Universidade de Brasília

Existência de solução positiva para uma classe de problemas elípticos singulares e quasilineares com crescimento exponencial crítico.

Ângelo Felipe Machado Silva

Orientador: Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de *Mestre em Matemática*

Brasília, 10 de dezembro de 2024

Dedico este trabalho à minha mãe, Maria Ercília, que, diante de tantas dificuldades, manteve-se firme, corajosa e com uma força inabalável. Sem seu apoio e inspiração, este momento não seria possível.

*O aprendizado nunca esgota a mente.
Quanto mais você aprende, mais você
percebe que pode aprender.*

Atribuído a Leonardo da Vinci

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, fonte de toda sabedoria e conhecimento, por me conceder sua graça, coragem, saúde e perseverança ao longo de toda esta etapa da minha vida. Sua presença constante foi essencial para que eu pudesse chegar até aqui.

Agradeço imensamente à minha família, expressando minha profunda gratidão pelo carinho e apoio incondicionais. Em especial, à minha mãe, Maria Ercília, que sempre me incentivou e esteve ao meu lado, sendo minha maior fonte de motivação e inspiração. Estou convicto de que suas orações foram fundamentais para guiar o caminho que escolhi seguir.

Agradeço aos meus amigos, Fabiane, Thafne, Paul, Jônatas, Ronaldo, Karen, Thais, Tharles, Talita, Henrylla, Emanuelle, Santiago, Juan, Caio Tomás, Pedro Luis, Vitor Machado, Rômulo, Wendy e muitos outros, que sempre estiveram presentes com palavras de apoio, carinho e momentos de descontração, agradeço por me ajudarem a manter o equilíbrio e a motivação durante esta jornada. Em especial, quero expressar minha gratidão ao Samuel Terto, que esteve presente do início ao fim dessa trajetória, como um verdadeiro irmão. As conversas enriquecedoras e os momentos compartilhados serão lembrados com carinho e terão um lugar especial em minha memória.

Agradeço também ao meu orientador, Giovany Figueiredo, por sua orientação, paciência e dedicação. Seu apoio foi crucial para o desenvolvimento deste trabalho e para o meu crescimento. Sou grato pelos ensinamentos e pela confiança ao longo dessa trajetória.

Agradeço aos demais professores que, com seus conhecimentos e ensinamentos, contribuíram para a minha formação, sou grato por cada aula, conselho e incentivo, que foram fundamentais para o meu crescimento acadêmico e pessoal.

Agradeço aos membros da banca julgadora, Suellen Arruda e Ricardo Ruviaro, pela atenção, pelas valiosas críticas construtivas e pelo tempo dedicado à avaliação deste trabalho. Suas considerações foram importantes para o aprimoramento deste estudo. Em especial, gostaria de expressar minha sincera gratidão à professora Suellen, que, desde a graduação, tem sido uma presença constante em minha formação, sempre com carinho e conselhos valiosos que contribuíram enormemente para o meu crescimento.

Por fim, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro que possibilitou a realização deste trabalho. Sem esse suporte, não seria possível dar continuidade aos meus estudos.

Resumo

Este trabalho é um estudo detalhado do o artigo [2], onde investigamos a existência de soluções positivas em uma classe de problemas elípticos singulares e quasilineares, dado por

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a_0(|\nabla u|^{p_0})|\nabla u|^{p_0-2}\nabla u) = \dfrac{\lambda_0}{u^{\beta_0}} + f_0(u) & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

utilizando o Método de Galerkin. Para completude do trabalho, estudamos a sua versão para sistemas, que é dada por:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a_1(|\nabla u|^{p_1})\ |\nabla u|^{p_1-2}\ \nabla u) = \dfrac{\lambda_1}{u^{\beta_1}} + f_1(v) & \text{em } \Omega, \\ -\mathrm{div}(a_2(|\nabla v|^{p_2})\ |\nabla v|^{p_2-2}\ \nabla v) = \dfrac{\lambda_2}{v^{\beta_2}} + f_2(u) & \text{em } \Omega, \\ u, v > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e suave, com $N \geq 3$. Para $i = 1, 2$, temos que $2 \leq p_i < N$, $0 < \beta_i \leq 1$, $\lambda_i > 0$ e f_i sendo funções contínuas. A hipótese sobre as funções $a_i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ serem de classe C^1 nos permite considerar uma ampla gama de operadores quasilineares.

Abstract

This work is a detailed study on the article [2], where we investigate the existence of positive solutions in a class of singular and quasilinear elliptic problems, given by

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a_0(|\nabla u|^{p_0})|\nabla u|^{p_0-2}\nabla u) = \dfrac{\lambda_0}{u^{\beta_0}} + f_0(u) & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

using the Galerkin method. For completeness of the work, we studied its version for systems, which is given by:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a_1(|\nabla u|^{p_1})\ |\nabla u|^{p_1-2}\ \nabla u) = \dfrac{\lambda_1}{u^{\beta_1}} + f_1(v) & \text{in } \Omega, \\ -\mathrm{div}(a_2(|\nabla v|^{p_2})\ |\nabla v|^{p_2-2}\ \nabla v) = \dfrac{\lambda_2}{v^{\beta_2}} + f_2(u) & \text{in } \Omega, \\ u, v > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded and smooth domain, with $N \geq 3$. For $i = 1,2$, we have $2 \leq p_i < N$, $0 < \beta_i \leq 1$, $\lambda_i > 0$ and f_i are continuous functions. The hypothesis on functions $a_i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ being of class C^1 allows us to consider a wide range of quasilinear operators.

Conteúdo

Introdução **1**

1 Resultados Preliminares **5**

1.1 Espaço de Sobolev $W_0^{1,N}(\Omega)$ 5

1.2 Algumas desigualdades importantes 15

1.3 Lema Fundamental 17

2 Primeiro Resultado: caso escalar **19**

2.1 Problema auxiliar para o caso escalar 20

2.2 Prova do Teorema 2.0.1 34

3 Segundo Resultado: caso sistema **38**

3.1 Problema auxiliar para o caso sistema 39

3.2 Prova do Teorema 3.0.1 58

Apêndice A Teoria do Grau de Brouwer **63**

A.1 Conceito e propriedades básicas 63

A.2 Teorema do Ponto Fixo de Brouwer 65

Apêndice B Medida, EDPs e Análise Funcional **68**

B.1 Espaço de Lebesgue 68

B.2 Espaço de Sobolev 69

B.3 Alguns resultados de convergência 72

B.4 Noções de Análise Funcional 73

Bibliografia **75**

Lista de Símbolos

$\mathbb{R}^+$	Conjunto dos números reais não negativos.
Ω	Domínio limitado de $\mathbb{R}^N$.
$\partial\Omega$	Representa a fronteira do conjunto Ω.
$C^1(\Omega)$	É o conjunto $\{u:\Omega\to\mathbb{R};\ u$ é diferenciável com derivada contínua$\}$.
$C_0^\infty(\Omega)$	É o conjunto das funções teste.
$(W_0^{1,N}(\Omega))'$	É o espaço dual de $W_0^{1,N}(\Omega)$.
div	Significa divergente.
$\dfrac{\partial(\cdot)}{\partial\eta}$	É a derivada de $(\cdot)$ em relação a normal exterior.
$\rightarrow$	Convergência forte.
$\rightharpoonup$	Convergência fraca.
$\not\rightarrow$	Significa que não converge.
$\hookrightarrow$	Imersão de um conjunto em algum outro.
$\overset{c.p.t.c}{\hookrightarrow}$	Imersão compacta de um conjunto em outro.
$\|\|\cdot\|\|_\theta$	$\|\|\cdot\|\|_{L^\theta(\Omega)}$.
$\|\|\cdot\|\|_{1,N}$	$\|\|\cdot\|_{W^{1,N}(\Omega)}$.
q.t.p	Significa em quase todo ponto.
$\square$	Indica o final de uma demonstração.

Introdução

Nesta dissertação, estamos interessados em estudar a existência de solução positiva tanto do problema elíptico singular e quasilinear

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a_0(|\nabla u|^{p_0})|\nabla u|^{p_0-2}\nabla u) = \dfrac{\lambda_0}{u^{\beta_0}} + f_0(u) & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$P1$}$$

quanto da sua versão para sistema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a_1(|\nabla u|^{p_1})\ |\nabla u|^{p_1-2}\ \nabla u) = \dfrac{\lambda_1}{u^{\beta_1}} + f_1(v) & \text{em } \Omega, \\ -\mathrm{div}(a_2(|\nabla v|^{p_2})\ |\nabla v|^{p_2-2}\ \nabla v) = \dfrac{\lambda_2}{v^{\beta_2}} + f_2(u) & \text{em } \Omega, \\ u, v > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$P2$}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave, com $N \geq 3$. Além disso, para $i = 0,\ 1,\ 2$, assumimos $2 \leq p_i < N$, $0 < \beta_i \leq 1$ e $\lambda_i > 0$, são parâmetros reais, $a_i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ são funções de classe C^1 e $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas com crescimento exponencial.

Problemas deste tipo são chamados de singular e surgiram na teoria da condução de calor em materiais eletricamente condutores. Além disso, eles possuem ampla aplicação em modelos físicos como fluídos não newtonianos, fenômenos de camada limite para fluidos viscosos, químicos heterogêneos conforme é mencionado nos artigos [5] e [17].

Esta dissertação é baseada e motivada pelo artigo [2], cujo objetivo é investigar a existência de soluções para os problemas (*P1*) e (*P2*) via Método de Galerkin, que é um método de aproximações de soluções para equações funcionais abstratas e que também pode ser usado para provar a existência de soluções para uma equação, provando a convergência das soluções aproximadas em uma topologia adequada [13]. Juntamente com o Método de

Galerkin, utilizamos um Lema Fundamental que trata-se de uma consequência do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Antes de resolver os problemas (*P1*) e (*P2*), será necessário o estudo de um problema auxiliar para cada caso, os quais investigaremos via Método de Galerkin a fim de mostrar a existência de solução aproximada e, posteriormente, utilizar esta solução obtida na demonstração dos resultados principais deste trabalho. Na demonstração de tais resultados usamos como ferramenta essencial um Príncipio de Comparação Fraca para o operador em questão.

As hipóteses que utilizamos sobre as funções $a_i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ de classe C^1 são as seguintes:

(a_1) existem constantes $k_1,\ k_2 > 0$ e $k_3,\ k_4 \geq 0$ tais que

$$k_1 t^{p_i} + k_2 t^N \leq a_i(t^{p_i})t^{p_i} \leq k_3 t^{p_i} + k_4 t^N, \text{ para todo } t \geq 0;$$

(a_2) a função

$$t \longmapsto a_i(t^{p_i})t^{p_i-2} \quad \text{é crescente.}$$

E as funções $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas satisfazendo as seguintes propriedades:

(f_1) existe $\alpha_0 > 0$ tal que as condições de crescimento exponencial no infinito são dadas por:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f_i(t)}{\exp\left(\alpha|t|^{\frac{N}{N-1}}\right)} = 0, \text{ para } \alpha > \alpha_0 \ \text{ e } \lim_{t\to\infty} \frac{f_i(t)}{\exp\left(\alpha|t|^{\frac{N}{N-1}}\right)} = \infty, \text{ para } \ 0 < \alpha < \alpha_0;$$

(f_2) a condição de crescimento na origem:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f_i(t)}{t^{p_i-1}} = 0;$$

(f_3) existe $\gamma_i > N$ tal que

$$f_i(t) \geq t^{\gamma_i - 1}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Como estamos procurando soluções positivas, neste trabalho, consideramos $f_i(t) = 0$, para todo $t \leq 0$.

Assim, para alcançar nosso objetivo, esta dissertação é constituída de três capítulos:

No Capítulo 1, apresentamos o espaço de Sobolev que estamos interessados em encontrar as soluções dos problemas e definimos o operador estudado, bem como apresentamos algumas de suas propriedades e resultados que serão necessários. Além disso, exibimos alguns resultados importantes como as desigualdades de Trudinger-Moser e Hardy-Sobolev.

E, por fim, enunciamos e provamos o Lema Fundamental, que será o ingrediente primordial para mostrar a existência de solução para os problemas auxiliares.

No Capítulo 2, mostramos a existência de solução positiva para o problema (*P1*). Antes disso, mostramos a existência de uma solução aproximada, a qual encontramos estudando um problema auxiliar, utilizando o Método de Galerkin. O principal resultado deste capítulo é o

Teorema 0.0.1. *Suponha que as condições* (a_1), (a_2) *e* (f_1) *a* (f_3) *sejam válidas. Então, existe* $\lambda^* > 0$ *tal que o problema (P1) tem uma solução fraca positiva para cada* $\lambda_0 \in (0, \lambda^*)$.

No Capítulo 3, mostramos a existência de solução positiva para o problema (*P2*). Assim como no Capítulo 2, mostramos, primeiramente, a existência de solução para um problema auxiliar com auxílio do Método de Galerkin, encontrando uma solução aproximada para o problema (*P2*). A demonstração do caso sistema possui o mesmo raciocínio que o caso escalar, logo, o objetivo é expor para o leitor como o Método de Galerkin pode ser utilizado na resolução de um sistema, exibindo as semelhanças, diferenças e os cuidados técnicos que há nesse processo entre os dois casos. O principal resultado deste capítulo é o

Teorema 0.0.2. *Suponha que, para* $i = 1, 2$, a_i *satisfaz* (a_1), (a_2) *e* f_i *satisfaz* (f_1) *a* (f_3). *Então, existe* $\lambda^* > 0$ *tal que o problema (P2) tem uma solução fraca positiva para cada* $0 < \lambda_1 + \lambda_2 < \lambda^*$.

Observe que, as funções $a_i(t) = 1 + t^{\frac{N-p_i}{p_i}}$ satisfazem as hipóteses (a_1) e (a_2), com $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$. Portanto, os Teoremas 0.0.1 e 0.0.2 são válidos para o operador $-\Delta_{p_i} u - \Delta_N u$.

Os problemas com este operador vêm de um sistema geral de reação-difusão:

$$u_t = \operatorname{div}[D(u)\nabla u] + c(x,u), \tag{0.0.1}$$

onde $D(u) = (|\nabla u|^{p-2} + |\nabla u|^{N-2})$. Este sistema possui uma ampla gama de aplicações em física e ciências afins, como biofísica, física de plasma e projeto de reação química. Nessas aplicações, a função u descreve uma concentração, o primeiro termo do lado direito de (0.0.1) corresponde à difusão com um coeficiente de difusão $D(u)$; enquanto o segundo é a reação e está relacionado à fonte e processos de perda. Normalmente, em aplicações químicas e biológicas, o termo de reação $c(x,u)$ é um polinômio de u com coeficientes variáveis (Ver [6, 10, 15, 20]).

Da mesma maneira, nota-se que a função

$$f_i(t) = t^{\gamma_i - 1} \exp\left(\alpha_0 t^{\frac{N}{N-1}}\right)$$

satisfaz as hipóteses $(f_1)-(f_3)$ para $\gamma_i > N$ e para todo $t \geq 0$.

Para finalizar, dedicamos o *Apêndice A* para fazer um breve estudo e lembrança das principais propriedades da teoria do Grau de Brouwer. Além disso, reservamos o *Apêndice B* para lembrança de conceitos e resultados interessantes sobre a teoria dos Espaços de Sobolev e da Análise Funcional.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo, estabelecemos alguns resultados importantes que serão usados nos demais capítulos. Mais precisamente, na Seção 1.1, introduzimos o espaço $W_0^{1,N}(\Omega)$, no qual buscamos soluções dos problemas estudados, o operador bem como suas propriedades e diversos resultados envolvendo-o, como, por exemplo, um Princípio de Comparação Fraca, que será utilizado na demonstração dos dois teoremas principais desta dissertação. Na Seção 1.2, exibimos algumas desigualdades essenciais em nosso trabalho como a Desigualdade de Trudinger-Moser e a Desigualdade de Hardy-Sobolev. Por fim, na Seção 1.3, enunciamos e provamos o Lema Fundamental, que será utilizado em combinação com o Método de Galerkin para encontrar soluções não negativas para os problemas auxiliares.

1.1 Espaço de Sobolev $W_0^{1,N}(\Omega)$

Iniciamos esta seção definindo o espaço de funções no qual buscamos as soluções para os problemas em questão.

Definição 1.1.1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto. O espaço $W_0^{1,N}(\Omega)$ é definido como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ na norma $||\cdot||_{W^{1,N}(\Omega)}$, isto é,

$$W_0^{1,N}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{||\cdot||_{W^{1,N}(\Omega)}}.$$

Desde que Ω seja limitado, consideramos $W_0^{1,N}(\Omega)$ dotado com a norma

$$||u||_{1,N} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^N dx\right)^{\frac{1}{N}},$$

onde $|\cdot|$ representa a norma da soma.

Definição 1.1.2. Dizemos que $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ é uma solução fraca do problema (*P1*) se $u > 0$ em Ω e se verifica

$$\int_\Omega a_0(|\nabla u|^{p_0})|\nabla u|^{p_0-2}\nabla u \nabla \phi \, dx - \lambda_0 \int_\Omega \frac{\phi}{u^{\beta_0}} \, dx - \int_\Omega f_0(u)\phi \, dx = 0,$$

para todo $\phi \in W_0^{1,N}(\Omega)$. Analogamente, dizemos que $(u,v) \in W_0^{1,N}(\Omega) \times W_0^{1,N}(\Omega)$ é solução do problema (*P2*) se $u, v > 0$ e satisfaz

$$\int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u \nabla \phi \, dx = \lambda_1 \int_\Omega \frac{\phi}{u^{\beta_1}} \, dx + \int_\Omega f_1(v)\phi \, dx,$$

e

$$\int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v \nabla \varphi \, dx = \lambda_2 \int_\Omega \frac{\varphi}{v^{\beta_2}} \, dx + \int_\Omega f_2(u)\varphi \, dx,$$

para todo $\phi, \varphi \in W_0^{1,N}(\Omega)$.

Nesta dissertação, trabalhamos com o operador $T_i : W_0^{1,N}(\Omega) \to (W_0^{1,N}(\Omega))'$, tal que

$$\langle T_i u_i, \phi_i \rangle = \int_\Omega a_i(|\nabla u_i|^{p_i})|\nabla u_i|^{p_i-2}\nabla u_i \nabla \phi_i dx.$$

Vamos mostrar que $T_i u_i$ está bem definido. De fato, usando a hipótese (a_1), para cada $\phi_i \in W_0^{1,N}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\langle T_i u_i, \phi_i \rangle &= \int_\Omega a_i(|\nabla u_i|^{p_i})|\nabla u_i|^{p_i-2}\nabla u_i \nabla \phi_i dx \\
&\leq \left| \int_\Omega a_i(|\nabla u_i|^{p_i})|\nabla u_i|^{p_i-2}\nabla u_i \nabla \phi_i dx \right| \\
&\leq \int_\Omega a_i(|\nabla u_i|^{p_i})|\nabla u_i|^{p_i-1}|\nabla \phi_i| dx \\
&\leq \int_\Omega (k_3|\nabla u_i|^{p_i-1} + k_4|\nabla u_i|^{N-1})|\nabla \phi_i| dx \\
&= k_3 \int_\Omega |\nabla u_i|^{p_i-1}|\nabla \phi_i| dx + k_4 \int_\Omega |\nabla u_i|^{N-1}|\nabla \phi_i| dx.
\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Hölder (Ver Apêndice B, Teorema B.1.1) para $p_0, \dfrac{p_0}{p_0-1}, N$ e $\dfrac{N}{N-1}$, obtemos

$$\langle T_i u_i, \phi_i \rangle \leq k_3 \left(\int_\Omega |\nabla u_i|^{p_0} dx \right)^{\frac{p_0-1}{p_0}} \left(\int_\Omega |\nabla u_i|^{p_0} dx \right)^{\frac{1}{p_0}} + k_4 \left(\int_\Omega |\nabla u_i|^{N} dx \right)^{\frac{N-1}{p_0}} \left(\int_\Omega |\nabla u_i|^{N} dx \right)^{\frac{1}{N}}$$

$$
\begin{aligned}
&= k_3||\nabla u_i||_{p_0}^{p_0-1}||\nabla\phi_i||_{p_0} + k_4||\nabla u_i||_N^{N-1}||\nabla\phi_i||_N \\
&= k_3||u_i||_{1,p_0}^{p_0-1}||\phi_i||_{1,p_0} + k_4||u_i||_{1,N}^{N-1}||\phi_i||_{1,N} < \infty,
\end{aligned}
$$

pois $u_i,\phi_i \in W_0^{1,N}(\Omega) \subset W_0^{1,p_0}(\Omega)$. Mostraremos agora que se $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ então $Tu \in (W_0^{1,N}(\Omega))'$. De fato, sejam $\phi_1,\phi_2 \in W_0^{1,N}(\Omega)$ e $c \in \mathbb{R}$, temos

$$
\begin{aligned}
\langle Tu, c\phi_1+\phi_2\rangle &= \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla(c\phi_1+\phi_2)dx \\
&= c\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi_1 dx + \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi_2 dx \\
&= c\langle Tu,\phi_1\rangle + \langle Tu,\phi_2\rangle.
\end{aligned}
$$

E, pela mesma conta feita anteriormente, obtemos de (a_1) e da Desigualdade de Hölder para $p, \dfrac{p}{p-1}, N$ e $\dfrac{N}{N-1}$ que

$$
|\langle Tu,\phi_1\rangle| \le k_3||u||_{1,p}^{p-1}||\phi||_{1,p} + k_4||u||_{1,N}^{N-1}||\phi||_{1,N}.
$$

Como $2 \le p < N$, da imersão de Sobolev (ver Apêndice B), existe uma constante k_3', tal que

$$
\begin{aligned}
|\langle Tu,\phi_1\rangle| &\le k_3'||u||_{1,p}^{p-1}||\phi||_{1,N} + k_4||u||_{1,N}^{N-1}||\phi||_{1,N} \\
&= \left(k_3'||u||_{1,p}^{p-1} + k_4||u||_{1,N}^{N-1}||\right)||\phi||_{1,N} \\
&= C||\phi||_{1,N}, \quad \forall\ \phi \in W_0^{1,N}(\Omega).
\end{aligned}
$$

A seguir, os três próximos lemas mostram que o operador T_i é contínuo, monótono e coercivo.

Lema 1.1.1. *O operador* $T_i : W_0^{1,N}(\Omega) \to (W_0^{1,N}(\Omega))'$ *definido por*

$$
\langle T_i u_i, \phi_i\rangle = \int_\Omega a_i(|\nabla u_i|^{p_i})|\nabla u_i|^{p_i-2}\nabla u_i\nabla\phi_i dx
$$

é contínuo.

Demonstração. Seja $(u_n) \subset W_0^{1,N}(\Omega)$ e $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Então,

$$
|\nabla u_n| \to |\nabla u| \quad \text{em} \ \ L^N(\Omega).
$$

Assim, pela recíproca do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Ver Teorema B.3.3), existe $g \in L^N(\Omega)$ tal que

(i) $|\nabla u_n(x)| \to |\nabla u(x)|$ q.t.p. em Ω;

(ii) $|\nabla u_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p. em Ω.

Observe que

$$\begin{aligned}||Tu_n - Tu||_{(W_0^{1,N}(\Omega))'} &= \sup_{||\phi||\leq 1} |\langle Tu_n - Tu, \phi\rangle| \\ &= \sup_{||\phi||\leq 1} |\langle Tu_n, \phi\rangle - \langle Tu, \phi\rangle| \\ &= \sup_{||\phi||\leq 1} \left| \int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla \phi dx - \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi dx \right|.\end{aligned}$$

Como $|\nabla u_n(x)| \to |\nabla u(x)|$ q.t.p. em Ω, então $|\nabla u_n(x)|^p \to |\nabla u(x)|^p$ q.t.p. em Ω. Assim, desde que $a \in C^1$, temos

$$a(|\nabla u_n|^p) \to a(|\nabla u|^p),$$

portanto, do item (i),

$$a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla \phi \to a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi.$$

Usando (a_1), obtemos

$$\begin{aligned}|a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla \phi| &\leq a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-1}|\nabla \phi| \\ &\leq (k_3|\nabla u_n|^{p-1} + k_4|\nabla u_n|^{N-1})|\nabla \phi| \\ &= k_3|\nabla u_n|^{p-1}|\nabla \phi| + k_4|\nabla u_n|^{N-1}|\nabla \phi|.\end{aligned}$$

Decorre da Desigualdade de Young (Ver Teorema B.3.5) para $p, p/(p-1), N$ e $N/(N-1)$ e do item (ii) que

$$\begin{aligned}|a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla \phi| &\leq k_3(\varepsilon|\nabla u_n(x)|^p + C_\varepsilon|\nabla \phi(x)|^p) + k_4(\varepsilon|\nabla u_n(x)|^N + C_\varepsilon|\nabla \phi(x)|^N) \\ &\leq k_3(\varepsilon|g(x)|^p + C_\varepsilon|\nabla \phi(x)|^p) + k_4(\varepsilon|g(x)|^N + C_\varepsilon|\nabla \phi(x)|^N) \in L^1(\Omega).\end{aligned}$$

Logo, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue

$$\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla \phi dx \to \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi dx,$$

portanto,

$$||Tu_n - Tu||_{(W_0^{1,N}(\Omega))'} = o_n(1).$$

Tomando $n \to +\infty$, obtemos

$$Tu_n \to Tu \quad \text{em} \quad (W_0^{1,N}(\Omega))',$$

logo, T é um operador contínuo. $\square$

Lema 1.1.2. *O operador* $T_i : W_0^{1,N}(\Omega) \to (W_0^{1,N}(\Omega))'$ *definido por*

$$\langle T_i u_i, \phi_i \rangle = \int_\Omega a_i(|\nabla u_i|^{p_i})|\nabla u_i|^{p_i-2}\nabla u_i \nabla \phi_i dx$$

é coercivo.

