora-pesquisadora dois instrumentos prévios à prática exploratória: uma avaliação diagnóstica e um questionário inicial. Ambos com o objetivo de verificar como os estudantes se encontravam diante da Geometria antes da aula de caráter exploratório, buscando informações sobre os seus conhecimentos geométricos básicos, em específico com o conteúdo de polígonos, bem como para compreender a sua relação recente com essa área da Matemática.

5.1.1 Avaliação Diagnóstica

A avaliação diagnóstica foi aplicada pelo professor regente no dia 29/11/2024 e realizada individualmente pelos estudantes das duas turmas. As informações obtidas por esse instrumento não tinham caráter classificatório, mas serviriam como subsídio para a preparação da professora-pesquisadora na condução da aula segundo a abordagem exploratória, oferecendo uma visão dos conhecimentos prévios dos estudantes sobre o conteúdo de polígonos. Em consonância com Rabelo (2013), trata-se de uma ação que possibilita a "reorganização da prática pedagógica" (Rabelo, 2013, p. 224).

A avaliação foi composta por seis questões simples, elaboradas com o intuito de verificar se os estudantes sabiam identificar polígonos e reconhecer suas propriedades básicas, como vértices, ângulos e classificação de acordo com o número de lados. As habilidades contempladas são referentes ao 5º e 6º anos do ensino fundamental. Conforme o documento da BNCC (Brasil, 2018), destacam-se as seguintes habilidades:

- **EF05MA17** – Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais. (Brasil, 2018, p. 297).
- **EF06MA18** – Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros (Brasil, 2018, p. 305).

Ao analisar os registros produzidos pelas turmas na avaliação diagnóstica, a professora-pesquisadora percebeu indícios de que alguns estudantes compartilharam informações ou recorreram a meios externos. Tratava-se de questões abertas, nas quais diferentes estudantes apresentaram respostas idênticas. Em razão disso, optou-se por não incluir esses registros na análise, restando 37 avaliações válidas.

A análise da avaliação diagnóstica será realizada de forma conjunta para as duas turmas e individual para cada uma das questões. Para tanto, foram consideradas quatro categorias definidas a partir da observação dos registros: correta, parcialmente correta, incorreta e em branco. Em cada questão, são descritos os critérios adotados para a classificação nas categorias, conforme as habilidades avaliadas.

5.1.1.1 Análise da Questão 1

Representação de polígonos a partir do seu número de lados. Conforme a Figura 18.

Figura 18 — Questão 1 para a análise da avaliação diagnóstica.

1) Desenhe polígonos com:

POLÍGONOS	
3 lados	
4 lados	
5 lados	
6 lados	

Fonte: Avaliação diagnóstica (2024).

Classificação das respostas conforme os critérios estabelecidos para esta questão:

- **C1 – Correta:** desenhou os polígonos solicitados com o número correto de lados.
- **C2 – Parcialmente correta:** errou ou omitiu o desenho de algum polígono.
- **C3 – Incorreta:** erro evidente no número de lados incompatível com o desenho.

- **C4 – Em branco:** não respondeu ou a resposta não apresenta informação útil para análise (por exemplo, “não sei”)

A maioria dos estudantes demonstrou familiaridade com a representação de polígonos de acordo com o número de lados, não encontrando dificuldades em resolver a questão 1. Observa-se, entretanto, uma tendência à representação de quadriláteros como quadrados ou retângulos e de triângulos como equiláteros ou isósceles. Foram consideradas *corretas* todas as representações que estavam de acordo com a quantidade de lados associada, mesmo que com pequenas imperfeições de traços.

Apenas duas resoluções foram classificadas como *parcialmente correta*, por deixaram de representar todos os polígonos solicitados. Nenhuma resolução foi classificada como *incorreta* ou em *branco*.

5.1.1.2 <u>Análise da Questão 2</u>

Nomear os grupos de polígonos representados na questão anterior, conforme a Figura 19.

Figura 19 — Questão 2 para a análise da avaliação diagnóstica.

2) Nomeie os grupos de polígonos que você desenhou acima.

Fonte: Avaliação diagnóstica (2024).

Classificação das respostas conforme os critérios estabelecidos para esta questão:

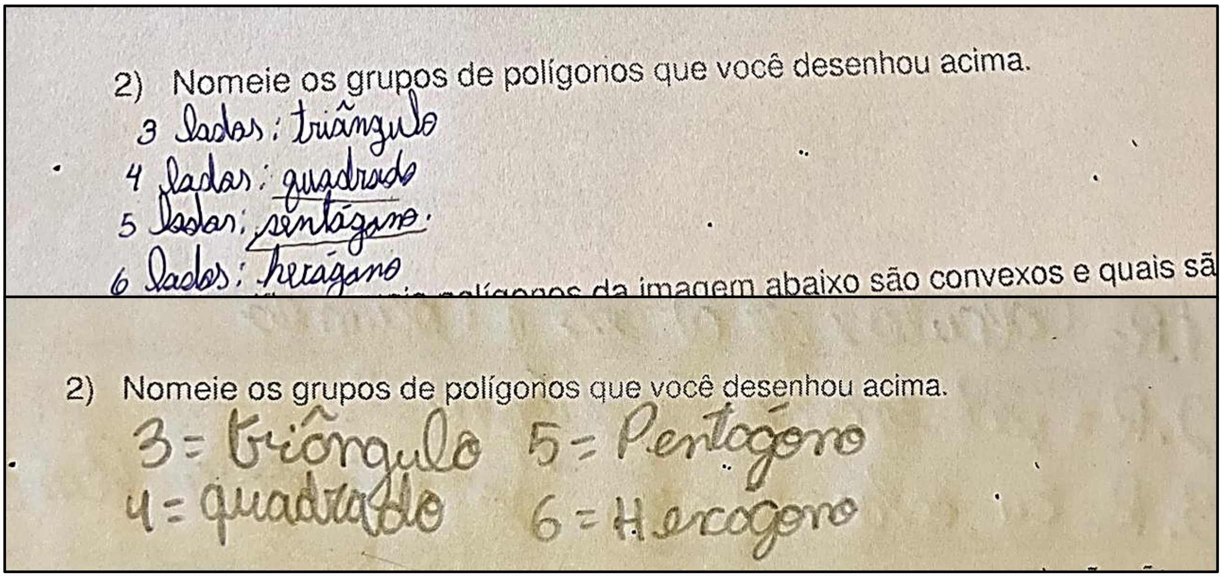
- **C1 – Correta:** nomeou adequadamente os polígonos de acordo com o número de lados.
- **C2 – Parcialmente correta:** errou ou omitiu o nome de algum grupo de polígonos.
- **C3 – Incorreta:** nome incompatível com o grupo de polígonos considerado.
- **C4 – Em branco:** não respondeu ou a resposta não apresenta informação útil para análise (por exemplo, “não sei”).

Nesta questão, que solicitava a classificação dos grupos de polígonos da questão 1 de acordo com o número de lados, os estudantes mostraram mais confusão conceitual. No entanto, não foram registradas respostas consideradas *incorretas,* e apenas cinco estudantes a deixaram *em branco*.

Pouco mais da metade das resoluções foram classificadas como *parcialmente corretas*, por apresentarem erros ou omissão de alguma nomenclatura. O que predominou foram equívocos na classificação dos quadriláteros, geralmente nomeados como “quadrado”. Dezesseis registros apresentam essa confusão conceitual, o que se articula com os dados da questão 1, em que a maior parte das representações dos quadriláteros foi feita por meio de desenhos de quadrados.

Em alguns desses registros, observa-se representações que evidenciam dificuldade na escrita e na estrutura lógica da informação, como usar uma igualdade para relacionar o numeral e o nome do polígono (por exemplo, “3 = triângulo”). Tais situações podem ser verificadas na Figura 20.

Figura 20 — Resolução questão 2 – Confusão conceitual.



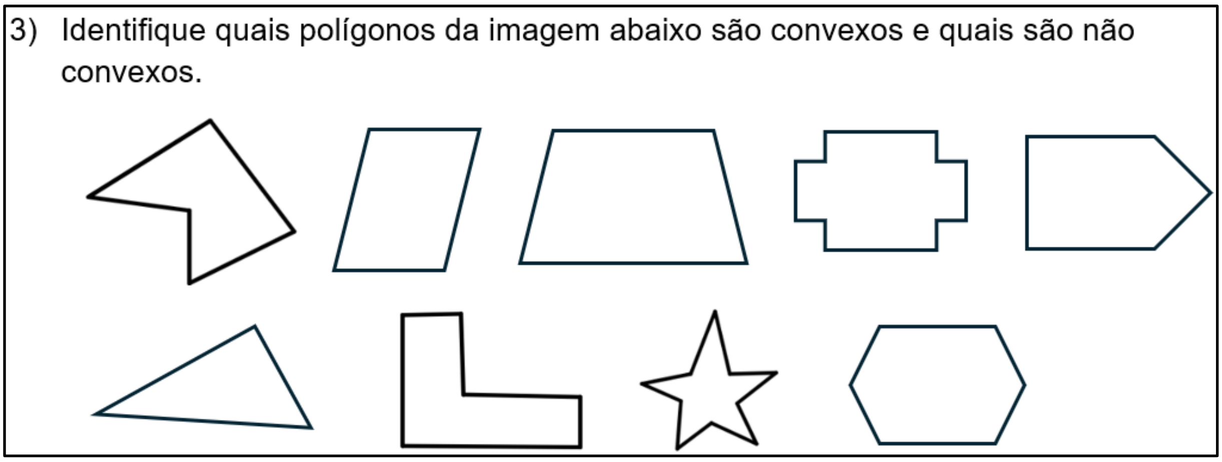
Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Essas observações, reforçam que os estudantes não percebem a classe de quadriláteros como uma classe ampla, e sim limitada a forma mais comum que conhecem, o quadrado.

5.1.1.3 Análise da Questão 3

A questão solicitava a identificação de polígonos convexos e não convexos entre as figuras representadas. Conforme a Figura 21.

Figura 21 — Questão 3 para a análise da avaliação diagnóstica.



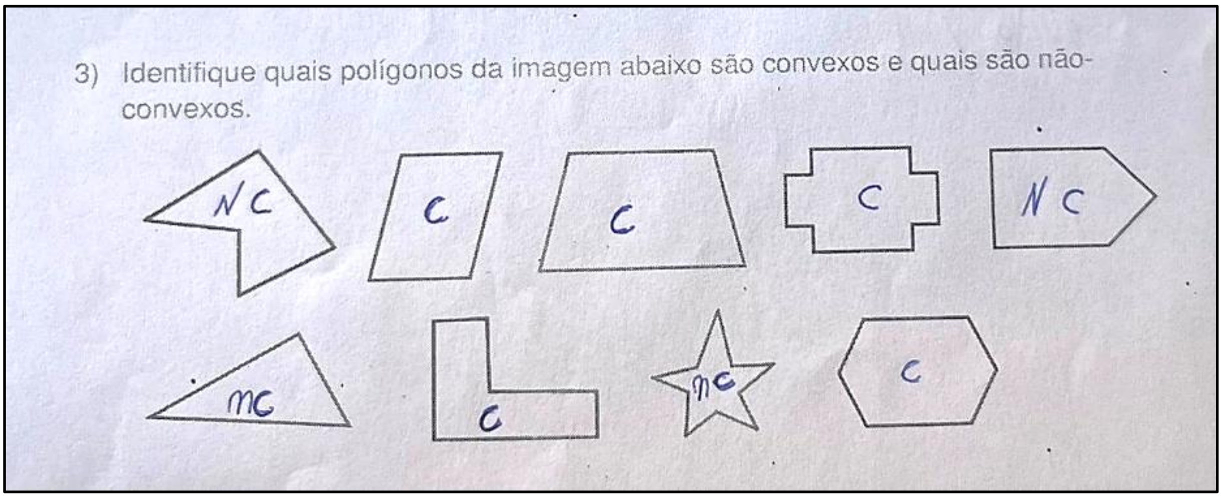
Fonte: Avaliação diagnóstica (2024).

Classificação das respostas conforme os critérios estabelecidos para esta questão:

- **C1 – Correta:** classificou corretamente todos os polígonos.
- **C2 – Parcialmente correta:** acertou parte das classificações ou omitiu alguma delas.
- **C3 – Incorreta:** classificações incorretas ou troca total dos conceitos.
- **C4 – Em branco:** não respondeu ou a resposta não apresenta informação útil para análise (por exemplo, “não sei”).

Em sua maioria, os estudantes realizaram soluções que foram consideradas *corretas* ou *parcialmente corretas*. As resoluções consideradas *parcialmente corretas*, apresentaram confusão na classificação de um ou mais polígonos. Na maior parte dos casos, onze registros, os estudantes classificaram o dodecágono não convexo da imagem como convexo, e em outras sete resoluções o pentágono convexo como não convexo. Tais equívocos indicam dificuldade em classificar polígonos menos familiares, possivelmente por não terem consolidado o conceito de polígonos convexos. Um exemplo desta confusão conceitual pode ser verificado na Figura 22.

Figura 22 — Resolução parcialmente correta questão 3.



Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Ainda na questão, foram observadas: duas resoluções *incorretas*, em que os estudantes trocaram os conceitos de convexo e não convexo, e cinco questões deixadas sem registro, *em branco*.

5.1.1.4 Análise da Questão 4

A questão 4 solicitava que fossem indicados os ângulos internos dos polígonos representados na questão 1. Conforme a Figura 23.

Figura 23 — Questão 4 para a análise da avaliação diagnóstica.

4) Nos polígonos desenhados na questão 1, identifique os seus ângulos internos.

Fonte: Avaliação diagnóstica (2024).

Classificação das respostas conforme os critérios estabelecidos para esta questão:

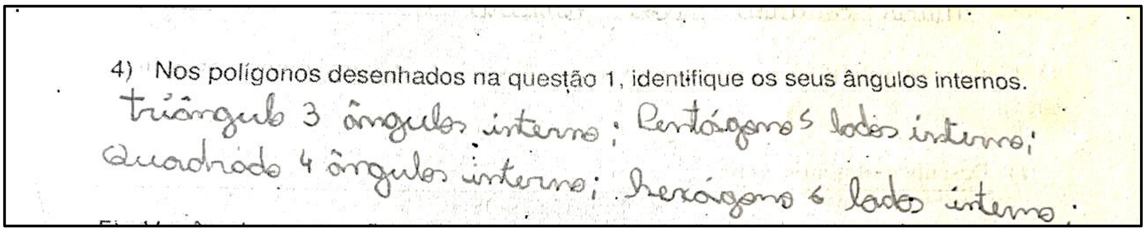
- **C1 – Correta:** indicou corretamente os ângulos internos nos polígonos desenhados.
- **C2 – Parcialmente correta:** indicou alguns ângulos corretamente, mas errou ou omitiu outros.
- **C3 – Incorreta:** confundiu ângulos internos com externos ou marcou os lados/vértices como se fossem ângulos. Não indicou ângulos internos, mas atribuiu valores à soma deles.
- **C4 – Em branco:** não respondeu ou a resposta não apresenta informação útil para análise (por exemplo, “não sei”).

Essa foi a questão com maior número de resoluções *incorretas*, principalmente devido às dificuldades de interpretação. Observa-se, pelas respostas obtidas, que em alguns casos os estudantes recorreram ao uso da internet ou a outros meios para respondê-la.

Somente dois registros apresentaram resoluções consideradas *corretas*, em que os estudantes marcaram os ângulos internos dos desenhos que realizaram na questão 1, sem se preocupar com a medida de cada um deles ou com a soma desses ângulos.

Foram consideradas *parcialmente corretas* as resoluções em que os estudantes marcaram os ângulos internos e atribuíram valores correspondente ao de polígonos regulares; resoluções em que os ângulos internos não foram marcados na representação feita, mas descritos por extenso, ainda que com alguns erros de estrutura; e aquelas em que se indicaram os ângulos internos apenas do triângulo, deixando as outras representações em branco. Ao todo, seis resoluções foram consideradas *parcialmente corretas*. Na Figura 24 temos um exemplo de resolução *parcialmente correta*.

Figura 24 — Exemplo de resolução parcialmente correta questão 4.



4) Nos polígonos desenhados na questão 1, identifique os seus ângulos internos.

triângulo 3 ângulos interno; Pentágono 5 lados interno;
Quadrado 4 ângulos interno; hexágono 6 lados interno.

