Universidade de Brasília

Propriedades Umbílicas de Subvariedades tipo-espaço de Codimensão Dois

Rafael Meira Carvalho Lino

Orientador: Dr. João Paulo dos Santos

Departamento de Matemática,
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Brasília, 30 de Julho de 2025

Agradecimentos

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro que viabilizou a realização deste trabalho.

Agradeço à UnB por me acolher e por ter sido a minha segunda casa.

Agradeço ao meu orientador, João Paulo dos Santos, por toda a paciência e ajuda oferecida e que, além de ser meu orientador, foi um excelente professor nas disciplinas de Geometria, contribuindo imensamente para a minha formação.

Agradeço ao professor Tarcísio Castro Silva pelas excelentes aulas de Geometria Diferencial e pelas inúmeras conversas interessantes e sérias. Agradeço também pela participação na banca da minha defesa.

Agradeço ao professor Felippe Soares Guimarães pela participação na banca de defesa e pela sugestão dos exemplos.

Agradeço aos meus amigos de mestrado, em especial Hildefonso Cruz, Pedro Dib, Pedro Cusinato, Pedro Luís, Matheus Rossi, por tornarem essa jornada mais leve e divertida.

Agradeço à minha psicóloga, Melissa Freitas, por me ajudar a lidar com os desafios emocionais e psicológicos que surgiram durante o mestrado.

Agradeço ao meu grande amigo Matheus Horácio, pois ele foi, durante toda a minha formação, uma fonte de inspiração e motivação. Agradeço também por ter me apresentado ao mundo da Geometria Diferencial, que hoje é minha paixão. Finalmente, agradeço por toda a ajuda e paciência que teve comigo durante o mestrado, especialmente na fase de escrita da dissertação.

Agradeço e peço desculpas à minha família, em especial Karla Meira, Benedito Sérgio, Nathalya Meira, Carmelita da Silva Meira, Carlos Junio, José de Oliveira Carvalho, Érica Martins, Miguel Meira, Laura Meira, Luiza Loureiro, Beatriz Lino, Lisa Lino, Vicente Lino por sempre me apoiarem, mesmo com a minha ausência.

Agradeço ao meu pai e melhor amigo, Benedito Sérgio, por sempre me ouvir e me apoiar quando precisei. É graças ao senhor que tive forças para continuar. Sem o seu apoio nem a graduação nem o mestrado teriam sido possíveis. Eu te amo infinitamente!

Agradeço à minha companheira, Iris Helena, por todos os apoios e puxões de orelha, que me ajudaram a virar uma pessoa mais responsável e menos desorganizada. Agradeço também por todo o amor e companheirismo, que me aqueceram nos momentos frios e difíceis. Eu te amo!

Agradeço, por fim, à minha mãe, Karla Meira Carvalho, que já não se encontra mais entre nós, mas que sempre estará em minha mente e em meu coração. Agradeço por todo o amor, carinho e apoio que me deu durante toda a minha vida. É graças a você que hoje sou quem sou. Eu te amo incondicionalmente e sinto muito a sua falta!

Resumo

Nesta dissertação, apresentamos um estudo sobre subvariedades umbílicas tipo-espaço, com codimensão 2, de variedades semi-riemannianas, tendo como base o artigo [Cipriani-Senovilla-Van der Veken, Results Math 72, 25-46 (2017)]. São introduzidas quantidades extrínsecas associadas com a deformação de subvariedades ao longo de direções normais, que serão relacionadas com propriedades umbílicas, tendo como principais ferramentas os tensor de cisalhamento total e o operador cisalhamento. No teorema principal, são mostradas condições necessárias e suficientes para que uma dessas subvariedades seja umbílica com respeito a uma direção normal, condições que estão relacionadas com o tensor de cisalhamento total. Com a existência dessa direção umbílica, é demonstrada sua unicidade e, no último caso visto, o lorentziano, mostra-se como determinar seu caráter causal.

Palavras-chave: umbílica, totalmente umbílica, pseudoumbílica, ortoumbílica, subgeodésica, variedade semi-riemanniana, subvariedade, codimensão 2.

Abstract

In this dissertation, we present a study of umbilical submanifolds of codimension 2 in semi-Riemannian manifolds, based on the article [Cipriani-Senovilla-Van der Veken, Results Math 72, 25-46 (2017)]. Extrinsic quantities associated with the deformation of submanifolds along normal directions are introduced, which will be related to umbilical properties, having as main tools the total shear tensor and the shear operator. In the main theorem, necessary and sufficient conditions for such submanifolds to be umbilical with respect to a normal direction are shown, conditions that are related to the total shear tensor. With the existence of this umbilical direction, its uniqueness is demonstrated and, in the last case considered, the lorentzian case, it is shown how to determine its causal character.

Keywords: umbilical, totally umbilical, pseudo-umbilical, orto-umbilical, subgeodesic, semi-Riemannian manifold, submanifold, codimension 2.

Sumário

Introdução

Dizemos que um ponto p em uma superfície S do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ é um ponto umbílico se as curvaturas principais de p coincidem neste ponto. Um resultado primordial em Geometria Diferencial acerca de pontos umbílicos é que uma superfície conexa em que todos os pontos são umbílicos só pode estar contida em um plano ou em uma esfera (veja [1], Proposição 4, seção 3.2). Damos o nome de totalmente umbílica às superfícies em que todos os pontos são umbílicos. Esse resultado é generalizado para subvariedades conexas M de dimensão $n \geq 2$ imersas em $\mathbb{R}^m$: se M for totalmente umbílica, então ou M está contida em um plano n-dimensional ou M está contida em uma esfera n-dimensional que está contida em algum plano $(n+1)$-dimensional. O resultado acima, que depende fortemente das propriedades especiais do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^m$, tem sua versão quando substituímos $\mathbb{R}^m$ por uma variedade completa, simplesmente conexa com curvatura constante $K_0 \neq 0$, ou seja, uma das outras formas espaciais, a saber, a *esfera* ou o *espaço hiperbólico.* No caso $K_0 > 0$, a esfera $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$, temos que se uma subvariedade conexa $M^n \subset S^m$ é totalmente umbílica, então ela é parte de uma n-esfera. Já para o caso hiperbólico H^m, em que $K_0 < 0$, se uma subvariedade $M^n \subset H^m$ conexa é totalmente umbílica, então ou M é um espaço hiperbólico H^n, uma esfera geodésica, uma horoesfera ou M é uma hipersuperfície equidistante de algum espaço hiperbólico H^{n+1}. Citamos como referência para as generalizações acima o Capítulo 7 do livro de Michael Spivak [13]. As subvariedades totalmente umbílicas são também consideradas em muitos outros casos, como em ambientes de curvatura não constante, onde evidenciaremos o caso semi-Riemanniano, que é o espaço ambiente deste trabalho. Tomando variedades lorentzianas, fundamentais para a teoria de Relatividade por modelarem espaços-tempo, citamos como exemplo os trabalhos [11] e [5], que faz um conexão interessante entre subvariedades totalmente umbílicas e superfícies de fóton, uma estrutura importante em relatividade. É baseado nesta conexão que temos, por exemplo em [3], uma abordagem de unicidade para o espaço-tempo de Schwarzschild dentre uma classe de espaços-tempo que possuem esferas de fóton. De acordo com [4, 9], o caso em que temos uma subvariedade tipo-espaço de codimensão 2 é de interesse especial do estudo em relatividade. Nesse contexto, temos a definição de *trapped surfaces* (superfícies "aprisionadas"), em que a propriedade de ser trapped está relacionada, por exemplo, com o decrescimento no volume da subvariedade em questão, ao longo de qualquer direção de evolução e tem relação com a localização de buracos negros sem a necessidade do completo conhecimento acerca do futuro do espaço-tempo em questão a longo prazo.

Neste trabalho, apresentamos um estudo de subvariedades riemannianas umbílicas com codimensão dois em variedades semi-riemannianas, tendo como base o artigo de Cipriani, Senovilla e Van der Veken [4]. Nesta referência, são introduzidos os conceitos de tensor de cisalhamento total e operador cisalhamento, que são respectivamente a parte livre de traço da segunda forma fundamental e do operador forma. O anulamento completo do tensor de cisalhamento implica que a subvariedade é totalmente umbílica, enquanto o anulamento do operador cisalhamento está relacionado com a umbilicidade da subvariedade com respeito a uma direção normal. No que segue, o trabalho se concentra em subvariedades tipo-espaço com codimensão 2, que trazem consigo o conceito de subvariedade ortoumbílica. Em seguida, é apresentado o teorema principal, que fornece uma série de afirmações equivalentes acerca da existência de uma direção normal umbílica não-nula, em termos de operadores cisalhamentos e do operador de cisalhamento total. Como consequência, são apresentadas condições para: comutatividade de operadores forma, existência e unicidade de direções em que a subvariedade é totalmente umbílica e uma caracterização para que a subvariedade seja ortoumbílica, esta última em termos de uma condição necessária e suficiente envolvendo a segunda forma fundamental e o campo de curvatura média. Por fim, os autores dedicam parte do trabalho ao caso de espaços ambientes lorentzianos, com destaque ao caráter causal de uma direção umbílica.

No Capítulo 1, apresentamos os conceitos fundamentais de Geometria Diferencial e da Teoria de Subvariedades. São definidos também operadores e quantidades que serão utilizados durante o decorrer deste trabalho. São eles: operador de Casorati $\mathcal{B}$; o operador $\mathcal{J}$, análogo ao de Casorati, mas anônimo; o tensor de cisalhamento total $\tilde{h}$; o operador cisalhamento e o cisalhamento escalar.

No Capítulo 2, descrevemos e damos uma primeira equivalência para os tipos de umbilicidade que uma subvariedade pode assumir, a saber: umbílica, pseudoumbílica, totalmente umbílica e ξ-subgeodésica. Em seguida, estudamos o caso em que a codimensão é igual a 2, introduzimos uma poderosa ferramenta, o operador dual de Hodge, e uma nova definição de umbilicidade, a de ser ortoumbílica, que está relacionada com o operador supracitado. Por fim, fornecemos, para esse caso codimensional, um resultado acerca da equivalência entre uma subvariedade ser ortoumbílica e ξ-subgeodésica.

No Capítulo 3 se encontra o principal teorema deste trabalho, que relaciona a noção padrão de umbilicidade com os operadores e quantidades definidas nos capítulos anteriores, junto com algumas consequências imediatas. Por fim, caracterizamos a ortoumbilicidade.

No Capítulo 4, o último deste trabalho, aplicamos os conceitos vistos acima para o caso lorentziano, onde a métrica tem índice $v = 1$. Encerramos, depois, com um exemplo de umbilicidade no espaço-tempo de Schwarzschild, em que a métrica de Schwarzschild está em coordenadas de Eddington-Finkelstein. De modo geral, basedo no artigo [12], abordamos um exemplo de umbilicidade para espaços-tempo esfericamente simétricos arbitrários.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Este capítulo tem como objetivo introduzir tanto conceitos fundamentais de Geometria Diferencial quanto operadores e quantidades relacionadas a estes conceitos, que serão fundamentais para o decorrer do trabalho.

A primeira seção começa com conceitos relacionados à variedades diferenciáveis, como vetores tangentes, campos de vetores, 1-formas e a generalização destes, os campos de tensores. Em seguida, introduzimos as variedades semi-riemannianas.

Na segunda seção, fazemos uma breve introdução à Teoria de Subvariedades, onde temos como referências os livros de Barret O'Neill [10] e de Manfredo Perdigão do Carmo [2] e o artigo [4].

Já na terceira seção, que tem como referência o artigo [4], introduzimos o *Operador de Casorati* $\mathcal{B}$ junto a um operador análogo $\mathcal{J}$, e em seguida definimos o tensor de cisalhamento total $\tilde{h}$ e o operador cisalhamento $\tilde{A}$, que são análogos livre de traço da segunda forma fundamental e do operador forma, respectivamente. Definimos também o cisalhamento escalar associado a um campo normal e, por fim, utilizaremos das relações entre operador forma e segunda forma fundamental e entre o tensor cisalhamento e operador cisalhamento, que estão conectados pelas métricas do ambiente e da subvariedade, a fim de mostrar que os operadores definidos independem dos referenciais normais adotados.

Dada uma variedade diferenciável M, denotaremos por $\mathfrak{F}(M)$ o conjunto das funções $C^{\infty}(M, \mathbb{R})$.

Começaremos com a noção de vetores tangentes.

Definição (D.1.1). Seja p um ponto de uma variedade M. Um *vetor tangente a M em p* é uma função real $v : \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R}$ que, para $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in \mathfrak{F}(M)$, é:

1. $\mathbb{R}$-linear:
$$v(af + bg) = av(f) + bv(g);$$

2. Leibniziana:
$$v(fg) = v(f)g + fv(g).$$

A cada ponto $p \in M$, seja T_pM o conjunto de todos os vetores tangentes a M em p. Temos que T_pM é um espaço vetorial sobre os números reais $\mathbb{R}$ com as seguintes operações:

1. Adição: dados $v, w \in T_pM$ e $f \in \mathfrak{F}(M)$, definimos
$$(v + w)(f) = v(f) + w(f),$$

2. Multiplicação por escalar: dados $f \in \mathfrak{F}(M)$ e $a \in \mathbb{R}$, definimos
$$(av)(f) = av(f).$$

Com isso, T_pM é chamado o *espaço tangente a M em p*.

O seguinte teorema é fundamental e será assumido, onde uma demonstração pode ser encontrada em [10]:

Definição (D.1.2) (Campos de Vetores). Um *campo de vetores* X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor tangente $X(p) \in T_pM$. Em termos de aplicações, X é uma aplicação diferenciável de M no fibrado tangente TM.

Se X é um campo de vetores em M e $f \in \mathfrak{F}(M)$, então Xf denota a função real em M dada por
$$(Xf)(p) = X(p)f, \text{ para todo } p \in M.$$

Dizemos que X é um campo diferenciável se Xf for diferenciável para toda $f \in \mathfrak{F}(M)$. Além disso, o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis em M, denotado por $\mathfrak{X}(M)$, forma um módulo sobre o anel $\mathfrak{F}(M)$ com as seguintes operações:

(1) Adição: dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, definimos a adição de campos por

$$(X+Y)(p) = X(p) + Y(p),$$

para todo $p \in M$.

(2) Multiplicação por escalar: dada $f \in \mathfrak{F}(M)$, definimos a multiplicação de um campo de vetores X pelo escalar f por

$$(fX)(p) = f(p)X(p),$$

para todo $p \in M$.

Dado $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ um sistema de coordenadas em $U \subset M$, então para cada $1 \leq i \leq n$, o campo de vetores ∂_i em U que leva cada p em $\partial_i(p) \overset{not}{=} \partial_i|_p$ é chamado o *i-ésimo campo coordenado de vetores* de ξ.

Teorema (T.1.1) (Teorema da Base). *Se $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ é um sistema de coordenadas de M em p, então os vetores coordenados $\partial_1|_p, \ldots, \partial_n|_p$ formam uma base para o espaço tangente T_pM e*

$$v = \sum_{i=1}^{n} v(x^i)\partial_i|_p$$

para todo $v \in T_pM$.

Esses campos de vetores são suaves, visto que $\partial_i(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$. Segue imediatamente do Teorema 1.1 que para cada campo de vetores X, temos

$$X = \sum_{i=1}^{n} X(x^i)\partial_i$$

em U.

Dado um espaço vetorial V real, podemos considerar seu espaço vetorial dual V^*, o espaço dos funcionais lineares de V em $\mathbb{R}$. Como T_pM é um espaço vetorial real, vamos considerar o seu dual $(T_pM)^*$, chamado de *espaço cotangente de M em p*. Como mencionado acima, os elementos de $(T_pM)^*$ são funcionais lineares de T_pM em $\mathbb{R}$ e são geralmente chamados de *covetores*. Com isso, vamos definir

1-formas em uma variedade diferenciável M, que são objetos duais a campos de vetores.

Definição (D.1.3) (1-formas). Uma 1-forma ω em uma variedade M é uma função que associa a cada ponto p um elemento ω_p do espaço cotangente $(T_pM)^*$. Em termos de aplicações, ω é uma aplicação de M no fibrado *cotangente* TM^*.

Desta forma, ω associa um número a cada vetor tangente e é linear nos vetores tangentes em cada ponto.

Se ω é uma 1-forma e X é um campo de vetores em M, denote por ωX a função real em M cujos valores em cada ponto p é o valor de $\omega(p)$ em $X(p)$, isto é, $(\omega X)(p) = \omega(p)(X(p))$. Uma 1-forma ω será diferenciável caso ωX for diferenciável, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Além disso, o conjunto das 1-formas diferenciáveis em M, denotado por $\mathfrak{X}^*(M)$, forma um módulo sobre o anel $\mathfrak{F}(M)$ com as seguintes operações:

(1) Adição: dadas $\omega, \theta \in \mathfrak{X}^*(M)$, definimos a adição de 1-formas por

$$(\omega + \theta)(p) = \omega(p) + \theta(p),$$

para todo $p \in M$.

(2) Multiplicação por escalar: dada $f \in \mathfrak{F}(M)$, definimos a multiplicação de uma 1-forma pelo escalar f por

$$(f\omega)(p) = f(p)\omega(p),$$

para todo $p \in M$.

Existe uma operação notável que converte funções em 1-formas:

Definição (D.1.4). A diferencial de $f \in \mathfrak{F}(M)$ é a 1-forma *df* tal que $(df)(v) = v(f)$ para cada vetor tangente v a M.

Claramente *df* é uma 1-forma: dado $p \in M$, a função $(df)_p : T_pM \to \mathbb{R}$ é linear e se $X \in \mathfrak{X}(M)$, então a função $(df)(X) = Xf$ é diferenciável.

Dado $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ um sistema de coordenadas em $U \subset M$, temos as 1-*formas coordenadas* $dx^1, \ldots, dx^n$ em U. Em cada ponto de U, essas formas fornecem a base dual aos campos de vetores coordenadas $\partial_1, \ldots, \partial_n$, visto que $dx^i(\partial_j) = \dfrac{\partial_{x^i}}{\partial_{x^j}} = \delta_{ij}$. Segue que para qualquer 1-forma ω

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega(\partial_i) dx^i$$

em U. Em particular, se $f \in \mathfrak{F}(M)$, como $df(\partial_i) = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$, então

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

em U.

Continuaremos agora com a definição de campos de tensores.

A noção de um campo de tensores em uma variedade generaliza as noções de funções reais, campos de vetores e 1-formas, e portanto fornece os meios matemáticos para descrever objetos mais complicados em uma variedade.

Seja $V_1, \ldots, V_s$ módulos sobre o anel K. Então $V_1 \times \ldots \times V_s$ é o conjunto de todas as s-uplas $(v_1, \ldots, v_s)$ com $v_i \in V_i$. As definições usuais de multiplicação por um elemento de K e adição, componente a componente, tornam $V_1 \times \ldots \times V_s$ um módulo sobre K, chamado *produto direto.*

Se V é um módulo sobre K, seja V^* o conjunto de todas as funções K-lineares de V para K. Novamente, temos que V^* é um módulo sobre K com as definições usuais de adição de funções e produto por elementos de K, onde chamamos V^* de *módulo dual* de V. Se $V_i = V$ para todo $i = 1, \ldots, n$, abreviamos a notação $V_1 \times \ldots \times V_s$ para V^s.

Definição (D.1.5). Para inteiros $r, s \geq 0$ não simultaneamente nulos, uma aplicação K-multilinear $A : (V^*)^r \times V^s \to K$ é chamado *tensor do tipo* (r, s) *sobre* V. (Aqui entendemos que $A : V^s \to K$ se $r = 0$ e $A : (V^*)^r \to K$ se $s = 0$).

O conjunto $\mathfrak{T}^r_s(V)$ de todos os tensores do tipo (r, s) sobre V é um módulo sobre K.

Um *campo tensorial* A em uma variedade M é um tensor sobre o $\mathfrak{F}(M)$-módulo $\mathfrak{X}(M)$. Portanto, se A tem tipo (r, s), então A é uma função $\mathfrak{F}(M)$-multilinear

$$A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{F}(M).$$

Assim, A é uma máquina mutilinear que, quando alimentada de r 1-formas $\theta^1, \ldots, \theta^r$ e de s campos vetoriais $X_1, \ldots, X_s$, produz uma função diferenciável

$$f = A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) \in \mathfrak{F}(M).$$

Aqui, θ^i ocupa a i-ésima posição *contravariante* e X_j ocupa a j-ésima posição *covariante.*

Novamente, o conjunto $\mathfrak{T}^r_s(M)$ de todos os campos tensoriais em M do tipo (r, s) é um módulo sobre $\mathfrak{F}(M)$.

Seja ξ um sistema de coordenadas em $U \subset M$, onde $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$. Se A for um campo tensorial (r, s) em U, então

$$A = \sum A^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}$$

Definição (D.1.6). Uma forma bilinear simétrica b em V espaço vetorial real de dimensão finita é

(1) *positiva* [negativa] *definida* quando $v \neq 0$ implica $b(v, v) > 0$ $[< 0]$.

(2) *positiva* [negativa] *semidefinida* quando $b(v, v) \geq 0$ $[\leq 0]$ para todo $v \in V$.

(3) *não-degenerada* quando $b(v, w) = 0$ para todo $w \in V$ implicar $v = 0$.

Se b é um forma bilinear simétrica em V, então para qualquer subespaço W de V a restrição $b|_{(W \times W)}$, denotada simplesmente por $b|_W$, é novamente simétrica e bilinear. Se b for [semi-]definida, então também será $b|_W$.

Definição (D.1.7). O *índice* v de uma forma simétrica bilinear b em V é o maior inteiro que é a dimensão de um subespaço $W \subset V$ ao qual $b|_W$ é negativa definida.