Demonstração. Fazendo $\phi_i = u_i$ na definição de T_i e usando a limitação do operador T_i dado pela hipótese (a_1), obtemos

$$\begin{aligned}\langle T_i u_i, u_i \rangle &= \int_\Omega a_i(|\nabla u_i|^{p_i})|\nabla u_i|^{p_i} dx \\ &\geq \int_\Omega k_1|\nabla u_i|^{p_i} + k_2|\nabla u_i|^N dx \\ &= k_1||u_i||_{1,p_i}^{p_i} + k_2||u_i||_{1,N}^N \\ &\geq k_2||u_i||_{1,N}^N,\end{aligned}$$

logo,

$$\frac{\langle T_i u_i, u_i \rangle}{||u_i||_{1,N}} \geq k_2||u_i||_{1,N}^{N-1}.$$

Fazendo $||u_i||_{1,N}$ tender ao infinito, uma vez que $N \geq 3$, o lado direito da desigualdade vai ao infinito, portanto,

$$\lim_{||u_i||_{1,N}\to\infty} \frac{\langle T_i u_i, u_i \rangle}{||u_i||_{1,N}} = +\infty.$$

$\square$

Para mostrarmos a monotonicidade de T_i, utilizaremos a desigualdade dada pela proposição abaixo que pode ser encontrada em [7].

Proposição 1.1.1. *Seja* $a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *uma função de classe* C^1 *tal que as condições* (a_1) *e* (a_2) *são válidas. Então vale*

$$C|x-y|^{p_i} \leq \langle a_i(|x|^{p_i})|x|^{p_i-2}x - a(|y|^{p_i})|y|^{p_i-2}y, x-y \rangle,$$

para $x, y \in \mathbb{R}^N$.

Demonstração. Observe que

$$\langle a_i(|x|^{p_i})|x|^{p_i-2}x - a_i(|y|^{p_i})|y|^{p_i-2}y, x-y \rangle = \sum_{j=1}^N \left(a_i(|x|^{p_i})|x|^{p_i-2}x_j - a_i(|y|^{p_i})|y|^{p_i-2}y_j\right)(x_j - y_j)$$

e para todo $z, \xi \in \mathbb{R}^N$, utilizando a regra do produto e regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial z_k}(a_i(|z|^{p_i})|z|^{p_i-2}z_j)\xi_k\xi_j = (p_i-2)|z|^{p_i-4}\sum_{k,j=1}^{N} a_i(|z|^{p_i})z_kz_j\xi_k\xi_j \\ + \sum_{k,j=1}^{N} a_i(|z|^{p_i})|z|^{p_i-2}\delta_{k,j}\xi_k\xi_j \\ + p_i\sum_{k,j=1}^{N} a_i'(z^{p_i})|z|^{2p_i-4}z_kz_j\xi_k\xi_j.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial z_k}(a_i(|z|^{p_i})|z|^{p_i-2}z_j)\xi_k\xi_j = (p_i-2)|z|^{p_i-4}a_i(|z|^{p_i})\sum_{k,j=1}^{N} z_kz_j\xi_k\xi_j \\ + a_i(|z|^{p_i})|z|^{p_i-2}|\xi|^2 \\ + p_ia_i'(z^{p_i})|z|^{2p_i-4}\sum_{k,j=1}^{N} z_kz_j\xi_k\xi_j.\end{aligned}$$

Como

$$\sum_{k,j=1}^{N} z_kz_j\xi_k\xi_j = \sum_{k=1}^{N}(z_k\xi_k)\sum_{j=1}^{N}(z_j\xi_j) = \left(\sum_{j=1}^{N} z_j\xi_j\right)^2,$$

obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial z_k}(a_i(|z|^{p_i})|z|^{p_i-2}z_j)\xi_k\xi_j &= (p_i-2)|z|^{p_i-4}a_i(|z|^{p_i})\left(\sum_{k,j=1}^{N} z_j\xi_j\right)^2 \\ &\quad + p_ia_i'(z^{p_i})|z|^{2p_i-4}\left(\sum_{k,j=1}^{N} z_j\xi_j\right)^2. \\ &\quad + a_i(|z|^{p_i})|z|^{p_i-2}|\xi|^2 \\ &= \left(\sum_{k,j=1}^{N} z_j\xi_j\right)^2 |z|^{p_i-4}\left[(p_i-2)a_i(|z|^{p_i}) + p_ia_i'(|z|^{p_i})|z|^{p_i}\right] \\ &\quad + a_i(|z|^{p_i})|z|^{p_i-2}|\xi|^2.\end{aligned}$$

Da hipótese (a_2), temos $(a_i(|z|^{p_i})|z|^{p_i-2})' \geq 0$ e daí $(p_i-2)a_i(|z|^{p_i}) + p_i a_i'(|z|^{p_i})|z|^{p_i} \geq 0$. Logo,

$$\sum_{j,k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial z_k}(a_i(|z|^{p_i})|z|^{p_i-2}z_j)\xi_k\xi_j \geq a_i(|z|^{p_i})|z|^{p_i-2}|\xi|^2. \tag{1.1.1}$$

Além disso, se $|y| \geq |x|$, segue da desigualdade triangular que

$$|x-y| \leq |x|+|y| \leq |y|+|y| = 2|y|.$$

Portanto, $\frac{1}{2}|x-y| \leq |y|$ e para $t \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$, temos

$$|y+t(x-y)| \geq |y|-t|x-y| \geq \frac{1}{2}|x-y|-t|x-y| \geq |x-y|\left(\frac{1}{2}-t\right) \geq \frac{1}{4}|x-y|.$$

Fazendo $z = x-y$ e $\xi = x-y$, de uma cálculo direto, obtemos

$$\sum_{j=1}^{N}\left(a_i(|x|^{p_i})|x|^{p_i-2}x_j - a_i(|y|^{p_i})|y|^{p_i-2}y_j\right)(x_j-y_j) = \int_0^1 \sum_{j,k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial z_k}(a_i(|z|^{p_i})|z|^{p_i-2}z_j)\xi_k\xi_j dt.$$

Usando (1.1.1), obtemos

$$\langle a_i(|x|^{p_i})|x|^{p_i-2}x - a_i(|y|^{p_i})|y|^{p_i-2}y, x-y\rangle \geq a_i(|y+t(x-y)|^{p_i})|y+t(x-y)|^{p_i-2}|x-y|^2. \tag{1.1.2}$$

De (a_1), concluímos

$$\langle a_i(|x|^{p_i})|x|^{p_i-2}x - a_i(|y|^{p_i})|y|^{p_i-2}y, x-y\rangle \geq \frac{k_1}{4}|x-y|^{p_i-2}|x-y|^2 = C|x-y|^{p_i}.$$

□

Lema 1.1.3. *O operador $T_i : W_0^{1,N}(\Omega) \to (W_0^{1,N}(\Omega))'$ definido por*

$$\langle T_i u_i, \phi_i\rangle = \int_\Omega a_i(|\nabla u_i|^{p_i})|\nabla u_i|^{p_i-2}\nabla u_i \nabla\phi_i dx$$

é monótono.

Demonstração. Observe que

$$\langle T_i u_i - T_i v_i, u_i - v_i\rangle = \langle T_i u_i, u_i - v_i\rangle - \langle T_i v_i, u_i - v_i\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega a_i(|\nabla u_i|^{p_i})|\nabla u_i|^{p_i-2}\nabla u_i(\nabla u_i - \nabla v_i)dx \\
&\quad - \int_\Omega a_i(|\nabla v_i|^{p_i})|\nabla v_i|^{p_i-2}\nabla v_i(\nabla u_i - \nabla v_i)dx \\
&= \int_\Omega (\nabla u_i - \nabla v_i)\left[a_i(|\nabla u_i|^{p_i})|\nabla u_i|^{p_i-2}\nabla u_i - a_i(|\nabla v_i|^{p_i})|\nabla v_i|^{p_i-2}\nabla v_i\right] dx,
\end{aligned}
$$

Usando a Proposição 1.1.1, temos

$$\langle T_i u_i - T_i v_i, u_i - v_i\rangle \geq C\int_\Omega |\nabla u_i - \nabla v_i|^p dx = C||u-v||_{1,p}^p > 0. \qquad \square$$

O próximo lema fornece a unicidade da solução para o problema linear com o operador estudado.

Lema 1.1.4. *Suponha que as condições (a_1) e (a_2) sejam satisfeitas. Então, existe uma única solução $u_i \in W_0^{1,N}(\Omega)$ para o problema linear*

$$
\begin{cases}
-\mathrm{div}(a_i(|\nabla u_i|^{p_i})|\nabla u_i|^{p_i-2}\nabla u_i) = h_i(x) & \text{em } \Omega,\\
u_i = 0 & \text{sobre } \partial\Omega,
\end{cases}
$$

onde $h_i \in (W_0^{1,N}(\Omega))'$, para todo $i = 0,1,2$ e $2 \leq p_i < N$.

Demonstração. Considere o operador $T_i : W_0^{1,N}(\Omega) \longrightarrow (W_0^{1,N}(\Omega))'$ dado por

$$\langle T_i u_i, \phi_i\rangle = \int_\Omega a_i(|\nabla u_i|^{p_i})\, |\nabla u_i|^{p_i-2}\nabla u_i \nabla \phi_i \, dx.$$

Desde que T_i é contínuo, monótono e coercivo. Aplicamos o Teorema de Minty-Browder (Ver Teorema B.2.6), para obter um único $u_i \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que $T_i u_i = h_i(x)$. $\square$

Nossa abordagem no estudo do problema (*P1*) e do sistema (*P2*) baseia-se fortemente no seguinte Princípio de Comparação Fraca.

Lema 1.1.5. *Se Ω é um domínio limitado e se $u_i, v_i \in W_0^{1,N}(\Omega)$ satisfaz*

$$
\begin{cases}
-\mathrm{div}(a_i(|\nabla u_i|^{p_i})|\nabla u_i|^{p_i-2}\nabla u_i) \leq -\mathrm{div}(a_i(|\nabla v_i|^{p_i})|\nabla v_i|^{p_i-2}\nabla v_i) & \text{em } \Omega,\\
u_i \leq v_i & \text{sobre } \partial\Omega,
\end{cases}
$$

então $u_i \leq v_i$ em Ω.

Demonstração. Temos

$$\int_\Omega a_i(|\nabla u_i|^{p_i})|\nabla u_i|^{p_i-2}\nabla u_i \nabla \phi dx \leq \int_\Omega a_i(|\nabla v_i|^{p_i})|\nabla v_i|^{p_i-2}\nabla v_i \nabla \phi dx,$$

para todo $u_i, v_i \geq 0$. Considere $\phi = (u-v)^+ = \max\{u-v, 0\} \geq 0$, então

$$\int_\Omega a_i(|\nabla u_i|^{p_i})|\nabla u_i|^{p_i-2}\nabla u_i \nabla (u-v)^+ dx \leq \int_\Omega a_i(|\nabla v_i|^{p_i})|\nabla v_i|^{p_i-2}\nabla v_i \nabla (u-v)^+ dx.$$

Desde que

$$\nabla(u-v)^+ = \begin{cases} \nabla(u-v), & \text{se } \ u > v, \\ 0, & \text{se } \ u \leq v, \end{cases}$$

segue

$$\int_{\{u_i > v_i\}} a_i(|\nabla u_i|^{p_i})|\nabla u_i|^{p_i-2}\nabla u_i \nabla (u-v) - a_i(|\nabla v_i|^{p_i})|\nabla v_i|^{p_i-2}\nabla v_i \nabla (u-v) dx \leq 0.$$

Usando (1.1.2), obtemos

$$0 \leq \int_{\{u_i > v_i\}} [a_i(|\nabla u_i|^{p_i})|\nabla u_i|^{p_i-2}\nabla u_i - a_i(|\nabla v_i|^{p_i})|\nabla v_i|^{p_i-2}\nabla v_i] \nabla (u-v) dx \leq 0,$$

logo

$$\int_{\{u_i > v_i\}} [a_i(|\nabla u_i|^{p_i})|\nabla u_i|^{p_i-2}\nabla u_i - a_i(|\nabla v_i|^{p_i})|\nabla v_i|^{p_i-2}\nabla v_i] \nabla (u-v) dx = 0.$$

Considere $\Omega_0 = \{x \in \Omega : u_i(x) > v_i(x)\}$. Há duas possibilidades:

(i) $\Omega_0 = \varnothing$;

(ii) $\nabla u_i = \nabla v_i$ em Ω_0.

Se ocorresse (ii) teríamos $v_i = u_i + c$, onde c é uma constante. Como em $\partial\Omega_0$ temos $u_i = v_i$, então, por continuidade, segue que $c = 0$. Portanto, $u_i = v_i$ em Ω_0, o que contradiz $u_i > v_i$. Segue então que $\Omega_0 = \varnothing$, isto é, $\{x \in \Omega : u_i(x) > v_i(x)\} = \varnothing$, logo, $u_i \leq v_i$ em Ω. $\square$

O próximo lema fornece a regularidade $L^\infty(\Omega)$ das soluções para a classe de problemas $p\&q$-Laplaciano estudada. Precisaremos dessa regularidade na demonstração dos problemas principais.

Lema 1.1.6. *Seja $u_i \in W_0^{1,N}(\Omega)$ a solução do problema*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a_i(|\nabla u_i|^{p_i})|\nabla u_i|^{p_i-2}\nabla u_i) = f_i & \text{em } \Omega, \\ u_i = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1.3}$$

tal que $f_i \in L^{r_i}(\Omega)$ com $r_i > \dfrac{N^*}{N^*-N}$. Então, $u_i \in L^\infty$. Em particular, se $\|f_i\|_{r_i}$ é pequeno, então também $\|u_i\|_\infty$ é pequeno, para todo $i = 0,1,2$ e $2 \leq p_i < N$.

Demonstração. Ver [1, Lema 2.5]. □

No que diz respeito à regularidade da solução do problema (1.1.3), podemos afirmar que o próximo resultado é válido e a demonstração pode ser elaborada seguindo os mesmos argumentos utilizados em [10, Teorema 1].

Lema 1.1.7. *Fixe $h_i \in L^\infty(\Omega)$, para todo $i = 0,1,2$, e considere $u_i \in W_0^{1,N}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, com $2 \leq p_i < N$, satisfazendo o problema*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a_i(|\nabla u_i|^{p_i})|\nabla u_i|^{p_i-2}\nabla u_i) = h_i & \text{em } \Omega, \\ u_i = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então, $u_i \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha \in (0,1)$.

Agora, usando o Lema 1.1.5, podemos reaplicar os argumentos de [18, Lema de Hopf] para obter o próximo resultado.

Lema 1.1.8. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave e $i = 0,1,2$. Se $u_i \in C^1(\overline{\Omega}) \cap W_0^{1,N}(\Omega)$, com $2 \leq p_i < N$, e*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a_i(|\nabla u_i|^{p_i})|\nabla u_i|^{p_i-2}\nabla u_i) \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ u_i > 0 & \text{em } \Omega, \\ u_i = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então, $\dfrac{\partial u_i}{\partial \eta} < 0$ em $\partial\Omega$, onde η é a normal exterior para $\partial\Omega$.

Para outros conceitos sobre o espaço de Sobolev $W_0^{1,N}(\Omega)$, o leitor pode consultar o Apêndice B, onde expomos algumas outras definições e resultados importantes para o nosso estudo.

1.2 Algumas desigualdades importantes

Os Lemas 1.1.6 e 1.1.7 foram apresentados a fim de que possamos obter a regularidade exigida no Lema 1.1.8, que por sua vez, culmina no próxima lema que será importante para alcançarmos a positividade das soluções buscadas para os problemas (*P1*) e (*P2*).

Lema 1.2.1. *Sejam $\phi, \omega > 0$ quaisquer funções em $C_0^1(\overline{\Omega})$. Se $\dfrac{\partial \phi}{\partial \nu} > 0$ em $\partial\Omega$, onde ν é a normal interior para $\partial\Omega$, então existe $C > 0$ tal que*

$$\frac{\phi(x)}{\omega(x)} \geq C > 0, \quad \textit{para todo} \quad x \in \Omega.$$

Demonstração. Para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, consideramos o seguinte conjunto

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega;\ dist(x, \partial\Omega) < \delta\}.$$

Observe que $\Omega \setminus \Omega_\delta$ é compacto e desde que $0 < \phi, \omega \in C_0^1(\overline{\Omega})$ em Ω segue que $\dfrac{\phi(x)}{\omega(x)} > 0$ é contínua e, assim, alcança máximo e mínimo em $\Omega \setminus \Omega_\delta$, logo existe $m > 0$ tal que

$$\frac{\phi(x)}{\omega(x)} \geq m, \text{ para todo } x \in \Omega \setminus \Omega_\delta. \tag{1.2.1}$$

Segue de $\dfrac{\partial \phi}{\partial \nu} > 0$ em $\partial\Omega$ que $\dfrac{\partial \phi}{\partial \eta} < 0$, onde η é a normal exterior sobre $\partial\Omega$. Além disso, como $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado, então $\partial\Omega$ é um conjunto compacto e, consequentemente, existe $C_1 < 0$ satisfazendo

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial \eta} \leq C_1, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}_\delta.$$

Como $\omega \in C_0^1(\overline{\Omega})$, existe $C_2 > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial \omega(x)}{\partial \eta} \right| \leq C_2, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}_\delta.$$

Considere $K_0 = \inf\limits_{\overline{\Omega}_\delta} \dfrac{\partial \omega}{\partial \eta} < 0$ e defina a função $H(x) = \alpha\omega(x) - \phi(x)$, para todos os $x \in \overline{\Omega}_\delta$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ a serem escolhidos posteriormente. Como $0 < \alpha < \dfrac{C_1}{K_0}$ obtemos

$$\frac{\partial H(x)}{\partial \eta} = \alpha \frac{\partial \omega(x)}{\partial \eta} - \frac{\partial \phi(x)}{\partial \eta} \geq \alpha K_0 - C_1 > 0, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}_\delta.$$

Agora, fixe $x \in \overline{\Omega}_\delta$ e considere a função

$$f(x) = H(x + s\eta), \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Para cada $x \in \overline{\Omega}_\delta$, escolhemos um único $\widetilde{x} \in \overline{\Omega}_\delta$ de modo que exista $\widehat{s} > 0$ tal que $x + \widehat{s}\eta = \widetilde{x} \in \partial\Omega$. Portanto, como $H(\partial\Omega) \equiv 0$ temos

$$f(\widehat{s}) = H(x + \widehat{s}\eta) = H(\widetilde{x}) = 0.$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio, existe $\xi \in (0, \widehat{s})$, tal que

$$f(\widehat{s}) - f(0) = f'(\xi)(\widehat{s} - 0),$$

o que implica que

$$-H(x) = \frac{\partial H}{\partial \eta}(x + \xi\eta)\widehat{s} > 0, \text{ em } \overline{\Omega}_\delta.$$

Portanto, $H(x) \leq 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}_\delta$ e, portanto,

$$\alpha\omega(x) - \phi(x) \leq 0, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}_\delta,$$

que resulta em

$$\alpha\omega(x) \leq \phi(x), \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}_\delta.$$

Assim,

$$\frac{\phi(x)}{\omega(x)} \geq \alpha > 0, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}_\delta. \tag{1.2.2}$$

Em virtude de (1.2.1) e (1.2.2), concluímos que existe $C > 0$ de modo que

$$\frac{\phi(x)}{\omega(x)} \geq C, \text{ para todo } x \in \Omega. \qquad \square$$

Destacamos também um resultado importante devido a Trudinger-Moser [19, 16] que nos permitirá fazer boas limitações quando estudarmos os problemas auxiliares.

Teorema 1.2.1 (Desigualdade de Trudinger-Moser)**.** *Para todo $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ e $\alpha > 0$, então*

$$\exp\left(\alpha u^{\frac{N}{N-1}}\right) \in L^1(\Omega)$$

e existe constante $M > 0$ tal que

$$\sup_{||u||_{1,N}\leq 1} \int_{\Omega} \exp\left(\alpha u^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \leq M,$$

para todo $\alpha \leq \alpha_N := N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$, onde ω_{N-1} é a medida $(N-1)$-dimensional de uma $(N-1)$ esfera.

Demonstração. Ver [16, 19]. □

Utilizaremos o resultado abaixo devido a Hardy-Sobolev [11] nas Seções 2.2 e 3.2 que tratam das demonstrações dos teoremas principais deste trabalho.

Teorema 1.2.2 (Desigualdade de Hardy-Sobolev)**.** *Se $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ com $1 < p \leq N$, então $\dfrac{u}{Cd^r} \in L^r(\Omega)$, para $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1-\tau}{N}$, $0 < \tau \leq 1$ e*

$$\left|\frac{u}{Cd^r}\right|_{L_r(\Omega)} \leq |\nabla u|_{L^p(\Omega)},$$

onde $d(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ e C é uma constante positiva que não depende de x.

Demonstração. Ver [11]. □

1.3 Lema Fundamental

Como aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer (ver Teorema A.2.1) obtemos o resultado abaixo que é de fundamental importância no nosso estudo, especificamente, na implementação do Método de Galerkin. O leitor pode encontrar alguns conceitos e propriedades sobre a Teoria do Grau de Brouwer no Apêndice A.

Lema 1.3.1. *Seja $G : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ uma função contínua tal que $\langle G(\xi), \xi \rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^d$ com $||\xi|| = r$ para algum $r > 0$. Então, existe $z_0 \in \overline{B}_r(0)$ tal que $G(z_0) = 0$.*

Demonstração. Suponha por contradição que

$$G(\xi) \neq 0, \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}^d, \text{ com } ||\xi|| = r$$

e defina

$$g : \overline{B}_r(0) \to \overline{B}_r(0)$$

$$\xi \mapsto g(\xi) = \frac{-rG(\xi)}{||G(\xi)||}.$$

Observe que

$$||g(\xi)|| = \frac{||-rG(\xi)||}{||G(\xi)||} = \frac{r||G(\xi)||}{||G(\xi)||} = r,$$

logo $g(\overline{B}_r(0)) \subset \overline{B}_r(0)$ e, portanto, $g(\xi) \in \overline{B}_r(0)$. Além disso, g é contínua, pois G é contínua, por hipótese. Assim, pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, a função g tem um ponto fixo em $\overline{B}_r(0)$. Seja z_0 tal ponto fixo de g, isto é, $z_0 = g(z_0)$. Então,

$$||z_0|| = ||g(z_0)|| = r > 0.$$

Por outro lado,

$$r^2 = ||z_0||^2 = \langle z_0, z_0 \rangle = \langle z_0, g(z_0) \rangle = \left\langle z_0, \frac{-rG(z_0)}{||G(z_0)||} \right\rangle = \frac{-r}{||G(z_0)||} \langle z_0, G(z_0) \rangle.$$

Como, por hipótese,

$$\langle z_0, G(z_0) \rangle \geq 0,$$

segue que

$$0 < r^2 = \frac{-r}{||G(z_0)||} \langle z_0, G(z_0) \rangle \leq 0,$$

que é um absurdo. Portanto, existe $z_0 \in \overline{B}_r(0)$ tal que $G(z_0) = 0$. $\square$

Capítulo 2

Primeiro Resultado: caso escalar

Neste capítulo, investigaremos a existência de solução não negativa para o problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a_0(|\nabla u|^{p_0})|\nabla u|^{p_0-2}\nabla u) = \dfrac{\lambda_0}{u^{\beta_0}} + f_0(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$P1$}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave com $N \geq 3,\ 2 \leq p_0 < N,\ 0 < \beta_0 \leq 1$ e $\lambda_0 > 0$. As hipóteses sobre as funções $a_0 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ de classe C^1 e $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua com crescimento exponencial são as seguintes:

(a_1) existem constantes $k_1,\ k_2 > 0$ e $k_3,\ k_4 \geq 0$ tais que

$$k_1 t^{p_0} + k_2 t^N \leq a_0(t^{p_0})t^{p_0} \leq k_3 t^{p_0} + k_4 t^N, \text{ para todo } t \geq 0;$$

(a_2) A função

$$t \longmapsto a_0(t^{p_0})t^{p_0-2} \quad \text{é crescente, para todo } t \geq 0;$$

(f_1) existe $\alpha_0 > 0$ tal que as condições de crescimento exponencial no infinito são dadas por:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f_0(t)}{\exp\left(\alpha |t|^{\frac{N}{N-1}}\right)} = 0, \text{ para } \alpha > \alpha_0$$

e

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f_0(t)}{\exp\left(\alpha |t|^{\frac{N}{N-1}}\right)} = \infty, \text{ para } 0 < \alpha < \alpha_0;$$

(f_2) a condição de crescimento na origem:

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f_0(t)}{t^{p_0 - 1}} = 0;$$

(f_3) existe $\gamma_0 > N$ tal que

$$f_0(t) \geq t^{\gamma_0 - 1}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

A hipótese (a_1) nos dá certas condições que serão utilizadas para limitar o operador do problema. Enquanto que a hipótese (a_2) foi fundamental na demonstração da Proposição 1.1.1 que fornece uma desigualdade crucial tanto para obter propriedades do operador quanto nos ajudará na prova da convergência da solução aproximada.