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Neste exemplo de registro *parcialmente correto*, em que o estudante demonstrou reconhecer corretamente o número de ângulos internos de alguns polígonos, mas confundiu a nomenclatura nos demais, utilizando o termo inadequado “lados internos”. Sugerindo uma compreensão parcial do conceito geométrico.

As resoluções consideradas *incorretas* não indicaram os ângulos internos nas representações feitas, e registram, por extenso, valores aleatórios para esses ângulos, ou trouxeram o valor da soma dos ângulos internos dos polígonos. Esses equívocos evidenciam que os estudantes não entenderam o comando da questão, sugerindo o uso de fontes externas para respondê-la. Dezesseis resoluções apresentaram esses tipos de soluções.

O número de registros *em branco* também foi elevado, o que reforça o indício de que muitos estudantes não compreenderam o que a questão pedia.

5.1.1.5 Análise da Questão 5

A questão 5 pedia que os estudantes definissem o que são polígonos regulares com as suas próprias palavras. Conforme a Figura 25.

Figura 25 — Questão 5 para a análise da avaliação diagnóstica.

5) Você sabe o que são polígonos regulares? Explique com suas palavras.

Fonte: Avaliação diagnóstica (2024).

Classificação das respostas conforme os critérios estabelecidos para esta questão:

- **C1 – Correta:** definição adequada com menção à congruência de lados e ângulos internos.
- **C2 – Parcialmente correta:** menciona apenas lados ou apenas ângulos internos congruentes.
- **C3 – Incorreta:** definição equivocada ou fora do contexto.
- **C4 – Em branco:** não respondeu ou a resposta não apresenta informação útil para análise (por exemplo, “não sei”).

A análise das produções ficou bem dividida entre as categorias C1, C2 e C4. As respostas *parcialmente corretas* apresentavam somente uma das condições: todos os lados iguais ou todos os ângulos internos iguais. Já as resoluções consideradas *incorretas* atribuíram o conceito de polígono regular a “polígono comum”, no sentido de ser mais conhecido pelos estudantes, sem qualquer menção às propriedades relativas aos lados ou ângulos internos. Por outro lado, as respostas *corretas* estavam alinhadas com a definição de polígono regular, embora algumas apresentassem termos como “lados retos” ao se referirem aos lados dos polígonos.

5.1.1.6 Análise da Questão 6

Na questão 6 era solicitado que os estudantes desenhassem um ângulo raso e um ângulo completo identificando a medida de cada um deles. Conforme Figura 26.

Figura 26 — Questão 6 para a análise da avaliação diagnóstica.

6) Desenhe um ângulo de meia volta e um ângulo de uma volta. Qual a medida em graus de cada um deles?

Fonte: Avaliação diagnóstica (2024).

Classificação das respostas conforme os critérios estabelecidos para esta questão:

- **C1 – Correta:** desenhou corretamente os ângulos e indicou 180º e 360º como medidas.
- **C2 – Parcialmente correta:** desenhou corretamente, mas não soube indicar as medidas; ou desenhou e indicou a medida de apenas um dos ângulos; ou apenas indicou a medida sem realizar os desenhos.
- **C3 – Incorreta:** desenhos ou medidas incorretas.
- **C4 – Em branco:** não respondeu ou a resposta não apresenta informação útil para análise (por exemplo, “não sei”).

Parte significativa deles conseguiu resolver essa questão sem dificuldade, embora foram identificadas resoluções *parcialmente corretas*, com omissão de um dos ângulos ou indicação incorreta das medidas. Além disso, um terço deixou a questão *em branco*, o que pode indicar dificuldade em compreender ou lembrar o conteúdo solicitado.

A seguir, apresenta-se a distribuição das respostas das seis questões da avaliação diagnóstica, organizadas nas quatro categorias consideradas para a análise, conforme a tabela 1.

Tabela 1 — Tabela-resumo da distribuição das respostas por categoria na avaliação diagnóstica.

QUESTÃO	CORRETA	PARCIALMENTE CORRETA	INCORRETA	EM BRANCO
Q1	35	2	0	0
Q2	13	19	0	5
Q3	15	15	2	5
Q4	2	6	16	13
Q5	12	10	4	11
Q6	18	7	0	12

Fonte: Elaborado pela autora com base nos dados da avaliação diagnóstica (2024).

A análise geral das respostas evidencia que os estudantes demonstram certa familiaridade com a identificação e a nomenclatura dos polígonos, como observado nas questões 1 e 2. No entanto, apresentam maiores dificuldades quando se trata de conceitos mais específicos, como as propriedades dos polígonos regulares, o que gerou confusões na interpretação da Q 4 e na definição solicitada na Q 5 — itens que concentraram o maior número de equívocos e respostas em branco. Esses resultados também são corroborados pelas limitações nas representações dos grupos de polígonos, especialmente quadriláteros e triângulos, bem como na classificação entre polígonos convexos e não convexos. Além disso, os registros evidenciam dificuldades em justificar raciocínios, além do uso inadequado de símbolos e termos geométricos.

Pela análise da avaliação diagnóstica, a professora-pesquisadora pôde ter uma visão mais precisa dos conhecimentos prévios dos estudantes, identificando quais conceitos básicos relacionados ao conteúdo da TM precisariam ser retomados na apresentação da proposta aos estudantes. Esse instrumento avaliativo revelou-se de suma importância para a fase inicial da prática em sala de aula.

5.1.2 Questionário Inicial — Seu contato com Geometria

Esse instrumento foi elaborado a partir da inquietação inicial da professora-pesquisadora, surgida durante as primeiras leituras feitas sobre as dificuldades no ensino e no aprendizado de Geometria. A ideia era que ele fosse aplicado antes da avaliação diagnóstica, para evitar interferências nas respostas dos estudantes; no entanto, em razão dos ajustes do calendário escolar, os dois instrumentos foram realizados no mesmo momento.

O questionário, composto de quatro questões abertas (Q1, Q2, Q3 e Q4), teve como objetivo identificar indícios de que, no contexto desta pesquisa, os estudantes estavam em contato com os conteúdos geométricos e possuíam memórias significativas de alguma atividade realizada nessa área.

Foram selecionadas 37 respostas válidas para esse instrumento. A análise não será feita com intuito de quantificar as respostas, mas compreender como os estudantes percebem sua relação com a Geometria até o momento da prática desenvolvida na abordagem didática do Ensino Exploratório da Matemática.

Durante a apropriação desses dados, a professora-pesquisadora observou que o instrumento poderia ter sido mais bem estruturado. Algumas questões poderiam ter sido elaboradas com uma combinação entre parte objetivas e abertas, o que facilitaria tanto as respostas dos estudantes quanto a posterior análise. Na Figura 27 temos o questionário tal como foi aplicado às turmas.

Figura 27 — Questionário inicial aplicado aos estudantes.

Questionário inicial – Seu contato com geometria

1. O que vem a sua cabeça quando se fala em geometria?
2. Você lembra de ter estudado algum conteúdo de geometria ano passado? Se sim, lembra qual conteúdo foi?
3. Você estudou algum conteúdo de geometria esse ano? Se sim, você lembra qual conteúdo foi? No primeiro ou no segundo semestre?
4. Você lembra de alguma atividade que fez nas aulas de geometria nos anos anteriores? Se sim, o que fez com que você lembrasse?

Fonte: Elaborado pela autora (2024).

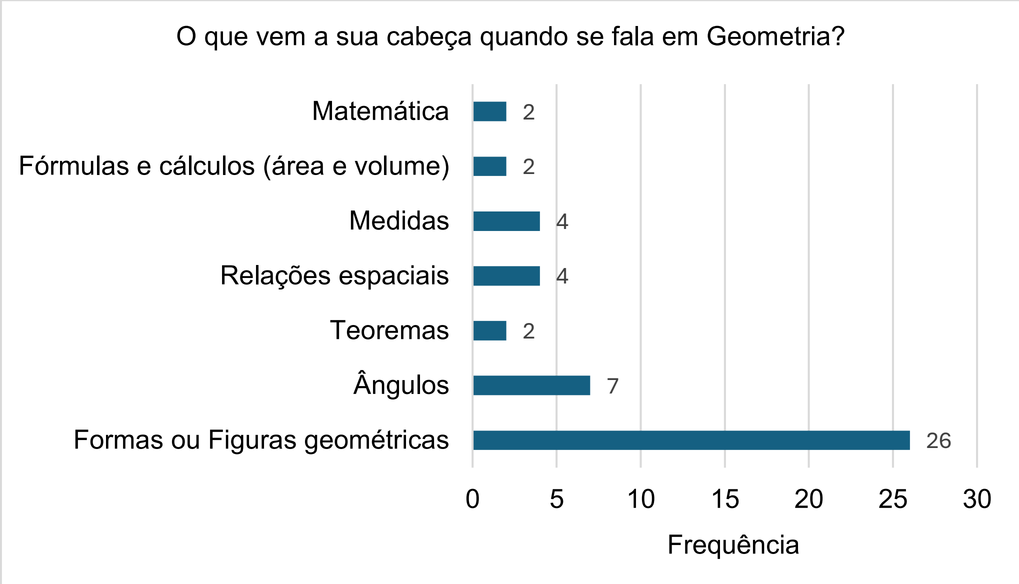
A seguir, apresentaremos os principais achados a partir das respostas dos estudantes no questionário aplicado, agrupados por temas:

- T1 — Concepções de Geometria (Q1).
- T2 — Experiências recentes com conteúdos geométricos (Q2 e Q3).
- T3 — Memórias significativas (Q4).

T1 — Concepções de Geometria: Como colocado anteriormente, a análise evidenciou que a aplicação da avaliação diagnóstica interferiu nas respostas dadas. Tal evidência fica mais perceptível na Q1, em que ampla maioria atribuiu relacionar Geometria com “Formas geométricas” ou “Figuras geométricas”, seguida de “ângulos”. Tratando-se de uma questão aberta, alguns estudantes atribuíram suas respostas a mais de uma categoria.

Ainda que sob a influência do conteúdo da avaliação diagnóstica, as respostas dos estudantes mostram uma visão bastante limitada da Geometria, reforçando a ideia de que os conteúdos geométricos, quando trabalhados, são descontextualizados e sem relação com aplicações cotidianas. O Gráfico 3 traz as categorias e a frequência absoluta das respostas dos estudantes.

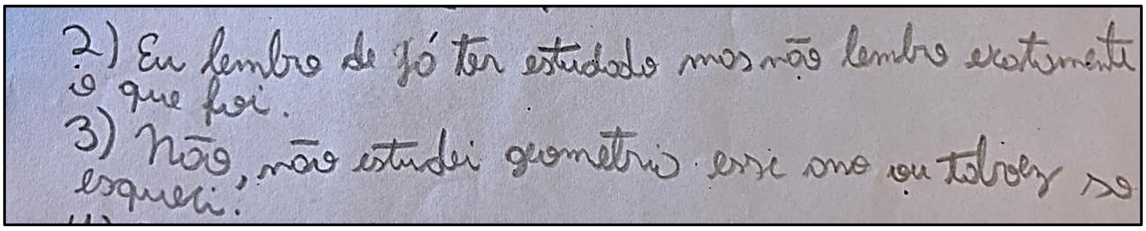
Gráfico 3 — Distribuição das respostas à questão 1.



Fonte: Elaborado pela autora com dados do questionário inicial (2024).

T2 — Experiências recentes com conteúdos geométricos: as questões 2 e 3 procuravam identificar se os estudantes estavam tendo aulas regulares de Geometria. As respostas foram bastante similares nas duas questões, indicando que os estudantes têm sido pouco expostos a conteúdos geométricos, ou, ainda, que não tem atribuído significados a eles. Como podemos verificar na Figura 28.

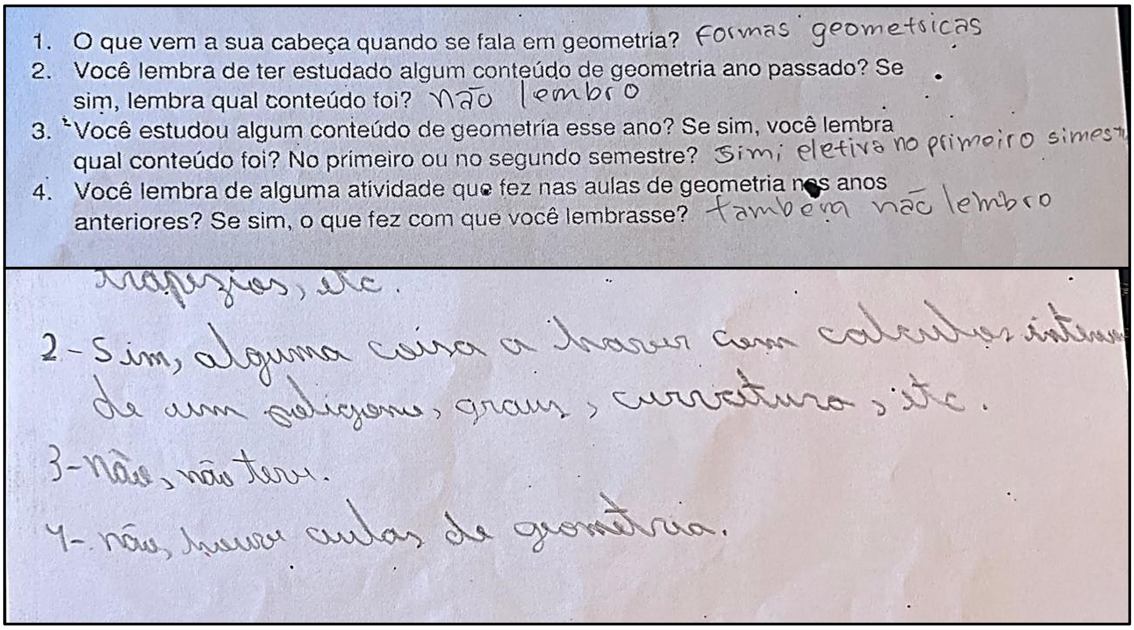
Figura 28 — Registro de um estudante na Q2 e Q3.



Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Por se tratar de estudantes da mesma turma, o fato de haver respostas divergentes coloca em xeque a confiabilidade dos dados. Vale lembrar que no ano anterior os estudantes cursavam o 9º ano do ensino fundamental e, portanto, não frequentavam necessariamente a mesma escola. No ano em questão, 2024, por ser uma escola de ensino médio no contexto do Novo ensino médio, em que no primeiro semestre foi ofertada uma eletiva com foco geométrico, e em alguns registros mencionaram à resposta da Q3 "sim, na eletiva", é possível que nas aulas regulares o conteúdo de Geometria tenha sido pouco trabalhado. A Figura 29 mostra dois registros que ilustram essa situação.

Figura 29 — Registros de estudantes no questionário aplicado.



1. O que vem a sua cabeça quando se fala em geometria? Formas geometricas
2. Você lembra de ter estudado algum conteúdo de geometria ano passado? Se sim, lembra qual conteúdo foi? não lembro
3. Você estudou algum conteúdo de geometria esse ano? Se sim, você lembra qual conteúdo foi? No primeiro ou no segundo semestre? Sim, eletiva no primeiro simestr
4. Você lembra de alguma atividade que fez nas aulas de geometria nos anos anteriores? Se sim, o que fez com que você lembrasse? tambem não lembro

trapezios, etc.

2 - Sim, alguma coisa a haver com calculos internos de um poligono, graus, curvatura, etc.

3 - não, não tem.