Portanto $0 \leq v \leq dim V$ e $v = 0$ se, e somente se, b for positiva semidefinida. A função $q : V \to \mathbb{R}$ dada por $q(v) = b(v, v)$ é chamada de *forma quadrática associada* a b. A forma quadrática associada geralmente é mais fácil de trabalhar que a forma b e nenhuma informação é perdida pois b pode ser reconstruída pela identidade de polarização

$$b(v, w) = \frac{1}{2}[q(v + w) - q(v) - q(w)].$$

Se $e_1, \ldots, e_n$ for uma base de V, a matriz $n \times n$ $b_{ij} = b(e_i, e_j)$ é chamada a matriz de b relativa a $e_1, \ldots, e_n$. Como b é simétrica, a matriz também é simétrica. Claramente a matriz determina b, pois

$$b\left(\sum_{i=1}^{n} v_i e_i, \sum_{j=1}^{n} w_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} v_i w_j.$$

Lema (L.1). Uma forma bilinear simétrica é não-degenerada se, e somente se, sua matriz com relação a uma (portanto a qualquer) base é invertível.

Demonstração: Seja $e_1, \ldots, e_n$ uma base para V. Se $v \in V$, então $b(v, w) = 0$ para todo $w \in V$ se, e somente se, $b(v, e_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Como (b_{ij}) é simétrica,

$$b(v, e_i) = b\left(\sum_{j=1}^{n} v_j e_j, e_i\right) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} v_j.$$

Portanto b é degenerada se, e somente se, existem números $v_1, \ldots, v_n$ não todos nulos tal que $\sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij} v_j = 0$. Mas isso é equivalente à dependência linear das colunas de (b_{ij}), isto é, a (b_{ij}) ser singular.

■

Definição (D.1.8). Um *produto escalar* g em um espaço vetorial V é uma forma bilinear simétrica não-degenerada em V.

Dado um espaço com produto escalar (V, g), pode acontecer que $q(v) = g(v, v)$ seja negativa, onde definimos a *norma* $|v|$ de um vetor como sendo $|g(v, v)|^{1/2}$. Assim, um vetor unitário u é um vetor de norma 1, isto é, $g(u, u) = \pm 1$.

A matriz de g relativa a uma base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ de V é diagonal. De fato,

$$g(e_i, e_j) = \delta_{ij}\varepsilon_j, \quad \text{onde } \varepsilon_j = g(e_j, e_j) = \pm 1.$$

Sempre que conveniente, ordenaremos os vetores de uma base ortonormal de forma que os sinais negativos (se tiver algum) apareçam primeiro na chamada *assinatura* $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.

Levando em consideração esses sinais, temos a *expansão ortonormal*, que será fortemente utilizada nesta dissertação: se $e_1, \ldots, e_n$ é um base ortonormal de V, com $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$, então cada $v \in V$ é expresso unicamente como

$$v = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(v, e_i) e_i.$$

Definição (D.1.9). Um *tensor métrico* g em uma variedade diferenciável M é um campo tensorial $(0, 2)$ simétrico e não degenerado em M com índice constante.

Em outras palavras, $g \in \mathcal{T}_2^0$ atribui suavemente a cada ponto $p \in M$ um produto escalar g_p no espaço tangente T_pM e o índice de g_p é o mesmo para todo p.

Definição (D.1.10). Uma *variedade semi-riemanniana* é uma variedade diferenciável M munida com um tensor métrico g.

O índice v de g_p em uma variedade semi-riemanniana M é chamado *índice de* M: $0 \leq v \leq n = dimM$. Se $v = 0$, M é dita *variedade riemanniana*, onde cada g_p é um produto interno (positivo definido) em T_pM. Se $v = 1$ e $n \geq 2$, M é dita *variedade lorentziana.*

Como g é não-degenerada, em cada ponto p de U aberto de M a matriz $(g_{ij}(p))$ é invertível e a sua matriz inversa é denotada por $(g^{ij}(p))$.

Além disso, como g é simétrica, $g_{ij} = g_{ji}$ e portanto $g^{ij} = g^{ji}$ para $1 \leq i, j \leq n$. Finalmente, em um sistema de coordenadas (U, x_i) em torno de p, o tensor métrico pode ser escrito como

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Para um inteiro v com $0 \leq v \leq n$, trocando os primeiros v sinais positivos para negativos, temos em $\mathbb{R}^n$ o tensor métrico

$$\langle v_p, w_p \rangle = -\sum_{i=1}^{v} v^i w^i + \sum_{j=v+1}^{n} v^j w^j,$$

de índice v, onde $v_p, w_p \in T_p\mathbb{R}^n \cong R^n$. Temos então o espaço *semi-Euclidiano* $\mathbb{R}^n_v$, que se reduz a $\mathbb{R}^n$ quando $v = 0$. Para $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n_1$ é chamado o espaço de *Minkowski* n-dimensional. O exemplo mais simples de espaço-tempo relativístico é o espaço de Minkowski de dimensão 4.

Como o tensor métrico em uma variedade semi-riemanniana pode assumir valores reais negativos, nulos ou positivos, para cada um desses valores teremos uma nomenclatura para os vetores que os atingem:

Definição (D.1.11). Um vetor tangente v a M é

$$\begin{aligned} \text{tipo-espaço, se } & \langle v, v \rangle > 0 \text{ ou } v = 0, \\ \text{tipo-nulo, se } & \langle v, v \rangle = 0 \text{ e } v \neq 0, \\ \text{tipo-tempo, se } & \langle v, v \rangle < 0. \end{aligned}$$

A categoria no qual um vetor tangente se encaixa é chamado de *caráter causal.* Essa terminologia deriva da teoria da relatividade e, particularmente no caso lorentziano, vetores tipo-nulo são chamados de *tipo-luz.*

Seja $q(v) = g(v, v)$ para cada vetor tangente v a M. Em cada ponto $p \in M$, q é a forma quadrática associada ao produto escalar em p. Portanto, q determina o tensor métrico. Note, contudo, que q não é um campo tensorial: dados $V \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in \mathfrak{F}(M)$, então $q(fV) = f^2 q(V) \in \mathfrak{F}(M)$. Classicamente, q é chamado *elemento de linha* de M e é denotado por ds^2. Em termos de um sistema de coordenadas,

$$q = ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i dx^j,$$

onde a justaposição de diferenciais denota a multiplicação usual de funções, ou seja,

$$q(V) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i(V) dx^j(V) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} V^i V^j.$$

Para a seguinte definição, usaremos como referência [6]:

Definição (D.1.12) (Espaço-tempo). Seja (M, g) uma variedade lorentziana. Diremos que M é *temporalmente orientável* se existir um campo de vetores tipo-tempo V definido globalmente em toda M (ou seja, $g(V(p), V(p))_p < 0$ para todo $p \in M$). Quando V está fixado, dizemos que M está *temporalmente orientada* por V.

Um *espaço-tempo* é uma variedade lorentziana conexa de dimensão maior ou igual a 2, temporalmente orientada. Os pontos de M são então denominados *eventos*.

Por fim, dada uma métrica, conseguimos relacionar campos de vetores a 1-formas e vice-versa via isomorfismo:

Definição (D.1.13) (Isomorfismos Musicais). Seja (M, g) uma variedade semi-riemanniana. Definimos o *isomorfismo bemol*

$$\flat : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$$

que associa cada campo de vetores X a uma 1-forma $X^\flat$ dada por $X^\flat(Y) = g(X, Y)$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Definimos também o *isomorfismo sustenido*

$$\sharp : \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

que associa cada 1-forma ω a um campo de vetores $\omega^\sharp$ dado por $g(\omega^\sharp, Y) = \omega(Y)$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

1.2 Preliminares da Teoria de Subvariedades

Subvariedade riemanniana de uma Variedade Semi-riemanniana

Considere $\mathcal{S}$ uma variedade orientável n-dimensional e $\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{M}$ uma imersão em uma variedade semi-riemanniana orientável $(n+k)$-dimensional $(\mathcal{M}, \overline{g})$. Como ϕ é diferenciável, podemos definir uma métrica em $\mathcal{S}$ dada por $g := \phi^*\overline{g}$, ou seja,

$$g(X,Y) := (\phi^*\overline{g})(X,Y) = \overline{g}(\phi_*(X), \phi_*(Y)), \text{ para todos } X, Y \text{ em } \mathfrak{X}(S),$$

onde vamos assumir que essa métrica é positiva definida em toda a $\mathcal{S}$, impondo que $(\mathcal{S}, g)$ seja uma variedade riemanniana orientável, sendo então uma subvariedade de $\mathcal{M}$ do tipo-espaço. Como a métrica foi definida em termos de ϕ, temos que $(\phi(S), \overline{g})$ e (S, g) são isométricas e vamos sempre identificá-las localmente.

Definição (D.1.14) (Elemento de Volume). Um elemento de volume em uma variedade semi-riemanniana M n-dimensional é uma forma suave ω tal que $\omega(e_1, \ldots, e_n) = \pm 1$ para qualquer referencial ortonormal em M.

Dessa maneira, se $\mathcal{S}^n$ é uma subvariedade de M^{n+k}, conseguimos definir $\omega^\perp$ elemento de volume no fibrado normal, onde $\omega^\perp(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \pm 1$, para qualquer referencial normal.

Fórmulas de Gauss e Weingarten

Se $\overline{\nabla}$ e ∇ são as conexões de Levi-Civita de $(\mathcal{M}, \overline{g})$ e $(\mathcal{S}, g)$ respectivamente, para $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ e $\xi \in \mathfrak{X}(S)^\perp$, temos as fórmulas de Gauss e Weingarten, respectivamente dados por

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + h(X,Y), \\ \overline{\nabla}_X \xi &= -A_\xi X + \nabla^\perp_X \xi. \end{aligned}$$

Aqui, $h : \mathfrak{X}(S) \times \mathfrak{X}(S) \to \mathfrak{X}(S)^\perp$ é a *segunda forma fundamental*, A_ξ é o *operador forma* ou *operador de Weingarten* associado a ξ e $\nabla^\perp$ é a conexão no fibrado normal.

Proposição (P.1.1). Os operadores forma são lineares sobre campos normais, ou seja, dados $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{X}^\perp(S)$ e $\lambda \in \mathfrak{F}(M)$, então

$$A_{\xi_1 + \lambda\xi_2} = A_{\xi_1} + \lambda A_{\xi_2}. \tag{1.1}$$

Demonstração: A fórmula de Weingarten nos diz que, para qualquer $X \in \mathfrak{X}(S)$, $A_\xi X = -(\overline{\nabla}_X \xi)^T$, onde

$$\begin{aligned} A_{\xi_1+\lambda\xi_2}X &= -(\overline{\nabla}_X(\xi_1+\lambda\xi_2))^T \\ &= -(\overline{\nabla}_X\xi_1 + \overline{\nabla}_X\lambda\xi_2)^T \\ &= -(\overline{\nabla}_X\xi_1)^T - (X(\lambda)\xi_2 + \lambda\overline{\nabla}_X\xi_2)^T \\ &= -(\overline{\nabla}_X\xi_1)^T - \lambda(\overline{\nabla}_X\xi)^T \\ &= A_{\xi_1}X + \lambda A_{\xi_2}X, \end{aligned}$$

visto que $\xi_2 \in \mathfrak{X}^\perp(M)$, onde o resultado segue da arbitrariedade de $X \in \mathfrak{X}(S)$.

■

A relação entre a segunda forma fundamental e o operador forma é dada por

$$g(A_\xi X, Y) = \overline{g}(h(X,Y),\xi) \tag{1.2}$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ e todo $\xi \in \mathfrak{X}(S)^\perp$.

Dado qualquer referencial ortonormal $\{e_1,\ldots,e_n\} \in \mathfrak{X}(S)$, o *campo vetorial curvatura média* $H \in \mathfrak{X}(S)^\perp$ é definido como

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(e_i,e_i). \tag{1.3}$$

Da definição acima, temos

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(e_i,e_i) \\ &= \frac{1}{n} tr(A_{\xi_i})\xi_i, \end{aligned}$$

onde

$$n\overline{g}(H,\xi) = tr(A_\xi) = \theta_\xi. \tag{1.4}$$

O termo θ_ξ será chamado, neste trabalho, de *expansão* de $\mathcal{S}$ ao longo de ξ e é a componente de H ao longo desse campo, até um fator n, ou, equivalentemente, o traço do operador forma associado a ξ.

Definição (D.1.15) (Fibrados Vetoriais). Um k-fibrado vetorial (E,π) sobre uma variedade M consiste de uma variedade E e uma aplicação suave $\pi : E \to M$ tal que

(1) Cada $\pi^{-1}(p)$, $p \in M$, é um espaço vetorial de dimensão k

(2) Para cada $p \in M$ existe uma vizinhaça U de p em M e um difeomorfismo

$$\varphi : U \times \mathbb{R}^k \to \pi^{-1}(U) \subset E$$

tal que para cada $q \in U$, a aplicação $v \to \varphi(q, v)$ é um isomorfismo linear de $\mathbb{R}^k$ sobre $\pi^{-1}(q)$.

Se M^n é uma subvariedade semi-riemanniana de $\widetilde{M}^{n+k}$, seja $NM = \bigcup_{p \in M} (T_pM)^{\perp}$ o conjunto de todos os campos normais a M. Seja $\pi : NM \to M$ a aplicação que leva cada $(T_pM)^{\perp}$ a p em M. Assim, (NM, π) é um k-fibrado vetorial sobre M, chamado de *fibrado normal* de M em $\widetilde{M}$.

Além disso, definimos o Primeiro Espaço Normal de uma imersão isométrica segundo [7]:

Definição (D.1.16). O Primeiro Espaço Normal de uma imersão isométrica $f : M^n \to M^m$ em $p \in M^n$ é o subespaço do espaço normal $NM(p)$ gerado pela imagem de sua Segunda Forma Fundamental, isto é

$$N_1(p) := span\{h(X, Y)|\, X, Y \in T_pM\}. \qquad \textbf{(1.5)}$$

1.3 Definições Específicas

Nesta seção apresentaremos algumas definições específicas presentes no trabalho [4].

Definição (D.1.17) (Operador de Casorati). Dado um referencial local ortonormal $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ em $\mathfrak{X}(S)^{\perp}$, isto é, $\overline{g}(\xi_i, \xi_j) = \varepsilon_i \delta_{ij}$ com $\varepsilon_i^2 = 1$ para todos $i, j \in I_k = \{p \in \mathbb{N}|\, p \leq k\}$, o operador de *Casorati* é definido como

$$\mathcal{B} = \sum_{i=1}^{k} \overline{g}(\xi_i, \xi_i) A_{\xi_i}^2. \qquad \textbf{(1.6)}$$

A definição acima não depende do referencial escolhido, como vamos mostrar:

Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ quaisquer, como A_ξ leva campos tangentes a S em campos tangentes a S, na base ortonormal de $\mathcal{T} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de T_pS, escrevemos

$$A_{\xi_j} X = \sum_{i=1}^{n} g(A_{\xi_j} X, e_i) e_i$$
$$A_{\xi_j} Y = \sum_{m=1}^{n} g(A_{\xi_j} Y, e_m) e_m,$$

onde observamos que

$$\begin{aligned}
g(A_{\xi_j}X, A_{\xi_j}Y) &= g\left(\sum_{i=1}^{n} g(A_{\xi_j}X, e_i)e_i, \sum_{m=1}^{n} g(A_{\xi_j}Y, e_m)e_m\right) \\
&= \sum_{i,m=1}^{n} g(A_{\xi_j}X, e_i)g(A_{\xi_j}Y, e_m)g(e_i, e_m) \\
&= \sum_{i,m=1}^{n} g(A_{\xi_j}X, e_i)g(A_{\xi_j}Y, e_m)\delta_{im} \\
&= \sum_{i=1}^{n} g(A_{\xi_j}X, e_i)g(A_{\xi_j}Y, e_i). \qquad (1)
\end{aligned}$$

Partindo da definição do Operador de Casorati e utilizando a equação (1), na base ortonormal $\mathcal{N} = \{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ normal a S, obtemos

$$\begin{aligned}
g(\mathcal{B}X, Y) &= g\left(\sum_{j=1}^{k} \overline{g}(\xi_j, \xi_j)A_{\xi_j}^2 X, Y\right) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \overline{g}(\xi_j, \xi_j)g(A_{\xi_j}X, A_{\xi_j}Y) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j g(A_{\xi_j}X, A_{\xi_j}Y) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j \left[\sum_{i=1}^{n} g(A_{\xi_j}X, e_i)g(A_{\xi_j}Y, e_i)\right] \\
&= \sum_{i}^{n} \left[\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j g(A_{\xi_j}X, e_i)g(A_{\xi_j}Y, e_i)\right]. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Como a segunda forma fundamental recebe dois campos tangentes a S e transforma em um campo normal a S, na base $\mathcal{N}$, escrevemos

$$\begin{aligned}
h(X, e_i) &= \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j \overline{g}(h(X, e_i), \xi_j)\xi_j \\
h(Y, e_i) &= \sum_{s=1}^{k} \varepsilon_s \overline{g}(h(Y, e_i), \xi_s)\xi_s.
\end{aligned}$$

e daí segue que

$$\begin{aligned}
\overline{g}(h(X, e_i), h(Y, e_i)) &= \overline{g}\left(\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j \overline{g}(h(X, e_i), \xi_j)\xi_j, \sum_{s=1}^{k} \varepsilon_s \overline{g}(h(Y, e_i), \xi_s)\xi_s\right) \\
&= \sum_{j,s=1}^{k} \varepsilon_j \varepsilon_s \overline{g}(h(X, e_i), \xi_j)\overline{g}(h(Y, e_i), \xi_s)\overline{g}(\xi_j, \xi_s)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j,s=1}^{k} \varepsilon_j \varepsilon_s \overline{g}(h(X,e_i),\xi_j)\overline{g}(h(Y,e_i),\xi_s)\varepsilon_j\delta_{js}$$
$$= \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j \overline{g}(h(X,e_i),\xi_j)\overline{g}(h(Y,e_i),\xi_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j g(A_{\xi_j}X,e_i)g(A_{\xi_j}Y,e_i).$$

Finalmente, somando em $i \in \{1,\dots,n\}$, a equação (2) nos fornece

$$\sum_{i}^{n} \overline{g}(h(X,e_i),h(Y,e_i)) = \sum_{i}^{n}\left[\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j g(A_{\xi_j}X,e_i)g(A_{\xi_j}Y,e_i)\right]$$
$$= g(\mathcal{B}X,Y),$$

que determina completamente $\mathcal{B}$, como desejávamos.

Definição (D.1.18). Seja $\varphi : (\mathcal{S},g) \to (\mathcal{M},\overline{g})$ uma imersão isométrica. Temos as seguintes definições:

- O *tensor de cisalhamento total* $\tilde{h}$, dado pela parte livre de traço da segunda forma fundamental:

$$\tilde{h}(X,Y) = h(X,Y) - g(X,Y)H.$$

- O *operador cisalhamento* associado a $\xi \in \mathfrak{X}(S)^{\perp}$, definido como a parte livre de traço do operador forma correspondente a ξ:

$$\tilde{A}_\xi = A_\xi - \frac{1}{n}\theta_\xi \mathbf{1},$$

  onde $\mathbf{1}$ denota o operador identidade.

- O *cisalhamento escalar* σ_ξ associado a $\xi \in \mathfrak{X}(S)^{\perp}$, definido, a menos de sinal, por

$$\sigma_\xi^2 = tr(\tilde{A}_\xi^2).$$

Notamos que, para todos $X,Y \in \mathfrak{X}(S)$ e todo $\xi \in \mathfrak{X}(S)^{\perp}$, o tensor de cisalhamento total $\tilde{h}$ e os operadores cisalhamento são relacionados por

$$g(\tilde{A}_\xi X,Y) = \overline{g}(\tilde{h}(X,Y),\xi).$$

Com efeito, partindo da definição de operador cisalhamento, temos

$$\begin{aligned}
g(\tilde{A}_\xi X, Y) &= g(A_\xi X - \frac{1}{n} n \overline{g}(H,\xi) X, Y) \\
&= g(A_\xi X, Y) - \overline{g}(H,\xi) g(X,Y) \\
&= \overline{g}(h(X,Y),\xi) - g(X,Y)\overline{g}(H,\xi) \\
&= \overline{g}(h(X,Y) - g(X,Y)H, \xi) \\
&= \overline{g}(\tilde{h}(X,Y),\xi).
\end{aligned}$$

Seja $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ o conjunto de todos os $(1,1)$-campos tensoriais em $\mathcal{S}$. Definimos o seguinte produto escalar positivo-definido em $\mathcal{T}(\mathcal{S})$:

$$\langle A, B\rangle = tr(AB), \tag{1.7}$$

para todos $A, B \in \mathcal{T}(\mathcal{S})$. Com essa definição, o cisalhamento escalar é tal que

$$\sigma_\xi^2 = tr(\tilde{A}_\xi^2) = tr(\tilde{A}_\xi \tilde{A}_\xi) = \langle \tilde{A}_\xi, \tilde{A}_\xi\rangle.$$

Dado um referencial ortonormal $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ em $\mathfrak{X}(S)^\perp$ o operador auto-adjunto

$$\mathcal{J} = \sum_{i=1}^{k} \overline{g}(\xi_i, \xi_i)\tilde{A}_\xi^2, \tag{1.8}$$

assim como o operador de Casorati, também é independente do referencial adotado. Primeiro mostramos que $\mathcal{J}$ é realmente auto-adjunto:

$$\begin{aligned}
g(\tilde{A}_{\xi_i} X, Y) &= g(A_{\xi_i} X - \frac{1}{n}\theta X, Y) \\
&= g(A_{\xi_i} X, Y) - \frac{1}{n}\theta g(X,Y) \\
&= g(X, A_{\xi_i} Y) - g(X, \frac{1}{n}\theta Y) \\
&= g(X, A_{\xi_i} - \frac{1}{n}\theta Y) \\
&= g(X, \tilde{A}_{\xi_i} Y).
\end{aligned}$$

Por esse motivo e pela equação (1.8), um cálculo análogo ao feito para o operador de Casorati mostra que

$$g(\mathcal{J}X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{g}(\tilde{h}(X, e_i), \tilde{h}(Y, e_i)) \tag{1.9}$$

para qualquer referencial local ortonormal tangente $\{e_1, \ldots, e_n\}$ e quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$.