A hipótese (f_1) indica o crescimento crítico da função f, o que nos ajudará a fazer estimativas. A hipótese (f_2) é importante para garantir uma boa geometria na origem. E, por fim, a hipótese (f_3) será utilizada na Seção 2.2 que possibilitará usar um Princípio de Comparação Fraca, demonstrado no Lema 1.1.5.

Decorre de (f_1) e (f_2), que, para todo $\delta > 0$ e para todo $\alpha > \alpha_0$, existe $C_\delta > 0$, tal que

$$|f_0(t)t| \leq \delta |t|^{p_0} + C_\delta |t|^{q_0} \exp\left(\alpha |t|^{\frac{N}{N-1}}\right), \tag{2.0.1}$$

para todo $q_0 \geq 0$. Neste trabalho, usaremos $q_0 > N$ e $f_0(t) = 0$, para todo $t \leq 0$. Para estabelecer a existência de solução positiva para o problema (*P1*) usamos um problema auxiliar, para o qual mostramos a existência de solução via Método de Galerkin.

O principal resultado deste capítulo é o

Teorema 2.0.1. *Suponha que as condições (a_1), (a_2) e (f_1) - (f_3) sejam válidas. Então, existe $\lambda^* > 0$ tal que o problema (P1) tem uma solução fraca positiva para cada $\lambda_0 \in (0, \lambda^*)$.*

2.1 Problema auxiliar para o caso escalar

Para cada $0 < \varepsilon < 1$ fixado, consideramos o seguinte problema auxiliar

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a_0(|\nabla u|^{p_0})|\nabla u|^{p_0-2}\nabla u) = \dfrac{\lambda_0}{(u+\varepsilon)^{\beta_0}} + f_0(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

onde as funções a_0 e f_0 satisfazem as hipóteses do Teorema 2.0.1.

Mostraremos a existência de solução para este problema auxiliar utilizando o Método de Galerkin e o Lema Fundamental descrito no Lema 1.3.1.

Antes de prosseguirmos com o enunciado e a prova do principal resultado desta seção, vamos obter uma estimativa a priori da solução procurada. Lembremos que se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função qualquer, definimos a *parte positiva* u^+ e a *parte negativa* u^- da função u por

$$u^+(x) := \max\{u(x), 0\} \ \text{ e } \ u^-(x) := \max\{-u(x), 0\}, \ \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Deste modo, para cada $\varepsilon > 0$, podemos reescrever o problema (2.1.1) da seguinte forma

$$\begin{cases} -\text{div}(a_0(|\nabla u|^{p_0})|\nabla u|^{p_0-2}\nabla u) = \dfrac{\lambda_0}{(u^+ + \varepsilon)^{\beta_0}} + f_0(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1.2}$$

De fato, suponha que u é solução do problema acima, então

$$\int_\Omega a_0(|\nabla u|^{p_0})|\nabla u|^{p_0-2}\nabla u \nabla \phi dx = \lambda_0 \int_\Omega \frac{\phi}{(u^+ + \varepsilon)^{\beta_0}} dx + \int_\Omega f_0(u)\phi dx.$$

Fazendo a função teste ϕ assumir o valor da parte negativa de u, isto é, $\phi = u^-$, obtemos

$$\int_\Omega a_0(|\nabla u|^{p_0})|\nabla u|^{p_0-2}\nabla u \nabla u^- dx = \lambda_0 \int_\Omega \frac{u^-}{(u^+ + \varepsilon)^{\beta_0}} dx + \int_\Omega f_0(u)u^- dx.$$

Vamos analisar cada uma das integrais acima. Como $u = u^+ - u^-$, segue que

$$\int_\Omega a_0(|\nabla u|^{p_0})|\nabla u|^{p_0-2}\nabla u \nabla u^- dx = \int_\Omega a_0(|\nabla(u^+ - u^-)|^{p_0})|\nabla u^+ - \nabla u^-|^{p_0-2}(\nabla u^+ - \nabla u^-)\nabla u^- dx.$$

Observe que o lado direito da igualdade se anula no conjunto $\{x \in \Omega; u(x) \geq 0\}$ uma vez que u^+ e u^- possuem suporte disjuntos, logo, podemos considerar somente os valores de x para os quais $u(x) \leq 0$ acarretando em $u^+ \equiv 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_\Omega a_0(|\nabla u|^{p_0})|\nabla u|^{p_0-2}\nabla u \nabla u^- dx &= \int_\Omega a_0(|\nabla u^-|^{p_0})|\nabla u^-|^{p_0-2}(-\nabla u^-)\nabla u^- dx \\ &= -\int_\Omega a_0(|\nabla u^-|^{p_0})|\nabla u^-|^{p_0-2}|\nabla u^-|^2 dx \\ &= -\int_\Omega a_0(|\nabla u^-|^{p_0})|\nabla u^-|^{p_0} dx. \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Além disso, observe que, por definição, u^- é não negativa, logo,

$$\int_\Omega \frac{u^-}{(u^+ + \varepsilon)^{\beta_0}} dx \geq 0. \tag{2.1.4}$$

Novamente, como u^+ e u^- possuem suporte disjuntos e, por hipótese, $f_0(t) = 0$ para todo $t \leq 0$, então

$$\int_\Omega f_0(u)u^- dx = \int_\Omega f_0(u^+ - u^-)u^- dx = \int_\Omega f_0(-u^-)u^- dx = 0. \tag{2.1.5}$$

De (2.1.3), (2.1.4) e (2.1.5) segue que

$$\int_\Omega a_0(|\nabla u^-|^{p_0})|\nabla u^-|^{p_0} dx \leq 0.$$

Agora, por (a_1), obtemos

$$\begin{aligned} 0 \geq \int_\Omega a_0(|\nabla u^-|^{p_0})|\nabla u^-|^{p_0} dx &\geq k_1 \int_\Omega |\nabla u^-|^{p_0} dx + k_2 \int_\Omega |\nabla u^-|^N dx \\ &\geq k_2 \int_\Omega |\nabla u^-|^N dx = k_2 ||u^-||_{1,N}^N \geq 0, \end{aligned}$$

logo, $k_2||u^-||_{1,N}^N = 0$. Desde que $k_2 > 0$, segue $||u^-||_{1,N} = 0$, logo, $u^- = 0$ e $u = u^+ \geq 0$.

Portanto, como uma solução do problema (2.1.2) também é solução do problema (2.1.1), vamos procurar soluções assumindo, a partir deste momento, que u é não negativa. Com isso, estamos prontos para enunciar e demonstrar o resultado principal desta seção.

Lema 2.1.1. *Para cada* $0 < \varepsilon < 1$*, existe* $\lambda^* > 0$ *tal que o problema* (2.1.1) *tem uma solução fraca não negativa para todo* $\lambda_0 \in (0, \lambda^*)$.

Demonstração. Seja $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_m, \ldots\}$ uma base de Schauder de $W_0^{1,N}(\Omega)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, defina

$$W_m = [e_1, e_2, \ldots, e_m]$$

sendo o espaço de dimenção finita gerado por $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Observe que os espaços $(W_m, ||\cdot||)$ e $(\mathbb{R}^m, |\cdot|)$ são isometricamente isomorfos pela aplicação natural

$$S : W_m \to \mathbb{R}^m$$

dado por

$$u = \sum_{j=1}^m \xi_j e_j \mapsto S(u) = \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m),$$

onde

$$|\xi| = \sum_{j=1}^m |\xi_j| \quad \text{com} \quad |\xi|^N = |\xi_1|^N + |\xi_2|^N + \cdots + |\xi_m|^N = \sum_{j=1}^m |\xi_j|^N$$

e

$$||u||_{1,N} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^N dx \right)^{\frac{1}{N}}.$$

De fato, veja que

$$\begin{aligned}
||u||_{1,N}^N &= \int_\Omega |\nabla u|^N dx = \int_\Omega \left| \nabla \left(\sum_{j=1}^m \xi_j e_j \right) \right|^N dx \\
&= \int_\Omega \left| \sum_{j=1}^m \xi_j \nabla e_j \right|^N dx = \int_\Omega \sum_{j=1}^m |\xi_j|^N |\nabla e_j|^N dx \\
&= \sum_{j=1}^m |\xi_j|^N \int_\Omega |\nabla e_j|^N dx = \sum_{j=1}^m |\xi_j|^N ||e_j||_{1,N}^N \\
&= \sum_{j=1}^m |\xi_j|^N = |\xi|^N.
\end{aligned}$$

Logo,

$$||u||_{1,N} = |\xi| = |S(u)|. \tag{2.1.6}$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, defina a função $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$G(\xi) = G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = (G_1(\xi), G_2(\xi), \ldots, G_m(\xi)),$$

onde $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$,

$$G_j(\xi) = \int_\Omega a_0(|\nabla u|^{p_0}) |\nabla u|^{p_0 - 2} \nabla u \nabla e_j \, dx - \lambda_0 \int_\Omega \frac{e_j}{(u+\varepsilon)^{\beta_0}} \, dx - \int_\Omega f_0(u) e_j \, dx,$$

para todo $j = 1, 2, \ldots, m$, e $u = \sum_{j=1}^m \xi_j e_j \in W_m$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\langle G(\xi), \xi \rangle &= \sum_{j=1}^m G_j(\xi) \xi_j \\
&= \sum_{j=1}^m \left(\int_\Omega a_0(|\nabla u|^{p_0}) |\nabla u|^{p_0-2} \nabla u \nabla e_j \xi_j \, dx - \lambda_0 \int_\Omega \frac{e_j \xi_j}{(u+\varepsilon)^{\beta_0}} \, dx - \int_\Omega f_0(u) e_j \xi_j \, dx \right) \\
&= \int_\Omega a_0(|\nabla u|^{p_0}) |\nabla u|^{p_0-2} \nabla u \sum_{j=1}^m \xi_j \nabla e_j \, dx - \lambda_0 \int_\Omega \frac{1}{(u+\varepsilon)^{\beta_0}} \sum_{j=1}^m \xi_j e_j \, dx \\
&\quad - \int_\Omega f_0(u) \sum_{j=1}^m \xi_j e_j \, dx.
\end{aligned}$$

Como

$$u = \sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{m} \xi_j \nabla e_j = \nabla \left(\sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j \right) = \nabla u$$

segue que

$$\begin{aligned}\langle G(\xi), \xi \rangle &= \int_\Omega a_0(|\nabla u|^{p_0})|\nabla u|^{p_0-2}\nabla u \nabla u \, dx - \lambda_0 \int_\Omega \frac{u}{(u+\varepsilon)^{\beta_0}} \, dx - \int_\Omega f_0(u)u \, dx \\ &= \int_\Omega a_0(|\nabla u|^{p_0})|\nabla u|^{p_0} \, dx - \lambda_0 \int_\Omega \frac{u}{(u+\varepsilon)^{\beta_0}} \, dx - \int_\Omega f_0(u)u \, dx.\end{aligned}$$

A partir de agora, precisamos estimar cada parcela acima de modo a obter $\langle G(\xi), \xi \rangle \geq 0$ e, assim, podermos aplicar o Lema 1.3.1. Inicialmente, observe que, ao assumirmos $u \geq 0$ em Ω, segue da imersão de Sobolev $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ que existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\int_\Omega \frac{u}{(u+\varepsilon)^{\beta_0}} \, dx \leq \int_\Omega \frac{u}{\varepsilon^{\beta_0}} \, dx \leq \frac{1}{\varepsilon^{\beta_0}} \int_\Omega |u| dx = \frac{1}{\varepsilon^{\beta_0}} ||u||_1 \leq C_\varepsilon ||u||_{1,N}. \tag{2.1.7}$$

Usando (2.0.1) existem $\alpha > \alpha_0$ e $q_0 > N$ tal que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f_0(u)u| \, dx &\leq \delta \int_\Omega |u|^{p_0} \, dx + C_\delta \int_\Omega |u|^{q_0} \exp\left(\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}}\right) \, dx \\ &= \delta ||u||_{p_0}^{p_0} + C_\delta \int_\Omega |u|^{q_0} \exp\left(\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}}\right) \, dx.\end{aligned}$$

Da imersão de Sobolev $W_0^{1,p_0}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_0}(\Omega)$, existe uma constante positiva C_1, tal que

$$\int_\Omega |f_0(u)u| \, dx \leq \delta C_1 ||u||_{1,p_0}^{p_0} + C_\delta \int_\Omega |u|^{q_0} \exp\left(\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}}\right) \, dx.$$

Por outro lado, vale

$$\int_\Omega |f_0(u)u| \, dx \geq \left| \int_\Omega f_0(u)u \, dx \right| \geq \int_\Omega f_0(u)u \, dx,$$

logo, obtemos

$$\int_\Omega f_0(u)u \, dx \leq \delta C_1 ||u||_{1,p_0}^{p_0} + C_\delta \int_\Omega |u|^{q_0} \exp\left(\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}}\right) \, dx. \tag{2.1.8}$$

Agora, de (a_1), temos

$$\int_\Omega a_0(|\nabla u|^{p_0})|\nabla u|^{p_0} \, dx \geq k_1 \int_\Omega |\nabla u|^{p_0} \, dx + k_2 \int_\Omega |\nabla u|^N \, dx$$

$$= k_1||u||_{1,p_0}^{p_0} + k_2||u||_{1,N}^{N}. \tag{2.1.9}$$

Segue de (2.1.7), (2.1.8) e (2.1.9) que

$$\begin{aligned}\langle G(\xi),\xi\rangle &\geq k_1||u||_{1,p_0}^{p_0} + k_2||u||_{1,N}^{N} - \lambda_0 C_\varepsilon ||u||_{1,N} - \delta C_1||u||_{1,p_0}^{p_0} - C_\delta \int_\Omega |u|^{q_0} \exp\left(\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \\ &= k_2||u||_{1,N}^{N} + (k_1 - \delta C_1)||u||_{1,p_0}^{p_0} - \lambda_0 C_\varepsilon ||u||_{1,N} - C_\delta \int_\Omega |u|^{q_0} \exp\left(\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx. \quad (2.1.10)\end{aligned}$$

Como, por hipótese, $k_1 > 0$, tomando $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $(k_1 - \delta C_1) > 0$, podemos reescrever (2.1.10) como

$$\langle G(\xi),\xi\rangle \geq k_2||u||_{1,N}^{N} - \lambda_0 C_\varepsilon ||u||_{1,N} - C_\delta \int_\Omega |u|^{q_0} \exp\left(\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx. \tag{2.1.11}$$

Usando a Desigualdade de Holder com $s, s' > 1$ conjugados de Lebesgue, isto é $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$, temos

$$\begin{aligned}C_\delta \int_\Omega |u|^{q_0} \exp\left(\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx &\leq C_\delta \left(\int_\Omega |u|^{q_0 s'} dx\right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_\Omega \exp\left(\alpha s|u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx\right)^{\frac{1}{s}} \\ &= C_\delta ||u||_{s'}^{q_0} \left(\int_\Omega \exp\left(\alpha s|u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx\right)^{\frac{1}{s}}\end{aligned}$$

Como $q_0 > N$ e $s' > 1$, então da imersão de Sobolev $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^{s'}(\Omega)$, existe $C_1' > 0$ tal que $||u||_{s'}^{q_0} \leq C_1' ||u||_{W^{1,N}(\Omega)}^{q_0}$. Desde que Ω é limitado, as normas $||u||_{W^{1,N}(\Omega)}$ e $||u||_{W_0^{1,N}(\Omega)} = ||u||_{1,N}$ são equivalentes, portanto, existe uma constante $\widetilde{C_1}$ tal que

$$\begin{aligned}C_\delta \int_\Omega |u|^{q_0} \exp\left(\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx &\leq C_\delta C_1' ||u||_{W^{1,N}(\Omega)}^{q_0} \left(\int_\Omega \exp\left(\alpha s|u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx\right)^{\frac{1}{s}} \\ &\leq C_\delta \widetilde{C_1} ||u||_{1,N}^{q_0} \left(\int_\Omega \exp\left(\alpha s|u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx\right)^{\frac{1}{s}}. \quad (2.1.12)\end{aligned}$$

Então, segue de (2.1.11) e (2.1.12) que

$$\langle G(\xi),\xi\rangle \geq k_2||u||_{1,N}^{N} - \lambda_0 C_\varepsilon ||u||_{1,N} - C_\delta \widetilde{C_1} ||u||_{1,N}^{q_0} \left(\int_\Omega \exp\left(\alpha s|u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Suponha agora que $||u||_{1,N} = r$, para algum $r > 0$ escolhido posteriormente. Temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \exp\left(\alpha s|u|^{\frac{N}{N-1}}\right)\,dx &= \int_\Omega \exp\left(\alpha s||u||_{1,N}^{\frac{N}{N-1}}\left(\frac{|u|}{||u||_{1,N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right)\,dx\\ &= \int_\Omega \exp\left(\alpha s r^{\frac{N}{N-1}}\left(\frac{|u|}{||u||_{1,N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right)\,dx\end{aligned}$$

e, aplicando a Desigualdade de Trudinger-Moser (ver Teorema 1.2.1), impomos que

$$\alpha s r^{\frac{N}{N-1}} \leq \alpha_N \implies r \leq \left(\frac{\alpha_N}{\alpha s}\right)^{\frac{N-1}{N}},$$

onde $\alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$ em que ω_{N-1} é a medida $(N-1)$-dimensional de uma $(N-1)$-esfera. Portanto, existe $M > 0$ tal que

$$\sup_{||u||_{1,N}\leq 1}\int_\Omega \exp\left(\alpha s r^{\frac{N}{N-1}}\left(\frac{|u|}{||u||_{1,N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right)dx \leq M$$

e daí,

$$\langle G(\xi),\xi\rangle \geq k_2 r^N - \lambda_0 C_\varepsilon r - C_\delta \widetilde{C_1} M^{\frac{1}{s}} r^{q_0}.$$

Agora, é necessário escolher r, tal que

$$k_2 r^N - C_\delta \widetilde{C_1} M^{\frac{1}{s}} r^{q_0} \geq \frac{k_2 r^N}{2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}k_2 - C_\delta \widetilde{C_1} M^{\frac{1}{s}} r^{q_0-N} \geq \frac{k_2}{2} \iff r^{q_0-N} &\leq \frac{k_2}{C_\delta \widetilde{C_1} M^{\frac{1}{s}}} - \frac{k_2}{2C_\delta \widetilde{C_1} M^{\frac{1}{s}}}\\ \iff r^{q_0-N} &\leq \frac{k_2}{2C_\delta \widetilde{C_1} M^{\frac{1}{s}}}\\ \iff r &\leq \left(\frac{k_2}{2C_\delta \widetilde{C_1} M^{\frac{1}{s}}}\right)^{\frac{1}{q_0-N}}.\end{aligned}$$

Agora, considerando $r = \min\left\{ \left(\frac{\alpha_N}{\alpha s}\right)^{\frac{N-1}{N}}, \left(\frac{k_2}{2C_\delta \widetilde{C_1} M^{\frac{1}{s}}}\right)^{\frac{1}{q_0-N}} \right\}$, temos que

$$\langle G(\xi), \xi \rangle \geq \frac{k_2 r^N}{2} - \lambda_0 C_\varepsilon r.$$

Veja que

$$\frac{k_2 r^N}{2} - \lambda_0 C_\varepsilon r > 0 \Leftrightarrow \lambda_0 < \frac{k_2 r^{N-1}}{2C_\varepsilon},$$

portanto, escolhendo

$$\lambda^* = \frac{k_2 r^{N-1}}{4C_\varepsilon},$$

obtemos

$$\langle G(\xi), \xi \rangle > 0, \text{ para todo } 0 < \lambda_0 < \lambda^*, \ \xi \in \mathbb{R}^m \text{ e } |\xi|_s = r.$$

Assim, estamos nas hipóteses do Lema 1.3.1 e, portanto, ao aplicá-lo obtemos que, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $y \in \mathbb{R}^m$ com $|y|_s \leq r < 1$ tal que $G(y) = 0$. Isto é,

$$\begin{aligned} G(y) = 0 &\Rightarrow (G_1(y), G_2(y), \ldots, G_m(y)) = (0, 0, \ldots, 0) \\ &\Rightarrow G_j(y) = 0, \quad \text{para cada } j = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned}$$

Logo, por (2.1.6), existe $u_m \in W_m$ satisfazendo

$$||u_m||_{1,N} = |y| \leq r < 1, \text{ para todo } m \in \mathbb{N} \tag{2.1.13}$$

tal que

$$0 = G_j(y) = \int_\Omega a_0(|\nabla u_m|)^{p_0} |\nabla u_m|^{p_0-2} \nabla u_m \nabla e_j \, dx - \lambda_0 \int_\Omega \frac{e_j}{(u_m+\varepsilon)^{\beta_0}} \, dx - \int_\Omega f_0(u_m) e_j \, dx,$$

logo

$$\int_\Omega a_0(|\nabla u_m|)^{p_0} |\nabla u_m|^{p_0-2} \nabla u_m \nabla e_j \, dx = \lambda_0 \int_\Omega \frac{e_j}{(u_m+\varepsilon)^{\beta_0}} \, dx + \int_\Omega f_0(u_m) e_j \, dx, \tag{2.1.14}$$

para $j = 1, 2, \ldots, m$. Multiplicando a equação (2.1.14) por qualquer escalar σ_j, para cada $j = 1, 2, \ldots, m$, temos que

$$\int_\Omega a_0(|\nabla u_m|)^{p_0} |\nabla u_m|^{p_0-2} \nabla u_m \nabla (e_j \sigma_j) \, dx = \lambda_0 \int_\Omega \frac{e_j \sigma_j}{(u_m+\varepsilon)^{\beta_0}} \, dx + \int_\Omega f_0(u_m) e_j \sigma_j \, dx,$$

para cada $j = 1, 2, \ldots, m$. Agora, somando as m equações termo a termo, obtemos

$$\int_\Omega a_0(|\nabla u_m|)^{p_0}|\nabla u_m|^{p_0-2}\nabla u_m \nabla \sum_{j=1}^m e_j\sigma_j \, dx = \lambda_0 \int_\Omega \frac{\sum_{j=1}^m e_j\sigma_j}{(u_m+\varepsilon)^{\beta_0}}\, dx + \int_\Omega f_0(u_m)\sum_{j=1}^m e_j\sigma_j \, dx.$$

Note que $\sum_{j=1}^m e_j\sigma_j \in W_m$, logo, escrevendo $\phi = \sum_{j=1}^m e_j\sigma_j$, concluimos que

$$\int_\Omega a_0(|\nabla u_m|)^{p_0}|\nabla u_m|^{p_0-2}\nabla u_m \nabla\phi \, dx = \lambda_0 \int_\Omega \frac{\phi}{(u_m+\varepsilon)^{\beta_0}}\, dx + \int_\Omega f_0(u_m)\phi \, dx, \quad (2.1.15)$$

para todo $\phi \in W_m$, o que mostra que u_m é uma solução fraca aproximada do problema auxiliar (2.1.1).