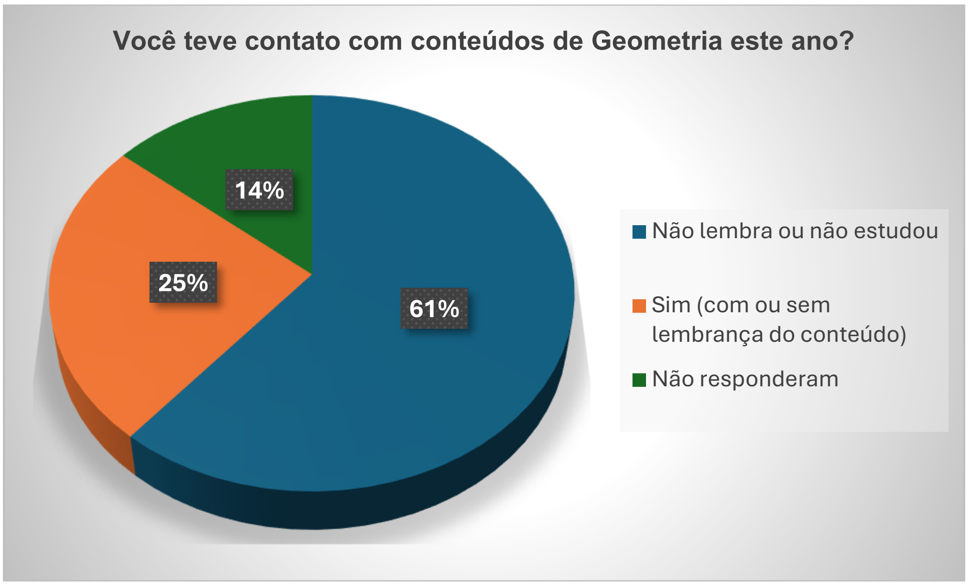
4 - não, houve aulas de geometria.

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Outro dado que corrobora com os registros dos estudantes é a afirmativa do professor regente de que, desde que assumiu a turma no 2º semestre, não trabalhou conteúdos de Geometria.

Nos registros apresentados nas figuras acima, observa-se que os estudantes demonstram confusão e insegurança quanto ao fato de terem ou não estudado conteúdos de Geometria. Mesmo quando a resposta é afirmativa, não conseguem especificar o que foi abordado nem se os conteúdos mencionados pertencem de fato ao campo da Geometria. As respostas à questão 3 revelam que esses conteúdos não foram trabalhados com frequência em sala de aula, o que se reflete no fato de mais de 60% dos estudantes afirmarem que “não lembram” ou que “não estudaram” Geometria em 2024. Essa distribuição pode ser visualizada no Gráfico 4, que apresenta o panorama geral das respostas dos estudantes à Q3.

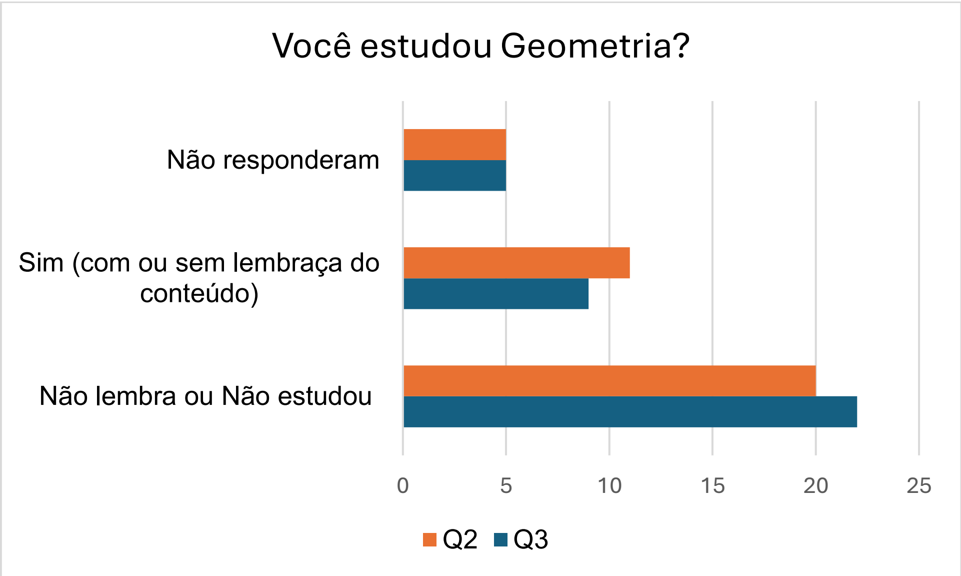
Gráfico 4 — Respostas dos estudantes à questão 3 do questionário.



Fonte: Elaborado pela autora com os dados do questionário inicial (2024).

O Gráfico 5 mostra um comparativo entre as respostas às questões 2 e 3 do questionário, evidenciando que a maioria dos estudantes afirma não ter estudado Geometria recentemente ou não se recordar disto. Esses dados refletem a falta de continuidade no trabalho com conteúdos geométricos ao longo das séries.

Gráfico 5 — Comparativo entre as questões 2 e 3 sobre o contato recente com o conteúdo de Geometria.



Fonte: Elaborado pela autora com base nos dados do questionário inicial (2024).

T3 — Memórias significativas (Q4): A questão 4 buscava identificar lembranças de alguma atividade desenvolvida em aula de Geometria que tenha sido marcante e o motivo dessa recordação. A maioria dos estudantes afirmou não se lembrar de nenhuma atividade realizada. Dos oito que afirmaram lembrar, sete mencionaram algum conteúdo estudado, sem descrever nenhuma atividade específica ou motivo da lembrança. O estudante que afirmou lembrar, deu uma resposta vaga, “Um quadrado, que deu errado”. Os dados revelam uma ausência de memórias significativas, o que reforça a necessidade do uso de metodologias que favoreçam a construção de significados nas aulas de Geometria.

Assim, mesmo com limitações metodológicas, esses dois instrumentos nos permitem visualizar um panorama inicial sobre a relação dos estudantes com a Geometria. Os dados evidenciam que, no contexto desta pesquisa, as aulas dessa área não ocorrem com a frequência esperada e, quando acontecem, promovem uma aprendizagem pouco significativa.

5.2 Análise dos registros do desenvolvimento da TM – Soma dos ângulos internos de um polígono.

Neste tópico, são analisados os dados produzidos na implementação da TM sobre a soma dos ângulos internos de polígonos, articulando os objetivos específicos da pesquisa aos pressupostos do Ensino Exploratório, com foco tanto no desenvolvimento dos estudantes quanto para o percurso da professora-pesquisadora, que também se transformou nesse processo.

O processo analítico considerou os registros escritos, os áudios das interações em grupo e as anotações da professora-pesquisadora, orientando-se pela abordagem qualitativa (Gil, 2025) e combinando a técnica de análise de conteúdo temática (Bardin, 2020) com uma análise interpretativa das interações orais, conforme os princípios do Ensino Exploratório. O tema, segundo Bardin, corresponde a uma “unidade de significação que se liberta naturalmente de um texto analisado segundo certos critérios relativos à teoria que serve de guia à leitura” (Bardin, 2020, p. 131), sendo neste caso um apoio importante para a organização e interpretação do material.

Durante esse processo, algumas categorias temáticas emergentes ajudaram a organizar a leitura dos dados e refletir sobre o que foi sendo construído em sala: as abordagens iniciais adotadas pelos estudantes, as dificuldades conceituais ligadas à decomposição dos polígonos, a identificação da regularidade Matemática e o nível de formalização das respostas. Cada uma dessas categorias será discutida com base nos registros e nas falas dos estudantes, assim como nas mediações realizadas durante a prática.

Os dados das duas turmas foram analisados de forma conjunta, pois o desenvolvimento das atividades, as estratégias adotadas e os erros cometidos foram, em grande parte, semelhantes. As diferenças mais significativas serão destacadas ao longo da análise, quando pertinente.

Para tornar mais clara a evolução das aprendizagens e das interações, a análise foi organizada conforme as quatro fases da aula exploratória vivenciada: (1) apresentação da tarefa, (2) exploração em grupos, (3) discussão coletiva e (4) sistematização das aprendizagens. Essa estrutura permite acompanhar, passo a passo, o percurso investigativo dos estudantes e as intervenções que marcaram esse processo.

5.2.1 Fase 1 – Apresentação da TM e compreensão da proposta

A organização prévia da sala de aula contribuiu para o ganho de tempo para a formação dos grupos, criando um ambiente tranquilo para a exposição da proposta à turma. Em sua maioria, os estudantes demonstraram-se curiosos e motivados com a tarefa. Embora, sentindo-se pouco à vontade inicialmente com o gravador de áudio, ficaram uns lembrando aos outros que estavam sendo “ouvidos”: “tá gravando”, “ei, cuidado, o gravador aí”. Mas à medida que o tempo foi passando, esse sentimento inicial foi superado, e essa preocupação deixada de lado.

Optar por fazer a exposição da TM por partes foi uma decisão acertada, permitindo que os estudantes lidassem somente com as informações necessárias a cada etapa.

Na exposição da Parte II, à luz da avaliação diagnóstica, discutiu-se sobre os conceitos necessários com contribuições vindas dos estudantes. A professora-pesquisadora deu dicas para que desenhassem e usassem a conclusão que chegaram sobre a soma dos ângulos internos do triângulo. Na fala final da apresentação ela ainda frisa, “usem o que vocês fizeram na Parte I da tarefa”. Essa fala pode ter levado a uma das estratégias usadas por alguns grupos, como veremos a seguir.

Os estudantes compreenderam a proposta, mas precisaram de intervenções docentes para refletir sobre *o que* estavam realizando e *por que*, principalmente nos itens finais da TM que exigiam a percepção de uma regularidade.

5.2.2 Fase 2 – Exploração da TM nos grupos.

Os estudantes mostraram-se inseguros e demoraram para resolver o que se pedia na Parte I da TM. Na Figura 30, temos o enunciado dessa etapa tal qual foi apresentada aos estudantes.

Figura 30 — Parte I da TM

Parte I – Soma dos ângulos internos de um triângulo.

Encontrar a soma dos ângulos internos de um triângulo usando recorte.

Recorte

- Faça um desenho de um triângulo qualquer em uma folha de papel. Marque e pinte os três ângulos internos com cores diferentes. Recorte o triângulo.
- Recorte as três pontas do triângulo e organize-as juntando os três ângulos coloridos.
- O que vocês observam? Registrem suas conclusões e responda:

- Qual é o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo? Justifique sua resposta.

Fonte: Dados da pesquisa – Tarefa Matemática (2024).

Na prática eles tiveram dúvidas na interpretação e levaram mais tempo do que o previsto para realizar a experimentação com os ângulos internos do triângulo. Para preservar a identidade dos estudantes foram substituídos por letras (A, B, C, etc.) nas transcrições. A identificação dos grupos segue o padrão 1º Y – Gn, indicando a turma e o número do grupo. Abaixo temos um trecho da transcrição gravada no grupo 1º D – G6, que ilustra essa fase inicial de interação com a TM:

Trecho 7

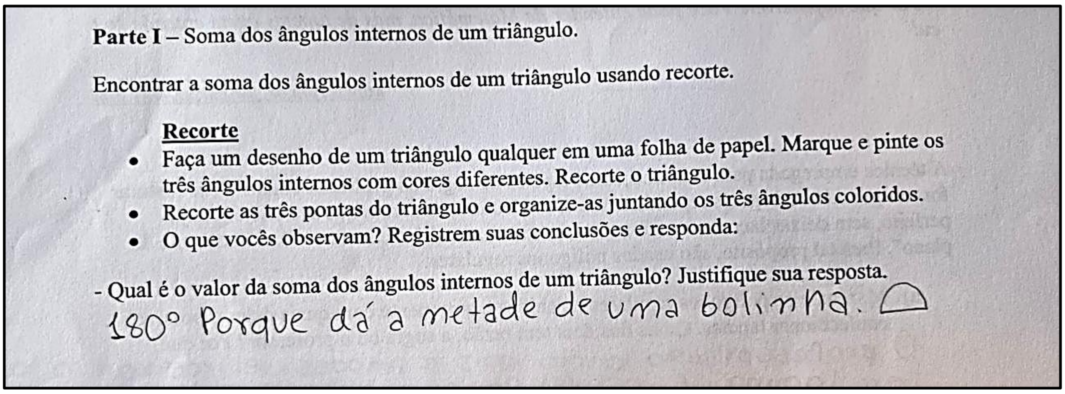
Estudante E: *Eu posso chamar ela de novo pra ela explicar pra gente de novo como se faz?*
Estudante E: *Não! Espera a gente cortar.*
Estudante G: *Vai ser uma "cortação".*
Estudante F*: Não, mas aí é justamente o que eu quero saber. Como que cortam as pontas.*
Estudante E: *É desse jeito mesmo!*
Estudante F: *Não, mas eu quero que ela explique melhor porque eu não entendi ainda.*
Estudante E: *Mas ela vai explicar melhor quando cortar as pontas!*
Estudante F*: Ah eu vou chamar ela!*
Estudante E: *Ah você é muito inseguro! (risos).*
Estudante G*: Deixa ela cortar primeiro as pontas.*

Estudante F: *Não! Eu quero saber como que corta as pontas.*

Esse trecho evidencia o desconforto que alguns estudantes sentem ao trabalhar com propostas que exigem uma participação ativa, especialmente quando estão habituados a aulas expositivas, em que a experimentação vem após uma apresentação formal de um conceito. A insistência de um dos estudantes em chamar a professora-pesquisadora, revela uma dependência de validação externa que também foi verificada em outros grupos. Nota-se na interação do grupo, uma leveza e o tom de brincadeira que contribuem para o engajamento com a proposta.

Durante essa primeira etapa, os estudantes demonstraram que não conheciam esse resultado da Geometria Euclidiana sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo. Conforme iam concluindo a experimentação iam exprimindo comentários de surpresa e satisfação. Embora todos os grupos tenham realizado essa atividade, muitos encontraram dificuldade de registrar o resultado observado. Na Figura 31, temos um registro produzido por um dos grupos durante a Parte I da TM.

Figura 31 — Registro Parte I – (1°C – G3).



Parte I – Soma dos ângulos internos de um triângulo.

Encontrar a soma dos ângulos internos de um triângulo usando recorte.

Recorte

- Faça um desenho de um triângulo qualquer em uma folha de papel. Marque e pinte os três ângulos internos com cores diferentes. Recorte o triângulo.
- Recorte as três pontas do triângulo e organize-as juntando os três ângulos coloridos.
- O que vocês observam? Registrem suas conclusões e responda:

- Qual é o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo? Justifique sua resposta.

180° Porque dá a metade de uma bolinha.

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

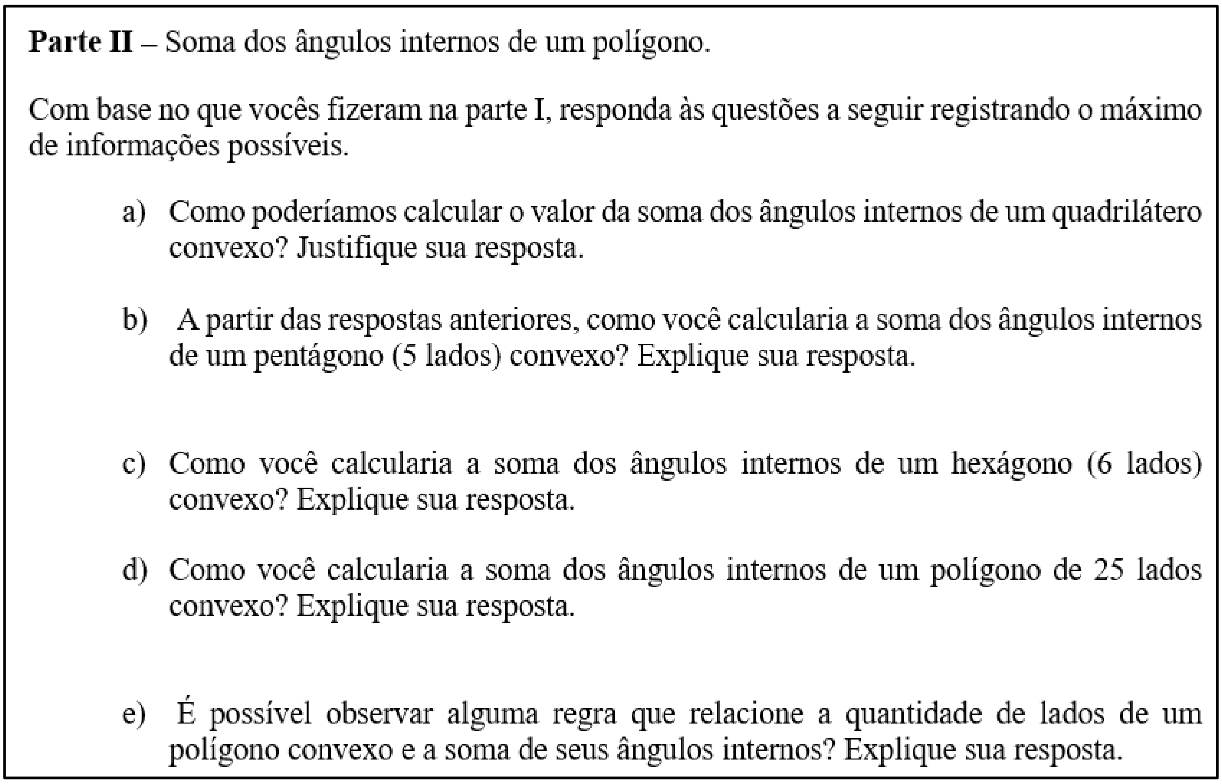
O registro acima revela que, apesar da informalidade da linguagem, os estudantes compreenderam a propriedade pretendida: a soma dos ângulos internos de um triângulo equivale a 180°. A expressão utilizada, “metade de uma bolinha”, indica que os estudantes atribuíram significado à manipulação concreta realizada.