Capítulo 2

Tipos de Umbilicidade e Subvariedades de Codimensão $k = 2$

Começamos o capítulo definindo tipos diferentes de umbilicidade e daremos certas equivalências para cada. Essa seção é de enorme importância, pois o restante do trabalho seguirá fazendo relação entre esses diferentes tipos, mas particularizando cada vez mais.

Na seção seguinte, particularizamos para o caso em que a codimensão é $k = 2$. Quando fazemos essa restrição, podemos evidenciar as possíveis opções para assinatura da métrica, além de ter duas direções normais bem definidas para cada ponto.

Em seguida, definiremos o operador dual de Hodge, que toma campos normais e leva em normais que são ortogonais aos tomados inicialmente. Como visto anteriormente, uma subvariedade $\mathcal{S}$ é pseudoumbílica quando é umbílica com respeito ao campo de vetores curvatura média H. Uma vez que a codimensão é 2 e o dual de Hodge de H é ortogonal a H, faz sentido pensar na umbilicidade com respeito a esse campo. Com isso, definiremos mais um tipo de umbilicidade, aparentemente deslocado, mas que aparece por conta das particularidades deste capítulo. Em seguida, relacionaremos esse novo tipo de umbilicidade com os outros tipos previamente considerados. Mais à frente, caracterizaremos a ortoumbilicidade.

As definições e resultados deste capítulo estão presentes no artigo base [4] desta dissertação.

No caso de uma hipersuperfície, a codimensão é igual a *um* e assim temos apenas uma direção normal definida. Logo, um ponto de uma hipersuperfície é umbílico com respeito ao operador forma associado da hipersuperfície. No caso em que a codimensão é maior que um, existem mais direções para que um ponto seja umbílico com respeito ao correspondente operador forma. No que segue, vamos definir alguns tipos de umbilicidade com respeito a um campo vetorial normal em um ponto, mas todas as definições fazem sentido quando estabelecidas pontualmente.

Definição (D.2.1). Considerando a imersão $\phi : (\mathcal{S}, g) \to (\mathcal{M}, \overline{g})$, dizemos que ela é

- *umbílica* com respeito a $\xi \in \mathfrak{X}(S)^{\perp}$ se A_ξ for proporcional à identidade;
- *pseudoumbílica* se for umbílica com respeito à curvatura média H;
- *totalmente umbílica* se for umbílica com respeito a todo $\xi \in \mathfrak{X}(S)^{\perp}$;
- ξ-*subgeodésica* se existir $\xi \in \mathfrak{X}(S)^{\perp}$ tal que $h(X,Y) = L(X,Y)\xi$ para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$, onde L é um $(0,2)$-campo tensorial em $\mathcal{S}$.

A noção de uma subvariedade $\mathcal{S}$ ser ξ-subgeodésica foi definida no artigo [12].

O exemplo a seguir mostra que podemos ter imersões que são umbílicas com respeito a uma dada direção mas não necessariamente com respeito a outras direções e consequentemente não sendo totalmente umbílica.

Exemplo 1 (Codimensão 2)**.** *Sejam $f : S^n \to M^{n+1}$ hipersuperfície imersa em uma variedade riemanniana e $F : M^{n+1} \to N^{n+2}$ hipersuperfície totalmente umbílica imersa em uma variedade riemanniana, com η normal a S em M e ξ normal a M em N. Chamando ∇, $\bar{\nabla}$ e $\tilde{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de S^n, M^{n+1} e N^{n+2}, respectivamente, temos $\tilde{f} = F \circ f : S^n \to N^{n+2}$, uma imersão de codimensão 2. Para campos $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ temos que*

$$\tilde{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_X Y + h_F(X,Y) = \bar{\nabla}_X Y + \overline{g}(X,Y)\xi \qquad (2.1)$$

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h_f(X,Y), \qquad (2.2)$$

implicando em

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h_f(X,Y) + \overline{g}(X,Y)\xi.$$

Note que, para o operador forma na direção de ξ, temos

$$\begin{aligned} g(A_\xi X, Y) &= \tilde{g}(h_{\tilde{f}}(X,Y), \xi) \\ &= \tilde{g}(h_f(X,Y) + \overline{g}(X,Y)\xi, \xi) \\ &= g(X,Y), \end{aligned}$$

mostrando que $A_\xi = Id$, onde concluímos que S é umbílica com respeito ao campo ξ. Mais geralmente, para $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$, obtemos

$$\begin{aligned} g(A_\eta X, Y) &= \tilde{g}(h_{\tilde{f}}(X,Y), \eta) \\ &= \tilde{g}(h_f(X,Y) + \overline{g}(X,Y)\xi, \eta) \\ &= \tilde{g}(h_f(X,Y), \eta) \\ &= g(A^f_\eta X, Y). \end{aligned}$$

Logo, $A_\eta = \lambda Id$ se, e somente se, $A^f_\eta = \lambda Id$. Segue que a imersão $\tilde{f}$ é umbílica com respeito a η se, e somente se, a imersão f é umbílica com respeito a η.

O próximo exemplo mostra uma subvariedade que é pseudoumbílica, mas que não é totalmente umbílica.

Exemplo 2 (Produto de esferas)**.** *Sejam $f_1 : S^n(r_1) \to \mathbb{R}^{n+1}$ e $f_2 : S^n(r_2) \to \mathbb{R}^{n+1}$, as esferas de raio r_1 e r_2, respectivamente. Denotaremos as métricas e conexões por $(\mathbb{R}^{n+1}, \bar{g}, \bar{\nabla})$, $(S^n(r_1), g_1, \nabla^1)$ e $(S^n(r_2), g_2, \nabla^2)$. Nas esferas, os vetores posição p_i são vetores normais, assim denotaremos por $N_i = \dfrac{p_i}{r_i}$ o vetor normal unitário em $p_i \in S^n(r_i)$, para $X, Y \in \mathfrak{X}(S^n(r_i))$. As segundas formas fundamentais são dadas por $h^i(X,Y) = \lambda_i N_i$. Por um lado,*

$$\lambda_i(X,Y) = \bar{g}(h^i(X,Y), N_i) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y - \nabla^i_X Y, N_i) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, N_i).$$

Por outro lado, $\bar{g}(Y, p_i) = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(S^n(r_i))$, onde a compatilibidade da métrica nos revela que, dado $X \in \mathfrak{X}(S^n(r_i))$,

$$\begin{aligned} 0 &= X\bar{g}(Y, p_i) \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, p_i) + \bar{g}(Y, \bar{\nabla}_X p_i) \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, p_i) + \bar{g}(Y, X), \end{aligned}$$

mostrando que $\bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, p_i) = -\bar{g}(X,Y)$. Logo, $\lambda_i(X,Y) = -\dfrac{1}{r_i}\bar{g}(X,Y)$ e consequentemente, $h^i(X,Y) = -\dfrac{1}{r_i}\bar{g}(X,Y)N_i$. Segue que $\bar{\nabla}_X Y = \nabla^i_X Y - \dfrac{1}{r_i^2}\bar{g}(X,Y)p_i$.

A variedade produto $S^n(r_1)\times S^n(r_2)$ *é imersa em* $\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1}$*, onde temos que a conexão de* $\mathbb{R}^{2n+2}$ *pode ser decomposta como* $\tilde{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_{X_1}Y_1 + \bar{\nabla}_{X_2}Y_2$ *e assim*

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla^1_{X_1}Y_1 + \nabla^2_{X_2}Y_2 - \frac{1}{r_1^2}g_1(X_1,Y_1)p_1 - \frac{1}{r_2^2}g_2(X_2,Y_2)p_2,$$

com $X, Y \in \mathfrak{X}(S^n(r_1)\times S^n(r_2))$*, onde* X_i *e* Y_i *são as projeções de* X *e* Y *nos espaços tangentes de* $S^n(r_i)$*, respectivamente para* $i = 1,2$*. Assim, a segunda forma fundamental para a imersão do produto é dada por*

$$h(X,Y) = -\frac{1}{r_1^2}g_1(X_1,Y_1) - \frac{1}{r_2^2}g_2(X_2,Y_2).$$

Vejamos que $S = S^n(r_1)\times S^n(r_2)$ *não é umbílica com respeito aos campos normais* $\tilde{p}_1 \cong p_1 + 0$ *e* $\tilde{p}_2 \cong 0 + p_2$*:*

$$\tilde{g}(A_{\tilde{p}_1}X,Y) = \tilde{g}(h(X,Y),\tilde{p}_1) = -\frac{1}{r_1^2}g_1(X_1,Y_1),$$
$$\tilde{g}(A_{\tilde{p}_2}X,Y) = -\frac{1}{r_2^2}g_2(X_2,Y_2).$$

Vamos agora calcular o campo de curvatura média H *de* S *para, em seguida, mostrar que* S *é pseudoumbílica em uma situação particular. Considere* $\{e_1,\dots,e_n,f_1,\dots,f_n\}$ *referencial tangente a* S*. Dessa forma, temos* $h(e_i,e_i) = -\frac{1}{r_1^2}p_1$ *e* $h(f_i,f_i) = -\frac{1}{r_2^2}p_2$*, onde*

$$H = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n h(e_i,e_i) + \sum_{i=1}^n h(f_i,f_i)\right) = -\frac{1}{r_1^2}p_1 - \frac{1}{r_2^2}p_2.$$

Segue que

$$\begin{aligned} g(A_H X,Y) &= \tilde{g}(h(X,Y),H) \\ &= \tilde{g}\left(-\frac{1}{r_1^2}g_1(X_1,Y_1)p_1 - \frac{1}{r_2^2}g_2(X_2,Y_2)p_2, -\frac{1}{r_1^2}p_1 - \frac{1}{r_2^2}p_2\right) \\ &= \frac{1}{r_1^4}g_1(X_1,Y_1) + \frac{1}{r_2^4}g_2(X_2,Y_2), \end{aligned}$$

onde tomando $r_1 = r_2 = r$*, obtemos* $A_H = -\frac{1}{r^4}Id$*, mostrando que* S *é pseudoumbílica*

A proposição a seguir apresenta algumas propriedades dos tipos de umbilicidade.

Proposição (P.2.1).

(1) $\mathcal{S}$ é umbílica com respeito a $\xi \in \mathfrak{X}(S)^\perp$ se, e somente se, $A_\xi = (\theta_\xi/n)\,\mathbf{1}$ ou, equivalentemente, $\tilde{A}_\xi = 0$.

(2) Se $\mathcal{S}$ é umbílica com respeito a $\xi \in \mathfrak{X}(S)^\perp$, então é umbílica com respeito a todo campo vetorial proporcional a ξ.

(3) $\mathcal{S}$ é totalmente umbílica se, e somente se, $h(X,Y) = g(X,Y)H$ para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ ou, equivalentemente, se e somente se $\tilde{h} = 0$.

(4) Se $\mathcal{S}$ é ξ-subgeodésica para algum $\xi \in \mathfrak{X}(S)^\perp$, o Primeiro Espaço Normal N^1 é no máximo unidimensional em cada ponto.

(5) Se $\mathcal{S}$ é ξ-subgeodésica, então todos os operadores forma são proporcionais em pontos onde ξ não se anula. Além disso, nos pontos onde $H \neq 0$, subvariedades ξ-subgeodésicas têm ξ proporcional a H.

(6) Se $\mathcal{S}$ é ξ-subgeodésica, então qualquer geodésica $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{S}$ de $(\mathcal{S}, g)$ satisfaz $\overline{\nabla}_{\gamma'}\gamma' = h(\gamma', \gamma') = f\xi$ para alguma função $f : I \to \mathbb{R}$, onde γ é subgeodésica com respeito a ξ em $(\mathcal{M}, \overline{g})$, o que explica a terminologia ξ-subgeodésica.

Demonstração:

(1) De fato, supondo $\mathcal{S}$ umbílica com respeito a ξ, temos por definição que $A_\xi = \lambda\mathbf{1}$, e tomando o traço em ambos os lados

$$\begin{aligned}\theta_\xi = tr(A_\xi) &= tr(\lambda\mathbf{1})\\ &= \lambda tr(\mathbf{1})\\ &= \lambda n,\end{aligned}$$

obtemos $\lambda = \theta_\xi/n$. A equivalência surge da definição de operador cisalhamento:

$$0 = \tilde{A}_\xi = A_\xi - \frac{\theta_\xi}{n}1$$

se, e somente se, $A_\xi = \dfrac{\theta_\xi}{n}$.

(2) A afirmação se mostra verdadeira pelo fato de que $A_{\lambda\xi} = \lambda A_\xi$, justificado pela Proposição 1.1.

(3) Supondo $\mathcal{S}$ totalmente umbílica, ou seja, $A_\xi = (\theta_\xi/n)\mathbf{1}, \forall \xi \in \mathcal{X}(\mathcal{S})$, temos pela equação (1.4)

$$A_\xi X = (\theta_\xi/n)X = \overline{g}(H,\xi)X.$$

Por um lado, temos

$$\begin{aligned} g(A_\xi X, Y) &= \overline{g}(H,\xi)g(X,Y) \\ &= \overline{g}(g(X,Y)H,\xi). \end{aligned}$$

Por outro lado, nos é dado que

$$g(A_\xi X, Y) = \overline{g}(h(X,Y),\xi),$$

e quando juntamos ambos os lados, segue que

$$\overline{g}(h(X,Y),\xi) = \overline{g}(g(X,Y)H,\xi),$$

e assim, pela arbitrariedade de ξ e pela não-degeneração da métrica $\overline{g}$, concluímos que

$$\overline{g}(h(X,Y) - g(X,Y)H,\xi) = 0,$$

que é equivalente a $h(X,Y) = g(X,Y)H$. Reciprocamente, se $h(X,Y) = g(X,Y)H$ para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$, então dado arbitrariamente $\xi \in \mathfrak{X}(S)^\perp$, temos que

$$\begin{aligned} \overline{g}(h(X,Y),\xi) &= g(X,Y)\overline{g}(H,\xi) \\ &= g(X,Y)\theta_\xi/n \end{aligned}$$

implica em

$$g(A_\xi X, Y) = g(\theta_\xi/nX, Y),$$

que é equivalente a $g(A_\xi X - \theta_\xi/nX, Y) = 0$ e, como g é não-degenerada, segue que

$$A_\xi X = (\theta_\xi/n)X,$$

ou, equivalentemente, $A_\xi = (\theta_\xi/n)\mathbf{1}$. Pela arbitrariedade de ξ , segue que $\mathcal{S}$ é totalmente umbílica. Para a equivalência, pela definição do operador total de cisalhamento temos

$$\tilde{h}(X,Y) = h(X,Y) - g(X,Y)H = 0$$

se, e somente se, $h(X,Y) = g(X,Y)H$, ou seja, é necessário e suficiente que $\mathcal{S}$ seja totalmente umbílica.

(4) Dado arbitrariamente $p \in \mathcal{S}$, como $h(X,Y) = L(X,Y)\xi$, temos que h é proporcional a ξ e assim

$$N_1(p) = \langle \xi \rangle,$$

mostrando que tem apenas um elemento na base.

(5) Como L é um tensor simétrico do tipo $(0,2)$, existe uma aplicação autoadjunta $\mathcal{L}$ tal que $L(X,Y) = g(\mathcal{L}X,Y) = g(X,\mathcal{L}Y)$, para todos $X,Y \in \mathfrak{X}(S)$. Como $\mathcal{S}$ é ξ-subgeodésica, $h(X,Y) = L(X,Y)\xi$ e dados $\eta_1,\eta_2 \in \mathfrak{X}(S)^\perp$, temos

$$\begin{aligned} g(A_{\eta_1}X,Y) &= \overline{g}(h(X,Y),\eta_1) \\ &= \overline{g}(L(X,Y)\xi,\eta_1) \\ &= g(\mathcal{L}X,Y)\overline{g}(\xi,\eta_1) \\ &= g(\overline{g}(\xi,\eta_1)\mathcal{L}X,Y), \end{aligned}$$

onde concluímos que $A_{\eta_1} = \overline{g}(\xi,\eta_1)\mathcal{L}$. Analogamente, temos que $A_{\eta_2} = \overline{g}(\xi,\eta_2)\mathcal{L}$. Observe que se $\overline{g}(\xi,\eta_1) = 0$ ou $\overline{g}(\xi,\eta_2) = 0$, então os operadores são trivialmente proporcionais. Agora, supondo $\overline{g}(\xi,\eta_i) \neq 0$ para $i = 1,2$, temos

$$\frac{A_{\eta_1}}{\overline{g}(\xi,\eta_1)} = \mathcal{L} = \frac{A_{\eta_2}}{\overline{g}(\xi,\eta_2)}$$

e assim $\overline{g}(\xi,\eta_2)A_{\eta_1} = \overline{g}(\xi,\eta_1)A_{\eta_2}$, para quaisquer $\eta_1,\eta_2 \in \mathfrak{X}(S)^\perp$. Logo, os operadores forma são sempre proporcionais.

Além disso, nos pontos onde $H \neq 0$, tomando o traço que define $\mathcal{S}$ ser ξ-subgeodésica, temos

$$nH = tr(h) = tr(L)\xi$$

onde concluímos que $H = \dfrac{tr(L)}{n}\xi$ e, portanto, H e ξ são proporcionais.

(6) Dada $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{S}$ geodésica de $(\mathcal{S}, g)$, temos que $\gamma' \in \mathfrak{X}(S)$ e assim

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{\gamma'}\gamma' &= h(\gamma', \gamma')\\ &= L(\gamma', \gamma')\xi\\ &= (L \circ \gamma')(t)\xi\\ &= f(t)\xi,\end{aligned}$$

onde bastou tomar $f = (L \circ \gamma')$.

■

Vamos assumir a partir de agora que a imersão $\phi : (S, g) \to (M, \overline{g})$ tem codimensão 2.

2.2 A estrutura do Fibrado Normal com fibras bidimensionais

Como consideramos φ subvariedade tipo-espaço, então no fibrado normal a métrica só pode ter uma das opções de assinatura: $(+,+), (-,+)$ e $(-,-)$. Denotaremos tais assinaturas por $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, onde $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \pm 1$ a fim de não especificar um deles. Além disso, $\{\xi_1, \xi_2\}$ denotará um referencial ortonormal em $\mathfrak{X}(S)^{\perp}$ com $\overline{g}(\xi_i, \xi_i) = \varepsilon_i, i \in \{1, 2\}$. Com respeito a esse referencial, a segunda forma fundamental h é decomposta como

$$h(X, Y) = \varepsilon_1 g(A_{\xi_1}X, Y)\xi_1 + \varepsilon_2 g(A_{\xi_2}X, Y)\xi_2 \tag{2.3}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$. De fato, escrevendo $h(X, Y) = a(X, Y)\xi_1 + b(X, Y)\xi_2$, pela ortonormalidade do referencial $\{\xi_1, \xi_2\}$, temos para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$

$$\begin{aligned}\overline{g}(h(X, Y), \xi_1) &= \overline{g}(a(X, Y)\xi_1, \xi_1) + \overline{g}(b(X, Y)\xi_2, \xi_1)\\ &= a(X, Y)\overline{g}(\xi_1, \xi_1)\\ &= a(X, Y)\varepsilon_1,\end{aligned}$$

por definição temos $\overline{g}(h(X,Y),\xi_1) = g(A_{\xi_1}X,Y)$ e $\varepsilon_1^2 = 1$, onde a multiplicação por ε_1 na equação acima nos fornece $a(X,Y) = \varepsilon_1 g(A_{\xi_1}X,Y)$. O mesmo processo feito com ξ_2 nos mostra que $b(X,Y) = \varepsilon_2 g(A_{\xi_2}X,Y)$, como prometido.

Naturalmente, podemos escrever o campo de vetores curvatura média em termos do referencial $\{\xi_1,\xi_2\}$. Por definição,

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(e_i,e_i),$$

onde $\{e_1,\ldots,e_n\}$ é um referencial qualquer de $\mathfrak{X}(S)$, e assim

$$\begin{aligned}
H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(e_i,e_i) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\varepsilon_1 g(A_{\xi_1}e_i,e_i)\xi_1 + \varepsilon_2 g(A_{\xi_1}e_i,e_i)\xi_2\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(\varepsilon_1\sum_{i=1}^{n} g(A_{\xi_1}e_i,e_i)\xi_1 + \varepsilon_2\sum_{i=1}^{n} g(A_{\xi_1}e_i,e_i)\xi_2\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(\varepsilon_1 tr(A_{\xi_1})\xi_1 + \varepsilon_2 tr(A_{\xi_2})\xi_2\right)\\
&= \frac{1}{n}(\varepsilon_1\theta_{\xi_1}\xi_1 + \varepsilon_2\theta_{\xi_2}\xi_2).
\end{aligned}$$

Vale resumir a equação acima e referenciá-la para uso posterior:

$$H = \frac{1}{n}(\varepsilon_1\theta_{\xi_1}\xi_1 + \varepsilon_2\theta_{\xi_2}\xi_2). \tag{2.4}$$

Usando o elemento de volume $\omega^{\perp}$ do fibrado normal, podemos definir para qualquer campo normal $\xi \in \mathfrak{X}(S)^{\perp}$ seu campo *dual de Hodge* $\star^{\perp}\xi \in \mathfrak{X}(S)^{\perp}$ por

$$\overline{g}(\star^{\perp}\xi,\eta) = \omega^{\perp}(\xi,\eta), \tag{2.5}$$

para todo $\eta \in \mathfrak{X}(S)^{\perp}$.