De (2.1.13), observamos que r não depende de m, logo (u_m) é uma sequência limitada em W_m. Como $W_m \subset W_0^{1,N}(\Omega)$, então (u_m) é limitada em $W_0^{1,N}(\Omega)$, que é um espaço reflexivo de Banach. Assim, pelo Teorema B.3.4, existe uma subsequência de (u_m) que converge fracamente para algum $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$. Além disso, pela imersão compacta de Sobolev $W^{1,N}(\Omega) \overset{cpct.}{\hookrightarrow} L^\theta(\Omega), \theta \geq 1$, existe uma subsequência de (u_m) que converge para algum $u \in L^\theta(\Omega)$. Compilando essas informações e utilizando o Teorema B.3.3, a menos de subsequência, existe $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} u_m \rightharpoonup u & \text{em } W_0^{1,N}(\Omega), \\ u_m \to u & \text{em } L^\theta(\Omega), \theta \geq 1, \\ u_m(x) \to u(x) & \text{q.t.p em } \Omega, \\ |u_m(x)| \leq g(x) \in L^\theta(\Omega) & \text{q.t.p em } \Omega, \theta \geq 1. \end{cases} \quad (2.1.16)$$

Veja bem, em (2.1.15), mostramos que $u_m \in W_m$ é uma solução do problema auxiliar (2.1.1), porém, o objetivo é estender essa solução para $W_0^{1,N}(\Omega)$. Em outras palavras, queremos mostrar que cada integral em (2.1.15) converge para uma integral dependendo de $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$. Para tanto, utilizaremos fortemente as convergências dadas em (2.1.16) atreladas ao Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

Fixe $k \in \mathbb{N}$ e considere $m \geq k$, então $W_k \subset W_m$, logo, de (2.1.15), vale

$$\int_\Omega a_0(|\nabla u_m|^{p_0})|\nabla u_m|^{p_0-2}\nabla u_m \nabla\phi_k \, dx = \lambda_0 \int_\Omega \frac{\phi_k}{(u_m+\varepsilon)^{\beta_0}}\, dx + \int_\Omega f_0(u_m)\phi_k \, dx, \quad (2.1.17)$$

para toda $\phi_k \in W_k$. Como $\phi_k \in W_k$ e $0 < \beta_0 \leq 1$, observe que

$$\left|\frac{\phi_k}{(u_m(x)+\varepsilon)^{\beta_0}}\right| = \frac{|\phi_k|}{|u_m(x)+\varepsilon|^{\beta_0}} \leq \frac{|\phi_k|}{\varepsilon^{\beta_0}} \in L^1(\Omega), \text{ pois } \phi_k \in W_k \subset W_0^{1,N}(\Omega)$$

e de (2.1.16) temos que

$$\frac{\phi_k}{(u_m(x)+\varepsilon)^{\beta_0}} \to \frac{\phi_k}{(u(x)+\varepsilon)^{\beta_0}} \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Portanto, usamos o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema B.3.1) para obter que

$$\int_\Omega \frac{\phi_k}{(u_m+\varepsilon)^{\beta_0}}\,dx \to \int_\Omega \frac{\phi_k}{(u+\varepsilon)^{\beta_0}}\,dx. \tag{2.1.18}$$

Agora, como f_0 é uma função contínua, novamente de (2.1.16), segue que

$$f_0(u_m(x))\phi_k \to f_0(u(x))\phi_k \quad \text{q.t.p em } \Omega. \tag{2.1.19}$$

Usando (2.0.1), temos que

$$|f_0(u_m(x))u_m(x)| \leq \delta|u_m(x)|^{p_0} + C_\delta|u_m(x)|^{q_0}\exp\left(\alpha|u_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right),$$

e daí

$$|f_0(u_m(x))| \leq \delta|u_m(x)|^{p_0-1} + C_\delta|u_m(x)|^{q_0-1}\exp\left(\alpha|u_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right).$$

Multiplicando a desigualdade acima por $|\phi_k|$, obtemos

$$|f_0(u_m(x))\phi_k| \leq \delta|u_m(x)|^{p_0-1}|\phi_k| + C_\delta|u_m(x)|^{q_0-1}\exp\left(\alpha|u_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right)|\phi_k|.$$

Para usarmos o Teorema da Convergência da Dominada de Lebesgue, precisamos provar que a função $\widehat{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$\widehat{g}(u_m(x)) := \delta|u_m(x)|^{p_0-1}|\phi_k| + C_\delta|u_m(x)|^{q_0-1}\exp\left(\alpha|u_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right)|\phi_k|$$

satisfaz

$$|f_0(u_m(x))\phi_k| \leq \widehat{g}(u_m(x)) \in L^1(\Omega). \tag{2.1.20}$$

É suficiente mostrar que $\widehat{g}(u_m(x))$ é convergente em $L^1(\Omega)$. De fato, como $2 \leq p_0 < N$, usamos (2.1.16) para obter

$$|u_m(x)|^{p_0-1}|\phi_k| \to |u(x)|^{p_0-1}|\phi_k| \quad \text{q.t.p em } \Omega. \tag{2.1.21}$$

e

$$|u_m(x)|^{p_0-1}|\phi_k| \leq g(x)^{p_0-1}|\phi_k| \in L^1(\Omega). \tag{2.1.22}$$

Segue de (2.1.21), (2.1.22) e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\int_\Omega |u_m|^{p_0-1}|\phi_k|\, dx \to \int_\Omega |u|^{p_0-1}|\phi_k|\, dx. \tag{2.1.23}$$

Além disso, como $q_0 > N \geq 3$, novamente de (2.1.16) obtemos

$$|u_m(x)|^{q_0-1}\exp\left(\alpha|u_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right) \to |u(x)|^{q_0-1}\exp\left(\alpha|u(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right) \quad \text{q.t.p em } \Omega. \tag{2.1.24}$$

Agora, considerando $s, s' > 1$ tais que $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s'} = 1$, usamos (2.1.16) e o fato que $q_0 > N \geq 3$ para obter

$$|u_m|^{q_0-1} \to |u|^{q_0-1} \quad \text{em } L^{s'}(\Omega). \tag{2.1.25}$$

Além disso, de (2.1.13) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \exp\left(\alpha s|u_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx &= \int_\Omega \exp\left(\alpha s||u_m||_{1,N}^{\frac{N}{N-1}}\left(\frac{|u_m(x)|}{||u_m||_{1,N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \\
&\leq \int_\Omega \exp\left(\alpha s r^{\frac{N}{N-1}}\left(\frac{|u_m(x)|}{||u_m||_{1,N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \\
&\leq \sup_{||u_m(x)||\leq 1}\int_\Omega \exp\left(\alpha s r^{\frac{N}{N-1}}\left(\frac{||u_m||}{||u_m||_{1,N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right) dx
\end{aligned}$$

e aplicando a Desigualdade de Trudinger-Moser (ver Teorema 1.2.1), existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\int_\Omega \exp\left(\alpha s|u_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \leq M. \tag{2.1.26}$$

Daí, de (2.1.25), (2.1.26) e da Desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |u_m|^{q_0-1}\exp\left(\alpha|u_m|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |u_m|^{(q_0-1)s'}dx\right)^{\frac{1}{s'}}\left(\int_\Omega \exp\left(\alpha s|u_m|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx\right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq ||u_m||_{L^{s'}(\Omega)}^{q_0-1} M^{\frac{1}{s}} = \overline{M}.
\end{aligned} \tag{2.1.27}$$

Usamos (2.1.24), (2.1.27) e o Teorema de Brezis-Lieb (Ver Teorema B.3.2) para concluir que

$$|u_m|^{q_0-1}\exp\left(\alpha|u_m|^{\frac{N}{N-1}}\right) \rightharpoonup |u|^{q_0-1}\exp\left(\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}}\right). \tag{2.1.28}$$

Segue de (2.1.28) que

$$\int_\Omega |u_m|^{q_0-1}\exp\left(\alpha|u_m|^{\frac{N}{N-1}}\right)|\phi_k|dx \to \int_\Omega |u|^{q_0-1}\exp\left(\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}}\right)|\phi_k|dx. \tag{2.1.29}$$

Portanto, de (2.1.23) e (2.1.29) provamos que

$$\int_\Omega \widehat{g}(u_m(x))dx \to \delta\int_\Omega |u(x)|^{p_0-1}|\phi_k|dx + C_\delta\int_\Omega |u(x)|^{q_0-1}\exp\left(\alpha|u(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right)|\phi_k|dx,$$

que mostra a identidade (2.1.20).

Então, usamos (2.1.19), (2.1.20) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para concluir que

$$\int_\Omega f_0(u_m)\phi_k\,dx \to \int_\Omega f_0(u)\phi_k\,dx. \tag{2.1.30}$$

Por fim, o próximo passo é mostrar que

$$\int_\Omega a_0(|\nabla u_m|^{p_0})|\nabla u_m|^{p_0-2}\nabla u_m\nabla\phi_k\,dx \to \int_\Omega a_0(|\nabla u|^{p_0})|\nabla u|^{p_0-2}\nabla u\nabla\phi_k\,dx.$$

Para isto, vamos usar a Proposição 1.1.1 para obter a desigualdade

$$C|\nabla u_m-\nabla u|^N \le \langle a_0(|\nabla u_m|^{p_0})|\nabla u_m|^{p_0-2}\nabla u_m - a_0(|\nabla u|^{p_0})|\nabla u|^{p_0-2}\nabla u, \nabla u_m-\nabla u\rangle,$$

onde $C=\left(\dfrac{k_2}{4}\right)^{N-2}>0$. De fato,

$$\begin{aligned}
&\langle a_0(|\nabla u_m|^{p_0})|\nabla u_m|^{p_0-2}\nabla u_m - a_0(|\nabla u|^{p_0})|\nabla u|^{p_0-2}\nabla u, \nabla u_m-\nabla u\rangle = \\
&\qquad = a_0(|\nabla u_m|^{p_0})|\nabla u_m|^{p_0-2}\langle\nabla u_m,\nabla u_m-\nabla u\rangle - a_0(|\nabla u|^{p_0})|\nabla u|^{p_0-2}\langle\nabla u,\nabla u_m-\nabla u\rangle \\
&\qquad = a_0(|\nabla u_m|^{p_0})|\nabla u_m|^{p_0-2}(|\nabla u_m|^2-\nabla u_m\nabla u) - a_0(|\nabla u|^{p_0})|\nabla u|^{p_0-2}(\nabla u\nabla u_m-|\nabla u|^2) \\
&\qquad = a_0(|\nabla u_m|^{p_0})|\nabla u_m|^{p_0} - a_0(|\nabla u_m|^{p_0})|\nabla u_m|^{p_0-2}\nabla u_m\nabla u + a_0(|\nabla u|^{p_0})|\nabla u|^{p_0} \\
&\qquad\quad - a_0(|\nabla u|^{p_0})|\nabla u|^{p_0-2}\nabla u_m\nabla u,
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
C|\nabla u_m-\nabla u|^N \le{}& a_0(|\nabla u_m|^{p_0})|\nabla u_m|^{p_0} - a_0(|\nabla u_m|^{p_0})|\nabla u_m|^{p_0-2}\nabla u_m\nabla u + a_0(|\nabla u|^{p_0})|\nabla u|^{p_0} \\
&- a_0(|\nabla u|^{p_0})|\nabla u|^{p_0-2}\nabla u_m\nabla u.
\end{aligned}$$

Integrando, obtemos

$$
\begin{aligned}
0 \leq C \int_\Omega |\nabla u_m - \nabla u|^N \, dx &= C||u_m - u||_{1,N}^N \\
&\leq \int_\Omega a_0(|\nabla u_m|)^{p_0} |\nabla u_m|^{p_0} \, dx - \int_\Omega a_0(|\nabla u_m|)^{p_0} |\nabla u_m|^{p_0-2} \nabla u_m \nabla u \, dx + o_n(1),
\end{aligned}
$$

onde

$$
o_n(1) = \int_\Omega a_0(|\nabla u|^{p_0}) |\nabla u|^{p_0} \, dx - \int_\Omega a_0(|\nabla u|^{p_0}) |\nabla u|^{p_0-2} \nabla u_m \nabla u \, dx,
$$

pois da convergência fraca $u_m \rightharpoonup u$ temos que $o_n(1) \to 0$.

Usando que $u_m \in W_0^{1,N}(\Omega)$ é solução do problema auxiliar (2.1.1), segue que

$$
\begin{aligned}
&C||u_m - u||_{1,N}^N \\
&\leq \int_\Omega a_0(|\nabla u_m|)^{p_0} |\nabla u_m|^{p_0-2} \nabla u_m \nabla u_m \, dx - \int_\Omega a_0(|\nabla u_m|)^{p_0} |\nabla u_m|^{p_0-2} \nabla u_m \nabla u dx + o_n(1) \\
&= \lambda_0 \int_\Omega \frac{u_m}{(u_m + \varepsilon)^{\beta_0}} dx + \int_\Omega f_0(u_m) u_m dx - \lambda_0 \int_\Omega \frac{u}{(u_m + \varepsilon)^{\beta_0}} dx - \int_\Omega f_0(u_m) u dx + o_n(1).
\end{aligned}
$$

Mas, pelas convergências mostradas em (2.1.18) e (2.1.30), obtemos

$$
\int_\Omega \frac{u_m}{(u_m + \varepsilon)^{\beta_0}} dx \to \int_\Omega \frac{u}{(u + \varepsilon)^{\beta_0}} dx,
$$

$$
\int_\Omega \frac{u}{(u_m + \varepsilon)^{\beta_0}} dx \to \int_\Omega \frac{u}{(u + \varepsilon)^{\beta_0}} dx,
$$

$$
\int_\Omega f_0(u_m) u_m dx \to \int_\Omega f_0(u) u dx
$$

e

$$
\int_\Omega f_0(u_m) u dx \to \int_\Omega f_0(u) u dx.
$$

Portanto, as quatro integrais se anulam quando $m \to \infty$, logo podemos usar um abuso de notação para denotar toda a expressão do lado direito da igualdade acima por simplesmente $o_n(1)$, isto é,

$$
\lambda_0 \int_\Omega \frac{u_m}{(u_m + \varepsilon)^{\beta_0}} \, dx + \int_\Omega f_0(u_m) u_m \, dx - \lambda_0 \int_\Omega \frac{u}{(u_m + \varepsilon)^{\beta_0}} \, dx - \int_\Omega f_0(u_m) u \, dx + o_n(1) = o_n(1),
$$

Assim,

$$||u_m - u||_{1,N}^N \leq o_n(1).$$

Como $o_n(1) \to 0$ segue que $||u_m - u||_{1,N} \to 0$ e, portanto

$$u_m \to u, \quad \text{em } W_0^{1,N}(\Omega). \tag{2.1.31}$$

Do Lema 1.1.1, sabemos que a função definida por

$$E(u) = \int_\Omega a_0(|\nabla u|^{p_0})|\nabla u|^{p_0-2}\nabla u \nabla \phi_k \, dx$$

é contínua, então, usamos este fato e (2.1.31) para obter a convergência

$$\int_\Omega a_0(|\nabla u_m|^{p_0})|\nabla u_m|^{p_0-2}\nabla u_m \nabla \phi_k \, dx \to \int_\Omega a_0(|\nabla u|^{p_0})|\nabla u|^{p_0-2}\nabla u \nabla \phi_k \, dx, \tag{2.1.32}$$

para todo $\phi_k \in W_k$. Fazendo $m \to \infty$ em (2.1.17), usamos (2.1.18), (2.1.30) e (2.1.32) para concluir que

$$\int_\Omega a_0(|\nabla u|^{p_0})|\nabla u|^{p_0-2}\nabla u \nabla \phi_k \, dx = \lambda_0 \int_\Omega \frac{\phi_k}{(u+\varepsilon)^{\beta_0}} \, dx + \int_\Omega f_0(u)\phi_k \, dx, \tag{2.1.33}$$

para todo $\phi_k \in W_k$.

Resta agora mostrar que a igualdade (2.1.31) vale para toda $\phi \in W_0^{1,N}(\Omega)$. Com efeito, como $[W_k]_{k\in\mathbb{N}}$ é denso em $W_0^{1,N}(\Omega)$, dado $\phi \in W_0^{1,N}(\Omega)$, existe uma sequência $(\phi_k) \in W_k$ tal que

$$\phi_k \to \phi \quad \text{quando} \quad k \to \infty.$$

Lembrando de ϕ_k é da forma $\sum_{j=1}^{k} \sigma_j e_j$, então, por linearidade, obtemos

$$\int_\Omega a_0(|\nabla u|)^{p_0}|\nabla u|^{p_0-2}\nabla u \nabla \phi_k \, dx \to \int_\Omega a_0(|\nabla u|)^{p_0}|\nabla u|^{p_0-2}\nabla u \nabla \phi \, dx, \tag{2.1.34}$$

$$\int_\Omega \frac{\phi_k}{(u+\varepsilon)^{\beta_0}} \, dx \to \int_\Omega \frac{\phi}{(u+\varepsilon)^{\beta_0}} \, dx, \tag{2.1.35}$$

e

$$\int_\Omega f_0(u)\phi_k \, dx \to \int_\Omega f_0(u)\phi \, dx. \tag{2.1.36}$$

Portanto, como $\phi \in W_0^{1,N}(\Omega)$ é arbitrário, segue de (2.1.33) - (2.1.36) que

$$\int_\Omega a_0(|\nabla u|^{p_0})|\nabla u|^{p_0-2}\nabla u\nabla\phi\, dx = \lambda_0\int_\Omega \frac{\phi}{(u+\varepsilon)^{\beta_0}}\, dx + \int_\Omega f_0(u)\phi\, dx, \tag{2.1.37}$$

para todo $\phi \in W_0^{1,N}(\Omega)$, o que mostra que u é uma solução fraca não negativa do problema (2.1.1). $\square$

Mediante disto, agora, estamos prontos para provar o resultado principal deste capítulo.

2.2 Prova do Teorema 2.0.1

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ e $u_{\frac{1}{n}} = u_n$, onde u_n é uma solução fraca não negativa do problema auxiliar

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a_0(|\nabla u_n|^{p_0})|\nabla u_n|^{p_0-2}\nabla u_n) = \dfrac{\lambda_0}{(u_n+\frac{1}{n})^{\beta_0}} + f_0(u_n) & \text{em } \Omega, \\ u_n \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

obtida pelo Lema 2.1.1. Observe que de (f_3), existe $\gamma_0 > N$ tal que

$$\frac{\lambda_0}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^{\beta_0}} + f_0(u_n) \geq \frac{\lambda_0}{(u_n+1)^{\beta_0}} + |u_n|^{\gamma_0-1}.$$

Como a função $t \longmapsto \dfrac{\lambda_0}{(t+1)^{\beta_0}} + t^{\gamma_0-1}$ é limitada inferiormente em $t \geq 0$, segue que ela atinge um mínimo positivo z. Logo,

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(a_0(|\nabla u_n|^{p_0})|\nabla u_n|^{p_0-2}\nabla u_n) &= \frac{\lambda_0}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^{\beta_0}} + f_0(u_n) \\ &\geq \frac{\lambda_0}{(u_n+1)^{\beta_0}} + |u_n|^{\gamma_0-1} \geq z > 0 \ \text{ em } \Omega. \end{aligned}$$

Desde que o operador $T : W_0^{1,N}(\Omega) \to (W_0^{1,N}(\Omega))'$ dado por

$$\langle Tv, \phi\rangle = \int_\Omega a_0(|\nabla v|^{p_0})|\nabla v|^{p_0-2}\nabla v\nabla\phi$$

é contínuo, monótono e coercivo (Ver Seção 1.1), podemos aplicar o Teorema de Minty-Browder para obter que existe uma única solução $v \in W_0^{1,N}(\Omega)$ para o problema linear

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a_0(|\nabla v|^{p_0})|\nabla v|^{p_0-2}\nabla v) = z & \text{em } \Omega, \\ v > 0 & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

assim, temos

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a_0(|\nabla u_n|^{p_0})|\nabla u_n|^{p_0-2}\nabla u_n) \geq -\mathrm{div}(a_0(|\nabla v|^{p_0})|\nabla v|^{p_0-2}\nabla v) & \text{em } \Omega, \\ u_n = v & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Em virtude do Princípio de Comparação Fraca (Lema 1.1.5) concluímos que

$$u_n(x) \geq v(x) > 0 \text{ em } \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.2.2}$$

o que implica que $u_n(x) \nrightarrow 0$, para cada $x \in \Omega$, pois $u_n(x)$ é sempre limitado inferiormente por um número positivo.

Agora, de (2.1.16), temos

$$u_m \rightharpoonup u_n \text{ em } W_0^{1,N}(\Omega) \text{ quando } m \to +\infty,$$

logo, pelo Teorema B.4.1 e (2.1.13), segue que

$$||u_n||_{1,N} \leq \liminf_{m\to+\infty} ||u_m||_{1,N} \leq r < 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, (u_n) é uma sequência limitada em $W_0^{1,N}(\Omega)$, pois r não depende de n. Assim, como $W_0^{1,N}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo, a menos de subsequência, existe $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u & \text{em } W_0^{1,N}(\Omega), \\ u_n \to u & \text{em } L^\theta(\Omega), \ \theta \geq 1, \\ u_n(x) \to u(x) & \text{q.t.p em } \Omega, \\ |u_n(x)| \leq g(x) \in L^\theta(\Omega) & \text{q.t.p em } \Omega, \ \theta \geq 1. \end{cases} \tag{2.2.3}$$

Decorre de (2.1.37) que

$$\int_\Omega a_0(|\nabla u_n|^{p_0}))|\nabla u_n|^{p_0-2}\nabla u_n \nabla\phi\ dx = \lambda_0 \int_\Omega \frac{\phi}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^{\beta_0}}\ dx + \int_\Omega f_0(u_n)\phi\ dx, \quad (2.2.4)$$

para todo $\phi \in W_0^{1,N}(\Omega)$. Como f_0 é contínua, por (2.2.3), temos

$$f_0(u_n(x))\phi \to f_0(u(x))\phi, \ \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Argumentando como em (2.1.20), obtemos que a função $\widehat{g}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz

$$|f(u_n(x))\phi| \leq \widehat{g}(u_n(x)) \in L_1(\Omega)$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que

$$\int_\Omega f_0(u_n)\phi dx \to \int_\Omega f_0(u)\phi dx, \ \ \forall \phi \in W_0^{1,N}(\Omega). \quad (2.2.5)$$

Além disso, usando mesmo raciocínio para obter (2.1.32), temos

$$\int_\Omega a_0(|\nabla u_n|^{p_0}))|\nabla u_n|^{p_0-2}\nabla u_n \nabla\phi dx \to \int_\Omega a_0(|\nabla u|^{p_0}))|\nabla u|^{p_0-2}\nabla u \nabla\phi dx, \ \ \forall\ \phi \in W_0^{1,N}(\Omega) \quad (2.2.6)$$

E ainda, por (2.2.3),

$$\frac{\phi}{\left(u_n(x)+\frac{1}{n}\right)^{\beta_0}} \to \frac{\phi}{u(x)^{\beta_0}} \ \text{ q.t.p em } \Omega. \quad (2.2.7)$$

Desde que $z \in L^\infty(\Omega)$, pelo Lema 1.1.6 e (2.2.1), segue que $v \in L^\infty(\Omega)$, e assim, pelo Lema 1.1.7 obtemos que $v \in C^{1,\alpha}(\Omega)$, para algum $\alpha \in (0,1)$. Agora, em virtude do Lema 1.1.8, obtemos

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} < 0 \ \text{ em } \partial\Omega, \ \text{ onde } \eta \text{ é a normal unitária exterior em } \partial\Omega.$$

Assim, para cada $x \in \Omega$, segue do Lema 1.2.1 que existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\frac{v(x)}{d(x)} \geq C,$$

logo, por (2.2.2),

$$u_n(x) \geq v(x) \geq Cd(x) > 0,$$

onde $d(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$. Portanto,

$$\int_\Omega \frac{\phi}{\left(u_n(x)+\frac{1}{n}\right)^{\beta_0}}\,dx \leq \int_\Omega \frac{\phi}{(u_n(x))^{\beta_0}}\,dx \leq \int_\Omega \frac{\phi}{(Cd(x))^{\beta_0}}\,dx.$$

Daí, usamos a Desigualdade de Hardy-Sobolev (ver Teorema 1.2.2) para obter $\left|\frac{\phi}{(Cd(x))^{\beta_0}}\right| \in L^r(\Omega)$ e $C_2 > 0$ tal que

$$\int_\Omega \frac{\phi}{(Cd(x))^{\beta_0}}\,dx \leq C_2||\phi||_{1,N},$$

e, portanto

$$\int_\Omega \frac{\phi}{\left(u_n(x)+\frac{1}{n}\right)^{\beta_0}}\,dx \leq C_2||\phi||_{1,N}. \tag{2.2.8}$$

Logo, de (2.2.7) e (2.2.8) e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_\Omega \frac{\phi}{\left(u_n(x)+\frac{1}{n}\right)^{\beta_0}}dx \to \int_\Omega \frac{\phi}{u^{\beta_0}}dx,\ \forall\phi \in W_0^{1,N}(\Omega). \tag{2.2.9}$$

Fazendo $n \to +\infty$ em (2.2.4), usamos (2.2.5), (2.2.6) e (2.2.9) para concluir que

$$\int_\Omega a_0(|\nabla u|^{p_0}))|\nabla u|^{p_0-2}\nabla u\nabla\phi\,dx = \lambda_0\int_\Omega \frac{\phi}{u^{\beta_0}}\,dx + \int_\Omega f_0(u)\phi\,dx,\ \ \forall\phi \in W_0^{1,N}(\Omega),$$

o que prova que $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ é uma solução fraca positiva para problema (*P1*).

Capítulo 3

Segundo Resultado: caso sistema

Neste capítulo, investigaremos a existência de solução positiva para o sistema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a_1(|\nabla u|^{p_1})\ |\nabla u|^{p_1-2}\ \nabla u) = \dfrac{\lambda_1}{u^{\beta_1}} + f_1(v) & \text{em } \Omega, \\ -\mathrm{div}(a_2(|\nabla v|^{p_2})\ |\nabla v|^{p_2-2}\ \nabla v) = \dfrac{\lambda_2}{v^{\beta_2}} + f_2(u) & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$P2$}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave com $N \geq 3,\ 2 \leq p_i < N,\ 0 < \beta_i \leq 1$ e $\lambda_i > 0$, com $i = 0, 1, 2$.