Outros grupos também chegaram à conclusão, utilizando diferentes expressões em suas justificativas, como “180°, pois deu metade da volta completa” e “juntando todas as pontas dará o resultado de 180°”, o que reforça a consistência da descoberta empírica. Nas duas turmas, os registros estão bem similares, não havendo contrastes significativos.

Ao perceber que os grupos haviam finalizado a Parte I da TM, a professora-pesquisadora interveio brevemente antes de apresentar a Parte II. Para isso, conduziu uma sistematização coletiva com perguntas como: “O triângulo do seu grupo era exatamente igual ao daquele grupo?”, “Qual descoberta vocês fizeram?”, “Todos chegaram à mesma conclusão?”, “O que isso significa?”. Essas perguntas, feitas em tom investigativo, tinham como objetivo provocar a reflexão dos estudantes sobre a generalidade da propriedade observada. Mais do que confirmar a resposta correta, buscava-se que os estudantes compreendessem que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, independentemente da medida dos lados ou da orientação da figura. Esse momento atuou como ponte entre a experimentação inicial e a exploração que se seguiria, ajudando os estudantes a perceberem que o conhecimento construído na Parte I poderia (e deveria) ser aplicado nos itens seguintes.

A Parte II da TM, na qual os estudantes deveriam determinar a soma dos ângulos internos de polígonos com número maior de lados, revelou-se mais desafiadora. Na Figura 32, apresenta-se a imagem dessa etapa, tal como foi proposta aos estudantes.

Figura 32 — Parte II da TM.



Parte II – Soma dos ângulos internos de um polígono.

Com base no que vocês fizeram na parte I, responda às questões a seguir registrando o máximo de informações possíveis.

a) Como poderíamos calcular o valor da soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo? Justifique sua resposta.

b) A partir das respostas anteriores, como você calcularia a soma dos ângulos internos de um pentágono (5 lados) convexo? Explique sua resposta.

c) Como você calcularia a soma dos ângulos internos de um hexágono (6 lados) convexo? Explique sua resposta.

d) Como você calcularia a soma dos ângulos internos de um polígono de 25 lados convexo? Explique sua resposta.

e) É possível observar alguma regra que relacione a quantidade de lados de um polígono convexo e a soma de seus ângulos internos? Explique sua resposta.

Fonte: Dados da pesquisa – Tarefa Matemática (2024).

As estratégias adotadas inicialmente, com os quadriláteros, foram basicamente três, com destaque para o uso do recorte, a decomposição dos polígonos e uso do ângulo reto em quadrados ou retângulos. Algumas delas foram antecipadas no planejamento da TM, outras surpreenderam a professora-pesquisadora. A seguir, analisamos essas abordagens adotadas pelos grupos.

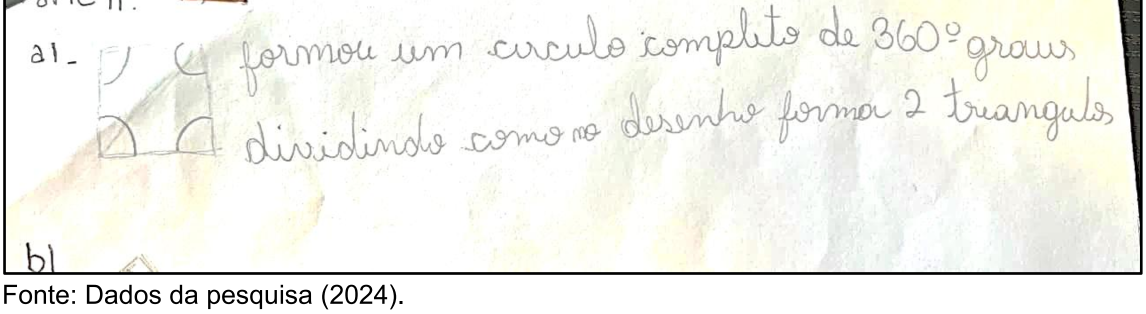
- **Estratégia 1 — Uso do recorte dos ângulos dos polígonos.**

  Essa estratégia surgiu naturalmente em alguns grupos, pensando em replicar a atividade realizada na Parte I. Embora fosse uma abordagem com limitações, revela uma tentativa de atribuir significado a partir da experiência anterior. Os estudantes desenharam, recortaram e juntaram os ângulos dos polígonos para inferir a soma pretendida. A seguir, apresenta-se um exemplo dessa estratégia, com um recorte da transcrição de áudio gravada no 1º C – G6, bem como o registro feito por eles, apresentado na Figura 33.

Trecho 8

Estudante E: *Junta tudo que dá o círculo inteiro.*
Estudante F*: Não, não dá não.*
Estudante E*: Dá sim, que são quatro lados.*
Estudante F*: Pra ser ele completo tem que ser seis, não?*
Estudante E*: Seis?*
Estudante F*: Porque se três deu 180. Quatro não vai ser 360.*
Estudante E: *Dá sim, oh!*
Estudante F*: Não dá!*
Estudante E*: Presta atenção. Pera aí que eu vou montar, você vai ver.*
Estudante E: *Ah, olha aqui! Ho, um círculo!*
Estudante F*: Desse jeito? Olha aqui, professor!*
Professor: *Deixa eu ver aqui. Ela tirou os cantinhos e juntou.*
Professora*: E quando juntou aqui, deu quanto?*
Juntos*: 360.*

Figura 33 — Resposta do 1° C – G6 referente à Parte II (uso do recorte).



Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Os registros acima evidenciam que os estudantes buscaram um caminho próprio, ativando um conhecimento recém-descoberto por meio da atividade empírica.

Apesar de um dos colegas discordar, o estudante argumentou, concluiu a ação concreta e justificou o resultado encontrado.

Ainda que os estudantes usem uma linguagem informal, “formar um círculo”, o diálogo e a atividade realizada, revelam uma compreensão da propriedade geométrica envolvida, os estudantes atribuíram significado à ação.

Essa estratégia não estava prevista no planejamento da professora-pesquisadora que foi pega de surpresa, mas na sua intervenção não antecipou respostas e valorizou a construção do grupo.

Outros dois grupos adotaram essa mesma estratégia inicial, recorrendo ao recorte e à justaposição dos ângulos internos. Os registros escritos mostram-se similares, com justificativas como “juntando as pontas do quadrilátero vai formar um ângulo de 360º” e “juntando todos os lados do quadrilátero e deu 360º”. Em que se mantém a linguagem informal, mas reforçando a atribuição de significado à atividade realizada na Parte I.

No entanto, tal abordagem mostrou-se limitada aos grupos na tentativa de progredirem nos itens da TM, como foi descrito na seção 4. Diante das dificuldades encontradas por esses grupos, que esbarraram logo no pentágono, fez necessário intervenções docentes com questionamentos do tipo: “como vocês calcularam o valor da soma para o quadrilátero?”, “será que conseguimos dividir esse polígono de alguma forma para aplicar o que foi observado na Parte I da TM?”, e “eu sei algo sobre a soma dos ângulos do pentágono? De qual polígono vocês descobriram a soma?” incentivando a ideia da decomposição em triângulos por diagonais que não se interceptam. Essas mediações foram importantes para que os estudantes refletissem e buscassem novas abordagens. Contudo, exigiu equilíbrio da professora-pesquisadora entre estimular o raciocínio dos estudantes e manter o caráter exploratório da proposta, sem diminuir o nível de desafio da TM (Canavarro, 2011).

- **Estratégia 2 — Uso dos ângulos retos.**

A segunda estratégia observada foi o uso dos ângulos retos, adotada por dois grupos, um de cada turma. Como discutido no referencial teórico, as TMs Exploratórias caracterizam-se por permitir que os estudantes iniciem o trabalho com base em seus conhecimentos prévios. Foi exatamente o que ocorreu neste caso.

Conforme evidenciado na análise da avaliação diagnóstica, os estudantes geralmente associam quadriláteros a quadrados ou, no máximo, a retângulos. Como sabem que nesses polígonos os ângulos são retos, rapidamente chegaram ao valor da soma dos ângulos internos de um quadrilátero.

Nesse caso, na abordagem inicial, os estudantes não consideraram a descoberta realizada empiricamente na Parte I da TM, não estabelecendo conexões com o que estava sendo solicitado na nova etapa.

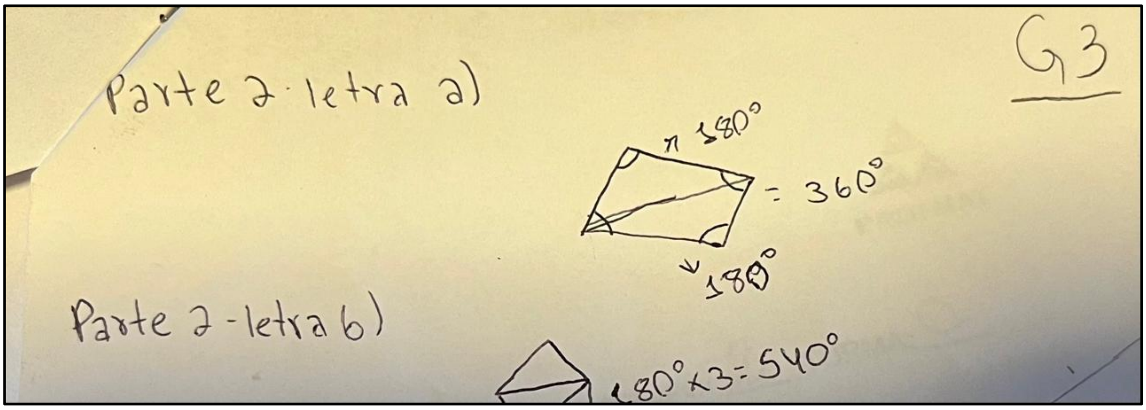
A dificuldade surgiu novamente ao tentar determinar a soma dos ângulos internos de um pentágono, momento em que a professora-pesquisadora foi acionada. Uma dessas interações está disponível no trecho 9 da transcrição de áudio gravado no 1º C – G3.

Trecho 9

Estudante Q: *Aí aqui é 90, 90, 90 e 90. Aí 180 + 180 que dá 360. Só isso que eu sei. Como eu vou explicar não sei.*
Professora*: Esse dá certo para esse que é retângulo. E se a gente desenhasse esse outro? Esses aqui também são 90?*
Estudante Q: *Não.*
Professora: *Mas tem que dá certo para todos. Com o triângulo não vale para qualquer um?*
Todos: *Uhum!*
Professora: *Vamos usar a informação do triângulo para esse. Conseguem dividir essa figura?*
Professora: *Desse jeito que você fez, tem quantos triângulos?*
Estudante R*: Dois.*
Professora: *E juntando esses ângulos equivalem ao ângulo do quadrilátero que vocês desenharam. Quanto vale a soma dos ângulos de cada triângulo?*
Estudante R*: 90!*
Estudante Q*: Não! 180!*
Professora: *E quantos aparecem na sua divisão?*
Estudante R: *Dois.*
Professora*: Então por isso que dá quanto a soma?*
Estudante R*: 360.*
Estudante S: *Ah sim.*

O registro apresentado evidencia a forma como a professora interveio e como os estudantes responderam a essa mediação por meio de sua resolução, apresentada a seguir, na Figura 34. Ao provocar comparações com a Parte I da TM, foi possível retomar o conhecimento previamente construído e aplicar a propriedade de maneira mais ampla. O momento em que o estudante conclui “ah sim” revela que a nova abordagem passou a fazer sentido para ele, abandonando a justificativa inicial apoiada nos ângulos retos.

Figura 34 — Resposta do G3 – 1°C referente à Parte II (uso ângulo reto).

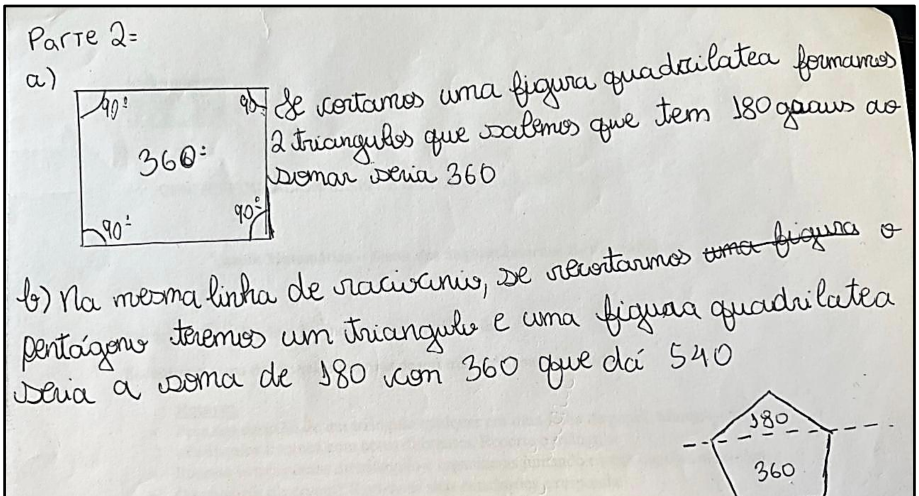


Fonte: Dados da pesquisa (2024).

- **Estratégia 3 — Decomposição dos polígonos.**

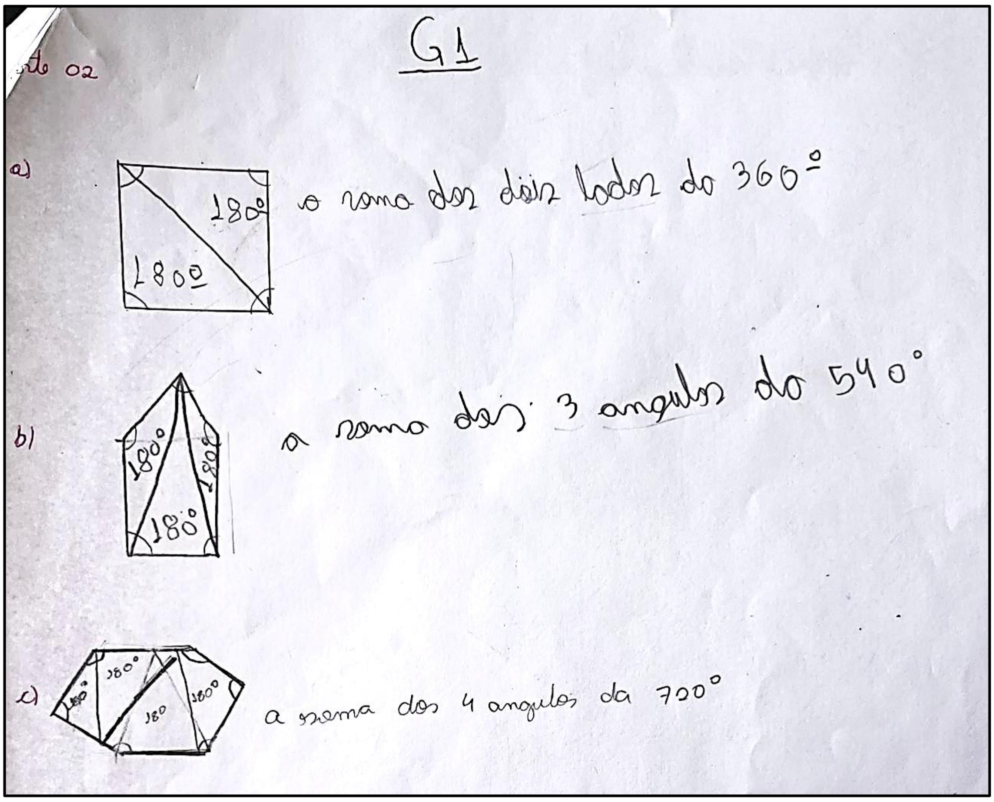
Como mencionado nas análises anteriores, as duas estratégias iniciais (recorte e uso dos ângulos retos) acabaram sendo ponto de partida para alguns grupos, mas ao progrediram na resolução, os estudantes foram migrando gradualmente para a decomposição dos polígonos. Alguns optaram pela decomposição mista (usando diferentes combinações de polígonos), e outros seguiram diretamente pela decomposição em triângulos justapostos por meio de diagonais que não se cruzam. Ambas, previstas no planejamento da professora-pesquisadora. Abaixo temos dois registros feitos pelos estudantes considerando a decomposição mista e em triângulos justapostos, apresentados nas Figuras 35 e 36.