Proposição (P.2.2). O operador dual de Hodge é um operador *linear* que satisfaz

$$\star^{\perp}(\star^{\perp}\xi) = -\varepsilon_1\varepsilon_2\xi, \quad \overline{g}(\star^{\perp}\xi,\eta) = -\overline{g}(\xi,\star^{\perp}\eta), \tag{2.6}$$

para todo $\eta \in \mathfrak{X}(S)^{\perp}$.

Demonstração:

(1) $\star^{\perp}$ é linear:

Dados $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{X}(S)^\perp$ e $f \in \mathfrak{F}(M)$, temos que o campo $\star^\perp(f\xi_1 + \xi_2)$ é tal que, para todo $\eta \in \mathfrak{X}(S)^\perp$,

$$\begin{aligned}\overline{g}(\star^\perp(f\xi_1 + \xi_2)) &= \omega^\perp(f\xi_1 + \xi_2, \eta)\\ &= f\omega^\perp(\xi_1, \eta) + \omega^\perp(\xi_2, \eta)\\ &= f\overline{g}(\star^\perp\xi_1, \eta) + \overline{g}(\star^\perp\xi_2, \eta)\\ &= \overline{g}(f \star^\perp \xi_1 + \star^\perp\xi_2, \eta),\end{aligned}$$

o que implica em $\overline{g}(\star^\perp(f\xi_1 + \xi_2) - (f \star^\perp \xi_1 + \star^\perp\xi_2), \eta)$. Como a métrica é não-degenerada, segue que $\star^\perp(f\xi_1 + \xi_2) = f \star^\perp \xi_1 + \xi_2$.

(2) $\star^\perp(\star^\perp\xi) = -\varepsilon_1\varepsilon_2\xi$:

Considere um referencial ortonormal $\{\xi_1, \xi_2\} \subset \mathfrak{X}(S)^\perp$, isto é, $\overline{g}(\xi_i, \xi_j) = \varepsilon_i\delta_{ij}$. Suponha que o referencial esteja orientado de tal forma que $\omega^\perp(\xi_1, \xi_2) = 1$. Como $\star^\perp\xi_1 \in \mathfrak{X}(S)^\perp$, podemos escrever segundo o referencial como $\star^\perp\xi_1 = a_1\xi_1 + a_2\xi_2$. Note, primeiramente, que $\overline{g}(\star^\perp\xi_i, \xi_i) = \omega^\perp(\xi_i, \xi_i) = 0$. Em seguida, fazemos o produto interno de $\star^\perp\xi_1$ por ξ_1 segundo a métrica $\overline{g}$ e obtemos

$$\begin{aligned}0 &= \overline{g}(\star^\perp\xi_1, \xi_1)\\ &= \overline{g}(a_1\xi_1 + a_2\xi_2, \xi_1)\\ &= a_1\varepsilon_1,\end{aligned}$$

revelando que $a_1 = 0$. Agora, fazendo o produto de $\star^\perp\xi_1$ por ξ_2, temos, por um lado, que

$$\begin{aligned}\overline{g}(\star^\perp\xi_1, \xi_2) &= \omega^\perp(\xi_1, \xi_2)\\ &= 1.\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}\overline{g}(\star^\perp\xi_1, \xi_2) &= \overline{g}(a_2\xi_2, \xi_2)\\ &= a_2\varepsilon_2,\end{aligned}$$

onde concluímos que $a_2 = \varepsilon_2$. Logo, $\star^\perp\xi_1 = \varepsilon_2\xi_2$. Analogamente, escrevendo $\star^\perp\xi_2 = b_1\xi_1 + b_2\xi_2$, temos por definição que o produto de $\star^\perp\xi_2$ por

ξ_1 é

$$\overline{g}(\star^{\perp}\xi_2, \xi_1) = \omega^{\perp}(\xi_2, \xi_1) = -\omega^{\perp}(\xi_1, \xi_2) = -1,$$

onde

$$\begin{aligned} -1 &= \overline{g}(\star^{\perp}\xi_2, \xi_1) \\ &= \overline{g}(b_1\xi_1 + b_2\xi_2, \xi_1) \\ &= b_1\varepsilon_1, \end{aligned}$$

mostrando que $b_1 = -\varepsilon_1$. Além disso, o produto de $\star^{\perp}\xi_2$ por ξ_2 segundo a métrica $\overline{g}$ é tal que

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{g}(\star^{\perp}\xi_2, \xi_2) \\ &= \overline{g}(b_2\xi_2, \xi_2) \\ &= b_2\varepsilon_2, \end{aligned}$$

implicando em $b_2 = 0$. Logo, $\star^{\perp}\xi_2 = -\varepsilon_1\xi_1$. Agora que sabemos como o operador $\star^{\perp}$ age nos campos do referencial, tome $\xi = m\xi_1 + n\xi_2$ um campo normal arbitrário. Segue que

$$\star^{\perp}\xi = m \star^{\perp} \xi_1 + n \star^{\perp} \xi_2 = m\varepsilon_2\xi_2 - n\varepsilon_1\xi_1$$

e a aplicação repetida deste operador nos fornece

$$\begin{aligned} \star^{\perp}(\star^{\perp}\xi) &= m\varepsilon_2 \star^{\perp} \xi_2 - n\varepsilon_1 \star^{\perp} \xi_1 \\ &= -m\varepsilon_1\varepsilon_2\xi_1 - n\varepsilon_1\varepsilon_2\xi_2 \\ &= -\varepsilon_1\varepsilon_2(m\xi_1 + n\xi_2) = -\varepsilon_1\varepsilon_2\xi. \end{aligned}$$

Perceba que a escolha da orientação do referencial não afeta o resultado: se orientássemos de tal forma que $\omega^{\perp}(\xi_2, \xi_1) = 1$, teríamos, para $\star^{\perp}\xi_1 = a_1\xi_1 + a_2\xi_2$, que $\omega^{\perp}(\xi_1, \xi_2) = -1 = \overline{g}(\star^{\perp}\xi_1, \xi) = a_2\varepsilon_2$, isto é, $a_2 = -\varepsilon_2$, onde juntando ao fato de que $\overline{g}(\star^{\perp}\xi_1, \xi_1) = 0$, teríamos $a_1 = 0$ e consequentemente $\star^{\perp}\xi_1 = -\varepsilon_2\xi_2$. De maneira análoga, escrevendo $\star^{\perp}\xi_2 = b_1\xi_1 + b_2\xi_2$, como $1 = \overline{g}(\star^{\perp}\xi_2, \xi_1) = b_1\varepsilon_1$ e $0 = \overline{g}(\star^{\perp}\xi_2, \xi_2) = b_2\varepsilon_2$, teríamos $\star^{\perp}\xi_2 = \varepsilon_1\xi_1$. Prosseguindo, encontraríamos

$$\star^{\perp}(\star^{\perp}\xi_1) = \star^{\perp}(-\varepsilon_2\xi_2) = -\varepsilon_1\varepsilon_2\xi_1,$$

$$\star^\perp(\star^\perp \xi_2) = \star^\perp(\varepsilon_1 \xi_1) = -\varepsilon_1\varepsilon_2\xi_2,$$

os mesmos obtidos com a outra escolha de orientação, onde o resultado seguiria identicamente.

(3) $\overline{g}(\star^\perp \xi, \eta) = -\overline{g}(\xi, \star^\perp \eta)$:

Pelas simetria da métrica e antissimetria do elemento de volume $\omega^\perp$, temos

$$\overline{g}(\star^\perp \xi, \eta) = \omega^\perp(\xi, \eta) = -\omega^\perp(\eta, \xi) = -\overline{g}(\star^\perp \eta, \xi) = -\overline{g}(\xi, \star^\perp \eta).$$

■

Da demonstração da proposição acima, assumindo que $\{\xi_1, \xi_2\} \in \mathfrak{X}(S)^\perp$ está orientado de tal forma que $\omega^\perp(\xi_1, \xi_2) = 1$, podemos concluir que

(i) $\overline{g}(\star^\perp \xi, \xi) = 0$,

(ii) $\overline{g}(\star^\perp \xi, \star^\perp \xi) = \varepsilon_1\varepsilon_2 \overline{g}(\xi, \xi)$,

(iii) $\star^\perp \xi_1 = \varepsilon_2 \xi_2, \quad \star^\perp \xi_2 = -\varepsilon_1 \xi_1$.

De fato, as primeira e terceira equações já foram mostradas durante a prova da Proposição, enquanto para mostrar a segunda equação basta notar que

$$\overline{g}(\star^\perp \xi, \star^\perp \xi) = -\overline{g}(\star^\perp(\star^\perp \xi), \xi) = -\overline{g}(-\varepsilon_1\varepsilon_2 \xi, \xi) = \varepsilon_1\varepsilon_2 \overline{g}(\xi, \xi).$$

Da propriedade (iii) acima e da expressão de H no referencial $\{\xi_1, \xi_2\}$, temos que o campo dual de Hodge do campo de vetores curvatura média é expresso nesse referencial como

$$\star^\perp H = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{n} \left(\theta_{\xi_1} \xi_2 - \theta_{\xi_2} \xi_1\right) \tag{2.7}$$

pois

$$\begin{aligned}
\star^\perp H &= \frac{1}{n}\Big(\varepsilon_1 \theta_{\xi_1}(\star^\perp \xi_1) + \varepsilon_2 \theta_{\xi_2}(\star^\perp \xi_2)\Big) \\
&= \frac{1}{n}\left(\varepsilon_1 \theta_{\xi_1}(\varepsilon_2 \xi_2) + \varepsilon_2 \theta_{\xi_2}(-\varepsilon_1 \xi_1)\right) \\
&= \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{n}\left(\theta_{\xi_1} \xi_2 - \theta_{\xi_2} \xi_1\right).
\end{aligned}$$

O campo de vetores $\star^\perp H$ define direção com expansão nula. De fato,

$$\theta_{\star^\perp H} = tr A_{\star^\perp H} = n\overline{g}(H, \star^\perp H) = 0. \tag{2.8}$$

Definição (D.2.2). Seja $\phi : (\mathcal{S}, g) \to (\mathcal{M}, \overline{g})$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana em uma variedade semi-riemanniana com codimensão 2. A subvariedade é dita *ortoumbílica* se $A_{\star^\perp H} = 0$.

O operador cisalhamento segundo $\star^\perp H$ é, por definição, $\tilde{A}_{\star^\perp H} = A_{\star^\perp H} - \frac{1}{n}\theta_{\star^\perp H} = A_{\star^\perp H}$, pois a expansão de $\star^\perp H$ é nula segundo a equação (2.8). Dessa maneira, a condição $A_{\star^\perp} H = 0$ é equivalente a $\tilde{A}_{\star^\perp} H = 0$, onde o item (1) da Proposição 2.1 nos informa que a subvariedade $\mathcal{S}$ é umbílica com respeito a $\star^\perp H$, um campo ortogonal a H. Essa característica explica a terminologia *ortoumbílica*.

Uma pergunta surge: quando uma subvariedade pode ser simultaneamente pseudoumbílica e ortoumbílica? A resposta é dada pelo seguinte Lema:

Lema (L.2). Seja $\phi : (\mathcal{S}, g) \to (\mathcal{M}, \overline{g})$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana em uma variedade semi-riemanniana com codimensão 2. Se $\mathcal{S}$ for tanto pseudoumbílica quanto ortoumbílica, então

(1) $(\mathcal{S}, g)$ é totalmente umbílica, ou

(2) O campo de vetores curvatura média satisfaz $\overline{g}(H, H) = 0$.

Demonstração: Se $\mathcal{S}$ for totalmente umbílica, como a proposição lógica do Lema contém um *ou* inclusivo, assumir uma das sentenças como verdadeira torna a afirmação verdadeira por completo. Da mesma maneira, se $H = 0$, então $\overline{g}(H, H) = 0$ e a afirmação continua verdadeira. Agora resta mostrar que se $\mathcal{S}$ não for totalmente umbílica, isto é, $\tilde{h} \neq 0$, e se $H \neq 0$, então $\overline{g}(H, H) = 0$. Note que, ao assumir que $H \neq 0$, temos no referencial ortonormal $\{\xi_1, \xi_2\}$ de campos normais que $H = \frac{1}{n}(\varepsilon_1 \theta_{\xi_1} \xi_1 + \varepsilon_2 \theta_{\xi_2} \xi_2) \neq 0$ nos informa que pelo menos um entre θ_{ξ_1} e θ_{ξ_2} é não nulo. Dessa maneira, $\star^\perp H = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{n}(\theta_{\xi_1} \xi_2 - \theta_{\xi_2} \xi_1) \neq 0$ e $\{H, \star^\perp H\}$ constitui um referencial ortogonal de $\mathfrak{X}(S)^\perp$. Como $(\mathcal{S}, g)$ é ortoumbílica, ou seja, $A_{\star^\perp H} = 0$, temos para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ que

$$0 = g(A_{\star^\perp H} X, Y) = \overline{g}(h(X, Y), \star^\perp H),$$

mostrando que $h(X, Y) = L(X, Y)H$, onde L é um tensor simétrico 2-covariante (essa é só uma maneira mais bonita de dizer que $h(X, Y)$ é proporcional a H). Com isso, temos por definição que $\tilde{h}(X, Y) = h(X, Y) - g(X, Y)H = (L(X, Y) - g(X, Y))\, H$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$. Agora, como $(\mathcal{S}, g)$ é pseudoumbílica, ou seja, $\tilde{A}_H = 0$, temos que

$$0 = g(\tilde{A}_H X, Y)$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{g}(\tilde{h}(X,Y),H)\\
&= (L(X,Y) - g(X,Y))\,\overline{g}(H,H),
\end{aligned}
$$

impondo que $\overline{g}(H,H) = 0$, pois $\tilde{h} \neq 0$ (não totalmente umbílica) quer dizer que existem $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ tal que $L(X,Y) - g(X,Y) \neq 0$.

■

2.3 Equivalência entre subvariedades Ortoumbílicas e ξ-Subgeodésicas

Na seguinte proposição, provaremos que a propriedade de ser $\xi-$subgeodésica é equivalente à propriedade de ser ortoumbílica quando a codimensão é 2.

Proposição (P.2.3). Seja $\phi : (\mathcal{S}, g) \to (\mathcal{M}, \overline{g})$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana em uma variedade semi-riemanniana de codimensão 2. As seguintes condições são equivalentes em qualquer aberto onde $H \neq 0$:

(1) $\mathcal{S}$ é ortoumbílica;

(2) $\mathcal{S}$ é $\xi-$subgeodésica para algum campo não nulo $\xi \in \mathfrak{X}(S)^{\perp}$.

Demonstração: Suponha $\mathcal{S}$ ortoumbílica, ou seja, que $A_{\star^{\perp}H} = 0$. Assim

$$
0 = g(A_{\star^{\perp}H}X, Y) = \overline{g}(h(X,Y), \star^{\perp}H), \text{ para quaisquer } X, Y \in \mathfrak{X}(S),
$$

onde concluímos que $h(X,Y)$ está na direção de H, uma vez que a codimensão é 2, mostrando que $h(X,Y) = L(X,Y)H$, para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$. Como h é simétrica e bilinear, temos que L é um $(0,2)-$tensor simétrico e assim $\mathcal{S}$ é $H-$subgeodésica. Como $H \neq 0$ e $H \in \mathfrak{X}(S)^{\perp}$, basta tomar $\xi = H$ e o resultado segue.

Reciprocamente, suponha $\mathcal{S}$ subvariedade $\xi-$subgeodésica, com $\xi \in \mathfrak{X}(S)^{\perp}$ e $\xi \neq 0$. Por definição, $h(X,Y) = L(X,Y)\xi$ para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$, onde ξ é um campo normal a $\mathcal{S}$ não nulo. Segue que

$$
\begin{aligned}
g(A_{\star^{\perp}\xi}X, Y) &= \overline{g}(h(X,Y), \star^{\perp}\xi)\\
&= L(X,Y)g(\xi, \star^{\perp}\xi)\\
&= 0,
\end{aligned}
$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$. Como a métrica $\overline{g}$ é não degenerada, pela arbitrariedade de $Y \in \mathfrak{X}(S)$ temos $A_{\star^\perp \xi} X = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(S)$, onde a arbitrariedade de $X \in \mathfrak{X}(S)$ nos revela que $A_{\star^\perp \xi} = 0$. Note que ξ e H são proporcionais, pois

$$nH = tr(h) = tr(L)\xi,$$

implicando que $\star^\perp H = tr(L(X,Y)) \star^\perp \xi$ e mostrando que

$$A_{\star^\perp H} = A_{L(X,Y)\star^\perp \xi} = L(X,Y) A_{\star^\perp \xi} = 0,$$

isto é, $\mathcal{S}$ é ortoumbílica.

■

Note que se $H = 0$ no máximo em um conjunto com interior vazio, então a Proposição 2.3 é válida globalmente. De fato, seja $N = \{p \in \mathcal{S} | H(p) = 0\}$ onde $intN = \varnothing$. Temos então que o complementar de N, $N^c = \{p \in \mathcal{S} | H(p) \neq 0\}$, é um subconjunto denso de S. Vamos mostrar que N^c é aberto: considere $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ definida por $f(p) = \sum_{i=1}^{2} |\overline{g}(H(p), \xi_i(p))|^2$, onde $\{\xi_1, \xi_2\}$ é um referencial normal ortonormal. Temos que $f(p) = 0$ se, e somente se, $H(p) = 0$, implicando em $N^c = f^{-1}((0,\infty))$ e mostrando que N^c é aberto. Assim, a Proposição 2.3 vale em N^c, um aberto e denso. Supondo que (1) valha em N^c, então (2) vale em N^c, isto é, $h(X,Y) = L(X,Y)\xi$ em N^c. Pela continuidade na equação acima e por valer em um conjunto denso, temos que a mesma equação vale para toda $\mathcal{S}$. Analogamente, se vale para (2) em N^c, então vale para (1) em N^c. Isto é, $A_{\star^\perp H} = 0$ em N^c e, pela continuidade do operador forma em um conjunto denso, segue que $A_{\star^\perp H} = 0$ em toda $\mathcal{S}$. Segue que a proposição vale globalmente neste caso.

Corolário (C.2.1). *Em qualquer aberto onde $H \neq 0$ existe um campo de vetores não nulo $\xi \in \mathfrak{X}(S)^\perp$ tal que $A_{\star^\perp \xi} = 0$ se, e somente se, $\mathcal{S}$ é ortoumbílica.*

Demonstração: Se $\mathcal{S}$ é ortoumbílica, então $A_{\star^\perp H} = 0$ por definição, onde basta tomar $\xi = H$. Reciprocamente, suponha que exista um tal campo $\xi \in \mathfrak{X}(S)^\perp$ não nulo tal que $A_{\star^\perp \xi} = 0$. Em um referencial ortonormal $\{\xi_1, \xi_2\} \subset \mathfrak{X}(S)^\perp$, escrevendo $\xi = a\xi_1 + b\xi_2$, vemos que $\star^\perp \xi = a\varepsilon_2 \xi_2 - b\varepsilon_1 \xi_1 \neq 0$, pois pelo menos um entre a e b é não nulo e $\{\xi_1, \xi_2\}$ é um conjunto L.I.. Dessa maneira, $\{\xi, \star^\perp\}$ determina um referencial ortogonal em $\mathfrak{X}(S)^\perp$ e, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$, temos $0 = g(A_{\star^\perp \xi} X, Y) = \overline{g}(h(X,Y), \star^\perp \xi)$, mostrando que $h(X,Y) = L(X,Y)\xi$, onde L é um tensor simétrico 2-covariante. Segue que $\mathcal{S}$ é ξ-subgeodésica e, do item

(5) da Proposição 2.1, temos que ξ e H são proporcionais. Consequentemente, $\star^{\perp}\xi$ e $\star^{\perp}H$ são proporcionais, uma vez que a codimensão é 2. Logo, $A_{\star^{\perp}\xi} = 0$ implica $A_{\star^{\perp}H} = 0$, isto é, $\mathcal{S}$ é ortoumbílica.

■

Capítulo 3

O Teorema Principal e suas Consequências

Nesse capítulo, enunciaremos e demonstraremos o principal teorema deste trabalho. Ele relaciona a existência de uma direção umbílica não-nula com o operador cisalhamento e, consequentemente, com conceitos relacionados com este operador, como, por exemplo, o tensor de cisalhamento total $\tilde{h}$- relacionados pelas métricas do ambiente e da subvariedade, como visto no primeiro capítulo- e o cisalhamento escalar. O restante do capítulo segue com consequências do teorema, que traz implicações como a comutatividade de operadores formas e a unicidade da direção umbílica, quando esta existir. Encerramos, depois, caracterizando ortoumbilicidade.

As definições e resultados deste capítulo estão presentes no artigo base [4] desta dissertação.

3.1 Caracterização de ser Pseudoumbílica

O seguinte lema mostra uma relação entre os operadores $\mathcal{B}$ e $\mathcal{J}$:

Lema (L.3). Seja $\phi : (\mathcal{S}, g) \to (\mathcal{M}, \overline{g})$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana $n-$dimensional em uma variedade semi-riemanniana com codimensão 2. Sejam $\mathcal{B}$ o operador de Casorati e $\mathcal{J}$ o operador definido em (1.8). Então

$$\mathcal{B} - \mathcal{J} = 2\tilde{A}_H + \overline{g}(H, H)1, \tag{3.1}$$

onde H é o campo vetorial curvatura média. Além disso, $tr(\mathcal{B} - \mathcal{J}) = n\overline{g}(H, H)$.