As hipóteses que utilizamos sobre funções $a_i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ de classe C^1 e $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua com crescimento exponencial são as seguintes:

(a_1) existem constantes $k_1,\ k_2 > 0,\ k_3,\ k_4 \geq 0$ tais que

$$k_1 t^{p_i} + k_2 t^N \leq a_i(t^{p_i}) t^{p_i} \leq k_3 t^{p_i} + k_4 t^N, \text{ para todo } t \geq 0;$$

(a_2) a função

$$t \longmapsto a_i(t^{p_i}) t^{p_i-2} \quad \text{é crescente, para todo } \ t \geq 0;$$

(f_1) existe $\alpha_0 > 0$ tal que as condições de crescimento exponencial no infinito são dadas por:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f_i(t)}{\exp\left(\alpha |t|^{\frac{N}{N-1}}\right)} = 0, \text{ para } \alpha > \alpha_0$$

e

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f_i(t)}{\exp\left(\alpha |t|^{\frac{N}{N-1}}\right)} = \infty, \text{ para } \ 0 < \alpha < \alpha_0;$$

(f_2) a condição de crescimento na origem:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f_i(t)}{t^{p_i-1}} = 0;$$

(f_3) existe $\gamma_i > N$ tal que

$$f_i(t) \geq t^{\gamma_i - 1}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Da mesma forma que no capítulo anterior, de (f_1) e (f_2), para todo $\delta > 0$ e para todo $\alpha > \alpha_0$, existe $C_\delta > 0$ tal que

$$|f_i(t)t| \leq \delta |t|^{p_i} + C_\delta |t|^{q_i} \exp\left(\alpha |t|^{\frac{N}{N-1}}\right), \tag{3.0.1}$$

para todo $q_i \geq 0$. Neste trabalho, usaremos $q_i > N$ $f_i(t) = 0$ para todo $t \leq 0$. Para estabelecer a existência de solução não negativa para o problema (*P2*) usamos um problema auxiliar, para o qual mostramos a existência de solução via Método de Galerkin.

O principal resultado deste capítulo é o

Teorema 3.0.1. *Suponha que, para $i = 1,2$, a_i satisfaz (a_1) - (a_2) e f_i satisfaz (f_1) - (f_3). Então, existe $\lambda^* > 0$ tal que o problema (P2) tem uma solução fraca positiva para cada* $0 < \lambda_1 + \lambda_2 < \lambda^*$.

3.1 Problema auxiliar para o caso sistema

Para cada $0 < \varepsilon < 1$ fixado, consideramos o seguinte problema auxiliar

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u) = \dfrac{\lambda_1}{(u+\varepsilon)^{\beta_1}} + f_1(v) & \text{em } \Omega, \\ -\mathrm{div}(a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v) = \dfrac{\lambda_2}{(v+\varepsilon)^{\beta_2}} + f_2(u) & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

onde as funções a_i e f_i satisfazem as hipóteses do Teorema 3.0.1. Assim como no Capítulo 2, mostraremos a existência de solução para este problema auxiliar utilizando o Método de Galerkin e o Lema Fundamental descrito no Lema 1.3.1.

Antes de prosseguirmos com o enunciado e a prova do principal resultado desta seção, vamos obter, assim como no Capítulo 2, uma estimativa a priori da solução procurada. Desde modo, para cada $\varepsilon > 0$, podemos reescrever o problema (3.1.1) da seguinte forma

$$
\begin{cases}
-\mathrm{div}(a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u) = \dfrac{\lambda_1}{(u^+ + \varepsilon)^{\beta_1}} + f_1(v) & \text{em } \Omega, \\
-\mathrm{div}(a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v) = \dfrac{\lambda_2}{(v^+ + \varepsilon)^{\beta_2}} + f_2(u) & \text{em } \Omega, \\
u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega.
\end{cases}
\tag{3.1.2}
$$

Primeiramente, suponha que u, v é solução do problema acima, então

$$
\int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u \nabla \phi \; dx = \lambda_1 \int_\Omega \frac{\phi}{(u^+ + \varepsilon)^{\beta_1}} \; dx + \int_\Omega f_1(v)\phi \; dx
$$

e

$$
\int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v \nabla \varphi \; dx = \lambda_2 \int_\Omega \frac{\varphi}{(v^+ + \varepsilon)^{\beta_2}} \; dx + \int_\Omega f_2(u)\varphi \; dx,
$$

para toda $\phi, \varphi \in W_0^{1,N}(\Omega)$.

Para mostrar que $u, v \geq 0$ em Ω, basta tomar $\phi = u^-$ e $\varphi = v^-$. Os passos para mostrar a não negatividade das funções u, v são análogos aos do Capítulo 2 com a diferença na última integral de cada igualdade acima, em que teremos $f_1(v)u^-$ e $f_2(u)v^-$. Mas, como $f_i \geq 0, u^- \geq 0$ e $v^- \geq 0$, tem-se

$$
\int_\Omega f_1(v)u^- \; dx \geq 0 \quad \text{e} \quad \int_\Omega f_2(u)v^- \; dx \geq 0.
$$

Logo, se u e v são soluções de (3.1.2) então ambas devem ser, necessariamente, não negativas. E como as soluções de (3.1.2) são também soluções do problema auxiliar (3.1.1), podemos procurar soluções assumindo que $u, v \geq 0$ em Ω.

O principal resultado desta seção é o seguinte:

Lema 3.1.1. *Para cada* $0 < \varepsilon < 1$, *existe* $\lambda^* > 0$ *tal que o problema* (3.1.1) *tem um solução fraca não negativa para cada* $0 < \lambda_1 + \lambda_2 < \lambda^*$, *com* $i = 1, 2$.

Demonstração. Seja $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_m, \ldots\}$ uma base de Schauder de $W_0^{1,N}(\Omega)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, defina

$$
W_m = [e_1, e_2, \ldots, e_m]
$$

sendo o espaço de dimensão finita gerado por $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos a função $J : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$ tal que

$$
J(\eta, \xi) = (F_1(\eta, \xi), F_2(\eta, \xi), \ldots, F_m(\eta, \xi), G_1(\eta, \xi), G_2(\eta, \xi), \ldots, G_m(\eta, \xi)),
$$

onde $(\eta,\xi)=(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_m,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m)\in\mathbb{R}^{2m}$,

$$F_j(\eta,\xi)=\int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u\nabla e_j\,dx-\lambda_1\int_\Omega\frac{e_j}{(u+\varepsilon)^{\beta_1}}\,dx-\int_\Omega f_1(v)e_j\,dx,$$

para todo $j=1,2,\ldots,m$,

$$G_j(\eta,\xi)=\int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v\nabla e_j\,dx-\lambda_2\int_\Omega\frac{e_j}{(v+\varepsilon)^{\beta_2}}\,dx-\int_\Omega f_2(u)e_j\,dx,$$

para todo $j=1,2,\ldots,m$,

$$u=\sum_{j=1}^m\eta_je_j\in W_m,$$

e

$$v=\sum_{j=1}^m\xi_je_j\in W_m.$$

Vamos considerar em $W_0^{1,N}(\Omega)\times W_0^{1,N}(\Omega)$ a norma definida por

$$||(u,v)||^N=||u||_{1,N}^N+||v||_{1,N}^N.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
||(u,v)||^N&=||u||_{1,N}^N+||v||_{1,N}^N=\int_\Omega|\nabla u|^Ndx+\int_\Omega|\nabla v|^Ndx\\
&=\int_\Omega\left|\nabla\sum_{j=1}^m\eta_je_j\right|^N dx+\int_\Omega\left|\nabla\sum_{j=1}^m\xi_je_j\right|^N dx\\
&=\int_\Omega\left|\sum_{j=1}^m\eta_j\nabla e_j\right|^N dx+\int_\Omega\left|\sum_{j=1}^m\xi_j\nabla e_j\right|^N dx\\
&=\int_\Omega\sum_{j=1}^m|\eta_j|^N|\nabla e_j|^Ndx+\int_\Omega\sum_{j=1}^m|\xi_j|^N|\nabla e_j|^Ndx\\
&=\sum_{j=1}^m|\eta_j|^N\int_\Omega|\nabla e_j|^Ndx+\sum_{j=1}^m|\xi_j|^N\int_\Omega|\nabla e_j|^Ndx\\
&=\sum_{j=1}^m|\eta_j|^N||e_j||_{1,N}^N+\sum_{j=1}^m|\xi_j|^N||e_j||_{1,N}^N=\sum_{j=1}^m|\eta_j|^N+\sum_{j=1}^m|\xi_j|^N\\
&=|\eta|^N+|\xi|^N=|(\eta,\xi)|^N,
\end{aligned}$$

onde

$$|\eta| = \sum_{j=1}^{m} |\eta_j| \quad \text{e} \quad |\xi| = \sum_{j=1}^{m} |\xi_j|,$$

tais que vale

$$|\eta|^N = \sum_{j=1}^{m} |\eta_j|^N \quad \text{e} \quad |\xi|^N = \sum_{j=1}^{m} |\xi_j|^N.$$

Logo, segue que

$$||(u,v)|| = |(\eta,\xi)|, \tag{3.1.3}$$

o que mostra que os espaços $(W_m, ||(\cdot,\cdot)||)$ e $(\mathbb{R}^{2m}, |\cdot|)$ são isométricos. Portanto,

$$\begin{aligned}
\langle J(\eta,\xi),(\eta,\xi)\rangle &= \langle (F_1(\eta,\xi),F_2(\eta,\xi),\ldots,F_m(\eta,\xi),G_1(\eta,\xi),G_2(\eta,\xi),\ldots,G_m(\eta,\xi)),\\
&\qquad (\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_m,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m)\rangle\\
&= \sum_{j=1}^{m} F_j(\eta,\xi)\eta_j + \sum_{j=1}^{m} G_j(\eta,\xi)\xi_j\\
&= \sum_{j=1}^{m}\left(\int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u\nabla e_j\eta_j dx - \lambda_1\int_\Omega \frac{e_j\eta_j}{(u+\varepsilon)^{\beta_1}}dx - \int_\Omega f_1(v)e_j\eta_j dx\right)\\
&\quad + \sum_{j=1}^{m}\left(\int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v\nabla e_j\xi_j dx - \lambda_2\int_\Omega \frac{e_j\xi_j}{(v+\varepsilon)^{\beta_2}}dx - \int_\Omega f_2(u)e_j\xi_j dx\right)\\
&= \int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u\nabla\left(\sum_{j=1}^{m} e_j\eta_j\right)dx - \lambda_1\int_\Omega \frac{1}{(u+\varepsilon)^{\beta_1}}\sum_{j=1}^{m} e_j\eta_j dx\\
&\quad - \int_\Omega f_1(v)\sum_{j=1}^{m} e_j\eta_j dx + \int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v\nabla\left(\sum_{j=1}^{m} e_j\xi_j\right)dx\\
&\quad - \lambda_2\int_\Omega \frac{1}{(v+\varepsilon)^{\beta_2}}\sum_{j=1}^{m} e_j\xi_j dx - \int_\Omega f_2(u)\sum_{j=1}^{m} e_j\xi_j dx\\
&= \int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u\nabla u dx - \lambda_1\int_\Omega \frac{u}{(u+\varepsilon)^{\beta_1}}dx - \int_\Omega f_1(v)u dx\\
&\quad + \int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v\nabla v dx - \lambda_2\int_\Omega \frac{v}{(v+\varepsilon)^{\beta_2}}dx - \int_\Omega f_2(u)v dx.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\langle J(\eta,\xi),(\eta,\xi)\rangle = \int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1}\, dx - \lambda_1\int_\Omega \frac{u}{(u+\varepsilon)^{\beta_1}}\, dx - \int_\Omega f_1(v)u\, dx$$

$$+\int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2}\,dx-\lambda_2\int_\Omega \frac{v}{(v+\varepsilon)^{\beta_2}}\,dx-\int_\Omega f_2(u)v\,dx. \tag{3.1.4}$$

Precisamos conseguir estimativas sobre as integrais acima de tal forma que consigamos $\langle J(\eta,\xi),(\eta,\xi)\rangle \geq 0$ e possamos aplicar o Lema 1.3.1. O processo será semelhante ao feito no Capítulo 2, mas com algumas diferenças técnicas.

Ao assumirmos $u,v\geq 0$ em Ω, segue da imersão de Sobolev $W_0^{1,N}(\Omega)\hookrightarrow L^1(\Omega)$, que existe constantes $C_{\varepsilon_1},C_{\varepsilon_2}>0$, tais que

$$\int_\Omega \frac{u}{(u+\varepsilon)^{\beta_1}}\,dx\leq \int_\Omega \frac{u}{\varepsilon^{\beta_1}}dx\leq \frac{1}{\varepsilon^{\beta_1}}\int_\Omega |u|dx=\frac{1}{\varepsilon^{\beta_1}}||u||_1\leq C_{\varepsilon_1}||u||_{1,N} \tag{3.1.5}$$

e

$$\int_\Omega \frac{v}{(v+\varepsilon)^{\beta_2}}\,dx\leq \int_\Omega \frac{v}{\varepsilon^{\beta_2}}dx\leq \frac{1}{\varepsilon^{\beta_2}}\int_\Omega |v|dx=\frac{1}{\varepsilon^{\beta_2}}||v||_1\leq C_{\varepsilon_2}||v||_{1,N}. \tag{3.1.6}$$

Usando (3.0.1), obtemos

$$f_1(v)u\leq \delta_1||v||^{p_1-1}||u||+C_{\delta_1}||v||^{q_1-1}||u||\exp\left(\alpha_1||v||^{\frac{N}{N-1}}\right).$$

Pela Desigualdade de Young para p_1 e $\dfrac{p_1}{p_1-1}$, obtemos

$$\delta_1||v||^{p_1-1}||u||\leq \delta_1\frac{p_1-1}{p_1}||v||^{p_1}+\frac{\delta_1}{p_1}||u||^{p_1},$$

agora, usando a desigualdade de Young para q_1 e $\dfrac{q_1}{q_1-1}$, obtemos

$$\begin{aligned}C_{\delta_1}||v||^{q_1-1}||u||\exp\left(\alpha||v||^{\frac{N}{N-1}}\right)\leq{}& C_{\delta_1}\frac{q_1-1}{q_1}||v||^{q_1}\exp\left(\alpha||v||^{\frac{N}{N-1}}\right)\\&+\frac{C_{\delta_1}}{q_1}||u||^{q_1}\exp\left(\alpha||v||^{\frac{N}{N-1}}\right),\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}f_1(v)u\leq{}&\delta_1\frac{p_1-1}{p_1}||v||^{p_1}+\frac{\delta_1}{p_1}||u||^{p_1}+C_{\delta_1}\frac{q_1-1}{q_1}||v||^{q_1}\exp\left(\alpha||v||^{\frac{N}{N-1}}\right)\\&+\frac{C_{\delta_1}}{q_1}||u||^{q_1}\exp\left(\alpha||v||^{\frac{N}{N-1}}\right).\end{aligned}$$

Por fim, integrando a desigualdade acima e utilizando as imersões de Sobolev, existem constantes positivas C_1, C_2, C_3 e C_4 tais que

$$\begin{aligned}\int_\Omega f_1(v)u\,dx \leq& \delta_1 C_1 ||v||_{1,p_1}^{p_1} + \delta_1 C_2 ||u||_{1,p_1}^{p_1} + C_{\delta_1} C_3 \int_\Omega |v|^{q_1} \exp\left(\alpha_1 |v|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \\ &+ C_{\delta_1} C_4 \int_\Omega |u|^{q_1} \exp\left(\alpha_1 |v|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

e, de forma análoga, obtemos C_5, C_6, C_7 e C_8, tais que

$$\begin{aligned}\int_\Omega f_2(u)v\,dx \leq& \delta_2 C_5 ||u||_{1,p_2}^{p_2} + \delta_2 C_6 ||v||_{1,p_2}^{p_2} + C_{\delta_2} C_7 \int_\Omega |u|^{q_2} \exp\left(\alpha_2 |u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \\ &+ C_{\delta_2} C_8 \int_\Omega |v|^{q_2} \exp\left(\alpha_2 |u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx. \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Agora, de (a_1), temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1} &\geq k_1 \int_\Omega |\nabla u|^{p_1}\,dx + k_2 \int_\Omega |\nabla u|^N\,dx \\ &= k_1 ||u||_{1,p_1}^{p_1} + k_2 ||u||_{1,N}^N \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

e

$$\begin{aligned}\int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2} &\geq k_1 \int_\Omega |\nabla v|^{p_2}\,dx + k_2 \int_\Omega |\nabla v|^N\,dx \\ &= k_1 ||v||_{1,p_2}^{p_2} + k_2 ||v||_{1,N}^N. \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

De (3.1.5) – (3.1.10) podemos reescrever (3.1.4) como

$$\begin{aligned}\langle J(\eta,\xi),(\eta,\xi)\rangle \geq\, & k_1 ||u||_{1,p_1}^{p_1} + k_2 ||u||_{1,N}^N - \lambda_1 C_{\varepsilon_1} ||u||_{1,N} - \delta_1 C_1 ||v||_{1,p_1}^{p_1} \\ & - \delta_1 C_2 ||u||_{1,p_1}^{p_1} - C_{\delta_1} C_3 \int_\Omega |v|^{q_1} \exp\left(\alpha_1 |v|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \\ & - C_{\delta_1} C_4 \int_\Omega |u|^{q_1} \exp\left(\alpha_1 |v|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx + k_1 ||v||_{1,p_2}^{p_2} + k_2 ||v||_{1,N}^N - \lambda_2 C_{\varepsilon_2} ||v||_{1,N} \\ & - \delta_2 C_5 ||u||_{1,p_2}^{p_2} - \delta_2 C_6 ||v||_{1,p_2}^{p_2} - C_{\delta_2} C_7 \int_\Omega |u|^{q_2} \exp\left(\alpha_2 |u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \\ & - C_{\delta_2} C_8 \int_\Omega |v|^{q_2} \exp\left(\alpha_2 |u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}\langle J(\eta,\xi),(\eta,\xi)\rangle =\, & k_2(||u||_{1,N}^N + ||v||_{1,N}^N) + (k_1 - \delta_1 C_2)||u||_{1,p_1}^{p_1} + (k_1 - \delta_2 C_6)||v||_{1,p_2}^{p_2} \\ & - \lambda_1 C_{\varepsilon_1} ||u||_{1,N} - \lambda_2 C_{\varepsilon_2} ||v||_{1,N} - \delta_1 C_1 ||v||_{1,p_1}^{p_1} - C_{\delta_1} C_3 \int_\Omega |v|^{q_1} \exp\left(\alpha_1 |v|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-C_{\delta_1}C_4\int_\Omega |u|^{q_1}\exp\left(\alpha_1|v|^{\frac{N}{N-1}}\right)dx-\delta_2C_5||u||_{1,p_2}^{p_2}\\
&-C_{\delta_2}C_7\int_\Omega |u|^{q_2}\exp\left(\alpha_2|u|^{\frac{N}{N-1}}\right)dx-C_{\delta_2}C_8\int_\Omega |v|^{q_2}\exp\left(\alpha_2|u|^{\frac{N}{N-1}}\right)dx.
\end{aligned}
$$

Observe que, como $2\le p_1,p_2<N$ e das imersões de Sobolev, existem constantes $C_9,C_{10}>0$ tais que

$$\delta_1C_1||v||_{1,p_1}^{p_1}\le \delta_1C_9||v||_{1,N}^{p_1}$$

e

$$\delta_2C_5||u||_{1,p_2}^{p_2}\le \delta_2C_{10}||u||_{1,N}^{p_2}.$$

Como $||(u,v)||^N=||u||_{1,N}^N+||v||_{1,N}^N$, segue que

$$\delta_1C_9||v||_{1,N}^{p_1}\le \delta_1C_9||(u,v)||^{p_1}\quad \text{e}\quad \delta_2C_{10}||u||_{1,N}^{p_2}\le \delta_2C_{10}||(u,v)||^{p_2}$$

e, como $k_1>0$, tomando $\delta_1,\delta_2>0$ suficientementes pequenos tais que $(k_1-\delta_1C_2),(k_1-\delta_2C_6)>0$ obtemos

$$
\begin{aligned}
\langle J(\eta,\xi),(\eta,\xi)\rangle \ge\, & k_2||(u,v)||^N-\lambda_1C_{\varepsilon_1}||u||_{1,N}-\lambda_2C_{\varepsilon_2}||v||_{1,N}-\delta_1C_9||(u,v)||^{p_1}\\
&-\delta_2C_{10}||(u,v)||^{p_2}-C_{\delta_1}C_3\int_\Omega |v|^{q_1}\exp\left(\alpha_1|v|^{\frac{N}{N-1}}\right)dx\\
&-C_{\delta_1}C_4\int_\Omega |u|^{q_1}\exp\left(\alpha_1|v|^{\frac{N}{N-1}}\right)dx+C_{\delta_2}C_7\int_\Omega |u|^{q_2}\exp\left(\alpha_2|u|^{\frac{N}{N-1}}\right)dx\\
&-C_{\delta_2}C_8\int_\Omega |v|^{q_2}\exp\left(\alpha_2|u|^{\frac{N}{N-1}}\right)dx. \qquad (3.1.11)
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Hölder com $s,s'>1$ tais que $\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s'}=1$, temos que

$$
\begin{aligned}
C_{\delta_1}C_3\int_\Omega |v|^{q_1}\exp\left(\alpha_1|v|^{\frac{N}{N-1}}\right)dx &\le C_{\delta_1}C_3\left(\int_\Omega |v|^{q_1s'}\,dx\right)^{\frac{1}{s'}}\left(\int_\Omega \exp\left(\alpha_1s|v|^{\frac{N}{N-1}}\right)dx\right)^{\frac{1}{s}}\\
&=C_{\delta_1}C_3||v||_{s'}^{q_1}\left(\int_\Omega \exp\left(\alpha_1s|v|^{\frac{N}{N-1}}\right)dx\right)^{\frac{1}{s}},\\
C_{\delta_1}C_4\int_\Omega |u|^{q_1}\exp\left(\alpha_1|v|^{\frac{N}{N-1}}\right)dx &\le C_{\delta_1}C_4\left(\int_\Omega |u|^{q_1s'}\,dx\right)^{\frac{1}{s'}}\left(\int_\Omega \exp\left(\alpha_1s|v|^{\frac{N}{N-1}}\right)dx\right)^{\frac{1}{s}}\\
&=C_{\delta_1}C_4||u||_{s'}^{q_1}\left(\int_\Omega \exp\left(\alpha_1s|v|^{\frac{N}{N-1}}\right)dx\right)^{\frac{1}{s}},\\
C_{\delta_2}C_7\int_\Omega |u|^{q_2}\exp\left(\alpha_2|u|^{\frac{N}{N-1}}\right)dx &\le C_{\delta_2}C_7\left(\int_\Omega |u|^{q_2s'}\,dx\right)^{\frac{1}{s'}}\left(\int_\Omega \exp\left(\alpha_2s|u|^{\frac{N}{N-1}}\right)dx\right)^{\frac{1}{s}}
\end{aligned}
$$

$$= C_{\delta_2}C_7||u||_{s'}^{q_2}\left(\int_\Omega \exp\left(\alpha_2 s|u|^{\frac{N}{N-1}}\right)\,dx\right)^{\frac{1}{s}}$$

e

$$\begin{aligned} C_{\delta_2}C_8\int_\Omega |v|^{q_2}\exp\left(\alpha_2|u|^{\frac{N}{N-1}}\right)\,dx &\le C_{\delta_2}C_8\left(\int_\Omega |v|^{q_2 s'}\,dx\right)^{\frac{1}{s'}}\left(\int_\Omega \exp\left(\alpha_2 s|u|^{\frac{N}{N-1}}\right)\,dx\right)^{\frac{1}{s}}\\ &= C_{\delta_2}C_8||v||_{s'}^{q_2}\left(\int_\Omega \exp\left(\alpha_2 s|u|^{\frac{N}{N-1}}\right)\,dx\right)^{\frac{1}{s}}. \end{aligned}$$

Como $q_1,q_2 > N$ e $s' > 1$, da imersão de Sobolev $W_0^{1,N}(\Omega)\hookrightarrow L^{s'}(\Omega)$ existem constantes $C_{11},C_{12},C_{13},C_{14} > 0$, tais que

$$\begin{aligned} C_{\delta_1}C_3\int_\Omega |v|^{q_1}\exp\left(\alpha_1|v|^{\frac{N}{N-1}}\right)\,dx &\le C_{\delta_1}C_{11}||v||_{1,N}^{q_1}\left(\int_\Omega \exp\left(\alpha_1 s|v|^{\frac{N}{N-1}}\right)\,dx\right)^{\frac{1}{s}},\\ C_{\delta_1}C_4\int_\Omega |u|^{q_1}\exp\left(\alpha_1|v|^{\frac{N}{N-1}}\right)\,dx &\le C_{\delta_1}C_{12}||u||_{1,N}^{q_1}\left(\int_\Omega \exp\left(\alpha_1 s|v|^{\frac{N}{N-1}}\right)\,dx\right)^{\frac{1}{s}},\\ C_{\delta_2}C_7\int_\Omega |u|^{q_2}\exp\left(\alpha_2|u|^{\frac{N}{N-1}}\right)\,dx &\le C_{\delta_2}C_{13}||u||_{1,N}^{q_2}\left(\int_\Omega \exp\left(\alpha_2 s|u|^{\frac{N}{N-1}}\right)\,dx\right)^{\frac{1}{s}} \end{aligned}$$

e

$$C_{\delta_2}C_8\int_\Omega |v|^{q_2}\exp\left(\alpha_2|u|^{\frac{N}{N-1}}\right)\,dx \le C_{\delta_2}C_{14}||v||_{1,N}^{q_2}\left(\int_\Omega \exp\left(\alpha_2 s|u|^{\frac{N}{N-1}}\right)\,dx\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Como $||(u,v)||^N = ||u||_{1,N}^N + ||v||_{1,N}^N$, de (3.1.11), segue que

$$\begin{aligned} \langle J(\eta,\xi),(\eta,\xi)\rangle \ge{}& k_2||(u,v)||^N - \lambda_1 C_{\varepsilon_1}||(u,v)|| - \lambda_2 C_{\varepsilon_2}||(u,v)|| - \delta_1 C_9||(u,v)||_{1,N}^{p_1} - \delta_2 C_{10}||(u,v)||_{1,N}^{p_2}\\ & - C_{\delta_1}C_{11}||(u,v)||_{1,N}^{q_1}\left(\int_\Omega \exp\left(\alpha_1 s|v|^{\frac{N}{N-1}}\right)\,dx\right)^{\frac{1}{s}}\\ & - C_{\delta_1}C_{12}||(u,v)||_{1,N}^{q_1}\left(\int_\Omega \exp\left(\alpha_1 s|v|^{\frac{N}{N-1}}\right)\,dx\right)^{\frac{1}{s}}\\ & - C_{\delta_2}C_{13}||(u,v)||_{1,N}^{q_2}\left(\int_\Omega \exp\left(\alpha_2 s|u|^{\frac{N}{N-1}}\right)\,dx\right)^{\frac{1}{s}}\\ & - C_{\delta_2}C_{14}||(u,v)||_{1,N}^{q_2}\left(\int_\Omega \exp\left(\alpha_2 s|u|^{\frac{N}{N-1}}\right)\,dx\right)^{\frac{1}{s}}. \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