Figura 35 — Resposta do G6 – 1° D – decomposição mista.



Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Figura 36 — Resposta do G1 – 1° D – decomposição em triângulos.



Fonte: Dados da pesquisa (2024).

A Figura 35 mostra um exemplo de decomposição mista, no qual os estudantes combinaram polígonos diferentes sem explicitar os ângulos, o que pode indicar uma compreensão ainda parcial da relação com a soma dos ângulos internos. Já na Figura 36 observa-se uma tentativa de decomposição em triângulos justapostos por meio de diagonais que não se cruzam, ainda que com pequenas inconsistências nos registros, indicando uma fragilidade na compreensão dos conceitos geométricos.

No entanto, essa estratégia se desdobrou em diferentes níveis de compreensão e de dificuldades, entre eles se destacam dois aspectos: um erro comum decorrente da decomposição dos polígonos e a dificuldade em perceber e formalizar a regularidade entre o número de lados e a soma dos ângulos internos desses polígonos.

A seguir analisaremos como os estudantes foram evoluindo nessa estratégia considerando esses aspectos, a partir das mediações docentes e das reflexões feitas para superar essas dificuldades.

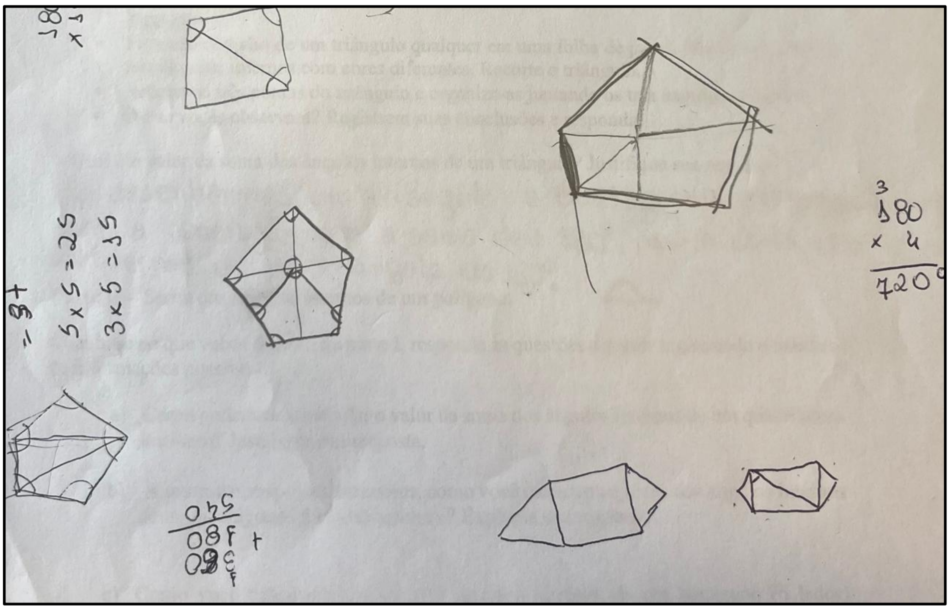
a) Erro em decorrência da decomposição dos polígonos

Pelas observações feitas durante a monitorização, a professora-pesquisadora identificou que, embora os estudantes compreendessem que deveriam decompor os polígonos com maior número de lados em triângulos, isso não significava, necessariamente, que estivessem compreendendo a relação entre essa decomposição e os ângulos internos do polígono, e em consequência com a relação Matemática.

Alguns grupos, iniciaram essa decomposição usando diagonais que se cortam no centro do polígono, ou por segmentos que unem os vértices a um ponto interno desse polígono, sem identificar que os ângulos centrais formados não faziam parte dos seus ângulos internos. Esse erro, embora presente na decomposição do pentágono, foi mais frequente no hexágono. Tal frequência em parte foi influenciada pelos polígonos regulares disponíveis nos kits entregues no início da aula.

Nos registros apresentados a seguir, é possível observar a evolução da resolução de um grupo, desde as primeiras tentativas de decomposição dos polígonos até o registro final na folha destinada às respostas. Essa sequência permite evidenciar os equívocos iniciais e os avanços proporcionados pelas mediações realizadas ao longo da atividade, especialmente durante as interações com a professora-pesquisadora. Para isso, temos na Figura 37 como foram realizadas as primeiras tentativas de decomposição, antes e durante a intervenção docente, seguida do trecho 10 da transcrição de áudio gravado em sala 1º C – G4, bem como no registro final feito pelo grupo, apresentado na Figura 38.

Figura 37 — Primeiras decomposições feitas pelo 1º C – G4.



Fonte: Dados da pesquisa (2024).

A Figura 37 mostra os registros iniciais do grupo G4 (1º C), nos quais se observa o uso de segmentos traçados a partir dos vértices que se encontram no centro do polígono, resultando em interpretações incorretas. Essa abordagem, ainda que represente uma tentativa válida de resolução, revela a não distinção entre os ângulos internos do polígono e os ângulos formados no centro da figura.

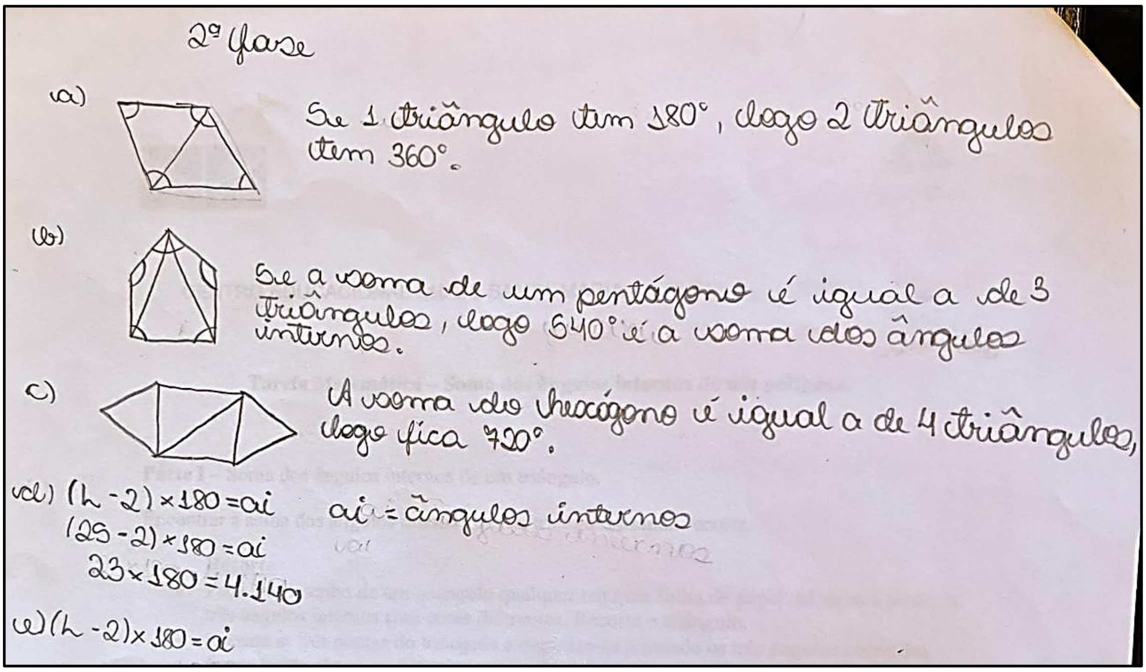
Esse equívoco se torna evidente no trecho 10, quando a professora-pesquisadora, ao monitorar o grupo, questiona a validade dos ângulos considerados:

Trecho 10

Professora*: Esse é o polígono de 5 lados? O que vocês fizeram? Ah, dividiram num quadrilátero.*
Estudante J*: É, porque se divide em dois, não dá dois triângulos.*
Professora*: Do jeito que vocês fizeram dá pra fazer. Mas se quiserem dá pra fazer triângulos também. Como?*
Estudante I: *Passa no meio assim?*
Professora: *No meio você tá dividindo os ângulos? Usem os vértices.*
Estudante I: *Ah!*
Professora: *Qual o problema que tem quando divide assim? Vocês estão contando esses ângulos aqui. Eles fazem parte da figura?*
Estudante I*: Aí, meu Deus. Não.*
Professora*: Mas desse jeito que vocês dividiram, vocês já sabem calcular. Que figuras aparecem nessa divisão?*
Estudante J*: Um triângulo e um quadrilátero.*
Professora: *Um vocês responderam na Parte I e o outro na letra "a". Quanto vale a soma dos ângulos de cada um?*
Estudante I: *Caraca!*
Estudante J: *Ah ta! 180 e 360.*
Professora: *E como vocês dividiram o quadrilátero da letra "a"?*
Estudante I*: Ah sim, vai dar três triângulos.*
Professora: *Então, vocês descobriram mais uma maneira de fazer.*

Esse recorte de interação entre os estudantes e a professora-pesquisadora, mostra que o grupo inicialmente tinha usado a decomposição mista (triângulo e quadrilátero), mas que buscavam a decomposição em triângulos. Nas falas há evidências de confusão conceitual, especialmente ao perceber que os ângulos centrais não fazem parte dos ângulos internos da figura originalmente construída, "Aí, meu Deus. Não.".

Figura 38 — Registro escrito final (1º C – G4).



Fonte: Dados da pesquisa (2024).

No entanto, a mediação da professora-pesquisadora, valoriza o raciocínio dos estudantes ao retomar as construções feitas anteriormente por eles (decomposição mista), e contribuiu para a reflexão e construção da aprendizagem coletiva do grupo. Essa atribuição de significados é observada nas falas “Ah tá! 180 e 360” e ainda “Ah sim, três triângulos”, indicando que visualizaram as duas maneiras de se chegar ao mesmo resultado. Na Figura 38 acima, é possível verificar que o grupo reorganizou o raciocínio representando corretamente as decomposições, bem como a soma dos ângulos internos dos polígonos. O uso da linguagem “logo...” indica que os estudantes estavam conseguindo construir uma justificativa, ainda que baseada em exemplos concretos, mostrando uma compreensão mais sólida dos conceitos geométricos envolvidos.

Nos demais grupos em que esse equívoco de interpretação surgiu, a postura adotada pela professora-pesquisadora foi semelhante e o processo evolutivo foi similar ao grupo 1º C – G4. Em dois casos específicos, não houve solicitação direta de ajuda: um desses grupos teve sua produção discutida na fase coletiva, e o outro teve sua estratégia reconhecida apenas na análise posterior dos registros.

Vale destacar que essa decomposição não foi antecipada pela professora-pesquisadora no planejamento da aula. Por esse motivo, durante a mediação, orientou-se que os estudantes utilizassem diagonais que não se interceptassem no interior do polígono, de modo a facilitar a visualização da regularidade esperada. No entanto, a análise posterior do material revelou que a estratégia inicialmente empregada pelos estudantes poderia ter sido valorizada como uma alternativa válida para alcançar a mesma relação Matemática. Essa estratégia será retomada na análise da fase final da aula, quando o grupo compartilhou sua resolução com a turma.

b) Dificuldade em perceber a regularidade

Os grupos compreendiam a necessidade de decompor os polígonos com maior número de lados em triângulos, mas a identificação da regularidade entre o número de lados e a soma dos ângulos internos mostrou-se um desafio comum. Nenhum grupo chegou a essa generalização sem mediação docente. Esse momento de impasse ocorreu ao se depararem com o polígono de 25 lados, onde se fez necessário partir para a abstração.

O trecho 11, retirado da transcrição de áudio do grupo do 1º C – G4, evidencia o espanto e a tentativa de raciocínio baseada em exemplos anteriores, ainda sem clareza sobre o padrão:

Trecho 11

Estudante K*: 25 lados, como que eu vou fazer?*
Estudante J*: Não, olha! A gente pode usar a seguinte questão. Aqui tem quatro né? Não, pega o de cinco que é mais fácil.*
Estudante J*: O de cinco lados a gente usou 3 triângulos.*
Estudante I: *Exatamente.*
Estudante J: *Precisa de quanto vezes cinco pra dar 25? 5, 10, 15, 20, 25.*
Estudante K: *Cinco.*
Estudante J: *Então vai ser 5 vezes 3, que dá 15. Então vai precisar de 15 triângulos.*
Estudante L: *E como vai fazer 15 triângulos aí, moço?*
Estudante I: *Só se fizer uma pizza.*
Estudante J: *Precisa necessariamente ter o desenho? Porque se não precisar ter o desenho eu vou seguir a minha lógica.*
Estudante I: *Calma aí que eu acho que tenho uma ideia melhor.*

A interação registrada acima, mostra que os estudantes estavam engajados na proposta, levantaram hipóteses, discutiram e perceberam que precisam deixar o concreto e encontrar uma lógica entre os polígonos anteriores.

Já o trecho 12, de outro grupo (G6 – 1°C), mostra a interação dos estudantes com a professora-pesquisadora, que, por meio de perguntas encadeadas, levou-os à percepção da regularidade:

Trecho 12

Estudante H: *O próximo é o que? 25?*
Estudante E: *25?*
Professora: *Vamos pensar no que vocês já fizeram. Escrevam, essas relações, número de lados e quantos triângulos. Tipo uma tabela.*
Professora: *Começamos com o triângulo, depois quando tínhamos 4 lados, quantos triângulos? Quando eu tinha 5 lados, quantos triângulos? E quando eu tinha 6 lados, quantos triângulos? Pensem um pouco.*
Estudante H: *Dois números de diferença?*
Professora: *Então se tiver um polígono de 25 lados, você vai conseguir dividir em quantos triângulos?*
Estudante H: *23!*
Estudante E*: 23?*
Estudante H: *É, 25 menos 2.*
Estudante E: *Ah!*
Estudante H: *Então não precisa desenhar?*

No trecho acima, a professora-pesquisadora ao pedir que os estudantes fizessem comparações progressivas com os casos anteriores, permitiu que eles percebessem o padrão envolvido. As respostas "Dois números de diferença" e "25 menos 2", mostrar que os estudantes passaram a compreenderam a regularidade.

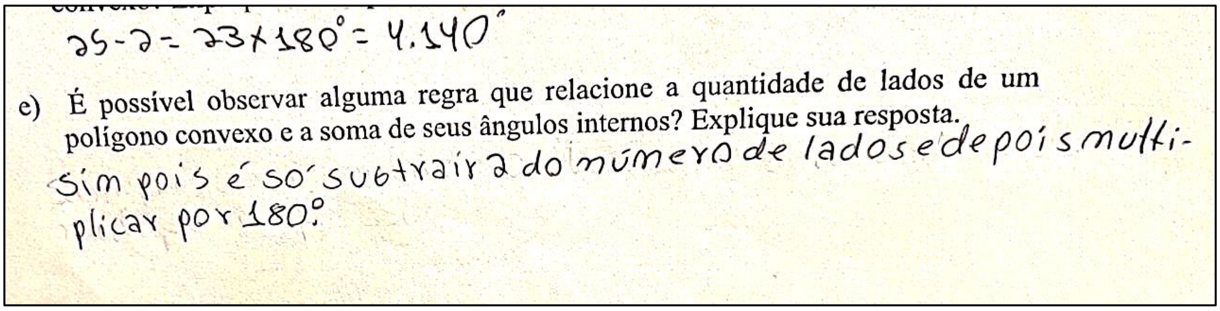
Em todos os grupos que solicitaram auxílio, a mediação da professora-pesquisadora permitiu a identificação da regularidade. Por outro lado, nos grupos que não manifestaram necessidade de ajuda, essa relação não foi percebida. Esses episódios evidenciam a importância das intervenções docentes no Ensino Exploratório, especialmente no sentido de apoiar a autonomia dos estudantes e promover reflexões que os conduzam à construção de conceitos, sem que se comprometa seu protagonismo.

c) Expressão Matemática da regularidade

Ainda que a maioria dos grupos tenha identificado a regularidade entre o número de lados de um polígono e a soma dos seus ângulos internos, apenas dois deles — um de cada turma — conseguiram chegar à lei de formação que os relaciona: $S = (n - 2).180°$, sendo n o número de lados desse polígono.