<u>**Demonstração:**</u> Por um lado, ao considerar um referencial ortonormal $\{\xi_1, \xi_2\}$ de $\mathfrak{X}(S)^{\perp}$, temos que os operadores são escritos como

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \overline{g}(\xi_1, \xi_1)A^2_{\xi_1} + \overline{g}(\xi_2, \xi_2)A^2_{\xi_2},\\ \mathcal{J} &= \overline{g}(\xi_1, \xi_1)\tilde{A}^2_{\xi_1} + \overline{g}(\xi_2, \xi_2)\tilde{A}^2_{\xi_2},\end{aligned}$$

e a diferença entre eles é igual a

$$\begin{aligned}\mathcal{B} - \mathcal{J} &= \overline{g}(\xi_1, \xi_1)A^2_{\xi_1} + \overline{g}(\xi_2, \xi_2)A^2_{\xi_2} - \overline{g}(\xi_1, \xi_1)\tilde{A}^2_{\xi_1} + \overline{g}(\xi_2, \xi_2)\tilde{A}^2_{\xi_2}\\ &= \overline{g}(\xi_1, \xi_1)(A^2_{\xi_1} - \tilde{A}^2_{\xi_1}) + \overline{g}(\xi_2, \xi_2)(A^2_{\xi_2} - \tilde{A}^2_{\xi_2})\\ &= \sum_{i=1}^{2} \overline{g}(\xi_i, \xi_i)(A^2_{\xi_i} - \tilde{A}^2_{\xi_i}).\end{aligned}$$

Calculando a diferença entre os quadrados $A^2_{\xi_i} - \tilde{A}^2_{\xi_i}$, temos

$$\begin{aligned}A^2_{\xi_i} - \tilde{A}^2_{\xi_i} &= A^2_{\xi_i} - \left(A_{\xi_i} - \frac{1}{n}\theta_{\xi_i}1\right)^2\\ &= A^2_{\xi_i} - \left(A^2_{\xi_i} - \frac{2}{n}\theta_{\xi_i}A_{\xi_i} + \frac{1}{n^2}\theta^2_{\xi_i}1\right)\\ &= \frac{2}{n}\theta_{\xi_i}A_{\xi_i} - \frac{1}{n^2}\theta^2_{\xi_i}1.\end{aligned}$$

Por outro lado, temos pela expressão de H nesse referencial, dada na equação (2.4), que

$$\begin{aligned}A_H &= A_{\frac{1}{n}\left(\varepsilon_1\theta_{\xi_1}\xi_1 + \varepsilon_2\theta_{\xi_2}\xi_2\right)}\\ &= \frac{1}{n}\left(\varepsilon_1\theta_{\xi_1}A_{\xi_1} + \varepsilon_2\theta_{\xi_2}A_{\xi_2}\right),\end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}\overline{g}(H, H) &= \overline{g}\left(\frac{1}{n}\left(\varepsilon_1\theta_{\xi_1}\xi_1 + \varepsilon_2\theta_{\xi_2}\xi_2\right), \frac{1}{n}\left(\varepsilon_1\theta_{\xi_1}\xi_1 + \varepsilon_2\theta_{\xi_2}\xi_2\right)\right)\\ &= \frac{1}{n^2}\left[\overline{g}(\varepsilon_1\theta_{\xi_1}\xi_1, \varepsilon_1\theta_{\xi_1}\xi_1) + 2\overline{g}(\varepsilon_1\theta_{\xi_1}\xi_1, \varepsilon_2\theta_{\xi_2}\xi_2) + \overline{g}(\varepsilon_2\theta_{\xi_2}\xi_2, \varepsilon_2\theta_{\xi_2}\xi_2)\right]\\ &= \frac{1}{n^2}\left[\varepsilon_1^2\theta^2_{\xi_1} + \varepsilon_2^2\theta^2_{\xi_2}\right]\\ &= \frac{1}{n^2}\left(\varepsilon_1\theta^2_{\xi_1} + \varepsilon_2\theta^2_{\xi_2}\right).\end{aligned}$$

Juntando as igualdades, segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} - \mathcal{J} &= \varepsilon_1 (A_{\xi_1}^2 - \tilde{A}_{\xi_1}^2) + \varepsilon_2 (A_{\xi_2}^2 - \tilde{A}_{\xi_2}^2) \\
&= \varepsilon_1 \left(\frac{2}{n} \theta_{\xi_1} A_{\xi_1} - \frac{1}{n^2} \theta_{\xi_1}^2 1 \right) + \varepsilon_2 \left(\frac{2}{n} \theta_{\xi_2} A_{\xi_2} - \frac{1}{n^2} \theta_{\xi_2}^2 1 \right) \\
&= \frac{2}{n} \left(\varepsilon_1 \theta_{\xi_1} A_{\xi_1} + \varepsilon_2 \theta_{\xi_2} A_{\xi_2} \right) - \frac{1}{n^2} \left(\varepsilon_1 \theta_{\xi_1}^2 + \varepsilon_2 \theta_{\xi_2}^2 \right) 1 \\
&= 2A_H - \overline{g}(H, H) 1.
\end{aligned}$$

Como $\tilde{A}_H = A_H = \dfrac{1}{n} \theta_H 1$, temos que

$$\begin{aligned}
2A_H &= 2\tilde{A}_H + \frac{2}{n} \theta_H 1 \\
&= 2\tilde{A}_H + \frac{2}{n} n \overline{g}(H, H) 1 \\
&= 2\tilde{A}_H + 2\overline{g}(H, H) 1,
\end{aligned}$$

onde podemos finalmente concluir que

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} - \mathcal{J} &= 2A_H - \overline{g}(H, H) 1 \\
&= 2\tilde{A}_H + 2\overline{g}(H, H) 1 - \overline{g}(H, H) 1 \\
&= 2\tilde{A}_H + \overline{g}(H, H) 1.
\end{aligned}$$

Além disso, tomando o traço dos dois lados temos que

$$\begin{aligned}
tr(\mathcal{B} - \mathcal{J}) &= tr(2\tilde{A}_H + \overline{g}(H, H) 1) \\
&= 2tr(\tilde{A}_H) + \overline{g}(H, H) tr(1) \\
&= n\overline{g}(H, H),
\end{aligned}$$

pois $\tilde{A}_H$ é livre de traço.

■

Corolário (C.3.1). *Seja $\phi : (\mathcal{S}, g) \to (\mathcal{M}, \overline{g})$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana $n-$dimensional em uma varidade semi-riemanniana com codimensão 2. Então $\mathcal{S}$ é pseudoumbílica se, e somente se,*

$$\mathcal{B} - \mathcal{J} = A_H.$$

Ou equivalentemente, se e somente se $\mathcal{B} - \mathcal{J}$ for proporcional à identidade.

Demonstração: Pela definição de operador cisalhamento, segue da demonstração do lema acima que $\mathcal{B} - \mathcal{J} = 2A_H - \overline{g}(H, H)1$. Assim $\mathcal{B} - \mathcal{J} = A_H$ se, e somente se, $2A_H - \overline{g}(H, H)1 = A_H$, ou equivalentemente, $A_H = \overline{g}(H, H)1$. Logo, $\mathcal{S}$ é pseudoumbílica por definição.

■

3.2 Teorema Principal

Nesta seção enunciamos e provamos o principal teorema deste trabalho.

Teorema (T.3.1). *Seja $\phi : (\mathcal{S}, g) \to (\mathcal{M}, \overline{g})$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana $n-$dimensional em uma variedade semi-riemanniana com codimensão 2. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *$\mathcal{S}$ é umbílica com respeito a um campo vetorial normal não nulo $\xi \in \mathfrak{X}(S)^{\perp}$.*

(ii) *Quaisquer dois operadores cisalhamento são proporcionais entre si.*

(iii) *Existem $\tilde{A} \in \mathcal{T}(\mathcal{S})$ e $G \in \mathfrak{X}(S)^{\perp}$ tais que $\langle \tilde{A}, \tilde{A} \rangle = n^2$ e*

$$\tilde{h}(X, Y) = g(\tilde{A}X, Y)G, \tag{3.2}$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$.

(iv) *Os componentes de quaisquer dois operadores cisalhamento $\tilde{A}_{\eta_1}$ e $\tilde{A}_{\eta_2}$ com respeito a qualquer referencial tangente satisfazem*

$$(\tilde{A}_{\eta_1})^i_j (\tilde{A}_{\eta_2})^r_s = (\tilde{A}_{\eta_2})^i_j (\tilde{A}_{\eta_1})^r_s, \tag{3.3}$$

para todos $i, j, r, s = 1 \ldots, n$.

(v) *Quaisquer dois operadores cisalhamento $\tilde{A}_{\eta_1}$ e $\tilde{A}_{\eta_2}$ satisfazem*

$$\langle \tilde{A}_{\eta_1}, \tilde{A}_{\eta_1} \rangle^2 = \sigma^2_{\eta_1} \sigma^2_{\eta_2}. \tag{3.4}$$

Demonstração:

$(i) \implies (ii)$. Suponha $\mathcal{S}$ ortoumbílica com respeito a um campo normal não nulo $\xi \in \mathfrak{X}(S)^{\perp}$, isto é, $\tilde{A}_{\xi} = 0$. Considere $\eta \in \mathfrak{X}(S)^{\perp}$ tal que $\{\xi, \eta\} \subset \mathfrak{X}(S)^{\perp}$

é um conjunto linearmente independente. Então, dados $\eta_1, \eta_2 \in \mathfrak{X}(S)^\perp$, temos que existem funções a_1, a_2, b_1, b_2 tais que

$$\eta_1 = a_1\xi + b_1\eta$$
$$\eta_2 = a_2\xi + b_2\eta.$$

Dessa forma, $\tilde{A}_{\eta_1} = \tilde{A}_{a_1\xi+b_1\eta} = a_1\tilde{A}_\xi + b_1\tilde{A}_\eta = b_1\tilde{A}_\eta$ e $\tilde{A}_{\eta_2} = b_2\tilde{A}_\eta$ segundo o mesmo processo, onde notamos que

$$b_2\tilde{A}_{\eta_1} = b_2b_1\tilde{A}_\eta = b_1b_2\tilde{A}_\eta = b_1\tilde{A}_{\eta_2}.$$

Nos pontos onde b_1 ou b_2 se anulam, a proporcionalidade é trivial. Podemos considerar os pontos onde b_1 e b_2 não se anulam, donde segue que $\tilde{A}_{\eta_1} = \frac{b_1}{b_2}\tilde{A}_{\eta_2}$, como queríamos.

$(ii) \implies (iii)$. Seja $\{\xi_1, \xi_2\} \subset \mathfrak{X}(S)^\perp$ um referencial ortonormal tal que $g(\xi_1, \xi_1) = \varepsilon_1$ e $g(\xi_2, \xi_2) = \varepsilon_2$. Como por hipótese $\tilde{A}_{\xi_1}$ e $\tilde{A}_{\xi_2}$ são proporcionais, então existem $\tilde{A} \in \mathcal{T}(\mathcal{S})$ e funções λ_1 e λ_2 tais que $\tilde{A}_{\xi_1} = \lambda_1\tilde{A}$ e $\tilde{A}_{\xi_2} = \lambda_2\tilde{A}$. De fato, a proporcionalidade entre os operadores nos fornece funções f_1 e f_2 tais que $f_1\tilde{A}_{\xi_1} = f_2\tilde{A}_{\xi_2} = \tilde{A} \in \mathcal{T}(\mathcal{S})$. Nos pontos onde f_1 ou f_2 se anulam, o campo $\tilde{A}$ satisfaz a igualdade trivialmente. Podemos considerar então os pontos onde f_1 e f_2 não se anulam para escrever

$$\tilde{A}_{\xi_1} = \frac{1}{f_1}\tilde{A} = \lambda_1\tilde{A},$$
$$\tilde{A}_{\xi_2} = \frac{1}{f_2}\tilde{A} = \lambda_2\tilde{A}.$$

Por expansão ortonormal, temos

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(X,Y) &= \varepsilon_1\overline{g}(\tilde{h}(X,Y),\xi_1)\xi_1 + \varepsilon_2\overline{g}(\tilde{h}(X,Y),\xi_2)\xi_2 \\
&= \varepsilon_1 g(\tilde{A}_{\xi_1}X,Y)\xi_1 + \varepsilon_2 g(\tilde{A}_{\xi_2}X,Y)\xi_2 \\
&= \varepsilon_1 g(\lambda_1\tilde{A}X,Y)\xi_1 + \varepsilon_2 g(\lambda_2\tilde{A}X,Y)\xi_2 \\
&= g(\tilde{A}X,Y)(\varepsilon_1\lambda_1\xi_1 + \varepsilon_2\lambda_2\xi_2)
\end{aligned}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$, onde é suficiente tomar G na direção de $\varepsilon_1\lambda_1\xi_1 + \varepsilon_2\lambda_2\xi_2 \in \mathfrak{X}(S)^\perp$.

Seja $k^2 = tr(\tilde{A}^2)$. Para que tenhamos $tr(\tilde{A}^2) = n^2$ podemos reescalar $\tilde{A}$, isto é, fazendo $\tilde{A}_{\text{scal}} = \frac{n}{k}\tilde{A}$. Assim, $tr(\tilde{A}^2_{\text{scal}}) = \langle\frac{n}{k}\tilde{A}, \frac{n}{k}\tilde{A}\rangle = \frac{n^2}{k^2}\langle\tilde{A},\tilde{A}\rangle = n^2$.

Contudo, teríamos

$$g(\tilde{A}_{\text{scal}}X, Y)G = g\left(\frac{n}{k}\tilde{A}X, Y\right)G = \frac{n}{k}g(\tilde{A}X, Y)G = \frac{n}{k}\tilde{h}(X, Y).$$

Para ajustar isso, podemos reescalar G, tomando $G_{\text{scal}} = \dfrac{k}{n}G$ teremos

$$\begin{aligned} g(\tilde{A}_{\text{scal}}X, Y)G_{\text{scal}} &= g\left(\frac{n}{k}\tilde{A}X, Y\right)\frac{k}{n}G \\ &= g(\tilde{A}X, Y)G \\ &= \tilde{h}(X, Y). \end{aligned}$$

$(iii) \implies (i)$. Considere o referencial $\{\xi_1, \xi_2\}$ orientado de tal forma que $\omega^\perp(\xi_1, \xi_2) = 1$. Se $G = 0$, então para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ tem-se $0 = \tilde{h}(X, Y) = h(X, Y) - g(X, Y)H$, onde $\mathcal{S}$ é totalmente umbílica e afirmação é válida para qualquer campo normal não nulo que quisermos tomar. Suponha $G \neq 0$ e escrevamos $G = \alpha(\varepsilon_1\lambda_1\xi_1 + \varepsilon_2\lambda_2\xi_2)$, onde α é uma função diferenciável não nula. Então $\star^\perp G$ é não nulo, pois do contrário teríamos $\star^\perp G = \alpha(\varepsilon_1\lambda_1 \star^\perp \xi_1 + \varepsilon_2\lambda_2 \star^\perp \xi_2) = \alpha\varepsilon_1\varepsilon_2(\lambda_1\xi_2 - \lambda_2\xi_1) = 0$, o que acontece se, e somente se, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, contradizendo a suposição de que $G = 0$. Por hipótese, $\tilde{h}$ está na direção de G, onde para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{g}(\tilde{h}(X, Y), \star^\perp G) \\ &= g(\tilde{A}_{\star^\perp G}X, Y), \end{aligned}$$

implicando em $\tilde{A}_{\star^\perp G} = 0$, isto é, $\mathcal{S}$ é umbílica com respeito a $\star^\perp G \in \mathfrak{X}(S)^\perp$, que é não nulo.

$(ii) \iff (iv)$**.** Suponha que quaisquer dois operadores cisalhamento sejam proporcionais entre si. Então dados $\eta_1, \eta_2 \in \mathfrak{X}(S)^\perp$ existe λ_{12} função diferenciável tal que $\tilde{A}_{\eta_1} = \lambda_{12}\tilde{A}_{\eta_2}$, o que é equivalente a dizer que $(\tilde{A}_{\eta_1})^i_j = \lambda_{12}(\tilde{A}_{\eta_2})^i_j$. Assim, para quaisquer i, j, r, s a equação (3.3) se torna $\lambda_{12}(\tilde{A}_{\eta_2})^i_j(\tilde{A}_{\eta_2})^r_s$ em ambos os lados. Reciprocamente, suponha que para todos $i, j, r, s = 1, \ldots, n$ se tenha

$$(\tilde{A}_{\eta_1})^i_j(\tilde{A}_{\eta_2})^r_s = (\tilde{A}_{\eta_2})^i_j(\tilde{A}_{\eta_1})^r_s.$$

Queremos mostrar que $\tilde{A}_{\eta_1} = \lambda\tilde{A}_{\eta_2}$, que é equivalente a mostrar que $(\tilde{A}_{\eta_1})^i_j = \lambda(\tilde{A}_{\eta_2})^i_j$, para todos $i, j = 1, \ldots, n$. Se $\tilde{A}_{\eta_2} = 0$, o resultado segue diretamente. Suponha $\tilde{A}_{\eta_2} \neq 0$, isto é, pelo menos uma componente de

$(\tilde{A}_{\eta_2})^i_j$ é não nula, onde tomaremos, por exemplo, a componente $i = a$ e $j = b$ fixados. Como vale a equação (3.3) para todos $r, s = 1, \ldots, n$, teremos

$$(\tilde{A}_{\eta_1})^r_s = \frac{(\tilde{A}_{\eta_1})^a_b}{(\tilde{A}_{\eta_2})^a_b}(\tilde{A}_{\eta_2})^r_s,$$

onde podemos tomar $\lambda = \dfrac{(\tilde{A}_{\eta_1})^a_b}{(\tilde{A}_{\eta_2})^a_b}$, uma função que não depende de r e s. O caso em que mais de uma componente é não nula é inteiramente análogo. Logo, $\tilde{A}_{\eta_1} = \lambda \tilde{A}_{\eta_2}$, como queríamos.

(ii) $\iff$ *(v)* Lembrando que $\langle \tilde{A}_\xi, \tilde{A}_\xi \rangle = tr(\tilde{A}^2_\xi) = \sigma^2_\xi$, para $\eta_1, \eta_2 \in \mathfrak{X}(S)^\perp$ arbitrários, temos da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{A}_{\eta_1}, \tilde{A}_{\eta_2} \rangle^2 &= |\langle \tilde{A}_{\eta_1}, \tilde{A}_{\eta_2} \rangle|^2 \\
&\leq \langle \tilde{A}_{\eta_1}, \tilde{A}_{\eta_1} \rangle \langle \tilde{A}_{\eta_2}, \tilde{A}_{\eta_2} \rangle \\
&= tr(\tilde{A}^2_{\eta_1}) tr(\tilde{A}^2_{\eta_2}) \\
&= \sigma^2_{\eta_1} \sigma^2_{\eta_2},
\end{aligned}$$

onde a igualdade vale se, e somente se, $\tilde{A}_{\eta_1}$ e $\tilde{A}_{\eta_2}$ forem proporcionais, como esperávamos.

■

O Teorema acima nos diz que, sempre que existir uma direção umbílica, existe um campo de vetores normal G que satisfaz o item *(iii)*. Note que G está definido a menos de sinal, por conta da Observação (2), item (2), subsequente às definições dos vários tipos de umbilicidade. Usando a condição *(iii)*, temos que $g(\tilde{A}_\xi X, Y) = \overline{g}(\tilde{h}(X, Y), \xi) = g(\tilde{A}X, Y)\overline{g}(G, \xi)$ para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ e todo $\xi \in \mathfrak{X}(S)^\perp$. Como a métrica $\overline{g}$ é não degenerada, a igualdade acima, reescrita como $g(\tilde{A}_\xi X - \overline{g}(G, \xi)\tilde{A}X, Y) = 0$ para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$, nos diz que

$$\tilde{A}_\xi = \overline{g}(G, \xi)\tilde{A}, \tag{3.5}$$

onde o escalar de cisalhamento correspondente é dado por $\sigma^2_\xi = tr(\tilde{A}^2_\xi) = \overline{g}(G, \xi)^2 tr(\tilde{A}^2) = n^2 \overline{g}(G, \xi)^2$. Como tanto σ_ξ e G são definidas a menos de sinal e o quadrado delas coincidem, podemos definir

$$\sigma_\xi = ng(G, \xi), \tag{3.6}$$

para todo $\xi \in \mathfrak{X}(S)^{\perp}$. Combinando as equações (3.5) e (3.6) temos que

$$\tilde{A}_{\xi} = \overline{g}(G,\xi)\tilde{A} = \frac{\sigma_{\xi}}{n}\tilde{A}$$

para todo $\xi \in \mathfrak{X}(S)^{\perp}$, onde, para quaisquer $\eta_1, \eta_2 \in \mathfrak{X}(S)^{\perp}$, temos que

$$\langle \tilde{A}_{\eta_1}, \tilde{A}_{\eta_2} \rangle = \langle \frac{\sigma_{\eta_1}}{n}\tilde{A}, \frac{\sigma_{\eta_2}}{n}\tilde{A} \rangle = \frac{\sigma_{\eta_1}\sigma_{\eta_2}}{n^2}\langle \tilde{A}, \tilde{A} \rangle = \sigma_{\eta_1}\sigma_{\eta_2}.$$

Proposição (P.3.1). Existem $\tilde{A} \in \mathcal{T}(\mathcal{S})$ e $G \in \mathfrak{X}(S)^{\perp}$ tais que $\langle \tilde{A}, \tilde{A} \rangle = n^2$ e

$$\tilde{h}(X,Y) = g(\tilde{A}X, Y)G \tag{3.7}$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ se, e somente se,

$$\tilde{h}(X,Y)^{\flat} \wedge \tilde{h}(Z,W)^{\flat} = 0,$$

para todos $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(S)$. Ou seja, o item (iii) do Teorema 3.1 pode ser reformulado como $\tilde{h}(X,Y)^{\flat} \wedge \tilde{h}(Z,W)^{\flat} = 0$.