Suponha agora que $||(u,v)|| = r$, para algum $r > 0$ escolhido posteriormente. Então, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \exp\left(\alpha_1 s|v|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx &= \int_\Omega \exp\left(\alpha_1 s||v||_{1,N}^{\frac{N}{N-1}}\left(\frac{|v|}{||v||_{1,N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right) dx\\ &\leq \int_\Omega \exp\left(\alpha_1 s||(u,v)||^{\frac{N}{N-1}}\left(\frac{|v|}{||v||_{1,N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right) dx\\ &= \int_\Omega \exp\left(\alpha_1 s r^{\frac{N}{N-1}}\left(\frac{|v|}{||v||_{1,N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right) dx.\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_\Omega \exp\left(\alpha_2 s|u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx &= \int_\Omega \exp\left(\alpha_2 s||u||_{1,N}^{\frac{N}{N-1}}\left(\frac{|u|}{||u||_{1,N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right) dx\\ &\leq \int_\Omega \exp\left(\alpha_2 s||(u,v)||^{\frac{N}{N-1}}\left(\frac{|u|}{||u||_{1,N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right) dx\\ &\leq \int_\Omega \exp\left(\alpha_2 s r^{\frac{N}{N-1}}\left(\frac{|u|}{||u||_{1,N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right) dx.\end{aligned}$$

Para aplicar a Desigualdade de Trudinger-Moser, impomos que

$$\alpha_1 s r^{\frac{N}{N-1}} \leq \alpha_N \Longrightarrow r \leq \left(\frac{\alpha_N}{\alpha_1 s}\right)^{\frac{N-1}{N}} \quad \text{e} \quad \alpha_2 s r^{\frac{N}{N-1}} \leq \alpha_N \Longrightarrow r \leq \left(\frac{\alpha_N}{\alpha_2 s}\right)^{\frac{N-1}{N}},$$

onde $\alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$ em que ω_{N-1} é a medida $(N-1)$-dimensional de uma $(N-1)$-esfera. Portanto, existe $M_1, M_2 > 0$, tais que

$$\sup_{||v||_{1,N}\leq 1} \int_\Omega \exp\left(\alpha_1 s r^{\frac{N}{N-1}}\left(\frac{|v|}{||v||_{1,N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \leq M_1$$

e

$$\sup_{||u||_{1,N}\leq 1} \int_\Omega \exp\left(\alpha_2 s r^{\frac{N}{N-1}}\left(\frac{|u|}{||u||_{1,N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \leq M_2.$$

Logo, existe $C_{15}, C_{16} > 0$, tais que podemos reescrever (3.1.12) como

$$\begin{aligned}\langle J(\eta,\xi),(\eta,\xi)\rangle \geq{}& k_2 r^N - \lambda_1 C_{\varepsilon_1} r - \lambda_2 C_{\varepsilon_2} r - \delta_1 C_9 r^{p_1} - \delta_2 C_{10} r^{p_2}\\ &- C_{\delta_1} C_{11} M_1^{\frac{1}{s}} r^{q_1} - C_{\delta_1} C_{12} M_1^{\frac{1}{s}} r^{q_1} - C_{\delta_2} C_{13} M_2^{\frac{1}{s}} r^{q_2} - C_{\delta_2} C_{14} M_2^{\frac{1}{s}} r^{q_2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= k_2 r^N - \lambda_1 C_{\varepsilon_1} r - \lambda_2 C_{\varepsilon_2} r - \delta_1 C_9 r^{p_1} - \delta_2 C_{10} r^{p_2} \\
&\quad - C_{\delta_1}(C_{11}+C_{12}) M_1^{\frac{1}{s}} r^{q_1} - C_{\delta_2}(C_{13}+C_{14}) M_2^{\frac{1}{s}} r^{q_2} \\
&= k_2 r^N - \lambda_1 C_{\varepsilon_1} r - \lambda_2 C_{\varepsilon_2} r - \delta_1 C_9 r^{p_1} - \delta_2 C_{10} r^{p_2} \\
&\quad - C_{\delta_1} C_{15} M_1^{\frac{1}{s}} r^{q_1} - C_{\delta_2} C_{16} M_2^{\frac{1}{s}} r^{q_2}.
\end{aligned}
$$

Agora, é necessário escolher r, tal que

$$\frac{k_2 r^N}{2} - C_{\delta_1} C_{15} M_1^{\frac{1}{s}} r^{q_1} \geq \frac{k_2 r^N}{4}$$

e

$$\frac{k_2 r^N}{2} - C_{\delta_2} C_{16} M_2^{\frac{1}{s}} r^{q_2} \geq \frac{k_2 r^N}{4}.$$

Em outras palavras,

$$\frac{k_2 r^N}{4} \geq C_{\delta_1} C_{15} M_1^{\frac{1}{s}} r^{q_1} \Longleftrightarrow r^{q_1 - N} \leq \frac{k_2}{4 C_{\delta_1} C_{15} M_1^{\frac{1}{s}}} \Longleftrightarrow r \leq \left(\frac{k_2}{4 C_{\delta_1} C_{15} M_1^{\frac{1}{s}}} \right)^{\frac{1}{q_1 - N}}$$

e

$$\frac{k_2 r^N}{4} \geq C_{\delta_2} C_{16} M_2^{\frac{1}{s}} r^{q_2} \Longleftrightarrow r^{q_2 - N} \leq \frac{k_2}{4 C_{\delta_2} C_{16} M_2^{\frac{1}{s}}} \Longleftrightarrow r \leq \left(\frac{k_2}{4 C_{\delta_2} C_{16} M_2^{\frac{1}{s}}} \right)^{\frac{1}{q_2 - N}}.$$

Considerando

$$r = \min \left\{ 1, \left(\frac{\alpha_N}{\alpha_1 s} \right)^{\frac{N-1}{N}}, \left(\frac{\alpha_N}{\alpha_2 s} \right)^{\frac{N-1}{N}}, \left(\frac{k_2}{4 C_{\delta_1} C_{15} M_1^{\frac{1}{s}}} \right)^{\frac{1}{q_1 - N}}, \left(\frac{k_2}{4 C_{\delta_2} C_{16} M_2^{\frac{1}{s}}} \right)^{\frac{1}{q_2 - N}} \right\},$$

temos

$$\langle J(\eta,\xi),(\eta,\xi) \rangle \geq \frac{k_2 r^N}{4} + \frac{k_2 r^N}{4} - \lambda_1 C_{\varepsilon_1} r - \lambda_2 C_{\varepsilon_2} r - \delta_1 C_9 r^{p_1} - \delta_2 C_{10} r^{p_2}.$$

Dessa forma, veja que $r > 0$ é fixado e a última desigualdade é verdadeira para todo $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que $(k_1 - \delta_1 C_2), (k_1 - \delta_2 C_6) > 0$. Como queremos que $\langle J(\eta,\xi),(\eta,\xi) \rangle > 0$, precisamos ter

$$\frac{k_2 r^N}{4} - \lambda_1 C_{\varepsilon_1} r - \delta_1 C_9 r^{p_1} > 0 \Leftrightarrow \lambda_1 < \frac{k_2 r^{N-1} - 4\delta_1 C_9 r^{p_1 - 1}}{4 C_{\varepsilon_1}}$$

e

$$\frac{k_2 r^N}{4} - \lambda_2 C_{\varepsilon_2} r - \delta_2 C_{10} r^{p_2} > 0 \Leftrightarrow \lambda_2 < \frac{k_2 r^{N-1} - 4\delta_2 C_{10} r^{p_2 - 1}}{4C_{\varepsilon_2}}.$$

Definindo $\lambda_1^* > 0$ e $\lambda_2^* > 0$ como

$$\lambda_1^* = \frac{k_2 r^{N-1} - 4\delta_1 C_9 r^{p_1 - 1}}{8C_{\varepsilon_1}} \quad \text{e} \quad \lambda_2^* = \frac{k_2 r^{N-1} - 4\delta_2 C_{10} r^{p_2 - 1}}{8C_{\varepsilon_2}},$$

então, tomando $\lambda^* = \min\{\lambda_1^*, \lambda_2^*\}$, temos

$$\langle J(\eta,\xi),(\eta,\xi)\rangle > 0, \ \forall\, \eta,\xi \in \mathbb{R}^m \ \text{ e } \ |(\eta,\xi)|_s = r, \ \text{ para todo } \ 0 < \lambda_1 + \lambda_2 < \lambda^*.$$

Assim, estamos nas hipóteses do Lema 1.3.1 e, portanto, ao aplicá-lo obtemos que para todo $m \in \mathbb{N}$, existe $(x,y) \in \mathbb{R}^{2m}$ com $|(x,y)| \leq r < 1$ tal que

$$\begin{aligned} J(x,y) = 0 &\Leftrightarrow (F_1(\eta,\xi), F_2(\eta,\xi), \ldots, F_m(\eta,\xi), G_1(\eta,\xi), G_2(\eta,\xi), \ldots, G_m(\eta,\xi)) = 0 \\ &\Leftrightarrow F_j(\eta,\xi) = 0, \ \ G_j(\eta,\xi) = 0, \ \ j = 1,2,\ldots,m \end{aligned}$$

Consequentemente, de (3.1.3) existe $u_m, v_m \in W_m$ satisfazendo

$$||(u_m,v_m)|| = |(x,y)|_s \leq r < 1, \quad \text{para todo } \ m \in \mathbb{N}, \tag{3.1.13}$$

tal que

$$0 = F_j(\eta,\xi) = \int_\Omega a_1(|\nabla u_m|^{p_1})|\nabla u_m|^{p_1-2}\nabla u_m \nabla e_j\, dx - \lambda_1 \int_\Omega \frac{e_j}{(u_m+\varepsilon)^{\beta_1}}\, dx - \int_\Omega f_1(v_m) e_j\, dx$$

logo

$$\int_\Omega a_1(|\nabla u_m|^{p_1})|\nabla u_m|^{p_1-2}\nabla u_m \nabla e_j\, dx = \lambda_1 \int_\Omega \frac{e_j}{(u_m+\varepsilon)^{\beta_1}}\, dx + \int_\Omega f_1(v_m) e_j\, dx \tag{3.1.14}$$

para $j = 1,2,\cdots,m$. Multiplicando a equação (3.1.14) por qualquer escalar σ_j, temos que

$$\int_\Omega a_1(|\nabla u_m|^{p_1})|\nabla u_m|^{p_1-2}\nabla u_m \nabla (e_j\sigma_j)\, dx = \lambda_1 \int_\Omega \frac{e_j\sigma_j}{(u_m+\varepsilon)^{\beta_1}}\, dx + \int_\Omega f_1(v_m) e_j \sigma_j\, dx$$

para cada $j = 1,2,\cdots,m$. Agora, somando as m equações termo a termo, obtemos

$$\int_\Omega a_1(|\nabla u_m|^{p_1})|\nabla u_m|^{p_1-2}\nabla u_m \nabla \left(\sum_{j=1}^m e_j\sigma_j\right)\, dx = \lambda_1 \int_\Omega \frac{\sum_{j=1}^m e_j\sigma_j}{(u_m+\varepsilon)^{\beta_1}}\, dx + \int_\Omega f_1(v_m) \sum_{j=1}^m e_j\sigma_j\, dx$$

Note que $\sum_{j=1}^{m} e_j\sigma_j \in W_m$, logo, escrevendo $\phi = \sum_{j=1}^{m} e_j\sigma_j$, concluímos que

$$\int_\Omega a_1(|\nabla u_m|^{p_1})|\nabla u_m|^{p_1-2}\nabla u_m \nabla\phi\ dx = \lambda_1 \int_\Omega \frac{\phi}{(u_m+\varepsilon)^{\beta_1}}\ dx + \int_\Omega f_1(v_m)\phi\ dx, \quad (3.1.15)$$

para todo $\phi \in W_m$. E, também vale

$$0 = G_j(\eta,\xi) = \int_\Omega a_2(|\nabla v_m|^{p_2})|\nabla v_m|^{p_2-2}\nabla v_m \nabla\varphi\ dx - \lambda_2 \int_\Omega \frac{\varphi}{(v_m+\varepsilon)^{\beta_2}}\ dx - \int_\Omega f_2(u_m)\varphi\ dx,$$

o que acarreta em

$$\int_\Omega a_2(|\nabla v_m|^{p_2})|\nabla v_m|^{p_2-2}\nabla v_m \nabla\varphi\ dx = \lambda_2 \int_\Omega \frac{\varphi}{(v_m+\varepsilon)^{\beta_2}}\ dx + \int_\Omega f_2(u_m)\varphi\ dx \quad (3.1.16)$$

para todo $\varphi \in W_m$.

Portanto, decorre de (3.1.15) e (3.1.16) que (u_m, v_m) é uma solução fraca aproximada do problema auxiliar (3.1.1).

A partir daqui, o nosso objetivo é estender as soluções encontradas $u_m, v_m \in W_m$ para soluções u, v no espaço $W_0^{1,N}(\Omega)$.

De (3.1.13), notamos que r não depende de m, logo, temos que (u_m) e (v_m) são sequências limitadas em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Sendo este um espaço de Banach reflexivo, pelo Teorema B.3.4 existe uma subsequências de (u_m) e (v_m) que convergem fracamente para algum $u, v \in W_0^{1,N}(\Omega)$. Da imersão compacta de Sobolev $W^{1,N}(\Omega) \overset{cpct.}{\hookrightarrow} L^\theta(\Omega), \theta \geq 1$, existe subsequências de (u_m) e (v_m) que convergem para algum $u, v \in L^\theta(\Omega)$. Utilizando esses fatos e o Teorema B.3.3, para alguma subsequência de (u_m) e (v_m), existe $u, v \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tais que

$$\begin{cases} u_m \rightharpoonup u & \text{em } W_0^{1,N}(\Omega), \\ u_m \to u & \text{em } L^\theta(\Omega), \theta \geq 1, \\ u_m(x) \to u(x) & \text{q.t.p em } \Omega, \\ |u_m(x)| \leq g_1(x) \in L^\theta(\Omega) & \text{q.t.p em } \Omega, \theta \geq 1 \end{cases} \quad (3.1.17)$$

e

$$\begin{cases} v_m \rightharpoonup v & \text{em } W_0^{1,N}(\Omega), \\ v_m \to v & \text{em } L^\theta(\Omega), \theta \geq 1, \\ v_m(x) \to v(x) & \text{q.t.p em } \Omega, \\ |v_m(x)| \leq g_2(x) \in L^\theta(\Omega) & \text{q.t.p em } \Omega, \theta \geq 1. \end{cases} \quad (3.1.18)$$

Fixe $k \in \mathbb{N}$ e considere $m \geq k$, então $W_k \subset W_m$ e de (3.1.14) e (3.1.16), temos

$$\int_\Omega a_1(|\nabla u_m|^{p_1})|\nabla u_m|^{p_1-2}\nabla u_m \nabla \phi_k \, dx = \lambda_1 \int_\Omega \frac{\phi_k}{(u_m+\varepsilon)^{\beta_1}} \, dx + \int_\Omega f_1(v_m)\phi_k \, dx \tag{3.1.19}$$

para todo $\phi_k \in W_k$ e

$$\int_\Omega a_2(|\nabla v_m|^{p_2})|\nabla v_m|^{p_2-2}\nabla v_m \nabla \varphi_k \, dx = \lambda_2 \int_\Omega \frac{\varphi_k}{(v_m+\varepsilon)^{\beta_2}} \, dx + \int_\Omega f_2(u_m)\varphi_k \, dx, \tag{3.1.20}$$

para todo $\varphi_k \in W_k$.

Como $\phi_k, \varphi_k \in W_m$, observe que

$$\left| \frac{\phi_k}{(u_m+\varepsilon)^{\beta_1}} \right| \leq \frac{|\phi_k|}{\varepsilon^{\beta_1}} \in L^1(\Omega)$$

e

$$\left| \frac{\varphi_k}{(v_m+\varepsilon)^{\beta_2}} \right| \leq \frac{|\varphi_k|}{\varepsilon^{\beta_2}} \in L^1(\Omega).$$

De (3.1.17) e (3.1.18), temos

$$\frac{\phi_k}{(u_m(x)+\varepsilon)^{\beta_1}} \to \frac{\phi_k}{(u(x)+\varepsilon)^{\beta_1}} \quad \text{q.t.p em } \Omega$$

e

$$\frac{\varphi_k}{(v_m(x)+\varepsilon)^{\beta_2}} \to \frac{\varphi_k}{(v(x)+\varepsilon)^{\beta_2}} \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Portanto, usamos agora o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema B.3.1) para obter

$$\int_\Omega \frac{\phi_k}{(u_m+\varepsilon)^{\beta_1}} \, dx \to \int_\Omega \frac{\phi_k}{(u+\varepsilon)^{\beta_1}} \, dx \tag{3.1.21}$$

e

$$\int_\Omega \frac{\varphi_k}{(v_m+\varepsilon)^{\beta_2}} \, dx \to \int_\Omega \frac{\varphi_k}{(v+\varepsilon)^{\beta_2}} \, dx \tag{3.1.22}$$

Agora, como f_i é uma função contínua, novamente de (3.1.17) e (3.1.18) obtemos

$$f_1(v_m(x))\phi_k \to f_1(v(x))\phi_k \quad \text{q.t.p em } \Omega \tag{3.1.23}$$

e

$$f_2(u_m(x))\varphi_k \to f_2(u(x))\varphi_k \quad \text{q.t.p em } \Omega. \tag{3.1.24}$$

Usando (2.0.1), temos

$$|f_1(v_m(x))v_m(x)| \leq \delta|v_m(x)|^{p_1} + C_{\delta_1}|v_m(x)|^{q_1}\exp\left(\alpha_1|v_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right)$$

e

$$|f_2(u_m(x))u_m(x)| \leq \delta|u_m(x)|^{p_2} + C_{\delta_2}|u_m(x)|^{q_2}\exp\left(\alpha_2|u_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right).$$

Daí,

$$|f_1(v_m(x))| \leq \delta|v_m(x)|^{p_1-1} + C_{\delta_1}|v_m(x)|^{q_1-1}\exp\left(\alpha_1|v_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right)$$

e

$$|f_2(u_m(x))| \leq \delta|u_m(x)|^{p_2-1} + C_{\delta_2}|u_m(x)|^{q_2-1}\exp\left(\alpha_2|u_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right).$$

Multiplicando as desigualdade acima por $|\phi_k|$ e $|\varphi_k|$, respectivamente, obtemos

$$|f_1(v_m(x))\phi_k| \leq \delta_1|v_m(x)|^{p_1-1}|\phi_k| + C_{\delta_1}|v_m(x)|^{q_1-1}\exp\left(\alpha_1|v_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right)|\phi_k|$$

e

$$|f_2(u_m(x))\varphi_k| \leq \delta_2|u_m(x)|^{p_2-1}|\varphi_k| + C_{\delta_2}|u_m(x)|^{q_2-1}\exp\left(\alpha_2|u_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right)|\varphi_k|.$$

Precisamos provar que as funções $\widehat{g_1}, \widehat{g_2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\widehat{g_1}(v_m(x)) := \delta_1|v_m(x)|^{p_1-1}|\phi_k| + C_{\delta_1}|v_m(x)|^{q_1-1}\exp\left(\alpha_1|v_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right)|\phi_k|$$

e

$$\widehat{g_2}(u_m(x)) := \delta_2|u_m(x)|^{p_2-1}|\varphi_k| + C_{\delta_2}|u_m(x)|^{q_2-1}\exp\left(\alpha_2|u_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right)|\varphi_k|$$

satisfazem

$$|f_1(v_m(x))\phi_k| \leq \widehat{g_1}(v_m(x)) \in L^1(\Omega) \tag{3.1.25}$$

e

$$|f_2(u_m(x))\varphi_k| \leq \widehat{g_2}(u_m(x)) \in L^1(\Omega). \tag{3.1.26}$$

Para usarmos o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue Generalizado é suficiente mostrar que $\widehat{g_1}(v_m(x))$ e $\widehat{g_2}(u_m(x))$ são convergentes em $L^1(\Omega)$. Provaremos apenas a primeira desigualdade, pois a segunda segue o mesmo raciocínio. De fato, como $2 \leq p_1 < N$, invocamos (3.1.18) para obter

$$|v_m(x)|^{p_1-1}|\phi_k| \to |v(x)|^{p_1-1}|\phi_k|, \quad \text{q.t.p em } \Omega \tag{3.1.27}$$

e

$$|v_m(x)|^{p_1-1}|\phi_k| \leq g_2(x)|^{p_1-1}|\phi_k| \in L^1(\Omega). \tag{3.1.28}$$

Segue de (3.1.27), (3.1.28) e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\int_\Omega |v_m|^{p_1-1}|\phi_k|\,dx \to \int_\Omega |v|^{p_1-1}|\phi_k|\,dx \tag{3.1.29}$$

Além disso, novamente de (3.1.18) temos

$$|v_m(x)|^{q_1-1}\exp\left(\alpha_1|v_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right) \to |v(x)|^{q_1-1}\exp\left(\alpha_1|v(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right) \quad \text{q.t.p em } \Omega. \tag{3.1.30}$$

Agora, considerando $s, s' > 1$ tais que $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s'} = 1$, usamos (3.1.18) e o fato de $q_1 > N$ para obter

$$|v_m|^{q_1-1} \to |v|^{q_1-1} \quad \text{em } L^{s'}(\Omega). \tag{3.1.31}$$

Além disso, de (3.1.13) temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \exp\left(\alpha_1|v_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right)dx &= \int_\Omega \exp\left(\alpha_1 s||v_m||_{1,N}^{\frac{N}{N-1}}\left(\frac{|v_m(x)|}{||v_m||_{1,N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right)dx\\
&\leq \int_\Omega \exp\left(\alpha_1 s r^{\frac{N}{N-1}}\left(\frac{|v_m(x)|}{||v_m||_{1,N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right)dx\\
&\leq \sup_{||v_m(x)||\leq 1}\int_\Omega \exp\left(\alpha_1 s r^{\frac{N}{N-1}}\left(\frac{|v_m(x)|}{||v_m||_{1,N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right)dx
\end{aligned}$$

e aplicando a Desigualdade de Trudinger-Moser, existe uma constante $M_1 > 0$ tal que

$$\int_\Omega \exp\left(\alpha_1|v_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right)dx \leq \int_\Omega \exp\left(\alpha_N\left(\frac{|v_m(x)|}{||v_m||_{1,N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right)dx \leq M_1. \tag{3.1.32}$$

Logo, de (3.1.31), (3.1.32) e da Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |v_m|^{q_1-1}\exp\left(\alpha_1|v_m|^{\frac{N}{N-1}}\right)dx &\leq \left(\int_\Omega |u_m|^{(q_1-1)s'}\,dx\right)^{\frac{1}{s'}}\left(\int_\Omega \exp\left(\alpha_1 s|v_m|^{\frac{N}{N-1}}\right)dx\right)^{\frac{1}{s}}\\
&\leq |v_m|_{L^{s'}(\Omega)}^{q_1-1}M_1^{\frac{1}{s}} = \overline{M_1}.
\end{aligned} \tag{3.1.33}$$

Usamos (3.1.30), (3.1.33) e Teorema de Brezis-Lieb (ver Teorema B.3.2) para concluir que

$$|v_m|^{q_1-1}\exp\left(\alpha_1|v_m|^{\frac{N}{N-1}}\right) \rightharpoonup |v|^{q_1-1}\exp\left(\alpha_1|v|^{\frac{N}{N-1}}\right). \tag{3.1.34}$$

Segue de (3.1.34) que

$$\int_\Omega |v_m|^{q_1-1} \exp\left(\alpha_1 |v_m|^{\frac{N}{N-1}}\right) |\phi_k| \, dx \to \int_\Omega |v|^{q_1-1} \exp\left(\alpha_1 |v|^{\frac{N}{N-1}}\right) |\phi_k| \, dx. \tag{3.1.35}$$

Portanto, de (3.1.29) e (3.1.35) provamos que

$$\int_\Omega \widehat{g_1}(v_m(x)) \, dx \to \delta_1 \int_\Omega |v(x)|^{p_1-1} |\phi_k| \, dx + C_{\delta_1} \int_\Omega |v(x)|^{q_1-1} \exp\left(\alpha_1 |v(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right) |\phi_k| \, dx,$$

isto demonstra a identidade (3.1.25).