Nos demais grupos que compreenderam essa propriedade, foi possível observar registros que, embora não apresentassem a formalização simbólica, evidenciam tentativas de generalização por meio da linguagem natural como "a cada quantidade de lado você diminui 2 e vai ter a quantidade de triângulos", revelando diferentes níveis de formalização e de compreensão conceitual. Abaixo temos exemplos de dois registros produzidos pelos estudantes usando a linguagem natural para expressar a generalização observada, Figuras 39 e 40.

Figura 39 — Registro 1º C – G3



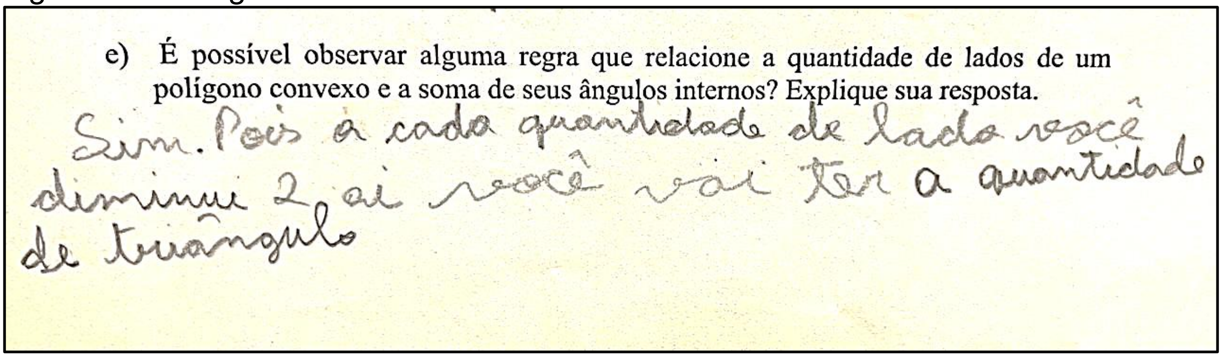
25-2 = 23x180° = 4.140°

e) É possível observar alguma regra que relacione a quantidade de lados de um polígono convexo e a soma de seus ângulos internos? Explique sua resposta.

Sim pois é só subtraír 2 do número de lados e depois multi-plicar por 180°.

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Figura 40 — Registro 1º C – G4



e) É possível observar alguma regra que relacione a quantidade de lados de um polígono convexo e a soma de seus ângulos internos? Explique sua resposta.

Sim. Pois a cada quantidade de lado você diminui 2 aí você vai ter a quantidade de triângulo

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Essas produções revelam a presença do raciocínio matemático, mesmo quando a linguagem simbólica não é utilizada (Ponte; Quaresma; Mata-Pereira, 2020). Os registros mostram a dificuldade que os estudantes têm em conseguir justificar suas respostas e em formalizar os raciocínios. Essa etapa mostrou-se bem desafiadora, pois na maioria dos grupos eles não gostavam de justificar suas respostas e muitas vezes não sabiam como fazer. Essa transição do concreto para o abstrato é uma etapa essencial no processo de aprendizagem significativa (Barbosa; Maltempi, 2024).

O trecho 13, transcrição de áudio gravado do grupo G4 – 1º C, mostra o momento em que o professor regente instiga os estudantes a refletirem sobre a relação encontrada:

Trecho 13

Estudante J: *É, 25 menos 2. Aí vai dar 23 vezes 180.*
Professor: *Então, muito importante. Quem é esse 25?*
Estudante I*: são os lados.*
Estudante J: *Então, a gente pode fazer uma função de L menos 2.*
Professor: *Isso. Dentro dos parênteses, por favor.*

Estudante J*: Que é igual a... Como assim, dentro dos parênteses?*
Professor*: Isso, pode ser. Isso que você está pensando.*
Estudante J*: Igual a ângulos internos.*
Professor*: Tu tens um vezes ainda, por isso que eu falei dentro dos parênteses.*
Estudante J: *L-2 vezes 180 é igual a ângulos internos. Aí você coloca "ai", que vai ser ângulos internos. Coloca "ai" igual a ângulo interno.*

Nesse momento, é possível observar como os estudantes conseguem organizar as ideias oralmente, e um dita para o outro escrever a fórmula. O professor convida os estudantes a explicitar o significado dos elementos envolvidos no cálculo ao perguntar "Quem é esse 25?". A partir da pergunta, os estudantes reconhecem que o 25 representa o número de lados, e de forma coletiva eles chegam à generalização. Observa-se o esforço dos estudantes para transitar entre a linguagem natural e a linguagem simbólica. O professor valorizou o raciocínio do grupo sem conduzir diretamente à fórmula (Canavarro, 2011).

A mediação docente atua novamente como facilitadora, incentivando-os a construir significados com base nas experiências anteriores da própria TM, conforme apontam Canavarro (2011) e Stein *et al*. (2008), ao destacarem a importância de o professor interpretar as produções dos estudantes e conduzir a aula de forma articulada às aprendizagens em construção. O registro produzido pelo grupo já foi apresentado anteriormente nesta análise na Figura 38.

Essa etapa antecipa o que será analisado na fase final da aula, durante a discussão coletiva e a sistematização das aprendizagens, quando a formalização simbólica será retomada com a turma.

5.2.3 Fase 3 – Discussão coletiva

No início da discussão, os estudantes foram orientados a interromper os registros individuais e a concentrar-se nas apresentações dos colegas, respeitando, ouvindo atentamente e contribuindo com comentários e perguntas. Essa orientação teve como objetivo favorecer um ambiente de discussão coletiva, incentivando o diálogo entre os estudantes.

Os grupos previamente selecionados na fase 2, elegiam um ou dois integrantes para apresentar a resolução aos demais. Os estudantes inicialmente encararam a discussão coletiva como uma simples "correção" da TM, anotando a resposta final no quadro, sem nenhuma explicação.

A professora-pesquisadora guiou a discussão fazendo perguntas de “como” e “por que”, solicitando justificativas ao grupo e à turma, promovendo uma interação coletiva e envolvendo-os a cada item.

A discussão coletiva teve início com a apresentação da Parte I da TM por um grupo, que retomou a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo, observada na atividade prática de recorte e junção dos ângulos. Antes de concluírem, a professora-pesquisadora questionou: “Vocês poderiam afirmar alguma coisa sobre o valor de cada ângulo do triângulo?”. A pergunta visava esclarecer uma hipótese levantada por alguns grupos durante a fase de exploração: a ideia de que cada ângulo teria medida de 60º. A mediação buscou enfatizar que, embora a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo seja 180º, o caso em que todos os ângulos são congruentes corresponde especificamente ao triângulo equilátero.

A seguir, a estratégia do recorte, mas o grupo responsável tentou omitir a abordagem no momento da apresentação. A professora-pesquisadora interveio: “Mas vocês não haviam começado a resolver usando o recorte desses ângulos?”, retomando a estratégia inicial e incentivando os demais grupos a refletirem sobre sua validade. Outros estudantes contribuíram, justificando que os ângulos não se encaixavam. Diante disso, a professora retomou a mediação: “Porque não encaixou?”. Conduzindo a turma à conclusão de que para polígonos com mais de quatro lados a soma dos ângulos internos é superior a 360º.

Em seguida, outros grupos apresentaram suas estratégias baseadas na decomposição dos polígonos — quadrilátero, pentágono, hexágono — utilizando decomposições mistas ou triângulos justapostos por diagonais que não se interceptam. Embora explicassem como haviam contado os triângulos ou outros polígonos, muitos não identificavam explicitamente os ângulos internos nem os relacionavam com a soma encontrada. Por isso, a professora solicitou que marcassem os ângulos internos diretamente nas figuras e comparassem com os ângulos formados na decomposição, reforçando a relação pretendida.

Nesse momento, foi convidado o grupo que, durante a fase anterior, havia cometido o erro ao interpretar a decomposição feita para o hexágono. Embora a soma obtida tenha sido diferente da já apresentada, a turma inicialmente não percebeu o equívoco. A professora chamou a atenção para o resultado, desviando o foco da correção e direcionando para a compreensão do processo: “Quando vocês realizaram a soma dos ângulos internos dos outros polígonos, o resultado foi diferente dependendo da forma de decomposição?", "Independentemente da maneira como se desenha o polígono, a soma dos ângulos internos deve ser a mesma?", "Por que essa decomposição resultou em um valor maior?". Os estudantes passaram a refletir e identificaram que, naquela representação, estavam considerando ângulos centrais que não pertencem ao polígono. Alguns sugeriram subtrair 360º da soma; outros falaram para dividir a figura sem passar pelo "meio".

Nas duas turmas, ao representar a soma dos ângulos internos do polígono de 25 lados, os estudantes registraram no quadro expressões como "23.180 = 4140" ou de "25 lados = 23.180". A professora-pesquisadora mediou o processo: "De onde saiu o 23?" "Como vocês pensaram?" "Alguém consegue explicar a conta que eles fizeram?". Essas perguntas fomentaram a discussão coletiva e ajudaram os demais estudantes a perceberem a regularidade.

Como em ambas as turmas ao menos um grupo conseguiu expressar a fórmula Matemática pretendida, foram convidados a apresentar essa representação à turma. Com perguntas guiadas pela professora-pesquisadora, os estudantes foram explicando o que significava cada símbolo usado. E como a maioria dos grupos não tinha chegado a esse nível de formalização, a troca favoreceu a compreensão coletiva.

Essa fase da aula evidenciou que os estudantes estão acostumados a apresentar respostas prontas e aguardar o julgamento de certo ou errado, sem explicar o percurso utilizado na resolução. No entanto, como observa Ponte (2005), o momento da discussão coletiva requer escuta ativa, argumentação e valorização de diferentes estratégias, mesmo quando estas não estejam corretas, por se tratar de um espaço de aprendizagem coletiva. Além disso, conforme destacam Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020), mais importante do que o resultado final é compreender a estratégia utilizada e a sua justificação.

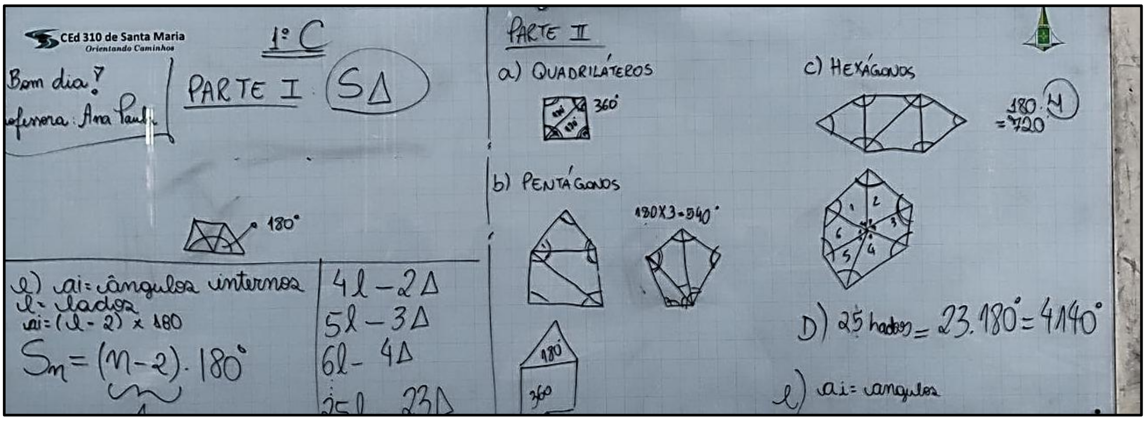
5.2.4 Fase 4 – Sistematização das aprendizagens

Durante o compartilhamento, item a item, a professora-pesquisadora articulou as ideias e conceitos envolvidos nas diferentes resoluções, de modo que, no momento da sistematização, apenas retomou o que havia sido construído no quadro pelos estudantes. Como em nenhuma das turmas foi apresentada uma tabela comparando, de forma gradativa, o número de lados com o número de triângulos da decomposição, a professora esboçou essa representação para reforçar a visualização da regularidade por toda a turma.

Na sequência, apresentou como a fórmula aparece em livros didáticos, explicando o significado de cada símbolo e convidando os estudantes para testar sua validade com os polígonos utilizados na TM.

No entanto, a partir da análise posterior dos dados, percebeu que poderia ter conduzido o erro na interpretação de decomposição do hexágono — aquela que utilizava segmentos traçados a partir dos vértices a um ponto central (pentágono) — como uma alternativa para encontrar a fórmula que relaciona o número de lados com a soma dos ângulos internos dos polígonos convexos, caso tal estratégia tivesse sido prevista no planejamento docente. Essa estratégia, já mencionada na análise anterior, pode ser verificada na Figura 41, retomada durante a discussão coletiva, no registro final do quadro.

Figura 41 — Registro do quadro da turma 1 º C.



Fonte: Dados da pesquisa (2024).

A análise do conjunto de dados revelou que, mesmo enfrentando dificuldades para justificar seus raciocínios, muitos estudantes avançaram na proposta. Ao longo da realização da TM, foi possível observar o envolvimento progressivo dos grupos e a construção de significados em torno das ideias geométricas exploradas. As evidências indicam um processo ativo de aprendizagem, marcado por tentativas, estratégias próprias e esforços de abstração, revelando que a abordagem do Ensino Exploratório proporcionou, para grande parte da turma, experiências significativas de construção de conhecimento (Canavarro, 2011; Ponte, 2005). Ainda que, um caso específico, já relatado na seção 4, destoou dos demais em termos de grau de formalização e não refletiu o percurso observado em sala, sendo considerado atípico no contexto da análise.

Para sintetizar os percursos dos grupos durante a realização da TM, foi elaborado um quadro para cada turma — Quadros 2 e 3, a seguir. Neles, estão organizadas as estratégias iniciais adotadas, os tipos de decomposição realizados, a identificação (ou não) da regularidade entre o número de lados e a soma dos ângulos internos dos polígonos, bem como os diferentes níveis de generalização alcançados, seja em linguagem matemática ou natural. Esses quadros oferecem uma visão geral da evolução dos grupos dentro da proposta. Sua elaboração serviu de apoio às análises realizadas.

Quadro 2 — Síntese do desenvolvimento dos grupos na TM – 1º C.

1º C - Grupos		G1	G2	G3	G4	G5	G6
Estratégia Inicial	Recorte	✓				—	✓
	Ângulo reto		✓			—	
Decomposição em triângulos		✓	✓	✓	✓	—	✓
Decomposição mista						—	
Erro de interpretação na decomposição			✓		✓	—	
Visualizou a regularidade	Sim	✓		✓	✓	—	✓
	Não		✓			—	
Expressou a fórmula	Sim				✓	—	
	Não		✓			—	
Expressou a regularidade em linguagem natural		✓	✓	✓		—	✓

Fonte: Elaborado pela autora a partir dos registros da TM.

Quadro 3 — Síntese do desenvolvimento dos grupos na TM – 1º D.

1º D - Grupos		G1	G2	G3	G4	G5	G6
Estratégia Inicial	Recorte				✓		
	Ângulo reto			✓			✓
Decomposição em triângulos		✓	✓	✓	✓	✓	
Decomposição mista		✓					✓
Erro de interpretação na decomposição			✓				✓
	Sim	✓			✓	✓	

Visualizou a regularidade	Não		✓	✓			✓
Expressou a fórmula	Sim				✓		
	Não	✓	✓	✓		✓	✓
Expressou a regularidade em linguagem natural		✓	✓	✓		✓	

Fonte: Elaborado pela autora a partir dos registros da TM.