Demonstração: Suponha válido o item (iii). Assim, dados arbitrariamente $U, V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, temos pela definição de produto exterior que

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(X,Y)^{\flat}(U) \wedge \tilde{h}(Z,W)^{\flat}(V) &= \begin{vmatrix} \tilde{h}(X,Y)^{\flat}(U) & \tilde{h}(Z,W)^{\flat}(U) \\ \tilde{h}(X,Y)^{\flat}(V) & \tilde{h}(Z,W)^{\flat}(V) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \overline{g}(\tilde{h}(X,Y),U) & \overline{g}(\tilde{h}(Z,W),U) \\ \overline{g}(\tilde{h}(X,Y),V) & \overline{g}(\tilde{h}(Z,W),V) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \overline{g}(\tilde{A}X,Y)\overline{g}(G,U) & \overline{g}(\tilde{A}Z,W)\overline{g}(G,U) \\ \overline{g}(\tilde{A}X,Y)\overline{g}(G,V) & \overline{g}(\tilde{A}Z,W)\overline{g}(G,V) \end{vmatrix} \\
&= \overline{g}(\tilde{A}X,Y)\overline{g}(G,U)\overline{g}(\tilde{A}Z,W)\overline{g}(G,V) \\
&- \overline{g}(\tilde{A}Z,W)\overline{g}(G,U)\overline{g}(\tilde{A}X,Y)\overline{g}(G,V) \\
&= \overline{g}(G,U)\overline{g}(G,V)(\overline{g}(\tilde{A}X,Y)\overline{g}(\tilde{A}Z,W) \\
&- \overline{g}(\tilde{A}Z,W)\overline{g}(\tilde{A}X,Y)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Pela arbitrariedade dos campos tomados, segue que $\tilde{h}(X,Y)^{\flat} \wedge \tilde{h}(Z,W)^{\flat} = 0$. Reciprocamente, suponha que $\tilde{h}(X,Y)^{\flat} \wedge \tilde{h}(Z,W)^{\flat} = 0$. Então, as $1-$formas $\tilde{h}(X,Y)^{\flat}$ são linearmente dependentes para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$. Dessa maneira, existe uma 1-forma ω tal que $\tilde{h}(X,Y)^{\flat} = L(X,Y)\omega$, com L tensor tipo $(0,2)$

simétrico. Para dada ω, existe um campo de vetores $G = \omega^\sharp$ tal que $\overline{g}(G, Y) = \omega(Y)$. Então fica bem definida $\tilde{h}(X, Y) = L(X, Y)G$. Além disso, como L é um tensor tipo $(0, 2)$ simétrico, existe uma aplicação autoadjunta $\tilde{\mathcal{A}} \in \mathcal{T}(\mathcal{S})$ tal que $L(X, Y) = g(\tilde{A}X, Y)$. Finalmente, podemos ter $tr(\tilde{A}^2) = n^2$ reescalando G se necessário, seguindo o mesmo argumento da demonstração de (ii) implica (iii) no Teorema 3.1.

■

Seguimos então com dois corolários ao Teorema 3.1.

Corolário (C.3.2). *Seja $\phi : (\mathcal{S}, g) \to (\mathcal{M}, \overline{g})$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana $n-$dimensional em uma varidade semi-riemanniana com codimensão 2. Se $\mathcal{S}$ for umbílica com respeito a um campo vetorial normal não nulo, então quaisquer dois operadores forma comutam.*

Demonstração: Suponha $\mathcal{S}$ umíblica com respeito a um campo vetorial normal não nulo $\xi \in \mathfrak{X}(S)^\perp$, ou seja, suponha válido o item (i) do Teorema 3.1. Pela equivalência dada pelo Teorema, temos em particular que $(i) \iff (ii)$, onde segue que quaisquer dois operadores cisalhamento são proporcionais entre si. Dados $\eta_1, \eta_2 \in \mathfrak{X}(S)^\perp$, temos que existe $\lambda \in \mathfrak{F}(\mathcal{S})$ tal que $\tilde{A}_{\eta_1} = \lambda \tilde{A}_{\eta_2}$ e assim temos que

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{\eta_1}(\tilde{A}_{\eta_2}) &= \lambda \tilde{A}_{\eta_2}(\tilde{A}_{\eta_1}) = \lambda \tilde{A}^2_{\eta_2}, \\
\tilde{A}_{\eta_2}(\tilde{A}_{\eta_1}) &= \tilde{A}_{\eta_2}(\lambda \tilde{A}_{\eta_2}) = \lambda \tilde{A}^2_{\eta_2}
\end{aligned}$$

e consequentemente $[\tilde{A}_{\eta_1}, \tilde{A}_{\eta_2}] = \lambda(\tilde{A}_{\eta_2} - \tilde{A}_{\eta_2}) = 0$. Então se os operadores cisalhamento são proporcionais, segue que eles comutam. Resta relacionar com os operadores forma: por definição, os operadores cisalhamento são

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{\eta_1} &= A_{\eta_1} - \frac{\theta_{\eta_1}}{n} 1, \\
\tilde{A}_{\eta_2} &= A_{\eta_2} - \frac{\theta_{\eta_2}}{n} 1,
\end{aligned}$$

e o colchete se torna

$$\begin{aligned}
\left[\tilde{A}_{\eta_1}, \tilde{A}_{\eta_2}\right] &= \left[A_{\eta_1} - \frac{\theta_{\eta_1}}{n} 1, A_{\eta_2} - \frac{\theta_{\eta_2}}{n} 1\right] \\
&= \left(A_{\eta_1} - \frac{\theta_{\eta_1}}{n} 1\right)\left(A_{\eta_2} - \frac{\theta_{\eta_2}}{n} 1\right) - \left(A_{\eta_2} - \frac{\theta_{\eta_2}}{n} 1\right)\left(A_{\eta_1} - \frac{\theta_{\eta_1}}{n} 1\right) \\
&= A_{\eta_1} A_{\eta_2} - \frac{\theta_{\eta_2}}{n} A_{\eta_1} - \frac{\theta_{\eta_1}}{n} A_{\eta_2} + \frac{\theta_{\eta_1}\theta_{\eta_2}}{n^2} 1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- A_{\eta_2}A_{\eta_1} + \frac{\theta_{\eta_2}}{n}A_{\eta_1} + \frac{\theta_{\eta_1}}{n}A_{\eta_2} - \frac{\theta_{\eta_1}\theta_{\eta_2}}{n^2}1 \\
&= A_{\eta_1}A_{\eta_2} - A_{\eta_2}A_{\eta_1} \\
&= [A_{\eta_1}, A_{\eta_2}] .
\end{aligned}
$$

Logo, os operadores forma comutam pois os operadores cisalhamento comutam por serem proporcionais.

■

Dada uma família comutativa de operadores diagonalizáveis em um espaço de dimensão finita, sabemos que existe uma base ortonormal que diagonaliza simultaneamente todos os operadores dessa família. Uma demonstração pode ser encontrada em [8], página 207, Teorema 7. Esse fato de Álgebra Linear, nas condições do corolário acima, nos diz que em qualquer ponto da subvariedade existe uma base ortonormal do espaço tangente tal que todos os operadores forma se diagonalizam simultaneamente.

A recíproca do Corolário 3.2 não é verdadeira em geral. Suponha que quaisquer dois operadores forma comutem. Dado um referencial ortonormal $\{\xi_1, \xi_2\} \subset \mathfrak{X}(S)^{\perp}$, seja $\eta = c_1\xi_2 + c_2\xi_2 \in \mathfrak{X}(S)^{\perp}$ campo candidato a direção umbílica de $\mathcal{S}$. Pela discussão acima, existe um referencial $\{e_1, \ldots, e_n\} \in \mathfrak{X}(S)$ que diagonaliza os operadores A_{ξ_1} e A_{ξ_2} simultaneamente, onde λ_i e μ_i denotarão os autovalores respectivos, para $i = 1, \ldots, n$. Pela condição de umbilicidade, $A_\eta = \dfrac{\theta_\eta}{n}1$, temos

$$
A_\eta = A_{c_1\xi_1 + c_2\xi_2} = c_1A_{\xi_1} + c_2A_{\xi_2} = \frac{\theta_\eta}{n}1,
$$

onde aplicado em e_i autovetor do referencial que diagonaliza todos simultaneamente, obtemos que

$$
\frac{\theta_\eta}{n}e_i = c_1A_{\xi_1}e_i + c_2A_{\xi_2}e_i = c_1\lambda_ie_i + c_2\mu_ie_i.
$$

Subtraindo $\dfrac{\theta_\eta}{n}e_i$ em ambos os lados e evidenciando e_i, segue que

$$
c_1\lambda_ie_i + c_2\mu_ie_i - \frac{\theta_\eta}{n}e_i = (c_1\lambda_i + c_2\mu_i - \frac{\theta_\eta}{n})e_i = 0,
$$

implicando em $c_1\lambda_i + c_2\mu_i = \dfrac{\theta_\eta}{n}$, para cada $i = 1, \ldots, n$. No caso em que $n = 2$, o sistema

$$\begin{cases} c_1\lambda_1 + c_2\mu_1 = \theta_\eta/2 \\ c_1\lambda_2 + c_2\mu_2 = \theta_\eta/2 \end{cases}$$

possui solução por ser um sistema linear de duas equações e duas incógnitas, enquanto para $n > 2$, teremos

$$\begin{cases} c_1\lambda_1 + c_2\mu_1 = \theta_\eta/n \\ c_1\lambda_2 + c_2\mu_2 = \theta_\eta/n \\ \qquad \vdots \\ c_1\lambda_n + c_2\mu_n = \theta_\eta/n \end{cases}$$

um sistema linear com n equações e duas incógnitas, que pode não ter solução.

O próximo corolário mostra a recíproca para o caso $n = 2$.

Corolário (C.3.3). *Uma condição necessária e suficiente para que uma superfície tipo-espaço em uma variedade semi-riemanniana de dimensão* 4 *seja umbílica com respeito a uma direção normal não nula é que quaisquer dois operadores forma comutem.*

Demonstração: A comutatividade de dois operadores forma quaisquer, assumindo que a subvariedade é umbílica com respeito a uma direção normal não nula, é válida pelo Corolário 3.2.

Reciprocamente, suponha que quaisquer dois operadores forma comutem e considere $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(S)^\perp$. Vamos mostrar que $\mathcal{S}$ é umbílica com relação a uma direção normal não nula utilizando o Teorema 3.1, mais precisamente, a implicação $(iv) \implies (i)$. Por hipótese, A_ξ e A_η comutam e existe referencial ortonormal do espaço tangente que diagonaliza ambos operadores forma simultaneamente. Denotando por λ_1, λ_2 e μ_1, μ_2 os autovalores de A_ξ e A_η, respectivamente, escrevemos

$$A_\xi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad A_\eta = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}.$$

Temos $\theta_\xi = tr(A_\xi) = \lambda_1 + \lambda_2$, $\theta_\eta = tr(A_\eta) = \mu_1 + \mu_2$, onde por definição, nesse referencial,

$$\tilde{A}_\xi = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \dfrac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{2} & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \dfrac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{2} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_\eta = \begin{pmatrix} \mu_1 - \dfrac{(\mu_1+\mu_2)}{2} & 0 \\ 0 & \mu_2 - \dfrac{(\mu_1+\mu_2)}{2} \end{pmatrix}.$$

Note que

$$\lambda_i - \frac{(\lambda_i+\lambda_j)}{2} = \lambda_i - \frac{(\lambda_j+\lambda_i)}{2} = \frac{\lambda_i-\lambda_j}{2},$$
$$\mu_i - \frac{(\mu_i+\mu_j)}{2} = \mu_i - \frac{(\mu_j+\mu_i)}{2} = \frac{\mu_i-\mu_j}{2},$$

para $i \neq j$, $i, j = 1, 2$, onde podemos reescrever os operadores cisalhamento como

$$\tilde{A}_\xi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda_1-\lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2-\lambda_1, \end{pmatrix} \qquad \tilde{A}_\eta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mu_1-\mu_2 & 0 \\ 0 & \mu_2-\mu_1 \end{pmatrix}.$$

Como as matrizes dos operadores estão na forma diagonal, temos que

(1) $(\tilde{A}_\xi)^i_j(\tilde{A}_\eta)^r_s = 0 = (\tilde{A}_\eta)^i_j(\tilde{A}_\xi)^r_s$, para $(i,j) \in \{(1,2),(2,1)\}$ ou $(r,s) \in \{(1,2),(2,1)\}$.

(2) $(\tilde{A}_\xi)^i_j(\tilde{A}_\eta)^r_s = (\lambda_1-\lambda_2)(\mu_1-\mu_2) = (\tilde{A}_\eta)^i_j(\tilde{A}_\xi)^r_s$, para $(i,j) = (r,s) \in \{(1,1),(2,2)\}$.

(3) $(\tilde{A}_\xi)^i_j(\tilde{A}_\eta)^r_s = -(\lambda_1-\lambda_2)(\mu_1-\mu_2) = (\tilde{A}_\eta)^i_j(\tilde{A}_\xi)^r_s$, para o caso restante em que $(i,j) \neq (r,s)$ com $\{(i,j)\} \cup \{(r,s)\} = \{(1,1),(2,2)\}$.

Podemos concluir assim que

$$(\tilde{A}_\xi)^i_j(\tilde{A}_\eta)^r_s = (\tilde{A}_\eta)^i_j(\tilde{A}_\xi)^r_s, \quad \text{para todos } i,j,r,s = 1,2,$$

como queríamos mostrar.

■

3.3 A Direção Umbílica

Se $\{\xi_1, \xi_2\}$ é um referencial ortonormal no fibrado normal com $\overline{g}(\xi_i, \xi_j) = \varepsilon_i\delta_{ij}$, temos uma equação explícita para G a partir da equação (3.6). Com efeito, escrevendo G no referencial acima, $G = a_1\xi_1 + a_2\xi_2$, segue que $\overline{g}(G, \xi_1) =$

$a_1\overline{g}(\xi_1,\xi_1) + a_2\overline{g}(\xi_2,\xi_1) = a_1\varepsilon_1$, onde $a_1 = \varepsilon_1\overline{g}(G,\xi_1) = \varepsilon_1\dfrac{\sigma_{\xi_1}}{n}$. Analogamente, temos $a_2 = \varepsilon_2\dfrac{\sigma_{\xi_2}}{n}$, onde G se reescreve como

$$G = \frac{1}{n}(\varepsilon_1\sigma_{\xi_1}\xi_1 + \varepsilon_2\sigma_{\xi_2}\xi_2). \tag{3.8}$$

Das propriedades do operador dual estrela de Hodge, também conseguimos uma expressão para $\star^{\perp}G$ nesse referencial, a partir da expressão de G:

$$\begin{aligned}
\star^{\perp}G &= \frac{1}{n}(\varepsilon_1\sigma_{\xi_1}\star^{\perp}\xi_1 + \varepsilon_2\sigma_{\xi_2}\star^{\perp}\xi_2)\\
&= \frac{1}{n}(\varepsilon_1\varepsilon_2\sigma_{\xi_1}\xi_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2\sigma_{\xi_2}\star^{\perp}\xi_1)\\
&= \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{n}(\sigma_{\xi_1}\xi_2 - \sigma_{\xi_2}\xi_1),
\end{aligned}$$

o que vale ser referenciado numa só equação:

$$\star^{\perp}G = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{n}(\sigma_{\xi_1}\xi_2 - \sigma_{\xi_2}\xi_1). \tag{3.9}$$

Corolário (C.3.4). *Seja $\phi : (\mathcal{S}, g) \to (\mathcal{M}, \overline{g})$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana $n-$dimensional em uma variedade semi-riemanniana com codimensão 2. Se $\mathcal{S}$ é umbílica com respeito a uma direção normal, então essa direção é única e é gerada por $\star^{\perp}G$, a menos que $G = 0$, onde $\mathcal{S}$ será totalmente umbílica.*

Demonstração: Suponha $\mathcal{S}$ umbílica com relação a um campo vetorial normal não nulo $\xi \in \mathfrak{X}(S)^{\perp}$. Como uma consequência da definição, $\tilde{A}_{\xi} = 0$, onde $0 = g(\tilde{A}_{\xi}X, Y) = \overline{g}(\tilde{h}(X,Y), \xi)$, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$. Pelo Teorema 3.1 item (iii), existem $A \in \mathcal{T}(\mathcal{S})$ e $G \in \mathfrak{X}(S)^{\perp}$ tal que $\tilde{h}(X,Y) = g(\tilde{A}X, Y)G$, em que o resultado acima mostra que G e ξ são ortogonais, onde ξ deve necessariamente ser proporcional a $\star^{\perp}G$, por questões codimensionais. Agora, se $G = 0$, então $\tilde{h} = 0$, que é equivalente a pedir $\mathcal{S}$ totalmente umbílica.

■

Supondo que exista uma direção umbílica $\eta \in \mathfrak{X}(S)^{\perp}$, vimos que, dados $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{X}(S)^{\perp}$, os operadores A_{ξ_1} e A_{ξ_2} podem ser diagonalizados simultaneamente. Sejam λ_i autovalores de A_{ξ_1} e μ_i autovalores de A_{ξ_2}, para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Temos então que $\lambda_i - \dfrac{\theta_{\xi_1}}{n}$ e $\mu_i - \dfrac{\theta_{\xi_2}}{n}$ são autovalores dos operadores cisalhamento $\tilde{A}_{\xi_1}$ e $\tilde{A}_{\xi_2}$, respectivamente. De fato, considerando os v_i elementos do referencial que diagonaliza simultaneamente os operadores cisalhamento acima, com $i \in$

$\{1,\ldots,n\}$, temos

$$\tilde{A}_{\xi_1}(v_i) = A_{\xi_1}(v_i) - \frac{\theta_{\xi_1}}{n}(v_i) = \lambda_i v_i - \frac{\theta_{\xi_1}}{n}(v_i) = \left(\lambda_i - \frac{\theta_{\xi_1}}{n}\right) v_i,$$

onde para $\tilde{A}_{\xi_2}$ a conta é análoga. Como $\{\xi_1, \xi_2\}$ forma um referencial ortonormal de $\mathfrak{X}(S)^\perp$, a direção umbílica η pode ser decomposta nesse referencial $\eta = a_1\xi_1 + a_2\xi_2$ e visto que η é direção umbílica, temos

$$0 = \tilde{A}_\eta = \tilde{A}_{a_1\xi_1 + a_2\xi_2} = a_1\tilde{A}_{\xi_1} + a_2\tilde{A}_{\xi_2}.$$

Aplicando em v_i, temos

$$\begin{aligned}
0 &= a_1\tilde{A}_{\xi_1}(v_i) + a_2\tilde{A}_{\xi_2}(v_i) \\
&= a_1\left(\lambda_i - \frac{\theta_{\xi_1}}{n}\right) v_i + a_2\left(\mu_i - \frac{\theta_{\xi_2}}{n}\right) v_i \\
&= \left[a_1\left(\lambda_i - \frac{\theta_{\xi_1}}{n}\right) + a_2\left(\mu_i - \frac{\theta_{\xi_2}}{n}\right)\right] v_i
\end{aligned}$$

implica em $a_1\left(\lambda_i - \frac{\theta_{\xi_1}}{n}\right) = -a_2\left(\mu_i - \frac{\theta_{\xi_2}}{n}\right)$ pois v_i é não nulo por ser autovetor. Uma solução é $a_1 = \left(\mu_i - \frac{\theta_{\xi_2}}{n}\right)$ e $a_2 = -\left(\lambda_i - \frac{\theta_{\xi_1}}{n}\right)$. Qualquer múltiplo dessa solução também funciona, o que indica a proporcionalidade entre (a_1, a_2) e $\left(\left(\mu_i - \frac{\theta_{\xi_2}}{n}\right), -\left(\lambda_i - \frac{\theta_{\xi_1}}{n}\right)\right)$. Logo,

$$\eta_i = \left(\mu_i - \frac{\theta_{\xi_2}}{n}\right)\xi_1 - \left(\lambda_i - \frac{\theta_{\xi_1}}{n}\right)\xi_2 \tag{3.10}$$

é um campo de vetores normais ao qual $\mathcal{S}$ é umbílica para cada $i = 1,\ldots,n$. Todos esses campos de vetores são proporcionais entre si: como $\tilde{A}_{\xi_1}$ e $\tilde{A}_{\xi_2}$ são proporcionais entre si, existe uma c tal que $\tilde{A}_{\xi_1} = c\tilde{A}_{\xi_2}$. Segue de maneira análoga ao que fizemos acima que $\left(\lambda_i - \frac{\theta_{\xi_1}}{n}\right) = c\left(\mu_i - \frac{\theta_{\xi_2}}{n}\right)$. Para $i \in \{1,\ldots,n\}$ fixado, temos $\eta_i = \left(\left(\mu_i - \frac{\theta_{\xi_2}}{n}\right), -\left(\lambda_i - \frac{\theta_{\xi_1}}{n}\right)\right) = \left(\left(\mu_i - \frac{\theta_{\xi_2}}{n}\right), -c\left(\mu_i - \frac{\theta_{\xi_2}}{n}\right)\right) = \left(\mu_i - \frac{\theta_{\xi_2}}{n}\right)(1, -c)$. Segue então que todos os η_i estão na direção $(1,-c)$ e são, portanto, proporcionais. Além disso, como cada uma dessas direções é umbílica, segue do Corolário 3.4 que η_i e $\star^\perp G$ são proporcionais para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$.