Então, usamos (3.1.23), (3.1.24), (3.1.25), (3.1.26) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para concluir que

$$\int_\Omega f_1(v_m)\phi_k \, dx \to \int_\Omega f_1(v)\phi_k \, dx \tag{3.1.36}$$

e

$$\int_\Omega f_2(u_m)\varphi_k \, dx \to \int_\Omega f_2(u)\varphi_k \, dx. \tag{3.1.37}$$

O nosso próximo passo é demonstrar que

$$\int_\Omega a_1(|\nabla u_m|^{p_1}) |\nabla u_m|^{p_1-2} \nabla u_m \nabla \phi_k \, dx \to \int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1}) |\nabla u|^{p_1-2} \nabla u \nabla \phi_k \, dx \tag{3.1.38}$$

e

$$\int_\Omega a_2(|\nabla v_m|^{p_2}) |\nabla v_m|^{p_2-2} \nabla v_m \nabla \varphi_k \, dx \to \int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2}) |\nabla v|^{p_2-2} \nabla v \nabla \varphi_k \, dx. \tag{3.1.39}$$

Para tanto, usamos a Proposição 1.1.1 para obtermos as desigualdades

$$C|\nabla u_m - \nabla u|^N \le \langle a_1(|\nabla u_m|^{p_1}) |\nabla u_m|^{p_1-2} \nabla u_m - a_1(|\nabla u|^{p_1}) |\nabla u|^{p_1-2} \nabla u, \nabla u_m - \nabla u \rangle,$$

e

$$C|\nabla v_m - \nabla v|^N \le \langle a_2(|\nabla v_m|^{p_2}) |\nabla v_m|^{p_2-2} \nabla v_m - a_2(|\nabla v|^{p_2}) |\nabla v|^{p_2-2} \nabla v, \nabla v_m - \nabla v \rangle,$$

onde $C = \left(\dfrac{k_2}{4}\right)^{N-2} > 0$. Temos

$$\begin{aligned}
&\langle a_1(|\nabla u_m|^{p_1}) |\nabla u_m|^{p_1-2} \nabla u_m - a_1(|\nabla u|^{p_1}) |\nabla u|^{p_1-2} \nabla u, \nabla u_m - \nabla u \rangle = \\
&\quad = a_1(|\nabla u_m|^{p_1}) |\nabla u_m|^{p_1-2} \langle \nabla u_m, \nabla u_m - \nabla u \rangle - a_1(|\nabla u|^{p_1}) |\nabla u|^{p_1-2} \langle \nabla u, \nabla u_m - \nabla u \rangle \\
&\quad = a_1(|\nabla u_m|^{p_1}) |\nabla u_m|^{p_1-2} (|\nabla u_m|^2 - \nabla u_m \nabla u) - a_1(|\nabla u|^{p_1}) |\nabla u|^{p_1-2} (\nabla u \nabla u_m - |\nabla u|^2)
\end{aligned}$$

$$= a_1(|\nabla u_m|^{p_1})|\nabla u_m|^{p_1} - a_1(|\nabla u_m|^{p_1})|\nabla u_m|^{p_1-2}\nabla u_m \nabla u + a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1} - a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u_m \nabla u$$

e de maneira semelhante

$$\begin{aligned}
&\langle a_2(|\nabla v_m|^{p_2})|\nabla v_m|^{p_2-2}\nabla v_m - a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v, \nabla v_m - \nabla v\rangle = \\
&= a_2(|\nabla v_m|^{p_2})|\nabla v_m|^{p_2-2}\langle \nabla v_m, \nabla v_m - \nabla v\rangle - a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\langle \nabla v, \nabla v_m - \nabla v\rangle \\
&= a_2(|\nabla v_m|^{p_2})|\nabla v_m|^{p_2-2}(|\nabla v_m|^2 - \nabla v_m \nabla v) - a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}(\nabla v \nabla v_m - |\nabla v|^2) \\
&= a_2(|\nabla v_m|^{p_2})|\nabla v_m|^{p_2} - a_2(|\nabla v_m|^{p_2})|\nabla v_m|^{p_2-2}\nabla v_m \nabla v + a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2} \\
&\quad - a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v_m \nabla v.
\end{aligned}$$

Logo,

$$C|\nabla u_m - \nabla u|^N \leq a_1(|\nabla u_m|^{p_1})|\nabla u_m|^{p_1} - a_1(|\nabla u_m|^{p_1})|\nabla u_m|^{p_1-2}\nabla u_m \nabla u + a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1} - a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u_m \nabla u$$

e

$$C|\nabla v_m - \nabla v|^N \leq a_2(|\nabla v_m|^{p_2})|\nabla v_m|^{p_2} - a_2(|\nabla v_m|^{p_2})|\nabla v_m|^{p_2-2}\nabla v_m \nabla v + a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2} - a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v_m \nabla v.$$

Integrando, temos

$$\begin{aligned}
0 &\leq C\int_\Omega |\nabla u_m - \nabla u|^N dx = C||u_m - u||_{1,N}^N \\
&\leq \int_\Omega a_1(|\nabla u_m|^{p_1})|\nabla u_m|^{p_1}\, dx - \int_\Omega a_1(|\nabla u_m|^{p_1})|\nabla u_m|^{p_1-2}\nabla u_m \nabla u\, dx + o_n(1)
\end{aligned}$$

onde

$$o_n(1) = \int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1}\, dx - \int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u_m \nabla u\, dx$$

e

$$\begin{aligned}
0 &\leq C\int_\Omega |\nabla v_m - \nabla v|^N dx = C||v_m - v||_{1,N}^N \\
&\leq \int_\Omega a_2(|\nabla v_m|^{p_2})|\nabla v_m|^{p_2}\, dx - \int_\Omega a_2(|\nabla v_m|^{p_2})|\nabla v_m|^{p_2-2}\nabla v_m \nabla v\, dx + o_n(1),
\end{aligned}$$

onde

$$o_n(1) = \int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2}\, dx - \int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v_m \nabla v\, dx.$$

Denotamos as duas expressões por $o_n(1)$, pois segue da convergência fraca que ambas tendem a zero.

Usando que (u_m, v_m) é solução do problema (3.1.1), segue

$$\begin{aligned} &C||u_m - u||_{1,N}^N \\ &\leq \int_\Omega a_1(|\nabla u_m|^{p_1})|\nabla u_m|^{p_1-2}\nabla u_m \nabla u_m\, dx - \int_\Omega a_1(|\nabla u_m|^{p_1})|\nabla u_m|^{p_1-2}\nabla u_m \nabla u\, dx + o_n(1) \\ &= \lambda_1 \int_\Omega \frac{u_m}{(u_m+\varepsilon)^{\beta_1}}\, dx + \int_\Omega f_1(v_m)u_m\, dx - \lambda_1 \int_\Omega \frac{u}{(u_m+\varepsilon)^{\beta_1}}\, dx - \int_\Omega f_1(v_m)u\, dx + o_n(1) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} &C||v_m - v||_{1,N}^N \\ &\leq \int_\Omega a_2(|\nabla v_m|^{p_2})|\nabla v_m|^{p_2-2}\nabla v_m \nabla v_m\, dx - \int_\Omega a_2(|\nabla v_m|^{p_2})|\nabla v_m|^{p_2-2}\nabla v_m \nabla v\, dx + o_n(1) \\ &= \lambda_2 \int_\Omega \frac{v_m}{(v_m+\varepsilon)^{\beta_2}}\, dx + \int_\Omega f_2(u_m)v_m\, dx - \lambda_2 \int_\Omega \frac{v}{(v_m+\varepsilon)^{\beta_2}}\, dx - \int_\Omega f_2(u_m)v\, dx + o_n(1). \end{aligned}$$

Logo,

$$||u_m - u||_{1,N}^N \leq o_n(1) \quad \text{e} \quad ||v_m - v||_{1,N}^N \leq o_n(1).$$

Como $o_n(1) \to 0$ segue que

$$u_m \to u, \quad \text{em } W_0^{1,N}(\Omega) \tag{3.1.40}$$

e

$$v_m \to v, \quad \text{em } W_0^{1,N}(\Omega). \tag{3.1.41}$$

Agora, do Lema 1.1.1, sabemos que as funções definidas por

$$E_1(u) = \int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u \nabla \phi_k\, dx$$

e

$$E_1(v) = \int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v \nabla \phi_k\, dx$$

são contínuas. Então, de (3.1.40) e (3.1.41), obtemos as convergências (3.1.38) e (3.1.39).

Fazendo $m \to \infty$ em (3.1.19) e (3.1.20), usamos (3.1.21), (3.1.22), (3.1.36), (3.1.37), (3.1.38) e (3.1.39) para concluir que

$$\int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u \nabla \phi_k \, dx = \lambda_1 \int_\Omega \frac{\phi_k}{(u+\varepsilon)^{\beta_1}} \, dx + \int_\Omega f_1(v)\phi_k \, dx, \tag{3.1.42}$$

e

$$\int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v \nabla \varphi_k \, dx = \lambda_2 \int_\Omega \frac{\varphi_k}{(v+\varepsilon)^{\beta_2}} \, dx + \int_\Omega f_2(u)\varphi_k \, dx, \tag{3.1.43}$$

para todo $\varphi \in W_k$.

Como $[W_k]_{k\in\mathbb{N}}$ é denso em $W_0^{1,N}(\Omega)$, temos que

$$\phi_k \to \phi \quad \text{quando} \quad k \to \infty$$

e

$$\varphi_k \to \varphi \quad \text{quando} \quad k \to \infty.$$

Lembrando que ϕ_k e φ_k são da forma $\sum_{j=1}^{k} a_i e_i$, então, por linearidade, temos

$$\int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u \nabla \phi_k \, dx \to \int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u \nabla \phi \, dx \tag{3.1.44}$$

$$\int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v \nabla \varphi_k \, dx \to \int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v \nabla \varphi \, dx \tag{3.1.45}$$

$$\int_\Omega \frac{\phi_k}{(u+\varepsilon)^{\beta_1}} \, dx \to \int_\Omega \frac{\phi}{(u+\varepsilon)^{\beta_1}} \, dx \tag{3.1.46}$$

$$\int_\Omega \frac{\varphi_k}{(v+\varepsilon)^{\beta_2}} \, dx \to \int_\Omega \frac{\varphi}{(v+\varepsilon)^{\beta_2}} \, dx \tag{3.1.47}$$

$$\int_\Omega f_1(v)\phi_k \, dx \to \int_\Omega f_1(v)\phi \, dx \tag{3.1.48}$$

e

$$\int_\Omega f_2(u)\varphi_k \, dx \to \int_\Omega f_2(u)\varphi \, dx. \tag{3.1.49}$$

Portanto, como $\phi, \varphi \in W_0^{1,N}(\Omega)$ são arbitrárias, segue de (3.1.42) - (3.1.49) que

$$\int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u \nabla \phi \, dx = \lambda_1 \int_\Omega \frac{\phi}{(u+\varepsilon)^{\beta_1}} \, dx + \int_\Omega f_1(v)\phi \, dx, \tag{3.1.50}$$

e

$$\int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v\nabla\varphi\, dx = \lambda_2\int_\Omega \frac{\varphi}{(v+\varepsilon)^{\beta_2}}\, dx + \int_\Omega f_2(u)\varphi\, dx, \qquad (3.1.51)$$

para todo $\phi,\varphi \in W_0^{1,N}(\Omega)$, o que demonstra que (u,v) é uma solução fraca do problema (3.1.1). □

3.2 Prova do Teorema 3.0.1

Para cada $n\in\mathbb{N}$, sejam $\varepsilon = 1/n, u_{1/n} = u_n$ e $v_{1/n} = v_n$, onde (u_n,v_n) é uma solução fraca não negativa do problema auxiliar

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a_1(|\nabla u_n|^{p_1})|\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n) = \dfrac{\lambda_1}{(u_n+\frac{1}{n})^{\beta_1}} + f_1(v_n) & \text{em } \Omega,\\ -\mathrm{div}(a_2(|\nabla v_n|^{p_2})|\nabla v_n|^{p_2-2}\nabla v_n) = \dfrac{\lambda_2}{(v_n+\frac{1}{n})^{\beta_2}} + f_2(u_n) & \text{em } \Omega,\\ u_n = v_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

obtida do Lema 3.1.1. Observe que vale

$$-\mathrm{div}(a_1(|\nabla u_n|^{p_1})|\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n) \geq \frac{\lambda_1}{(u_n+v_n+1)^{\beta_1}} + f_1(v_n) \quad \text{em } \Omega$$

e, de (f_3), existe $\gamma_1 > N$ tal que

$$-\mathrm{div}(a_1(|\nabla u_n|^{p_1})|\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n) \geq \frac{\lambda_1}{(u_n+v_n+1)^{\beta_1}} + |v_n|^{\gamma_1-1} \quad \text{em } \Omega.$$

Como a função $t \to \dfrac{\lambda_1}{(u_n+t+1)^{\beta_1}} + t^{\gamma_1-1}$ é limitada inferiormente em $t\geq 0$, segue que ela atinge mínimo positivo z_1. Então,

$$-\mathrm{div}(a_1(|\nabla u_n|^{p_1})|\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n) \geq z_1 > 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Desde que o operador $T : W_0^{1,N}(\Omega) \to (W_0^{1,N}(\Omega))'$ dado por

$$\langle Tv,\phi\rangle = \int_\Omega a_1(|\nabla\omega_1|^{p_1})|\nabla\omega_1|^{p_1-2}\nabla\omega_1\nabla\phi dx$$

é contínuo, monótono e coercivo (Ver Seção 1.1), podemos aplicar o Teorema de Minty-Browder para obter que existe uma única solução $\omega_1 \in W_0^{1,N}(\Omega)$ para o problema linear

$$\begin{cases} -\text{div}(a_1(|\nabla\omega_1|^{p_1})|\nabla\omega_1|^{p_1-2}\nabla\omega_1) = z_1 & \text{em } \Omega, \\ \omega_1 > 0 & \text{em } \Omega, \\ \omega_1 = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Assim, temos

$$\begin{cases} -\text{div}(a_1(|\nabla u_n|^{p_1})|\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n) \geq -\text{div}(a_1(|\nabla\omega_1|^{p_1})|\nabla\omega_1|^{p_1-2}\nabla\omega_1) & \text{em } \Omega, \\ u_n = \omega_1 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

Em virtude do Princípio de Comparação Fraca dado pelo Lema 1.1.5, podemos concluir

$$u_n(x) \geq \omega_1(x) > 0 \quad \text{em } \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.2.2}$$

Analogamente, provamos que

$$u_n(x) \geq \omega_2(x) > 0 \quad \text{em } \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.2.3}$$

onde ω_2 satisfaz

$$\begin{cases} -\text{div}(a_2(|\nabla\omega_2|^{p_2})|\nabla\omega_2|^{p_2-2}\nabla\omega_2) = z_2 & \text{em } \Omega, \\ \omega_2 > 0 & \text{em } \Omega, \\ \omega_2 = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2.4}$$

e z_2 é um mínimo positivo da função $t \to \dfrac{\lambda_2}{(v_n+t+1)^{\beta_2}} + t^{\gamma_2-1}$. Portanto, temos que $u_n \nrightarrow 0$ e $v_n \nrightarrow 0$, para cada $x \in \Omega$.

Agora, de (3.1.17) e (3.1.18), obtemos

$$u_m \rightharpoonup u_n \quad \text{em } W_0^{1,N}(\Omega) \quad \text{quando} \quad m \to +\infty$$

e

$$v_m \rightharpoonup v_n \quad \text{em } W_0^{1,N}(\Omega) \quad \text{quando} \quad m \to +\infty,$$

Logo, pelo Teorema B.4.1 e (3.1.13) obtemos

$$||u_n||_{1,N} \leq \liminf_{m\to+\infty} ||u_m||_{1,N} \leq \liminf_{m\to+\infty} ||(u_m, v_m)|| \leq r < 1, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

e

$$||v_n||_{1,N} \leq \liminf_{m\to+\infty} ||v_m||_{1,N} \leq \liminf_{m\to+\infty} ||(u_m, v_m)|| \leq r < 1, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, como r não depende de n, (u_n) e (v_n) são sequências limitadas em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Assim, como $W_0^{1,N}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo, a menos de subsequência, existe $u, v \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tais que

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u & \text{em } W_0^{1,N}(\Omega), \\ u_n \to u, & \text{em } L^\theta(\Omega), \theta \geq 1, \\ u_n(x) \to u(x) & \text{q.t.p em } \Omega, \\ |u_n(x)| \leq g_1(x) \in L^\theta(\Omega) & \text{q.t.p em } \Omega, \theta \geq 1 \end{cases} \tag{3.2.5}$$

e

$$\begin{cases} v_n \rightharpoonup v & \text{em } W_0^{1,N}(\Omega), \\ v_n \to v & \text{em } L^\theta(\Omega), \theta \geq 1, \\ v_n(x) \to v(x) & \text{q.t.p em } \Omega, \\ |v_n(x)| \leq g_2(x) \in L^\theta(\Omega) & \text{q.t.p em } \Omega, \theta \geq 1. \end{cases} \tag{3.2.6}$$

Decorre de (3.1.50) e (3.1.51) que

$$\int_\Omega a_1(|\nabla u_n|^{p_1})|\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n \nabla\phi \, dx = \lambda_1 \int_\Omega \frac{\phi}{(u_n + \frac{1}{n})^{\beta_1}} \, dx + \int_\Omega f_1(v_n)\phi \, dx \tag{3.2.7}$$

e

$$\int_\Omega a_2(|\nabla v_n|^{p_2})|\nabla v_n|^{p_2-2}\nabla v_n \nabla\varphi \, dx = \lambda_2 \int_\Omega \frac{\varphi}{(v_n + \frac{1}{n})^{\beta_2}} \, dx + \int_\Omega f_2(u_n)\varphi \, dx, \tag{3.2.8}$$

para todo $\phi, \varphi \in W_0^{1,N}(\Omega)$. Além disso, como f_i são funções contínuas, de (3.2.5) e (3.2.6), obtemos

$$f_1(v_n(x))\phi \to f_1(v(x))\phi \quad \text{q.t.p em } \Omega$$

e

$$f_2(u_n(x))\varphi \to f_2(u(x))\varphi \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Argumentando como em (3.1.25) e (3.1.26), obtemos uma função $\widehat{g_1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$|f_1(v_n(x))\phi| \leq \widehat{g_1}(v_n(x))$$

e

$$|f_2(u_n(x))\varphi| \leq \widehat{g_2}(u_n(x))$$

Então, usamos o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para concluir que

$$\int_\Omega f_1(v_n)\phi\, dx \to \int_\Omega f_1(v)\phi\, dx, \quad \forall \phi \in W_0^{1,N}(\Omega) \tag{3.2.9}$$

e

$$\int_\Omega f_2(u_n)\varphi\, dx \to \int_\Omega f_2(u)\varphi\, dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,N}(\Omega). \tag{3.2.10}$$

E ainda, aplicando o mesmo raciocínio para obter (3.1.38) e (3.1.39), temos

$$\int_\Omega a_1(|\nabla u_n|^{p_1})|\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n \nabla\phi\, dx \to \int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u \nabla\phi\, dx, \tag{3.2.11}$$

e

$$\int_\Omega a_2(|\nabla v_n|^{p_2})|\nabla v_n|^{p_2-2}\nabla v_n \nabla\varphi\, dx \to \int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v \nabla\varphi\, dx, \tag{3.2.12}$$

para todo $\phi, \varphi \in W_0^{1,N}(\Omega)$.

Pelas identidades (3.2.5) e (3.2.6), obtemos

$$\frac{\phi}{\left(u_n(x)+\frac{1}{n}\right)^{\beta_1}} \to \frac{\phi}{u(x)^{\beta_1}} \quad \text{q.t.p em } \Omega \tag{3.2.13}$$

e

$$\frac{\varphi}{\left(v_n(x)+\frac{1}{n}\right)^{\beta_2}} \to \frac{\varphi}{v(x)^{\beta_2}} \quad \text{q.t.p em } \Omega. \tag{3.2.14}$$

Desde que $\omega_1, \omega_2 \in L^\infty(\Omega)$, pelo Lema 1.1.6 e (3.2.1), (3.2.4), segue que $\omega_1, \omega_2 \in L^\infty(\Omega)$, e assim, pelo Lema 1.1.7 obtemos que $\omega_1, \omega_2 \in C^{1,\alpha}(\Omega)$, para algum $\alpha \in (0,1)$. Agora, em virtude do Lema 1.1.8, obtemos

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial\eta}, \frac{\partial\omega_2}{\partial\eta} < 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \quad \text{onde } \eta \text{ é a normal unitária exterior em } \partial\Omega.$$

Assim, para cada $x \in \Omega$, segue do Lema 1.2.1 que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\frac{\omega_1(x)}{d(x)} \geq C \ \text{ e } \ \frac{\omega_2(x)}{d(x)} \geq C,$$

logo, por (2.2.2),

$$u_n(x) \geq \omega_1(x) > Cd(x) > 0 \quad \text{e} \quad v_n(x) \geq \omega_2(x) > Cd(x) > 0,$$

onde $d(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$ e C é uma constante positiva que não depende de x. Portanto,

$$\int_\Omega \frac{\phi}{\left(u_n(x)+\frac{1}{n}\right)^{\beta_1}}\,dx \leq \int_\Omega \frac{\phi}{u_n(x)^{\beta_1}}\,dx \leq \int_\Omega \frac{\phi}{(Cd(x))^{\beta_1}}\,dx$$

e

$$\int_\Omega \frac{\varphi}{\left(v_n(x)+\frac{1}{n}\right)^{\beta_2}}\,dx \leq \int_\Omega \frac{\varphi}{v_n(x)^{\beta_2}}\,dx \leq \int_\Omega \frac{\varphi}{(Cd(x))^{\beta_2}}\,dx.$$

Com isso, usamos a Desigualdade de Hardy-Sobolev para obter $\left|\frac{\phi}{(Cd(x))^{\beta_1}}\right|, \left|\frac{\varphi}{(Cd(x))^{\beta_2}}\right| \in L^r(\Omega)$ e $C_{17}, C_{18} > 0$ tais que

$$\int_\Omega \frac{\phi}{\left(u_n(x)+\frac{1}{n}\right)^{\beta_1}}\,dx \leq C_{17}||\phi||_{1,N} \tag{3.2.15}$$

e

$$\int_\Omega \frac{\varphi}{\left(v_n(x)+\frac{1}{n}\right)^{\beta_2}}\,dx \leq C_{18}||\varphi||_{1,N} \tag{3.2.16}$$

Portanto, de (3.2.13), (3.2.14), (3.2.15), (3.2.16) e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_\Omega \frac{\phi}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^{\beta_1}}\,dx \to \int_\Omega \frac{\phi}{u^{\beta_1}}\,dx, \;\; \forall \phi \in W_0^{1,N}(\Omega) \tag{3.2.17}$$

e

$$\int_\Omega \frac{\varphi}{\left(v_n+\frac{1}{n}\right)^{\beta_2}}\,dx \to \int_\Omega \frac{\varphi}{v^{\beta_2}}\,dx, \;\; \forall \varphi \in W_0^{1,N}(\Omega). \tag{3.2.18}$$

Fazendo $n \to +\infty$ em (3.2.7) e (3.2.8), usamos (3.2.9), (3.2.10), (3.2.11), (3.2.12), (3.2.17) e (3.2.18), para concluir que

$$\int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u \nabla \phi\,dx = \lambda_1 \int_\Omega \frac{\phi}{u^{\beta_1}}\,dx + \int_\Omega f_1(v)\phi\,dx, \;\; \forall \phi \in W_0^{1,N}(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v \nabla \varphi\,dx = \lambda_2 \int_\Omega \frac{\varphi}{v^{\beta_2}}\,dx + \int_\Omega f_2(u)\varphi\,dx, \;\; \forall \varphi \in W_0^{1,N}(\Omega),$$

o que prova que $(u,v) \in W^{1,N}(\Omega) \times W^{1,N}(\Omega)$ é um solução fraca positiva do problema $(P2)$.

Apêndice A

Teoria do Grau de Brouwer

A teoria do grau topológico é uma ferramenta muito utilizada no estudo de existência de soluções para equações não lineares. Dedicamos este apêndice para estudarmos a versão do grau para dimensão finita, conhecido como Grau de Brouwer. Para mais detalhes o leitor pode consultar [14].

A.1 Conceito e propriedades básicas

Seja $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. Relembre que $f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ e, portanto, $f'(x)$ pode ser representado por uma matriz $N \times N$. Seja S o conjunto dos pontos críticos de f.