Esses quadros mostram os diferentes caminhos percorridos pelos grupos em cada turma, evidenciando o caráter exploratório da proposta (Ponte, 2005, 2014). No entanto, percebe-se que nelas há uma regularidade nas estratégias levantadas entre as turmas.

6 RESULTADOS E CONCLUSÕES

Esta pesquisa teve como objetivo investigar as contribuições de uma TM elaborada sob os princípios do Ensino Exploratório para a aprendizagem significativa de Geometria entre estudantes do ensino médio. Ao longo do percurso investigativo, os objetivos específicos também foram contemplados. A partir das análises feitas, fica evidente que a proposta didática, aliada ao conteúdo geométrico trabalhado, possui potencialidades e desafios.

A estrutura da aula – com trabalho em grupo e mediação intencional da professora-pesquisadora – proporcionou um ambiente favorável à investigação (Canavarro, 2011). Dentro desta proposta, os estudantes foram capazes de expor suas ideias, testá-las, procurar regularidades, argumentar, descobrir e justificar tais descobertas a seu modo (Ponte; Quaresma; Branco, 2012). A TM previamente preparada permitiu que todos os grupos, em níveis diferentes, se engajassem na exploração, independentemente dos seus conhecimentos prévios (Ponte, 2005).

Embora neste nível de escolaridade, todos os estudantes já tenham trabalhado com expressões algébricas, equações e até mesmo funções, somente dois grupos expressaram a regularidade observada durante a exploração usando a linguagem Matemática. No entanto, durante o compartilhamento das soluções com a turma, todos os estudantes tiveram a oportunidade de atribuir significado à fórmula que relaciona o número de lados de um polígono com a soma dos seus ângulos internos, compreendendo a origem desse resultado (Moriconi, 2019).

A proposta didática na abordagem exploratória mostrou-se acessível, recuperando a confiança dos estudantes em aprender Matemática (Ponte, 2005). O foco não foi no resultado certo ou errado, mas sim no processo das atividades realizadas pelos estudantes em decorrência da exploração da TM (Ponte; Quaresma; Mata-Pereira, 2020). Compreendendo que isso garante que as aprendizagens aconteçam de forma mais eficaz e significativa (Canavarro, 2011), os estudantes desempenharam um papel ativo na mobilização dos raciocínios geométricos envolvidos. Ao final da aula eles usaram expressões como “Nunca pensei tanto”, “Estou cansado de tanto pensar”, “Até o ‘fulano’ fez alguma coisa hoje”, “Obtendo conhecimento aqui!”, “Tu é muito inteligente, moleque”, indícios de que a proposta exploratória foi desafiadora para eles e que se entusiasmaram com as próprias descobertas (Ponte, 2005; Canavarro, 2011).

Para o professor que se aproxima desta abordagem são muitos os desafios ou obstáculos. O planejamento prévio docente é uma das peças-chave para que a aula tenha mais chances de prosperar nessa abordagem (Stein *et al*., 2008). A começar pela escolha e preparação da TM, que tem uma responsabilidade grande em envolver os estudantes e permitir múltiplas estratégias de resolução (Ponte, 2005).

A escolha e a adaptação da tarefa, sem que o grau de exigência matemática fosse reduzido (Stein; Smith, 2009), mostraram-se desafiadoras. Maior ainda foi o desafio de antecipar diferentes maneiras de resolução, uma vez que, ao se elaborar um problema, a solução costuma surgir de imediato à mente. Em virtude dessa dificuldade, duas estratégias levantadas pelos grupos não foram contempladas previamente pela professora-pesquisadora. Quando surgiram em sala, pareceram óbvias, por estarem alinhadas à forma como foi apresentada e como os estudantes interpretaram a proposta. Caso essas possibilidades tivessem sido previstas no planejamento, a mediação poderia ter sido mais efetiva, valorizando o raciocínio elaborado pelos estudantes e oferecendo alternativas para a generalização da regularidade investigada (Canavarro, 2011). A professora-pesquisadora também sentiu a falta de ter um professor observador em sala, alguém com conhecimento da abordagem didática do Ensino Exploratório, para trocar informações ao final da primeira aula, um apoio para melhorar sua prática num segundo momento.

Durante a prática da aula nesta abordagem, outros desafios surgem: os múltiplos processos que o professor gerencia (Canavarro, 2011) e a forma como se lida com esses processos. Como mencionam Lorenzato (1995) e Abrantes (1999), ensinar em decorrência da liberdade investigativa dos estudantes exige mais segurança e destreza do professor, por lidar com situações imprevistas em tempo real.

Outro desafio identificado foi resistir à validação imediata das respostas (Canavarro, 2011), assim como o de saber formular perguntas que levassem à reflexão, especialmente diante de dúvidas e incertezas — algo que contrasta com a prática tradicional de apenas apontar erros e indicar diretamente uma solução. Em alguns momentos, a professora-pesquisadora reconhece que não fez as melhores perguntas ou acabou direcionando demais ao intervir. Soma-se a isso a atuação do professor regente que, por não conhecer a teoria do Ensino Exploratório, realizou intervenções mais diretas. Trata-se de uma maturidade docente que tende a se consolidar com a prática contínua no uso dessa metodologia (Canavarro, 2011).

As aprendizagens ocorrem em decorrência dos diálogos trocados entre os estudantes, e entre o professor e os estudantes. Assim, é um desafio para o professor saber conduzir essas discussões, que ocupam um papel de destaque dentro da abordagem didática do Ensino Exploratório (Ponte, 2005, 2014). Como colocado na fase da discussão coletiva, não só o professor precisa se preparar para esse momento, mas os estudantes também precisam aprender a discutir e a debater suas ideias perante a turma (Ponte, 2005). Compreender os diferentes caminhos que levaram à aprendizagem pretendida com a TM desenvolvida, ao invés de julgar as respostas encontradas.

Cabe registrar que a professora-pesquisadora teria se sentido mais segura caso o programa tivesse oferecido uma disciplina de metodologia de pesquisa. A ausência desse componente representou um desafio adicional, uma vez que a metodologia precisou ser aprendida sobretudo na prática, sem o suporte de um aporte teórico prévio.

A análise do conjunto de dados trouxe à professora-pesquisadora uma reflexão enquanto docente de Matemática. Caso estivesse de posse apenas dos registros escritos produzidos pelos grupos, observando unicamente a “resposta final” apresentada, não teria sido possível compreender como se deu a evolução dos estudantes ao longo da proposta. Também não seria possível identificar as conjecturas formuladas, os desafios enfrentados e os caminhos trilhados até a solução. Os registros escritos, isoladamente, não expressam com clareza de que forma os estudantes atribuíram significado às atividades desenvolvidas. Foi necessário analisar o conjunto das interações, para compreender de que maneira a TM contribuiu para a aprendizagem significativa de Geometria.

Os áudios gravados permitiram captar momentos de interação preciosos e estratégias que muitas vezes não puderam ser registradas no papel, mas que foram importantes para a significação do conteúdo. As observações feitas durante a prática, desde que apoiadas nas antecipações feitas durante o planejamento, contribuem para um olhar diferenciado e uma mediação mais efetiva nesse processo de apoio ao trabalho de grupo, além de ampliar o conhecimento do professor sobre as produções dos estudantes.

Em uma abordagem tradicional de ensino, o professor normalmente se apropria somente do “resultado”, da resposta dada a um exercício ou a uma avaliação; ele não se inteira do processo, não compreende como aquela produção foi construída. Dessa forma, não consegue mudar sua prática para que os estudantes construam significados próprios para o que está sendo ensinado. O Ensino Exploratório é uma oportunidade de aproximar o professor das necessidades dos estudantes, e dos estudantes de sentirem-se capazes de aprender Geometria.

Ao iniciar sua apropriação da abordagem didática do Ensino Exploratório, a professora-pesquisadora acreditava já desenvolver sua prática nessa perspectiva. No entanto, com o aprofundamento nos estudos, percebeu que deixava de realizar dois elementos importantes dessa abordagem: a mediação intencional, que valoriza o raciocínio dos estudantes, e a discussão coletiva. Na prática, promovia atividades em grupo, sem o planejamento adequado da tarefa desenvolvida, que se encerravam sem momentos de sistematização coletiva. Durante a circulação entre os grupos, limitava-se a sinalizar erros e acertos, sem promover a escuta ativa das ideias matemáticas que emergiam. Mesmo em aulas planejadas com a intenção de estimular a participação dos estudantes, as perguntas propostas eram, na maioria das vezes, fechadas, com respostas previamente esperadas e encaminhamentos já definidos (Ponte, 2005). Isso não significa que fossem aulas inadequadas, mas refletiam os conhecimentos pedagógicos que a docente possuía naquele momento de sua trajetória.

Desse modo, o estudo da abordagem didática do Ensino Exploratório da Matemática revelou-se uma oportunidade para que a professora-pesquisadora desenvolva conteúdos de Geometria de maneira a atribuir significado às atividades realizadas pelos estudantes, aproximando-se de suas produções e proporcionando, por meio de tarefas de exploração, aulas de Geometria baseadas na descoberta e não na memorização de fórmulas. (Ponte, 2005; Ponte; Quaresma; Branco, 2012).

No entanto, a abordagem didática do Ensino Exploratório é complexa e demanda tempo para que tanto o professor quanto os estudantes possam evoluir de forma significativa (Abrantes, 1999; Canavarro, 2011; Stein; Smith, 2009). A professora-pesquisadora teve a oportunidade de participar, inicialmente, como observadora em práticas desenvolvidas nessa abordagem e em reuniões com professores que a desenvolvem, além de se apoiar em materiais disponibilizados pelo Grupo de Investigação em Ensino de Matemática da UnB (GIEM[4]), tais como lives de professores-pesquisadores transmitidas pelo canal do grupo e outros vídeos

[4] O Grupo de Investigação em Ensino de Matemática da UnB (GIEM), vinculado ao Departamento de Matemática da UnB. Disponível em: https://giem.mat.unb.br/

disponíveis na plataforma. Essas vivências prévias lhe proporcionaram maior segurança para conduzir a aula no papel de professora regente.

Após essas experiências, ela ainda participou de outra prática, na qual pôde compartilhar o trabalho desenvolvido durante o estudo, além de vivenciar novas oportunidades de intervenção. Trata-se, portanto, de um processo que requer persistência e apoio, cuja frequência contribui para que o professor o desempenhe com maior efetividade, promovendo aprendizagens mais significativas (Abrantes, 1999; Ponte, 2005; Canavarro, 2011).

O tempo também se mostrou um fator limitante para que a professora-pesquisadora pudesse conhecer melhor as turmas, conforme havia planejado inicialmente. Essa limitação comprometeu a forma como a pesquisa foi iniciada, especialmente na aplicação dos instrumentos de levantamento de dados (avaliação diagnóstica e questionário inicial). Além disso, caso houvesse outras oportunidades para além desta, ela teria retornado para aplicar a Parte III da TM, que estabelecia conexões com outros conteúdos geométricos.

Para dar continuidade à pesquisa, a autora pretende aplicar a mesma TM a estudantes do 7º ano do ensino fundamental, a fim de avaliar os resultados obtidos nesse ano de escolaridade, quando os conteúdos trabalhados ainda estão mais recentes na memória dos estudantes. Considera-se também a possibilidade de reaplicação da tarefa no 1º ano do ensino médio, com turmas diferentes das envolvidas nesta pesquisa, a fim de analisar como os estudantes se envolvem com a proposta quando, teoricamente, já possuem os pré-requisitos necessários para sua realização, ou seja, sem apresentar a Parte I da TM, que faz o uso de material manipulável. Além disso, pretende propor a implementação da mesma proposta por outros professores de Matemática, com o objetivo de verificar se ela favorece maior segurança e confiança na prática docente ao abordar esse conteúdo de Geometria.

Outra perspectiva futura seria o desenvolvimento de uma tarefa inédita, construída de forma colaborativa no contexto de um grupo de pesquisa, a partir da aplicação de uma avaliação diagnóstica que permita identificar fragilidades conceituais dos estudantes e orientar a elaboração da proposta.

Para além da experiência vivenciada nesta pesquisa, a professora-pesquisadora reconhece a importância de difundir a abordagem didática do Ensino Exploratório no contexto escolar, especialmente no ensino de Geometria. Considerando que se trata de uma abordagem que demanda um planejamento minucioso por parte do professor, ela pretende, ao retornar à escola, propor a elaboração colaborativa de TMs a serem desenvolvidas ao longo dos bimestres. No contexto das escolas públicas, tais ações podem ser articuladas nas coordenações pedagógicas por área, favorecendo a criação de uma rede de apoio ao trabalho docente e garantindo que os estudantes tenham acesso às mesmas oportunidades, independentemente do professor de Matemática responsável pelas aulas. Além disso, essa iniciativa pode contribuir para manter a frequência e a continuidade do trabalho com os conteúdos de Geometria.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, Paulo. Investigações em geometria na sala de aula. **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. p. 153-167, 1999.

AGUIAR, Marcia; RIBEIRO, Alessandro Jacques. **Oportunidades de aprendizagem vivenciadas por professores acerca do raciocínio matemático**. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NUM MUNDO PÓS-PANDÊMICO. Anais. Campina Grande (PB) UEPB, 2024. Disponível em: https//www.even3.com.br/anais/6SIPEMAT/801493-OPORTUNIDADES-DE-APRENDIZAGEM-VIVENCIADAS-POR-PROFESSORES-ACERCA-DO-RACIOCINIO-MATEMATICO. Acesso em: 12.jun.2025.

ALVES, Sérgio; DALCIN, Mário. Mosaicos do plano. **Revista do Professor de Matemática**, v. 40, p. 3, 1999.

BARBOSA, Luciana Leal; MALTEMPI, Marcus. O percurso do concreto ao abstrato na Educação Matemática: uma ressignificação de acordo com John Dewey. **Revista Catarinense de Educação Matemática**, v. 3, n. 4, p. 1-14, 2024.

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. Portugal: Edições 70, 2020.

BIANI, Rosana Prado. Uma proposta didática para a geometria. *In*: LORENZATO, Sérgio (org.). **Aprender e ensinar geometria**. São Paulo: Mercado de Letras, 2015. p. 57–98.

BISSOLOTTI, Mariane de Lima; TITON, Flaviane Predebon. Diagnóstico sobre as dificuldades de aprendizagem da geometria no ensino médio e os potenciais elementos facilitadores. **CONTRAPONTO: Discussões científicas e pedagógicas em Ciências, Matemática e Educação**, v. 3, n. 4, p. 5-22, 2022. DOI: 10.21166/ctp.v3i4.2746. Disponível em: https://publicacoes.ifc.edu.br/index.php/contraponto/article/view/2746. Acesso em: 14.abr.2025.

BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola. Introdução. *In*: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola (org.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013. p. 23–29.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Relatório Nacional PISA 2012: resultados brasileiros**. São Paulo: Fundação Santillana/Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). Disponível em: https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2014/relatorio_nacional_pisa_2012_resultados_brasileiros.pdf. Acesso em: 27.fev.2025.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** – *BNCC*. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 31.out.2024.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

CALDATTO, Marlova; PAVANELLO, Regina. Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais. **Quadrante**, v. 24, n. 1, p. 103-128, 2015. DOI: 10.48489/quadrante.22913. Disponível em: https://revistas.rcaap.pt/index.php/quadrante/article/view/22913. Acesso em: 27.fev.2025.

CANAVARRO, Ana Paula. Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. **Educação e matemática**, n. 115, p. 11-17, 2011. Disponível em: https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1982. Acesso em: 14.set.2024.

CANAVARRO, Ana Paula; OLIVEIRA, Hélia; MENEZES, Luís. Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. 2012. DOI: 10400.19/1141. Disponível em: https://repositorio.ipv.pt/entities/publication/efaf5494-6ea1-499e-80b2-b8020a0089e0. Acesso em: 26.set.2024.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Prefácio. *In*: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola (org.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013. p. 11–22.

DISTRITO FEDERAL. Secretaria de Estado de Educação. **Currículo em movimento do Novo Ensino Médio**. Brasília, DF: SEEDF, 2020. Disponível em: https://www.educacao.df.gov.br/wp-conteudo/uploads/2019/08/Curriculo-em-Movimento-do-Novo-Ensino-Medio-V4.pdf. Acesso em: 31.out.2024.