Mais ainda, temos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\overline{g}(\eta_i,\eta_i) &= \sum_{i=1}^{n}\overline{g}\left(\left(\mu_i-\frac{\theta_{\xi_2}}{n}\right)\xi_1-\left(\lambda_i-\frac{\theta_{\xi_1}}{n}\right)\xi_2,\left(\mu_i-\frac{\theta_{\xi_2}}{n}\right)\xi_1-\left(\lambda_i-\frac{\theta_{\xi_1}}{n}\right)\xi_2\right)\\
&= \varepsilon_1\sum_{i=1}^{n}\left(\mu_i-\frac{\theta_{\xi_2}}{n}\right)^2+\varepsilon_2\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i-\frac{\theta_{\xi_1}}{n}\right)^2\\
&= \varepsilon_1 tr(\tilde{A}^2_{\xi_2})+\varepsilon_2 tr(\tilde{A}^2_{\xi_1})\\
&= \varepsilon_1\sigma^2_{\xi_2}+\varepsilon_2\sigma^2_{\xi_1}\\
&= n^2\overline{g}(\star^{\perp}G,\star^{\perp}G),
\end{aligned}
$$

onde para a última equação utilizamos a equação (3.9).

3.4 Caracterização de $\mathcal{S}$ ser Ortoumbílica

Corolário (C.3.5). *Seja $\phi:(\mathcal{S},g)\to(\mathcal{M},\overline{g})$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana $n-$dimensional em uma varidade semi-riemanniana com codimensão 2. Em qualquer aberto onde $H\neq 0$, $\mathcal{S}$ é ortoumbílica se, e somente se,*

$$h(X,Y)^{\flat}\wedge H^{\flat}=0$$

para todos $X,Y\in\mathfrak{X}(S)$.

Demonstração: Suponha $\mathcal{S}$ ortoumbílica, isto é, $A_{\star^{\perp}H}=0$. Como estamos em um aberto onde $H\neq 0$, a Proposição 2.3 nos garante que $\mathcal{S}$ é $H-$subgeodésica, onde $h(X,Y)=L(X,Y)H$ para todos $X,Y\in\mathfrak{X}(S)$ com $L\in\mathcal{T}(\mathcal{S})$ simétrico, por definição. Dessa maneira, a segunda forma e o campo de vetores curvatura média são proporcionais, sendo então linearmente dependentes, implicando que $h(X,Y)^{\flat}\wedge H^{\flat}=0$, para todos $X,Y\in\mathfrak{X}(S)$.

Reciprocamente, supondo $h(X,Y)^{\flat}\wedge H^{\flat}=0$ com $H\neq 0$, temos que existe um tensor simétrico $L\in\mathcal{T}(\mathcal{S})$ tal que $h(X,Y)=L(X,Y)H$. Assim,

$$g(A_{\star^{\perp}H}X,Y)=\overline{g}(h(X,Y),\star^{\perp}H)=L(X,Y)\overline{g}(H,\star^{\perp}H)=0,$$

para todos $X,Y\in\mathfrak{X}(S)$, onde concluímos que $A_{\star^{\perp}H}=0$ pois a métrica é não-degenerada.

■

Observação: Aqui vale o mesmo argumento por continuidade que sucede a Proposição 2.3, isto é, se $H = 0$ no máximo em um conjunto com interior vazio, então a equivalência é global.

Vale notar que a propriedade de ser ortoumbílica é especial pois ela implica que $\mathcal{S}$ é $H-$subgeodésica e que os tensores total de cisalhamento $\tilde{h}$ e segunda forma fundamental h são sempre proporcionais entre si e a H, visto que $A_{\star^\perp H} = 0$ implica em $h(X,Y) = L(X,Y)H$ pela Proposição 2.3 e assim

$$\tilde{h}(X,Y) = (L(X,Y) - g(X,Y))H.$$

Capítulo 4

O Caso Lorentziano e Superfícies Umbílicas no Espaço-tempo de Schwarzschild

Nesse capítulo, M será uma variedade lorentziana com assinatura $(-, +, \ldots, +)$. Como impomos que a subvariedade de codimensão 2 tenha métrica riemanniana, temos então que a métrica assume assinatura $(-, +)$ no fibrado normal.

Uma característica das variedades semi-riemannianas que foge da nossa intuição euclidiana é a existência de vetores tangentes em que a forma associada à métrica aplicada a esses vetores não é necessariamente positiva definida como visto e definido no primeiro capítulo. Demos o nome de *vetores tipo-nulo* a vetores que, mesmo não-nulos, zeram a forma quadrática. Estudaremos, na primeira seção, um referencial composto por vetores deste tipo causal e, em seguida, relacionaremos com o os conceitos e os resultados vistos previamente: como se comportam os operadores $\mathcal{B}$ e $\mathcal{J}$ nesse caso? E no caso da existência de uma direção umbílica, qual seu caráter causal?

Finalmente, trazemos um exemplo de subvariedades tipo-espaço que são totalmente umbílicas no espaço-tempo de Schwarzschild, espaço este que descreve buracos negros-não rotacionais. Finalizamos considerando umbilicidade em espaços-tempo rotacionalmente simétricos, baseado no artigo [12].

As definições e resultados deste capítulo estão presentes no artigo base [4] desta dissertação.

Seja $\{k, l\} \subset \mathfrak{X}(S)^{\perp}$ um referencial tal que

$$\overline{g}(k,k) = \overline{g}(l,l) - 0, \quad \overline{g}(k,l) = -1, \tag{4.1}$$

onde a última equação está normalizada por conveniência. Trocando a ordem, se necessário, podemos assumir que o referencial $\{k, l\}$ está orientado positivamente, isto é, que $\omega^{\perp}(k,l) = 1$. Temos que $\star^{\perp}k, \star^{\perp}l \in \mathfrak{X}(S)^{\perp}$, onde devem se decompor naquele referencial, que é o que faremos:

(I) Escrevendo $\star^{\perp}k = f_1 l + f_2 k$, o produto por l segundo a métrica $\overline{g}$ nos diz que

$$\begin{aligned}
\overline{g}(\star^{\perp}k, l) &= \overline{g}(f_1 l + f_2 k, l) \\
&= \overline{g}(f_1 l, l) + \overline{g}(f_2 k, l) \\
&= f_2 \overline{g}(k, l) \\
&= -f_2
\end{aligned}$$

e o produto por k nos diz que

$$\begin{aligned}
\overline{g}(\star^{\perp}k, k) &= \overline{g}(f_1 l, k) - \overline{g}(\star^{\perp}k, l)\overline{g}(k,k) \\
&= -f_1.
\end{aligned}$$

Mas $\overline{g}(\star^{\perp}k, k) = 0$ segundo a obsevervação (i) que sucede a Proposição 2.2 e $\overline{g}(\star^{\perp}k, l) = \omega^{\perp}(k,l) = 1$ pela Equação (2.5), mostrando que $f_2 = -1$ e $f_1 = 0$, onde concluímos que

$$\star^{\perp}k = -k.$$

(II) Analogamente, escrevemos $\star^{\perp}l = j_1 l + j_2 k$ e fazemos o produto primeiro por l, onde obtemos

$$\begin{aligned}
\overline{g}(\star^{\perp}l, l) &= j_1 \overline{g}(l, l) + j_2 \overline{g}(k, l) \\
&= -j_2,
\end{aligned}$$

e depois o produto por k, que nos fornece

$$\begin{aligned}\overline{g}(\star^{\perp}l, k) &= j_1\overline{g}(l, k) = \overline{g}(\star^{\perp}l, l)\overline{g}(k, k)\\ &= -j_1.\end{aligned}$$

Pelos mesmos motivos supracitados, mais a Equação (2.6), $\overline{g}(\star^{\perp}l, l) = 0$ e $\overline{g}(\star^{\perp}l, k) = -\overline{g}(\star^{\perp}k, l) = -\omega^{\perp}(k, l) = -1$. Logo, $j_1 = 1$ e $j_2 = 0$, onde concluímos que

$$\star^{\perp}l = l.$$

Vamos procurar expressões nesse referencial para a segunda forma fundamental h e para o campo vetorial curvatura média H:

(1) Escrevendo $h(X, Y) = a_1(X, Y)l + a_2(X, Y)k$, para $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$, o produto por l segundo a métrica nos fornece

$$\begin{aligned}\overline{g}(h(X, Y), l) &= \overline{g}(a_1(X, Y)l, l) + \overline{g}(a_2(X, Y)k, l)\\ &= -a_2(X, Y)\end{aligned}$$

e o produto por k nos fornece (já substituindo o a_2)

$$\begin{aligned}\overline{g}(h(X, Y), k) &= \overline{g}(a_1(X, Y)l, k) + \overline{g}(h(X, Y), l)\overline{g}(k, k)\\ &= -a_1(X, Y),\end{aligned}$$

onde a segunda forma fundamental se decompõe nesse referencial como

$$h(X, Y) = -\overline{g}(h(X, Y), k)l - \overline{g}(h(X, Y), l)k = -g(A_kX, Y)l - g(A_lX, Y)k. \tag{4.2}$$

(2) Para o campo vetorial curvatura média, dado um referencial tangente $\{e_1, \ldots, e_n\}$, temos por definição que $H = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i)$, onde o item (1) acima nos revela que

$$h(e_i, e_i) = -g(A_ke_i, e_i)l - g(A_le_i, e_i)k$$

e a soma se torna

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i) &= -\sum_{i=1}^{n} g(A_ke_i, e_i)l - \sum_{i=1}^{n} g(A_le_i, e_i)k\\ &= -\theta_kl - \theta_lk.\end{aligned}$$

Portanto, H se decompõe nesse referencial como

$$H = \frac{1}{n}(-\theta_k l - \theta_l k). \tag{4.3}$$

Das equações (I),(II) e (4.3) segue que

$$\star^{\perp} H = \frac{1}{n}(-\theta_k \star^{\perp} l - \theta_l \star^{\perp} k) = \frac{1}{n}(-\theta_k l + \theta_l k) \tag{4.4}$$

As quantidades $\theta_k = tr(A_k)$ e $\theta_l = tr(A_l)$ são chamadas de *expansões nulas.*

Note que $\overline{g}(\star^{\perp}\xi, \star^{\perp}\xi) = \varepsilon_1\varepsilon_2\overline{g}(\xi,\xi) = -\overline{g}(\xi,\xi)$ para todo $\xi \in \mathfrak{X}(S)$ e, em particular,

$$\overline{g}(\star^{\perp}H, \star^{\perp}H) = -\overline{g}(H,H) = -\frac{1}{n^2}\overline{g}((-\theta_k l - \theta_l k), (-\theta_k l - \theta_l k)) = \frac{2}{n^2}\theta_k\theta_l. \tag{4.5}$$

Também conseguimos uma expressão para o operador de Casorati $\mathcal{B}$: na observação que sucede a Definição 1.17 do operador, sabemos que este não depende do referencial normal dado, onde dados $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ e um referencial ortonormal tangente $\{e_1, \ldots, e_n\}$ podemos escrever

$$g(\mathcal{B}X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{g}(h(X, e_i), h(Y, e_i)).$$

Pela expressão da segunda forma fundamental h, temos

$$\begin{aligned} h(X, e_i) &= -g(A_k X, e_i) l - g(A_l X, e_i) k, \\ h(Y, e_i) &= -g(A_k Y, e_i) l - g(A_l Y, e_i) k, \end{aligned}$$

onde o produto entre ambos os campos é

$$\begin{aligned} \overline{g}(h(X, e_i), h(Y, e_i)) &= \overline{g}(-g(A_k X, e_i) l - g(A_l X, e_i) k, -g(A_k Y, e_i) l - g(A_l Y, e_i) k) \\ &= g(A_k X, e_i) g(A_l Y, e_i) \overline{g}(l, k) + g(A_l X, e_i) g(A_k Y, e_i) \overline{g}(k, l) \\ &= -g(A_k X, e_i) g(A_l Y, e_i) - g(A_l X, e_i) g(A_k Y, e_i) \\ &= -g(g(A_k X, e_i) A_l e_i + g(A_l X, e_i) A_k e_i, Y) \end{aligned}$$

e a soma é

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{g}(h(X, e_i), h(Y, e_i)) = -g(\sum_{i=1}^{n}[g(A_k X, e_i) A_l e_i + g(A_l X, e_i) A_k e_i], Y).$$

Agora note que

$$A_l X = \sum_{i=1}^{n} g(A_l X, e_i)e_i, \quad A_k X = \sum_{i=1}^{n} g(A_k X, e_i)e_i$$

e com isso

$$A_k(A_l X) = \sum_{i=1}^{n} g(A_l X, e_i)A_k e_i, \quad A_l(A_k X) = \sum_{i=1}^{n} g(A_k X, e_i)A_l e_i,$$

que são os exatos termos que aparecem no lado direito da soma, dentro do somatório. Logo, temos que

$$g(\mathcal{B}X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{g}(h(X, e_i), h(Y, e_i)) = g((-A_l A_k - A_k A_l)X, Y).$$

Como a equação acima vale para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$, segue da não-degeneratividade da métrica que

$$\mathcal{B} = -A_k A_l - A_l A_k. \tag{4.6}$$

Ainda nesse referencial, como o tensor de cisalhamento total é escrito como $\tilde{h}(X, Y) = h(X, Y) - g(X, Y)H$ para $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$, temos que

$$\begin{aligned} h(X, Y) - g(X, Y)H &= -g(A_k X, Y)l - g(A_l X, Y)k - g(X, Y)\frac{1}{n}(-\theta_k l - \theta_l k) \\ &= -g(A_k X, Y)l - g(A_l X, Y) + g(X, Y)\frac{\theta_k}{n}l + g(X, Y)\frac{\theta_l}{n}k \\ &= -g(A_k X - \frac{\theta_k X}{n}, Y)l - g(A_l X - \frac{\theta_l X}{n}, Y)k \\ &= -g(\tilde{A}_k X, Y)l - g(\tilde{A}_l X, Y)k, \end{aligned}$$

isto é,

$$\tilde{h}(X, Y) = -g(\tilde{A}_k X, Y)l - g(\tilde{A}_l X, Y)k \tag{4.7}$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$, onde os operadores $\tilde{A}_k$ e $\tilde{A}_l$ são chamados operadores cisalhamento nulos. Além disso, σ_k e σ_l são chamados escalares de cisalhamento nulos.

Notemos também que, como o operador $\mathcal{J}$ tem a mesma propriedade de não depender do referencial normal, isto é, dado $\{e_1, \ldots, e_n\}$ referencial ortonormal tangente, $\mathcal{J}$ é dado por

$$g(\mathcal{J}X,Y)=\sum_{i=1}^{n}\overline{g}(\tilde{h}(X,e_i),\tilde{h}(Y,e_i)),$$

segue de maneira análoga que

$$\mathcal{J}=-\tilde{A}_k\tilde{A}_l-\tilde{A}_l\tilde{A}_k. \tag{4.8}$$

4.2 O Caráter Causal da Direção Umbílica

Assuma que exista uma direção umbílica. Então tanto o campo $G\in\mathfrak{X}(S)^{\perp}$, dado pelo item (iii) do Teorema 3.1, quanto seu dual $\star^{\perp}G$ podem ser expressos em termos do referencial nulo da seção antecedente:

(I) Escrevendo $G=a_1l+a_2k$, o produto por l nos fornece

$$\begin{aligned}\overline{g}(G,l)&=a_1\overline{g}(l,l)+a_2\overline{g}(k,l)\\&=-a_2\end{aligned}$$

e o produto por k nos fornece

$$\begin{aligned}\overline{g}(G,k)&=a_1\overline{g}(l,k)-\overline{g}(G,l)\overline{g}(k,k)\\&=-a_1.\end{aligned}$$

Mas a equação (3.6) nos informa que $\overline{g}(G,k)=\dfrac{\sigma_k}{n}$ e $\overline{g}(G,l)=\dfrac{\sigma_l}{n}$, onde $a_1=-\dfrac{\sigma_k}{n}$ e $a_2=-\dfrac{\sigma_l}{n}$ e consequentemente

$$G=-\frac{1}{n}(\sigma_l k+\sigma_k l). \tag{4.9}$$

(II) Do item acima e das equações (I) e (II), temos que

$$\star^{\perp}G=-\frac{1}{n}(\sigma_l\star^{\perp}k+\sigma_k\star^{\perp}l)=\frac{1}{n}(\sigma_l k-\sigma_k l). \tag{4.10}$$

Uma maneira de determinar o sinal de $\overline{g}(\star^{\perp}G,\star^{\perp}G)$ é considerando os operadores $\mathcal{B}$ e $\mathcal{J}$. Pelo item (iii) do Teorema 3.1 e pela definição do tensor de cisalhamento total $\tilde{h}$, temos que $\tilde{h}(X,Y)=g(\tilde{A}X,Y)G$ e $\tilde{h}(X,Y)=h(X,Y)-g(X,Y)H$, donde segue que $h(X,Y)=g(\tilde{A}X,Y)G+g(X,Y)H$, onde as equações são válidas para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$. Recuperando a equação (1.9) que define como $\mathcal{J}$ age, dados referencial ortonormal tangente $\{e_1, \dots, e_n\}$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$, temos

$$g(\mathcal{J}X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{g}(\tilde{h}(X, e_i), \tilde{h}(Y, e_i)),$$

onde

$$\begin{aligned}
\overline{g}(\tilde{h}(X, e_i), \tilde{h}(Y, e_i)) &= \overline{g}(g(\tilde{A}X, e_i)G, g(\tilde{A}Y, e_i), G) \\
&= g(\tilde{A}X, e_i)g(\tilde{A}Y, e_i)\overline{g}(G, G)
\end{aligned}$$

e a soma se torna

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{g}(\tilde{h}(X, e_i), \tilde{h}(Y, e_i)) = \sum_{i=1}^{n} g(\tilde{A}X, e_i)g(\tilde{A}Y, e_i)\overline{g}(G, G).$$

Na expressão ortonormal tangente, temos

$$\tilde{A}X = \sum_{i=1}^{n} g(\tilde{A}X, e_i)e_i, \quad \tilde{A}Y = \sum_{i=1}^{n} g(\tilde{A}Y, e_j)e_j,$$

e o produto entre ambos é o que precisamos para substituir na soma acima, a dizer

$$\begin{aligned}
g\left(\tilde{A}X, \tilde{A}Y\right) &= g\left(\sum_{i=1}^{n} g(\tilde{A}X, e_i)e_i, \sum_{j=1}^{n} g(\tilde{A}Y, e_j)e_j\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g(\tilde{A}X, e_i)g(\tilde{A}Y, e_j)g(e_i, e_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} g(\tilde{A}X, e_i)g(\tilde{A}Y, e_i).
\end{aligned}$$

Logo, retornando à soma e utilizando o fato de que $\tilde{A}$ é autoadjunto, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \overline{g}(\tilde{h}(X, e_i), \tilde{h}(Y, e_i)) &= \sum_{i=1}^{n} g(\tilde{A}X, e_i)g(\tilde{A}Y, e_i)\overline{g}(G, G) \\
&= g(\tilde{A}X, \tilde{A}Y)\overline{g}(G, G) \\
&= g(\tilde{A}^2X, Y)\overline{g}(G, G) \\
&= g(\overline{g}(G, G)\tilde{A}^2X, Y),
\end{aligned}$$

e como a métrica é não-degenerada, concluímos que

$$\mathcal{J} = \overline{g}(G,G)\tilde{A}^2.$$

Tomando o traço na equação acima, temos $tr(\mathcal{J}) = \overline{g}(G,G)tr(\tilde{A}^2) = \overline{g}(G,G)\langle \tilde{A}, \tilde{A}\rangle = \overline{g}(G,G)n^2$ e portanto

$$\overline{g}(\star^{\perp}G, \star^{\perp}G) = -\overline{g}(G,G) = -\frac{1}{n^2}tr(\mathcal{J}).$$

Mas da equação (4.8) obtemos que

$$\begin{aligned}
\overline{g}(\star^{\perp}G, \star^{\perp}G) &= -\frac{1}{n^2}tr(-\tilde{A}_k\tilde{A}_l - \tilde{A}_l\tilde{A}_k) \\
&= -\frac{1}{n^2}[tr(-A_kA_l) + tr(-A_lA_k)] \\
&= \frac{2}{n^2}\langle \tilde{A}_k, \tilde{A}_l\rangle
\end{aligned}$$

e portanto temos

- $\langle \tilde{A}_k, \tilde{A}_l\rangle < 0$ implica em $\star^{\perp}G$ é tipo-tempo;
- $\langle \tilde{A}_k, \tilde{A}_l\rangle > 0$ implica em $\star^{\perp}G$ é tipo-espaço;
- $\langle \tilde{A}_k, \tilde{A}_l\rangle = 0$ implica em $\star^{\perp}G$ é nulo.

Da equação (3.1), $\mathcal{B} - \mathcal{J} = 2\tilde{A}_H + \overline{g}(H,H)1$, tomamos o traço e multiplicamos por (-1), obtendo

$$\begin{aligned}
tr(\mathcal{J}) &= tr(\mathcal{B}) - 2tr(\tilde{A}_H) - \overline{g}(H,H)n \\
&= -(tr(\mathcal{B}) - n\overline{g}(H,H))
\end{aligned}$$

e assim podemos observar o sinal como segue

$$\overline{g}(\star^{\perp}G, \star^{\perp}G) = -\frac{1}{n^2}(tr(\mathcal{B}) - n\overline{g}(H,H)).$$

Tudo isso implica em

- $tr(\mathcal{J}) < 0$ implica em $\star^{\perp} G$ é tipo-espaço,
- $tr(\mathcal{J}) > 0$ implica em $\star^{\perp} G$ é tipo-tempo,
- $tr(\mathcal{J}) = 0$ implica em $\star^{\perp} G$ é tipo-nulo,
- $tr(\mathcal{B}) < n\overline{g}(H,H)$ implica em $\star^{\perp} G$ é tipo-espaço,

- $tr(\mathcal{B}) > n\overline{g}(H, H)$ implica em $\star^{\perp} G$ é tipo-tempo,
- $tr(\mathcal{B}) = n\overline{g}(H, H)$ implica em $\star^{\perp} G$ é tipo-nulo.