Definição A.1.1. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ uma função em $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e seja $b \notin f(S) \cup f(\partial\Omega)$. Então, definimos o *grau topológico de Brouwer* de f em relação a Ω no ponto b como

$$d(f, \Omega, b) = \begin{cases} 0, & \text{se } \ f^{-1}(b) = \varnothing, \\ \displaystyle\sum_{x \in f^{-1}(b)} \operatorname{sgn}(J_f(x)), & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{A.1.1}$$

onde a função sgn denota a função *sinal*, definida por

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } \ t > 0, \\ -1, & \text{se } \ t < 0, \end{cases}$$

e $J_f(x))$ é o determinante da matriz jacobiana de f.

Vamos verificar que a definição acima está bem definida. Observe que, como $b \notin f(S) \cup f(\partial\Omega)$, então $f'(x)$ está bem definida para $x \in f^{-1}(b)$ e $J_f(x) \neq 0$. Logo, $f'(x)$ é um isomorfismo e, pelo Teorema da Função Inversa, f é invertível em uma vizinhança de x.

Afirmação 1. $f^{-1}(b)$ é finito.

Com efeito, suponha que $f^{-1}(b)$ seja infinito e considere uma sequência (x_n) em $f^{-1}(b)$. Como $\overline{\Omega}$ é compacto e $f^{-1}(b) \subset \overline{\Omega}$ segue que $f^{-1}(b)$ é limitado e, do Teorema de Bolzano-Weierstrass, (x_n) admite subsequência (x_{n_k}) convergente para algum $x \in \overline{\Omega}$. Como f é contínua, temos $f(x_{n_k}) \to f(x)$, mas $f(x_{n_k}) = b$, logo, $f(x) = b$ e, portanto, $x \in f^{-1}(b)$. Agora, usando o fato que f é invertível em uma vizinhança de x, temos que f é injetiva nessa vizinhança, por outro lado, pelo que vimos acima, em qualquer vizinhança de x existe infinitos x_{n_k} tais que $f(x_{n_k}) = b$, o que contradiz a injetividade de f. Concluímos então que $f^{-1}(b)$ é finito e (A.1.1) faz sentido.

□

Veja que definimos a função f em $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, no entanto, é possível estender a definição de grau para funções f meramente contínuas em $\overline{\Omega}$. O leitor interessado pode encontrar mais informações em [14].

O teorema a seguir elenca algumas propriedades básicas do grau de Brouwer.

Teorema A.1.1. *Valem as seguinte propriedades:*

(i) *(***Continuidade com relação a função***) Seja $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ e seja $b \notin f(\partial\Omega)$. Existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de $C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ tal que para toda $g \in \mathcal{U}$,*

$$d(g, \Omega, b) = d(f, \Omega, b);$$

(ii) *(***Invariância por Homotopia***) Seja $H \in C(\overline{\Omega} \times [0,1] : \mathbb{R}^N)$ tal que $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$. Então, $d(H(\cdot, t), \Omega, b)$ é independente de t;*

(iii) *O grau é constante com relação a b em cada componente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash f(\partial\Omega)$;*

(iv) *(***Aditividade***) Sejam $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$ e $b \notin f(\partial\Omega_1) \cup f(\partial\Omega_2)$, onde $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Então,*

$$d(f, \Omega, b) = d(f, \Omega_1, b) + d(f, \Omega_2, b).$$

Demonstração. Ver em [14, Teorema 2.2.1]. □

Abaixo, exibimos outras propriedades do grau e suas consequências, cujas demonstrações podem ser encontradas em [14].

Proposição A.1.1. *Se $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ e $b \notin f(\overline{\Omega})$, então $d(f, \Omega, b) = 0$. Equivalentemente, se $d(f, \Omega, b) \neq 0$, então existe $x \in \Omega$ tal que $f(x) = b$.*

Demonstração. Ver em [14, Proposição 2.2.1]. □

Corolário A.1.1.1. *Se $d(f,\Omega,b) \neq 0$, então $f(\Omega)$ é uma vizinhança de b.*

Demonstração. Ver em [14, Corolário 2.2.1]. □

Proposição A.1.2. *Seja $K \subset \overline{\Omega}$ um conjunto fechado e $b \notin f(\partial\Omega) \cap f(K)$. Então*

$$d(f,\Omega,b) = d(f,\Omega \backslash K,b).$$

Demonstração. Ver em [14, Proposição 2.2.2]. □

Proposição A.1.3. *Sejam $f,g \in C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ tais que $f = g$ em $\partial\Omega$. Seja $b \notin f(\partial\Omega)$, então*

$$d(f,\Omega,b) = d(g,\Omega,b).$$

Demonstração. Ver em [14, Proposição 2.2.3]. □

Corolário A.1.1.2. *Sejam $f,g \in C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$. Assuma que existe $H \in C(\partial\Omega \times [0,1],\mathbb{R}^N)$ tal que H nunca assuma o valor b e tal que $H(\cdot,0) = f|_{\partial\Omega}$ e $H(\cdot,1) = g|_{\partial\Omega}$. Então*

$$d(f,\Omega,b) = d(g,\Omega,b).$$

Demonstração. Ver em [14, Corolário 2.2.2]. □

A.2 Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Nesta seção, introduzimos o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer que é de fundamental relevância na aplicação do Método de Galerkin, mais precisamente, nos fornece como consequência o Lema 1.3.1 utilizado fortemente nos capítulos 2 e 3.

Teorema A.2.1 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer)**.** *Seja $\mathcal{B}_r(x) \subset \mathbb{R}^N$ a bola de centro em x e raio r e $f : \overline{\mathcal{B}}_r(x) \to \overline{\mathcal{B}}_r(x)$ uma aplicação contínua. Então, f tem um ponto fixo.*

Demonstração. Vamos dividir a demonstração em dois casos:
Caso 1: A bola é centrada na origem. Neste caso, temos $f : \overline{\mathcal{B}}_r(0) \to \overline{\mathcal{B}}_r(0)$. Defina a aplicação $\varphi : \overline{\mathcal{B}}_r(0) \to \mathbb{R}^N$ dada por $\varphi(y) = y - f(y)$. Como φ é a diferença de duas funções contínuas, φ é contínua. Suponha que

$$\varphi(y) \neq 0, \text{ para todo } y \in \partial\overline{\mathcal{B}}_r(0),$$

pois caso contrário, teríamos $f(y) = y$ e o caso 1 estaria demonstrado. Agora, considere a aplicação

$$\begin{aligned} H : \overline{\mathcal{B}}_r(0) \times [0,1] &\to \mathbb{R}^N \\ (y,t) &\mapsto H(y,t) = y - tf(y). \end{aligned}$$

Observe que H é uma homotopia entre a aplicações f e a identidade Id. Vamos mostrar que $H(y_0,t_0) \neq 0$, para todo $y_0 \in \partial\mathcal{B}_r(0)$ e $t_0 \in [0,1]$, em outras palavras, $0 \notin H(\partial\mathcal{B}_r(0) \times [0,1])$. De fato, se $t = 1$, obtemos

$$H(y,1) = y - f(y) = \varphi(y) \neq 0, \ \text{ para todo } y \in \partial\mathcal{B}_(0),$$

daí

$$0 \notin H(\partial\mathcal{B}_r(0) \times 1).$$

Por outro lado, se $t \in [0,1)$ e $y \in \partial\mathcal{B}_r(0)$, observe que

$$||tf(y)|| = t||f(y)|| \leq tr < r = ||y||,$$

consequentemente, $tf(y) \neq y$, de onde segue que

$$H(y,t) \neq 0, \ \text{ para todo } y \in \partial\mathcal{B}_r(0) \text{ e } t \in [0,1).$$

Portanto,

$$0 \notin H(\partial\mathcal{B}_r(0) \times [0,1]).$$

Pelo item *(ii)* do Teorema A.1.1, o grau é invariante por homotopia, logo,

$$d(H(\cdot,t),\mathcal{B}_r(0),0) = cte, \ \text{ para todo } t \in [0,1],$$

e, portanto,

$$d(H(\cdot,0),\mathcal{B}_r(0),0) = d(H(\cdot,1),\mathcal{B}_r(0),0).$$

Segue que

$$d(f,\mathcal{B}_r(0),0) = d(Id,\mathcal{B}_r(0),0) = 1,$$

então

$$d(f,\mathcal{B}_r(0),0) = 1 \neq 0.$$

Da Proposição A.1.1, existe $y_0 \in \mathcal{B}_r(0)$ tal que $\varphi(y_0)$. Dessa forma,

$$y_0 - f(y_0),$$

e, portanto, f tem um ponto fixo $y_0 \in \overline{\mathcal{B}}_r(0)$.

Caso 2: Assumimos que o centro da bola é um ponto qualquer $x \in \mathbb{R}^N$. Considere a aplicação $\varphi : \overline{\mathcal{B}}_r(0) \to \overline{\mathcal{B}}_r(0)$ dada por $\varphi(y) = f(x+y) - x$. Veja que a aplicação é contínua e $\varphi(\overline{\mathcal{B}}_r(0)) \subset \overline{\mathcal{B}}_r(0)$, pois

$$||\varphi(y)|| = ||f(x+y) - x|| \leq r,$$

ou seja, $\varphi(y) \in \overline{\mathcal{B}}_r(0)$. Logo, do *Caso 1*, φ tem um ponto fixo $z \in \overline{\mathcal{B}}_r(0)$, isto é, $\varphi(z) = z$, o que nos fornece $f(x+z) = x+z$. Denotando $w = x+z$, temos $f(w) = w$ e, portanto, f tem um ponto fixo em $\overline{\mathcal{B}}_r(x)$. □

O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer é válido para domínios mais gerais. O resultado abaixo fornece um exemplo claro disto e, sua demonstração pode ser encontrada em [14, Corolário 2.3.1].

Corolário A.2.1.1. *Sejam $K \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto compacto e convexo e $f : K \to K$ uma aplicação contínua. Então, existe $x \in K$ tal que $f(x) = x$.*

Demonstração. Desde que K é um compacto do $\mathbb{R}^N$, existe uma bola de centro em 0 e raio R tal que $K \subset \overline{B}_R(0)$. Como K é fechado e convexo, seja $P_k : \mathbb{R}^N \to K$ a aplicação definida da seguinte maneira: dado $x \in \mathbb{R}^N, P_k(x) \in K$ é o único ponto tal que

$$||x - P_k(x)|| = \min_{y \in K} ||x - y||.$$

Defina $\tilde{f} : \overline{B}_R(0) \to K \subset \overline{B}_R(0)$ por $\tilde{f}(x) = f(P_k(x))$. Observe que $\tilde{f}$ é contínua, pois é uma composição de funções contínuas. Então, pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, $\tilde{f}$ possui um ponto fixo x_0. Como a imagem desta aplicação está contida em K, segue da definição de P_k que

$$P_k(x_0) = x_0.$$

Assim, $x_0 = f(P_k(x_0)) = f(x_0)$, o que prova o resultado. □

Apêndice B

Medida, EDPs e Análise Funcional

Dedicamos este apêndice para trazer à memória conceitos relevantes da teoria de Medida, Equações Diferenciais Parciais e de Análise Funcional que usamos direta ou indiretamente em nosso estudo.

B.1 Espaço de Lebesgue

Sejam (X,Σ,μ) um espaço de medida e $1 \leq p < \infty$. O conjunto de todas as funções mensuráveis de X em $\mathbb{K}$ tais que

$$||f||_p := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

será denotado por $\mathcal{L}^p(X,\Sigma,\mu)$. Vale destacar que $||\cdot||_p$ é uma *seminorma* em $\mathcal{L}^p(X,\Sigma,\mu)$, pois pode ocorrer $||f||_p = 0$ para f não identicamente nula.

Teorema B.1.1 (Desigualdade de Holder)**.** *Sejam $p,q > 1$ tais que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$ e (X,Σ,μ) um espaço de medida. Se $f \in \mathcal{L}^p(X,\Sigma,\mu)$ e $g \in \mathcal{L}^q(X,\Sigma,\mu)$, então $fg \in \mathcal{L}^1(X,\Sigma,\mu)$ e*

$$||fg||_1 \leq ||f||_p \cdot ||g||_q,$$

ou de modo equivalente,

$$\int_X fg\, d\mu \leq \left(\int_X |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^q\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Para corrigir o que falta para $||f||_p$ ser uma norma, considere a relação de equivalência na qual duas funções $f,g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ são equivalentes se $f = g$ μ-q.t.p., isto é, se existe um conjunto $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) = 0$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \notin A$. Denotando a classe de equivalência de uma função f por $[f]$, definimos

$$L^p(X,\Sigma,\mu) := \{[f]; f \in \mathcal{L}^p(X,\Sigma,\mu)\},$$

que é um espaço vetorial com as operações

$$[f]+[g] = [f+g] \quad \text{e} \quad c[f] = [cf].$$

Ainda mais, definimos $||[f]||_p := ||f||_p$ que é uma norma em $L^p(X,\Sigma,\mu)$.

B.2 Espaço de Sobolev

Definição B.2.1. Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e um multi-índice α, dizemos que $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ é uma α-ésima derivada fraca de u se

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi dx, \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Essencialmente, a definição acima diz que uma derivada fraca é uma função localmente integrável que nos permite fazer integração por partes.

Lema B.2.1. *A α-ésima derivada fraca de um função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, quando existe, é única a menos de conjuntos de medida nula.*

Demonstração. Ver [8, Lema 4.3]. □

Definição B.2.2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N} \cap \{0\}$. Definimos o *Espaço de Sobolev* $W^{k,p}(\Omega)$ como sendo

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ tal que} |\alpha| \leq k\},$$

com as derivadas $D^\alpha u$ acima tomadas no sentido fraca.

O Espaço $W^{k,p}(\Omega)$ se torna um espaço normado definindo a norma

$$||u||_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \sum_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha u||_{L^\infty(\Omega)}, & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

Teorema B.2.1. $(W^{k,p}(\Omega), ||\cdot||_{W^{k,p}(\Omega)})$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração. Ver [8, Teorema 4.10]. □

Teorema B.2.2. *O espaço* $W^{k,p}(\Omega)$ *é reflexivo se* $1 < p < \infty$ *e separável se* $1 \leq p < \infty$.

Demonstração. Ver [8, Teorema 4.11]. □

Definição B.2.3. Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados com $X \subseteq Y$. Dizemos que X está imerso continuamente em Y se existe $C > 0$ tal que

$$||x||_Y \leq C||x||_X, \quad \forall\, x \in X.$$

Nesse caso, escrevemos $X \hookrightarrow Y$.

Teorema B.2.3 (Imersão de $W_0^{1,p}(\Omega),\ 1 \leq p < N$)**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto limitado e* $1 \leq p < N$. *Então vale a imersão*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall\, q \in [1, p^*],$$

onde $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$ *é conhecido como expoente crítico de Sobolev.*

Demonstração. Ver [8, Teorema 4.21]. □

Teorema B.2.4 (Imersão de $W^{1,p}(\Omega),\ p = N$)**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto limitado de classe* C^1. *Então vale a imersão*

$$W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall\, q \geq 1.$$

Demonstração. Ver [8, Teorema 4.28]. □

Definição B.2.4. Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados com $X \hookrightarrow Y$. Dizemos que X está imerso compactamente em Y se toda sequência $(u_m) \subset X$ limitada possui subsequência convergente em Y.

Teorema B.2.5 (Rellich-Kondrachov)**.** *Suponha que Ω é limitado de classe C^1. Então, temos as seguintes imersões compactas:*

i) $W^{1,p}(\Omega) \overset{cpct.}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$ *para todo* $q \in [1, p^*)$, *onde* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{N}$, *se* $p < N$;

ii) $W^{1,p}(\Omega) \overset{cpct.}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$ *para todo* $q \in [p, +\infty)$, *se* $p = N$;

iii) $W^{1,p}(\Omega) \overset{cpct.}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega})$, *se* $p > N$.

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \overset{cpct.}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$ *para todo* p *(e todo* N*).*

Demonstração. Ver [4, Teorema 9.16]. □

Definição B.2.5. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. O espaço $W_0^{k,p}(\Omega)$ é definido como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ na norma $||\cdot||_{W^{k,p}(\Omega)}$, isto é,

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{||\cdot||_{W^{k,p}(\Omega)}}.$$

Observação. Segue da definição que $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ se, e somente se, existe uma sequência $(u_m) \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_m \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$.

Teorema B.2.6 (Minty-Browder)**.** *Seja E um espaço de Banach reflexivo. Seja $A : E \longrightarrow E'$ uma aplicação não linear contínua tal que*

$$\langle Av_1 - Av_2, v_1 - v_2 \rangle > 0, \quad \forall\, v_1, v_2 \in E, \quad v_1 \neq v_2,$$

e

$$\lim_{||v|| \to \infty} \frac{\langle Av, v \rangle}{||v||} = \infty.$$

Então, para toda $f \in E'$ existe uma única solução $u \in E$ da equação $Au = f$.

Demonstração. Ver [4, Teorema 5.16] □

Lema B.2.2 (Desigualdade de Harnack)**.** *Seja u uma função harmônica não negativa em Ω. Então, para qualquer subdomínio limitado $\Omega' \subset\subset \Omega$, existe uma constante C dependendo apenas de n, Ω e Ω' tais que*

$$\sup_{\Omega'} u \leq C \inf_{\Omega'} u$$

Demonstração. Ver [9, Teorema 2.5]. □

B.3 Alguns resultados de convergência

Como já mencionado, o método adotado para resolver os problemas em estudo é o de Galerkin. A própria natureza desse método exige que empreguemos resultados de convergência após obter uma solução aproximada, visando estender essa solução a um espaço mais apropriado. Assim, nesta seção, apresentamos os principais resultados que utilizamos para atingir esse objetivo, como, por exemplo, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e o Teorema de Brezis-Lieb.

Teorema B.3.1 (Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Seja (f_n) uma sequências de funções em $L^1(\Omega)$ que satisfaz:*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω*;*

(ii) existe uma função $g \in L^1$ *tal que para todo n,* $|f_n(x)| \leq g(x)$ *q.t.p. em* Ω.

Então $f \in L^1(\Omega)$ *e* $||f_n - f||_1 \to 0$.

Demonstração. Ver [4, Teorema 4.2]. □

Teorema B.3.2 (Brezis-Lieb)**.** *Sejam* $1 < p < \infty$ *e* $(f_n)_n$ *uma sequência limitada de funções de* $L^p(\Omega)$ *que convergem q.t.p. para* f *e suponha que existe* $C > 0$ *tal que*

$$\int_\Omega |f_n|^p dx \leq C, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Então

$$\int_\Omega f_n \varphi dx \to \int_\Omega f \varphi dx, \text{ para todo } \varphi \in L^q(\Omega),$$

onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

Demonstração. Ver [12, Lema 4.6]. □

O teorema abaixo consiste numa recíproca do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

Teorema B.3.3. *Sejam* (f_n) *uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$ *tais que*

$$f_n \to f \quad em \quad L^p(\Omega).$$

Então, existem uma subsequência (f_{n_k}) *e* $g \in L^p(\Omega)$ *tais que*

i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *q.t.p em* Ω

ii) $|f_n(x)| \leq g(x)$ *q.t.p em* Ω*, para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Ver [4, Teorema 4.9]. □

Uma vez que $W_0^{1,N}(\Omega)$ é um espaço reflexivo, podemos utilizar o seguinte resultado:

Teorema B.3.4. *Em um espaço reflexivo, toda sequência limitada tem subsequência fracamente convergente.*

Demonstração. Ver [3, Teorema 6.5.4] □

Teorema B.3.5 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam* $p, q > 1$ *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Para quaisquer* a *e* b *não-negativos, vale*

$$a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

B.4 Noções de Análise Funcional

Definição B.4.1. Sejam E e F espaços normados e $\mathcal{L}(E,F)$ o conjunto de todos os operadores lineares contínuos de E em F. Se F é o corpo de escalares, escrevemos E' no lugar de $\mathcal{L}(E,F)$. Chamamos esse espaço de *dual topológico* de E, ou simplesmente de *dual* de E. Em outras palavras, E' é o conjunto de todos os funcionais lineares contínuos de E.

Definição B.4.2. Dois espaços normados E e F são *isomorfos* se existir um operador linear contínuo bijetor $T : E \longrightarrow F$ cujo operador inverso $T^{-1} : F \longrightarrow E$, que é sempre linear, é tammbém contínuo.

Definição B.4.3. Uma função $f : E \longrightarrow F$, não necessariamente linear, tal que $||f(x)|| = ||x||$ para todo $x \in E$ é chamada de *isometria*. Um operador linear $T : E \longrightarrow F$ que é uma isometria é chamado de *isometria linear*.

Definição B.4.4. Um isomorfismo que é também uma isometria é chamado de *isomorfismo isométrico*, e nesse caso dizemos que os espaços são *isomorfos isometricamente*.

Teorema B.4.1. *Seja* E *um espaço normado.*

(a) Se $x_n \rightharpoonup x$ *em* E*, então a sequência* $(||x_n||)_{n=1}^{\infty}$ *é limitada e* $||x|| \leq \liminf_{n\to\infty} ||x_n||$.

(b) Se $x_n \rightharpoonup x$ *em* E *e* $\varphi_n \to \varphi$ *em* E'*, então* $\varphi_n(x_n) \to \varphi(x)$ *em* $\mathbb{K}$.

Demonstração. Ver [3, Proposição 6.2.4]. □

Definição B.4.5. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no espaço de Banach E é chamada de *base de Schauder* de E se cada $x \in E$ tem uma representação única sob a forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n,$$

onde $a_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A unicidade da representação permite considerar os funcionais lineares

$$x_n^* : E \longleftrightarrow \mathbb{K}, \ \ x_n^* \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \right) = a_n,$$

que são chamados de *funcionais lineares coeficientes* (ou funcionais coordenadas ou ainda *funcionais biortogonais associados*).

Definição B.4.6. Seja E um espaço de Banach reflexivo e $A : E \to E'$ um operador (possivelmente não linear). Dizemos que A é estritamente monótono se

$$\langle Au - Av, u - v \rangle > 0, \quad \text{para todo } u, v \in E \text{ com } u \neq v.$$

Definição B.4.7. Seja E um espaço de Banach reflexivo e $A : E \to E'$ um operador (possivelmente não linear). Dizemos que A é coercivo se

$$\lim_{||u||_{1,N} \to \infty} \frac{\langle Au, u \rangle}{||u||_{1,N}} = \infty.$$

Bibliografia

[1] Arruda, Suellen; Nascimento, R. (2021). Existence and multiplicity of positive solutions for a singular system via sub-supersolution method and mountain pass theorem. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2021(26):1–20.

[2] Arruda, S. C. Q. and Figueiredo; Giovany de Jesus Malcher; Nascimento, R. G. (2021). Existence of positive solutions for a class of singular and quasilinear elliptic problems with critical exponential growth. *Annales Fennici Mathematici*, 46:395–420.

[3] Botelho, Geraldo; Pellegrino, D. T. E. (2015). *Fundamentos de análise funcional*. SBM.

[4] Brezis, Haim; Brézis, H. (2011). *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, volume 2. Springer.

[5] Callegari, A; Nachman, A. (1978). Some singular, nonlinear differential equations arising in boundary layer theory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 64(1):96–105.

[6] Cherfils, Laurence; Il'Yasov, Y. (2005). On the stationary solutions of generalized reaction diffusion equations with p&q-laplacian. *Commun. Pure Appl. Anal*, 4(1):9–22.

[7] Corrêa, FJSA; Corrêa, A. F. G. M. (2014). Existence of positive solution for a singular system involving general quasilinear operators. *Differ. Equ. Appl*, 6(4):481–494.

[8] Furtado, M. (2023). *Notas de aula de EDP2*. Universidade de Brasília.

[9] Gilbarg, David; Trudinger, N. S. (1988). *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer.

[10] He, Chengjun; Li, G. (2008). The regularity of weak solutions to nonlinear scalar field elliptic equations containing p&q-laplacians. *Annales Fennici Mathematici*, 33(2):337–371.

[11] Kavian, O. (1978). *Inégalité de Hardy-Sobolev et application*. PhD thesis.

[12] Kavian, O. (1993). *Introduction à la théorie des points critiques: et applications aux problèmes elliptiques*. Springer.

[13] Kesavan, S. (1989). *Topics in functional analysis and applications*. Wiley.

[14] Kesavan, S. et al. (2004). *Nonlinear functional analysis: a first course*. Springer.

[15] Lieb, Elliott H; Loss, M. (2001). *Analysis*, volume 14. American Mathematical Soc.

[16] Moser, J. (1971). A sharp form of an inequality by n. trudinger. *Indiana University Mathematics Journal*, 20(11):1077–1092.

[17] Nachman, A; Callegari, A. (1980). A nonlinear singular boundary value problem in the theory of pseudoplastic fluids. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 38(2):275–281.

[18] Sakaguchi, S. (1987). Concavity properties of solutions to some degenerate quasilinear elliptic dirichlet problems. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, 14(3):403–421.

[19] Trudinger, N. S. (1967). On imbeddings into orlicz spaces and some applications. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 17(5):473–483.

[20] Wu, Mingzhu; Yang, Z. (2009). A class of–laplacian type equation with potentials eigenvalue problem in. *Boundary Value Problems*, 2009:1–19.