DÖRR, Raquel Carneiro; NEVES, Regina da Silva Pina; RIBEIRO, Alessandro Jacques. Tarefas Matemáticas na Formação Continuada de Professores: Investigando a Construção e o Desenvolvimento de uma Tarefa Exploratória. **Perspectivas Da Educação Matemática**, v. 16, n. 42, p. 1-27, 2023. DOI: 10.46312/pem.v16i42.18819. Disponível em: https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/18819. Acesso em: 17.out.2024.

FONSECA *et al.*, Maria da Conceição Ferreira Reis. **O ensino de geometria na escola fundamental: três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais**. Autêntica Editora, 2009. e-book.

FRANTZ, Débora de Sales Fontoura da Silva; BISOGNIN, Vanilde. Ensino da Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental: um problema sistêmico. **Educar Mais**, v.6, n.1, p. 28-45, 2022. DOI: 10.15536/reducarmais.6.2022.2648. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/357542597_Ensino_da_Geometria_nos_anos_finais_do_Ensino_Fundamental_um_problema_sistemico. Acesso em: 26.fev.2025.

GARNICA, Antônio Vicente Marafioti. História oral e educação matemática. *In*: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola (org.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013. p. 87–109.

GAZIRE, Eliane Scheid. **O não resgate das geometrias**. 2000. Tese de Doutorado. [sn].

GIL, Antonio Carlos. **Pesquisa qualitativa básica**. Petrópolis: Vozes, 2025.

LAMONATO, Maiza; PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion. Discutindo resolução de problemas e exploração-investigação matemática: reflexões para o ensino de matemática. **Zetetiké**, v. 19, n. 2, p. 51-74, 2011. DOI: 10.20396/zet.v19i36.8646625. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646625. Acesso em: 27.jun.2025.

LIMA, Elon Lages. A soma dos ângulos (internos ou externos) de um polígono (convexo ou não). *In:* LIMA, Elon Lages. **Matemática e Ensino**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. p. 17-27.

LORENZATO, Sérgio. Por que não ensinar Geometria?. **Educação Matemática em revista**, v. 3, n. 4, p. 3-13, 1995. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/emr/article/view/1311. Acesso em: 25.set.2024.

MORAN, Mariana *et al*. O ensino da Geometria: entrevista com a professora Regina Maria Pavanello. **Educação Matemática em Revista**, v. 28, n. 79, p. 1-11, 2023. DOI: 10.37001/emr.v28i79.3431. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/emr/article/view/3431. Acesso em: 14.abr.2025.

MORICONI, Marco. Vamos dar uma volta. **Ciência Hoje**, [*s.l.*], CH 357, ago. 2019. Disponível em: https://cienciahoje.org.br/artigo/vamos-dar-uma-volta/. Acesso em: 14.abr.2015.

OCDE. **Resultados do PISA 2022 – Volume I.** Paris: OECD Publishing, 2023. Disponível em: https://www.oecd.org/en/publications/pisa-2022-results-volume-i_53f23881-en/full-report.html. Acesso em: 27.fev.2025.

OLIVEIRA, Hélia; CANAVARRO, Ana Paula; MENEZES, Luís. Casos multimédia sobre ensino exploratório da Matemática: do retrato de uma prática à formação de professores. **Educação e Matemática**, n. 139 e140, p. 53-60, 2016. DOI: 10400.19/4396. Disponível em: https://repositorio.ipv.pt/entities/publication/13fdceaa-7a2d-4c7b-ab76-2310521c00b0. Acesso em: 27.jun.2025.

PONTE, João Pedro da. Gestão curricular em Matemática. **O professor e o desenvolvimento curricular**, p. 11-34, 2005. DOI: 10451/3008. Disponível em: https://repositorio.ulisboa.pt/handle/10451/3008. Acesso em: 14.out.2024.

PONTE, João Pedro da. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática, Lisboa: Instituto de Educaçao da Universidade de Lisboa**, p. 13-27, 2014. DOI: 10451/15310. Disponível: https://repositorio.ulisboa.pt/handle/10451/15310. Acesso em: 19.fev.2025.

PONTE, João Pedro da; QUARESMA, Marisa; BRANCO, Neusa. Tarefas de exploração e investigação na aula de Matemática. **Educação Matemática em Foco**, v. 1, n. 1, p. 9-29, 2012. DOI: hdl.handle.net/10451/28726. Disponível em: https://repositorio.ulisboa.pt/handle/10451/28726. Acesso em: 30.jan.2025.

PONTE, João Pedro da; QUARESMA, Marisa; MATA-PEREIRA, Joana. Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula?. **Educação e Matemática**, n. 156, p. 7-11, 2020. DOI: hdl.handle.net/10451/44393. Disponível em: https://repositorio.ulisboa.pt/handle/10451/44393. Acesso em: 25.out.2024.

RABELO, Mauro. **Avaliação Educacional: fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

SANTOS, Ana Clara Almeida dos; ARAÚJO, Maria de Lourdes Haywanon Santos. A geometria no ENEM: reflexões sobre avaliação educacional e o ensino de matemática em uma perspectiva crítica. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 15, n. 40, p. 1-20, 2022. DOI: 10.46312/pem.v15i40.16158. Disponível em: https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/16158. Acesso em: 13.jun.2025.

STEIN, Mary Kay *et al*. Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. **Mathematical thinking and learning**, v. 10, n. 4, p. 313-340, 2008. DOI: 10.1080/10986060802229675. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/250890079_Orchestrating_Productive_Mathematical_Discussions_Five_Practices_for_Helping_Teachers_Move_Beyond_Show_and_Tell. Acesso: 01.out.2024.

STEIN, Mary Kay; SMITH, Margaret Schwan. Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: da investigação à prática. **Educação e Matemática**, v. 105, n. 5, p. 22-28, 2009. Disponível em: https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1809. Acesso em: 25.out.2024.

WAGNER, Eduardo. **Uma introdução às construções geométricas**. Rio de Janeiro: OBMEP, 2009.

APÊNDICE A — AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

Nome:____Turma:____

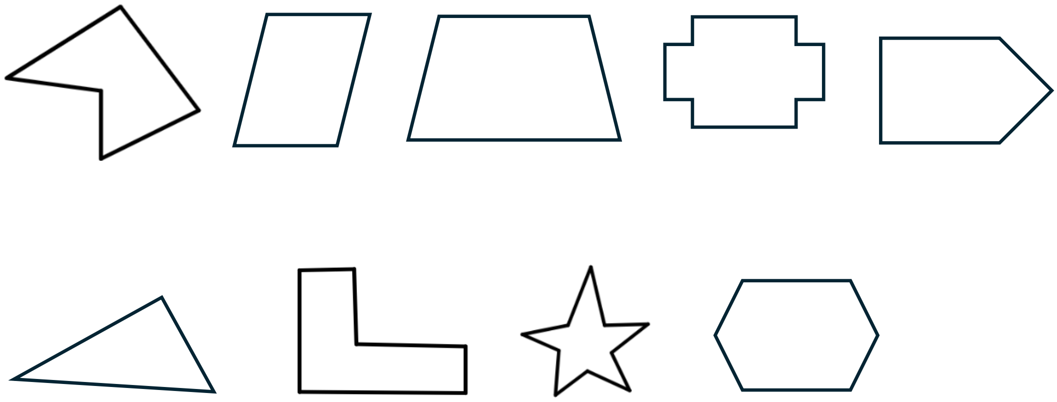
O objetivo desta atividade é verificar os saberes de vocês para planejarmos a próxima tarefa.

1) Desenhe polígonos com:

POLÍGONOS	
3 lados	
4 lados	
5 lados	
6 lados	

2) Nomeie os grupos de polígonos que você desenhou acima.

3) Identifique quais polígonos da imagem abaixo são convexos e quais são não convexos.



4) Nos polígonos desenhados na questão 1, identifique os seus ângulos internos.

5) Você sabe o que são polígonos regulares? Explique com suas palavras.

6) Desenhe um ângulo de meia volta e um ângulo de uma volta. Qual a medida em graus de cada um deles?

APÊNDICE B — QUESTIONÁRIO INICIAL

Questionário inicial – Seu contato com geometria

1. O que vem a sua cabeça quando se fala em geometria?
2. Você lembra de ter estudado algum conteúdo de geometria ano passado? Se sim, lembra qual conteúdo foi?
3. Você estudou algum conteúdo de geometria esse ano? Se sim, você lembra qual conteúdo foi? No primeiro ou no segundo semestre?
4. Você lembra de alguma atividade que fez nas aulas de geometria nos anos anteriores? Se sim, o que fez com que você lembrasse?

APÊNDICE C — TAREFA MATEMÁTICA: SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM POLÍGONO.

GRUPO: ____ TURMA: ____

Tarefa Matemática – Soma dos ângulos internos de um polígono.

Parte I – Soma dos ângulos internos de um triângulo.

Encontrar a soma dos ângulos internos de um triângulo usando recorte.

Recorte

- Faça um desenho de um triângulo qualquer em uma folha de papel. Marque e pinte os três ângulos internos com cores diferentes. Recorte o triângulo.
- Recorte as três pontas do triângulo e organize-as juntando os três ângulos coloridos.
- O que vocês observam? Registrem suas conclusões e responda:

  — Qual é o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo? Justifique sua resposta.

Parte II – Soma dos ângulos internos de um polígono.

Com base no que vocês fizeram na parte I, responda às questões a seguir registrando o máximo de informações possíveis.

a) Como poderíamos calcular o valor da soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo? Justifique sua resposta.

b) A partir das respostas anteriores, como você calcularia a soma dos ângulos internos de um pentágono (5 lados) convexo? Explique sua resposta.

c) Como você calcularia a soma dos ângulos internos de um hexágono (6 lados) convexo? Explique sua resposta.

d) Como você calcularia a soma dos ângulos internos de um polígono de 25 lados convexo? Explique sua resposta.

e) É possível observar alguma regra que relacione a quantidade de lados de um polígono convexo e a soma de seus ângulos internos? Explique sua resposta.

PARTE III – Ladrilhamento no plano:

Considere a situação abaixo:

A sogra de um professor de Matemática, cansada de sempre usar triângulos, quadrados ou hexágonos nos tapetes que fazia, tentou fazer um só de pentágonos.

- Impossível fazer esse tapete! - disse o professor.

Responde a sogra:

- Por que impossível? Você pode entender de Matemática, mas de tapetes quem entende sou eu!

Fonte: adaptado de https://rpm.org.br/cdrpm/40/1.htm.

A técnica empregada para a confecção de tapetes da sogra do professor consiste em costurar formas geométricas iguais repetidamente uma na outra, de forma que seu encaixe seja perfeito, sem deixar lacunas ou sobreposição; em matemática chama-se “ladrilhamento no plano”. Para tal propósito, são usados polígonos regulares.

a) Manipule os polígonos regulares recebidos e argumente com quais deles é possível confeccionar tapetes. Quais dos dois tem razão, a sogra ou o professor? Por quê?

b) Que relação existe entre os ângulos internos dos polígonos e os tapetes que são possíveis de confeccionar?

c) A próxima tentativa da sogra seriam tapetes usando octógonos regulares. Ao iniciar o trabalho, notou que não seria possível terminar o tapete somente com esses polígonos. Não quis desmanchar o que começou, estava determinada a encontrar outro polígono que se encaixasse perfeitamente ao tapete já iniciado. Ela deve procurar qual formato de polígono regular para concluir esse tapete? Justifique.

APÊNDICE D — RESOLUÇÃO DETALHADA DA TAREFA MATEMÁTICA

Parte I – soma dos ângulos internos de um triângulo

Usando o recurso didático do recorte, chega experimentalmente a um ângulo de 180º, ângulo de meia volta.

Parte II – Soma dos ângulos internos de um polígono.

a) Como você calcula o valor da soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo? Justifique sua resposta.

Espera-se que eles desenhem o quadrilátero e o decomponha em dois triângulos justapostos; percebendo que a soma dos seus ângulos internos será dada por 2.180º = 360º. Equivalente a soma dos ângulos internos dos triângulos que o decompõe.

b) A partir das respostas anteriores, como você calcularia a soma dos ângulos internos de um pentágono (5 lados) convexo? Explique sua resposta.

Decompor o pentágono em três triângulos justapostos e perceber que a soma dos ângulos internos é por 3.180º = 540º

c) Como você calcularia a soma dos ângulos internos de um hexágono (6 lados) convexo? Explique sua resposta.

Decompor o hexágono em quatro triângulos justapostos e perceber que a soma dos ângulos internos é por 4.180º= 720º

d) Como você calcularia a soma dos ângulos internos de um polígono de 25 lados convexo? Explique sua resposta.

Pelos exercícios anteriores, nota-se uma regularidade entre o número de lados dos polígonos e o número de triângulos da decomposição feita. Assim, podemos decompô-lo em (25 – 2) triângulos justapostos por diagonais que não se interceptam. Assim, a soma dos seus ângulos internos é dada por:

(25 –2).180º = 23.180º = 4.140º

e) É possível observar alguma regra que relacione a quantidade de lados de um polígono convexo e a soma de seus ângulos internos? Explique sua resposta.

Percebe-se que qualquer polígono pode ser decomposto em triângulos justapostos por diagonais que não se interceptam, mais precisamente, se tivermos um n-ágono, polígono com n lados, ele poderá ser decomposto em n-2 triângulos justapostos. Assim a soma dos seus ângulos internos será dada por (n – 2) 180º.

$$S_n = (n - 2).180^\circ$$

Parte III – Ladrilhamento no plano.

A técnica empregada para a confecção de tapetes da sogra do professor consiste em costurar formas geométricas iguais repetidamente uma na outra, de forma que seu encaixe seja perfeito, sem deixar lacunas ou sobreposição; em matemática chama-se “ladrilhamento no plano”. Para tal propósito, são usados polígonos regulares.

a) Manipule os polígonos regulares recebidos e argumente com quais deles é possível confeccionar tapetes. Quais dos dois tem razão, a sogra ou o professor? Por quê?

É possível ladrilhar o plano com triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos. O professor de matemática tem razão, pois os pentágonos deixam uma lacuna que não se pode fechar usando outro pentágono.

b) Que relação existe entre os ângulos internos dos polígonos e os tapetes que são possíveis de confeccionar?

Para ser possível ladrilhar o plano com polígonos regulares do mesmo tipo o ângulo interno do mesmo deve ser um divisor de 360º. Assim, segue o quadro abaixo dessa relação:

Polígono regular	***Número de lados (n)***	***Medida do ângulo interno*** (a_n)	(a_n) ***é divisor de 360º?***
Triângulo equilátero	3	$a_3 = \frac{(3-2).180°}{3}$= 60º	$60° = \frac{360°}{6}$
Quadrado	4	$a_4 = \frac{(4-2).180°}{4}$=90º	$90° = \frac{360°}{4}$
Pentágono regular	5	$a_5 = \frac{(5-2).180°}{5}$=108º	108º não é divisor de 360º
Hexágono regular	6	$a_6 = \frac{(6-2).180°}{6}$=120º	$120° = \frac{360°}{3}$
...	...	...	...
Octógono regular	8	$a_8 = \frac{(8-2).180°}{8}$=135º	135º não é divisor de 360º
n-ágono	n	$a_n = \frac{S_n}{n}$	$a_n = \frac{360°}{k}$

O que consiste em distribuir ao redor de cada vértice ou 6 triângulos equiláteros, ou 4 quadrados, ou 3 hexágonos regulares.

c) A próxima tentativa da sogra seriam tapetes usando octógonos regulares. Ao iniciar o trabalho, notou que não seria possível terminar o tapete somente com esses polígonos. Não quis desmanchar o que começou, então estava determinada a encontrar outro polígono que se encaixasse perfeitamente ao tapete já iniciado. Ela deve procurar qual formato de polígono regular para concluir esse tapete? Justifique.

O octógono regular possui ângulo interno de medida igual a 135º, e como vimos o 135º não é divisor de 360º. Com dois octógonos regulares, a soma dos ângulos justapostos em um mesmo vértice é 270°; com três octógonos regulares, essa soma passa a 405º.
Assim, fazendo 360º - 270º = 90º. Ou seja, faltam 90º para fechar a lacuna em torno de um vértice. Portanto, o polígono regular que possui ângulos internos iguais a 90º é o quadrado.