4.3 Subvariedades simultaneamente Pseudoumbílicas e Ortoumbílicas

Proposição (P.4.1). Seja $\phi : (\mathcal{S}, g) \to (\mathcal{M}, \overline{g})$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana em uma variedade lorentziana com codimensão 2. Em qualquer ponto $p \in \mathcal{S}$ onde $H \neq 0$ e $\mathcal{S}$ não é totalmente umbílica, são equivalentes:

(1) $\mathcal{B} - \mathcal{J} = 0$

(2) $(\mathcal{S}, g)$ é tanto pseudoumbílica quanto ortoumbílica.

(3) $\mathcal{B} = 0$ e $\mathcal{J} = 0$.

Além disso, em todos os casos temos $\overline{g}(H, H) = 0$ em p.

Demonstração:

(1) $\Longrightarrow$ (2) Assuma $\mathcal{B} - \mathcal{J} = 0$, isto é, $\mathcal{B} = \mathcal{J}$. Do Lema 3 temos

$$2\tilde{A}_H + \overline{g}(H, H)1 = \mathcal{B} - \mathcal{J} = 0$$

e, tomando o traço, obtemos $0 = 2tr(\tilde{A}_H) + n\overline{g}(H, H) = n\overline{g}(H, H)$, onde concluímos que $\overline{g}(H, H) = 0$ (H é tipo-nulo). Por isso, temos

$$0 = 2\tilde{A}_H + \overline{g}(H, H)1 = 2\tilde{A}_H,$$

o que implica em $\tilde{A}_H = 0$ e consequentemente $A_H = \dfrac{\theta_H}{n}1$, isto é, $\mathcal{S}$ é pseudoumbílica. Além disso, como $\overline{g}(\star^{\perp}H, \star^{\perp}H) = -\overline{g}(H, H) = 0$, temos que $\star^{\perp}H$ também é tipo-nulo e, de $\overline{g}(\star^{\perp}H, H) = 0$, afirmamos que eles são proporcionais. De fato, dado referencial normal ortonormal $\{\xi_1, \xi_2\}$, escrevendo

$$H = a\xi_1 + b\xi_2, \quad \star^{\perp}H = c\xi_1 + d\xi_2,$$

notamos que, para H, temos

$$0 = \overline{g}(H, H) = \overline{g}(a\xi_1 + b\xi_2, a\xi_1 + b\xi_2) = a^2\varepsilon_1 + b^2\varepsilon_2$$

e como um entre ε_1 e ε_2 é igual a -1, segue que $a^2 = b^2$ e isolando $b = \pm a$, temos que $H = a(\xi_1 \pm \xi_2)$. Para $\star^\perp H$, o mesmo procedimento isolando $d = \pm c$ nos revela que $\star^\perp H = c(\xi_1 \pm \xi_2)$. A afirmação de que eles são proporcionais nos diz que o H e $\star^\perp H$ devem ter o mesmo sinal de operação entre os campos ξ_1 e ξ_2. Do contrário, supondo sem perda de generalidade que $H = a(\xi_1 + \xi_2)$ e $\star^\perp H = c(\xi_1 - \xi_2)$, teríamos

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{g}(H, \star^\perp H) \\ &= \overline{g}(a(\xi_1 + \xi_2), c(\xi_1 - \xi_2)) \\ &= ac\overline{g}(\xi_1 + \xi_2, \xi_1 - \xi_2) \\ &= ac[\varepsilon_1 - \varepsilon_2] \\ &= \pm 2ac \end{aligned}$$

mostrando que $H = 0 = \star^\perp H$, absurdo. Logo, H e $\star^\perp H$ são proporcionais e assim $\tilde{A}_H = 0$ implica $\tilde{A}_{\star^\perp H} = 0$, mostrando que $\mathcal{S}$ é também ortoumbílica.

(2) $\implies$ **(3)** Suponha $\mathcal{S}$ pseudo e ortoumbílica. De $H \neq 0$, segue do Corolário 3.5 da seção que caracteriza subvariedades ortoumbílicas que $\mathcal{S}$ é H-subgeodésica, que por definição nos diz que existe um tensor simétrico L 2-covariante tal que $h(X,Y) = L(X,Y)H$, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$. Como $\mathcal{S}$ é pseudoumbílica, então $\tilde{A}_H = 0$ e daí temos

$$\begin{aligned} 0 &= g(\tilde{A}_H X, Y) \\ &= \overline{g}(\tilde{h}(X,Y), H) \\ &= \overline{g}(h(X,Y) - g(X,Y)H, H) \\ &= \overline{g}((L(X,Y) - g(X,Y))H, H) \\ &= (L(X,Y) - g(X,Y))\overline{g}(H,H). \end{aligned}$$

Da equação acima, se $\overline{g}(H,H) \neq 0$, teríamos $L(X,Y) = g(X,Y)$ para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$, onde $\mathcal{S}$ seria totalmente umbílica, contrariando a hipótese. Portanto devemos ter $\overline{g}(H,H) = 0$ e, junto ao Lema 3, temos que $\mathcal{B} - \mathcal{J} = 2\tilde{A}_H + \overline{g}(H,H)1 = 0$. Agora, calculemos $\mathcal{B}$: dados $\{e_1, \ldots, e_n\} \in \mathfrak{X}(S)$ referencial ortonormal local e $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$, temos

$$\begin{aligned} g(\mathcal{B}X, Y) &= \sum_{i=1}^{n} \overline{g}(h(X, e_i), h(Y, e_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \overline{g}(L(X, e_i)H, L(Y, e_i)H) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{g}(H,H)\sum_{i=1}^{n} L(X,e_i)L(Y,e_i)\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Como a métrica é não degenerada e a equação acima vale para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$, segue que $\mathcal{B} = 0$ e consequentemente $\mathcal{J} = 0$ pois $\mathcal{B} - \mathcal{J} = 0$.

(3) $\Longrightarrow$ **(1)** Se $\mathcal{B} = 0$ e $\mathcal{J} = 0$, então $\mathcal{B} - \mathcal{J} = 0 - 0 = 0$.

■

4.4 O Espaço-tempo de Schwarzschild

Vamos considerar $\mathcal{M}$ variedade lorentziana de dimensão 4 com métrica

$$
\overline{g} = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2. \tag{4.11}
$$

Essa métrica é a solução de Schwarzschild em coordenadas de *Eddington-Finkelstein.*

Para v, r constantes, com $r \neq 0$, obtemos superfícies $\mathcal{S}$ que possuem métrica

$$
g = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2, \tag{4.12}
$$

a métrica das esferas redondas bidimensionais. Essas superfícies possuem $\partial_\theta, \partial_\phi$ como tangentes e ∂_v, ∂_r como normais. A matriz da métrica (4.11) é

$$
[\overline{g}_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}, \tag{4.13}
$$

onde observamos que suas componentes que não se anulam são

$$
\begin{aligned}
\overline{g}_{vv} &= -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\\
\overline{g}_{vr} &= \overline{g}_{rv} = 1\\
\overline{g}_{\theta\theta} &= r^2\\
\overline{g}_{\phi\phi} &= r^2 sin^2\theta
\end{aligned}
$$

.

Como a matriz (4.14) tem dois blocos nulos, a sua inversa é dada por

$$[\overline{g}^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \left(1 - \dfrac{2m}{r}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{r^2 \sin^2\theta} \end{pmatrix}, \qquad (4.14)$$

onde cada bloco é o inverso dos blocos da matriz da métrica.

Proposição (P.4.1). As superfícies $(\mathcal{S}, g)$ onde $g = r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\varphi^2$ são umbílicas com respeito a um campo de vetores normais não nulo.

Demonstração: Calcularemos a segunda forma fundamental $h : \mathfrak{X}(S) \times \mathfrak{X}(S) \to \mathfrak{X}(S)^{\perp}$. Sejam $\overline{\nabla}$ a conexão de $\mathcal{M}$ e ∇ a conexão de $\mathcal{S}$ induzida. Por definição, dados arbitrariamente $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$, temos $h(X,Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^{\perp}$. Como a segunda forma fundamental h é bilinear e simétrica, basta saber como ela funciona nos vetores da base tangente a $\mathcal{S}$, isto é, podemos nos restringir ao cálculo de

$$h(\partial_\theta, \partial_\theta) = (\overline{\nabla}_{\partial_\theta}\partial_\theta)^{\perp} = \Gamma^v_{\theta\theta}\partial_v + \Gamma^r_{\theta\theta}\partial_r \qquad (4.15)$$

$$h(\partial_\theta, \partial_\varphi) = (\overline{\nabla}_{\partial_\theta}\partial_\varphi)^{\perp} = \Gamma^v_{\theta\varphi}\partial_v + \Gamma^r_{\theta\varphi}\partial_r \qquad (4.16)$$

$$h(\partial_\varphi, \partial_\varphi) = (\overline{\nabla}_{\partial_\varphi}\partial_\varphi)^{\perp} = \Gamma^v_{\varphi\varphi}\partial_v + \Gamma^r_{\varphi\varphi}\partial_r \qquad (4.17)$$

pois para um campo tangente qualquer, o resultado segue por linearidade. A fórmula para cálculo dos símbolos de Christoffel é

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\sum_{\alpha=1}^{4} g^{\alpha\lambda}\left(\overline{g}_{\nu\alpha,\mu} + \overline{g}_{\mu\alpha,\nu} - \overline{g}_{\mu\nu,\alpha}\right)\right] \qquad (4.18)$$

onde a notação $\overline{g}_{\mu\nu,\alpha}$ representa a derivação parcial com relação a α da componente $\overline{g}_{\mu\nu}$ da métrica $\overline{g}$ de $\mathcal{M}$. Nas equações (6.5), (6.6) e (6.7), perceba que λ da fórmula dos símbolos de Christoffel assumem apenas v, r, onde precisaremos saber apenas as componentes da matriz inversa da métrica que estão nas colunas com v e r, a dizer, as duas primeiras colunas. Note também que nessas colunas, as únicas componentes não nulas são $\overline{g}^{vr} = \overline{g}^{rv} = 1$ e $\overline{g}^{rr} = \left(1 - \dfrac{2m}{r}\right)$, o que facilitará a nossa vida no cálculo dos símbolos de Christoffel:

(1) Componentes de $h(\partial_\theta, \partial_\theta)$:

$$\Gamma^v_{\theta\theta} = \frac{1}{2}\overline{g}^{vr}(2\overline{g}_{\theta r,\theta} - \overline{g}_{\theta\theta,r})$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(1)(2(0) - 2r) \\
&= -r,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^r_{\theta\theta} &= \frac{1}{2}\left(\overline{g}^{rv}(2\overline{g}_{\theta v,\theta} - \overline{g}_{\theta\theta,v}) + \overline{g}^{rr}(2\overline{g}_{\theta r,\theta} - \overline{g}_{\theta\theta,r})\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)(-2r) \\
&= -(r - 2m).
\end{aligned}
$$

(2) Componentes de $h(\partial_\theta, \partial_\varphi)$:

$$
\Gamma^v_{\theta\varphi} = \frac{1}{2}[\overline{g}^{vv}(\overline{g}_{\varphi v,\theta} + \overline{g}_{\theta v,\varphi} - \overline{g}_{\theta\varphi,v}) + \overline{g}^{vr}(\overline{g}_{\varphi r,\theta} + \overline{g}_{\theta r,\varphi} - \overline{g}_{\theta\varphi,r})] = 0,
$$

$$
\Gamma^r_{\theta\varphi} = \frac{1}{2}[\overline{g}^{rv}(\overline{g}_{\varphi v,\theta} + \overline{g}_{\theta v,\varphi} - \overline{g}_{\theta\varphi,v}) + \overline{g}^{rr}(\overline{g}_{\varphi r,\theta} + \overline{g}_{\theta r,\varphi} - \overline{g}_{\theta\varphi,r})] = 0
$$

pois as componentes da métrica envolvidas são todas nulas.

(3) Componentes de $h(\partial_\varphi, \partial_\varphi)$:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^v_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2}\overline{g}^{vr}(2\overline{g}_{\phi r,\phi} - \overline{g}_{\phi\phi,r}) \\
&= \frac{1}{2}(1)(-2r\sin^2\theta) \\
&= -r\sin^2\theta,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^r_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2}g^{rr}(2\overline{g}_{\varphi r,\varphi} - \overline{g}_{\varphi\varphi,r}) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)(-2r\sin^2\theta) \\
&= -\sin^2\theta(r - 2m),
\end{aligned}
$$

análogo à conta em (1), apenas substituindo θ por φ, o que nos fornece o fator $\sin^2\theta$. Consequentemente, na base $\{\partial_v, \partial_r\}$ e apelidando o termo $\left[\frac{-1}{r}\left(1, 1 - \frac{2m}{r}\right)\right]$ que ainda aparecerá de η, temos

$$
\begin{aligned}
h(\partial_\theta, \partial_\theta) &= (-r, -(r - 2m)) \\
&= r\left(-1, -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= r^2 \left[\frac{-1}{r} \left(1, 1 - \frac{2m}{r} \right) \right] \\
&= g(\partial_\theta, \partial_\theta)\eta;
\end{aligned}
$$

$$
h(\partial_\theta, \partial_\varphi) = (0,0) = 0;
$$

$$
\begin{aligned}
h(\partial_\varphi, \partial_\varphi) &= \left(-r\sin^2\theta, -\sin^2\theta(r-2m) \right) \\
&= \sin^2\theta(-r, -(r-2m)) \\
&= r^2 \sin^2\theta \left[\frac{-1}{r} \left(1, 1 - \frac{2m}{r} \right) \right] \\
&= g(\partial_\varphi, \partial_\varphi)\eta.
\end{aligned}
$$

Finalmente, por linearidade, segue que $h(X,Y) = g(X,Y)\eta$ e $\mathcal{S}$ é umbílica, por definição, com respeito a $\eta = \left[\frac{-1}{r} \left(1, 1 - \frac{2m}{r} \right) \right] \in \mathfrak{X}(S)^\perp$. Dado um referencial ortonormal tangente $\{e_1, e_2\}$, isto é, $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, tomando o traço da equação $h = g\eta$ observamos que $tr(h) = tr(g)\eta$ implica $nH = n\eta$, onde $\eta = H$. Logo, $\mathcal{S}$ é totalmente umbílica.

■

4.5 Superfícies Umbílicas em Espaços-tempos Esfericamente Simétricos

Temos como exemplo de espaço-tempo esfericamente simétrico o espaço-tempo de Schwarzschild. No artigo [12] encontramos um argumento que mostra que, para um espaço-tempo esfericamente simétrico geral, cujo a métrica pode ser sempre escrita como

$$
g = e^{2f}\eta_2 + r^2 d\Omega_2, \tag{4.19}
$$

onde $\eta_2 = -(du \otimes dv + dv \otimes du)$ e $d\Omega_2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ e ambos f e r dependem de u e v, as superfícies $\mathcal{S}$ com u e v constantes são totalmente umbílicas. Para mostrar isso, prosseguiremos de maneira inteiramente análoga à demonstração acima. A matriz da métrica é

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{e^{2f}}{2} & 0 & 0 \\ \dfrac{e^{2f}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{4.20}$$

com matriz inversa

$$[g^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & \left(\dfrac{e^{2f}}{2}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ \left(\dfrac{e^{2f}}{2}\right)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}. \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

Queremos saber quem são

$$\begin{aligned} h(\partial_\theta, \partial_\theta) &= (\overline{\nabla}_{\partial_\theta}\partial_\theta)^\perp = \Gamma^u_{\theta\theta}\partial_u + \Gamma^v_{\theta\theta}\partial_v \\ h(\partial_\theta, \partial_\varphi) &= (\overline{\nabla}_{\partial_\theta}\partial_\varphi)^\perp = \Gamma^u_{\theta\varphi}\partial_u + \Gamma^v_{\theta\varphi}\partial_v \\ h(\partial_\varphi, \partial_\varphi) &= (\overline{\nabla}_{\partial_\varphi}\partial_\varphi)^\perp = \Gamma^u_{\varphi\varphi}\partial_u + \Gamma^v_{\varphi\varphi}\partial_v. \end{aligned}$$

Calculemos os símbolos de Christoffel:

(1) Componentes de $h(\partial_\theta, \partial_\theta)$:

$$\begin{aligned} \Gamma^u_{\theta\theta} &= \frac{1}{2}[g^{uv}(2g_{\theta v,\theta} - g_{\theta\theta,v})] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{e^{2f}}\right)(-2rr_v) \\ &= \frac{-2rr_v}{e^{2f}}, \\ \Gamma^v_{\theta\theta} &= \frac{1}{2}[g^{uv}(2g_{\theta u,\theta} - g_{\theta\theta,u})] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{e^{2f}}\right)(-2rr_u) \\ &= \frac{-2rr_u}{e^{2f}}. \end{aligned}$$

(2) Componentes de $h(\partial_\theta, \partial_\varphi)$:

$$\Gamma^u_{\theta\varphi} = 0$$

$$\Gamma^v_{\theta\varphi} = 0$$

pois na única entrada da matriz inversa não nula para cada símbolo, $g^{\theta\theta}$ e $g^{\varphi\varphi}$, respectivamente, todas as componentes da métrica se anulam.

(3) Componentes de $h(\partial_\varphi, \partial_\varphi)$:

$$\begin{aligned}
\Gamma^u_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2}[g^{uv}(2g_{\varphi v,\varphi} - g_{\varphi\varphi,v})] \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{e^{2f}}\right)(-2rr_v \sin^2\theta) \\
&= \frac{-2rr_v \sin^2\theta}{e^{2f}}, \\
\Gamma^v_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2}[g^{uv}(2g_{\varphi u,\varphi} - g_{\varphi\varphi,u})] \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{e^{2f}}\right)(-2rr_u \sin^2\theta) \\
&= \frac{-2rr_u \sin^2\theta}{e^{2f}}.
\end{aligned}$$

Logo, fazendo $\eta = \dfrac{-2}{re^{2f}}(r_v, r_u)$, temos

$$\begin{aligned}
h(\partial_\theta, \partial_\theta) &= \left(\frac{-2rr_v}{e^{2f}}, \frac{-2rr_u}{e^{2f}}\right) \\
&= \frac{-2r}{e^{2f}}(r_v, r_u) \\
&= r^2\left[\frac{-2}{re^{2f}}(r_v, r_u)\right] \\
&= g(\partial_\theta, \partial_\theta)\eta
\end{aligned}$$

$$h(\partial_\theta, \partial_\varphi) = 0 = g(\partial_\theta, \partial_\varphi)\eta$$

e finalmente

$$\begin{aligned}
h(\partial_\varphi, \partial_\varphi) &= \left(\frac{-2rr_v \sin^2\theta}{e^{2f}}, \frac{-2rr_u \sin^2\theta}{e^{2f}}\right) \\
&= \frac{-2r\sin^2\theta}{e^{2f}}(r_v, r_u) \\
&= r^2\sin^2\theta\left[\frac{-2}{re^{2f}}(r_v, r_u)\right] \\
&= g(\partial_\theta, \partial_\theta)\eta
\end{aligned}$$

mostrando que a subvariedade $\mathcal{S}$ é umbílica na direção de $\eta \in \mathfrak{X}(S)^{\perp}$ e, consequentemente, será totalmente umbílica.

Bibliografia

[1] **M. P. do Carmo.** Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies, 6ª edição, SBM (Sociedade Brasileira de Matemática), Rio de Janeiro, 2014.

[2] **M. P. do Carmo.** Geometria Riemanniana, 4th ed., Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2013.

[3] **C. Cederbaum.** Uniqueness of photon spheres in static vacuum asymptotically flat spacetimes. Complex analysis and dynamical systems VI. Part 1, 51–64, Contemp. Math., 653, Israel Math. Conf. Proc., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[4] **N. Cipriani, J. M. M. Senovilla, and J. Van der Veken.** Umbilical properties of spacelike co-dimension two submanifolds. Results Math. 72, no. 1-2, 25–46, 2017.

[5] **C. Claudel; K. S. Virbhadra,;G. F. R. Ellis** The geometry of photon surfaces. J. Math. Phys. 42 (2001), no. 2, 818–838.

[6] **I. T. Couto, A. Lymberopoulos.** Introdução à Geometria Lorentziana: Curvas e Superfícies, 1ª edição, SBM (Sociedade Brasileira de Matemática), Rio de Janeiro, 2018.

[7] **M. Dajczer, R. Tojeiro** Submanifold Theory: Beyond an Introduction. Universitext, Springer 2019.

[8] **K. Hoffman, R. Kunze.** Linear Algebra, Second Edition, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1971.

[9] **L.-H. Huang, D. A. Lee.** Trapped Surfaces, Topology of Black Holes, and the Positive Mass Theorem. Notices of the American Mathematical Society, vol. 69, no. 4, pp. 536-545, 2022.

[10] **B. O'Neill.** Semi-Riemannian Geometry: With Applications to Relativity, Pure and Applied Mathematics Series, Academic Press, New York, 1983.

[11] **V. Perlick** On totally umbilic submanifolds of semi-Riemannian manifolds, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Volume 63, Issues 5–7, 2005, Pages e511–e518.

[12] **J. M. M. Senovilla.** Classification of spacelike surfaces in spacetime, Classical and Quantum Gravity 24, 3091-3124, 2007.

[13] **M. Spivak** A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. IV. third edition. Publish or Perish, Inc., 1999.

[14] **R. M. Wald.** General Relativity, The University of Chicago Press, Chicago, 1984.