



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS HUMANAS  
DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA

Emanuel Paiva

**O PROBLEMA DO CONTÍNUO:**  
**Considerações lógico-metafísicas acerca do conceito de infinito**

Brasília/DF

2024

# **O PROBLEMA DO CONTÍNUO:**

Considerações lógico-metafísicas acerca do conceito de infinito

Emanuel Paiva

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa Pós-Graduação em Filosofia (PPG-Fil), da Universidade de Brasília como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Filosofia.

Orientador: Rodrigo Freire

Brasília/DF

2024

# Agradecimentos

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro através de bolsa de estudos e também ao Departamento de Filosofia pela oportunidade de pesquisa. Por último, e mais importante, agradeço aos meus entes queridos, que me auxiliaram nos momentos mais difíceis, em especial aos meus amados pais: Erivaldo e Vera.

## Resumo

Esta dissertação propõe considerações acerca do conceito de infinito em seus aspectos formal e ontológico. Consiste em apresentar os pontos fundamentais da pesquisa metafísica que constituem uma abordagem *qualitativa* dos conceitos de infinito. Nosso enfoque será na análise das relações estruturais entre extensões discretas e contínuas, procurando reinterpretar a teoria das quantidades sob o ponto de vista qualitativo.

**Palavras-chave:** Infinito; Continuidade; Qualitativo; Quantitativo; Ontologia.

## **Abstract**

This dissertation proposes considerations about the concept of infinity in its formal and ontological aspects. It aims to present the fundamental points of metaphysical research that constitute a qualitative approach to the concepts of infinity. Our focus will be on analyzing the structural relationships between discrete and continuous extensions, seeking to reinterpret the theory of quantities from a qualitative perspective.

**Keywords:** Infinite; Continuity; Qualitative; Quantitative; Ontology.

# Lista de símbolos

$\leq$  — Menor ou igual

$\geq$  — Maior ou igual

$<$  — Menor que

$>$  — Maior que

$\in$  — Pertencimento

$\notin$  — Não pertence

$\subset$  — Está contido

$\subseteq$  — Está contido ou é igual

$\mathbb{N}$  — Conjunto dos Números Naturais

$\mathbb{Z}$  — Conjunto dos Números Inteiros

$\mathbb{Q}$  — Conjunto dos Números Racionais

$\mathbb{R}$  — Conjunto dos Números Reais

$\mathbb{R}^n$  — Espaço  $n$  dimensional com entradas reais.

$\mathcal{F}(X; Y)$  — Conjunto das funções de  $X$  em  $Y$ .

$\emptyset$  — Conjunto Vazio

$\{x_n\}$  — Sequência de  $n$  elementos

$\sum_{i=a}^b$  — Somatório

$\prod_{i=a}^b$  — Produtório

$\bigcup_{i=1}^n$  — União finita

$\bigcap_{i=1}^n$  — Interseção finita

$\bigcup_{x \in S}$  — União arbitrária

$\bigcap_{x \in S}$  — Interseção arbitrária

$\forall$  — Universal

$\exists$  — Existencial

# Sumário

|     |                                                 |    |
|-----|-------------------------------------------------|----|
| 1   | INTRODUÇÃO . . . . .                            | 1  |
| 2   | CAPÍTULO I - O CONCEITO . . . . .               | 5  |
| 2.1 | DUAS FORMAS DO INFINITO . . . . .               | 5  |
| 2.2 | DUAS FORMAS DA QUANTIDADE . . . . .             | 13 |
| 2.3 | A ARITMETIZAÇÃO DA MATEMÁTICA . . . . .         | 24 |
| 3   | CAPÍTULO II - ESCOPO E MÉTODO . . . . .         | 34 |
| 3.1 | AS FORMAS DA QUANTIFICAÇÃO . . . . .            | 34 |
| 3.2 | TÉCNICAS DE QUANTIFICAÇÃO . . . . .             | 38 |
| 4   | CAPÍTULO III - A TEORIA . . . . .               | 53 |
| 4.1 | O AXIOMA DA ESCOLHA . . . . .                   | 53 |
| 4.2 | A DISSENSÃO . . . . .                           | 58 |
| 4.3 | O PROBLEMA DAS QUANTIDADES REVISITADO . . . . . | 63 |
| 5   | CONCLUSÃO . . . . .                             | 67 |
| 6   | BIBLIOGRAFIA . . . . .                          | 69 |
| 7   | APÊNDICE . . . . .                              | 71 |

# 1 Introdução

Veremos no presente trabalho que a ideia de infinito não é um conceito que surge da manipulação sintática dos símbolos no interior das teorias formais. Parafraseando algo dito por Gauss: a viabilidade de nossos conceitos é extraída de noções e não de notações. Há dois motivos principais para defendermos esse ponto de vista. O primeiro, de caráter histórico, assume uma precedência cronológica. O segundo apoia-se na discussão conceitual e filosófica de nossas intuições sobre a infinidade. Nessa abordagem, assume-se a precedência do caráter onto-epistemológico, tendo surgido primeiramente nos campos de discussão e elaboração da filosofia e da teologia, tendo recebido tratamento matemático apenas tardiamente.

Dado o escopo e o método investigativo presente nas suas áreas originárias, as primeiras intuições são devedoras de um conceito espaço-temporal da infinidade. Antes mesmo de qualquer elaboração técnica formal, uma imagem mental é induzida, mais ou menos balizada por uma intuição primeira (fenomenológica). É nesses *fenômenos* que embasamos o fundamento qualitativo de nossa pesquisa sobre as quantidades e, conseqüentemente, sobre a ideia de infinidade. Consideramos incontornável a maior proximidade de nosso entendimento às elaborações fenomenológicas do que às rígidas definições e teoremas das ciências formais.

Para isso, fazemos uma separação conceitual prévia, dividindo a discussão sobre a infinidade em dois aspectos principais: o aspecto *quantitativo* e o aspecto *qualitativo*. Antes que se possa fazer qualquer julgamento precoce sobre o que se entende por cada um dos adjetivos, vamos nós mesmos oferecer uma definição de escopo para cada um dos aspectos que invocamos aqui. É importante salientar que tanto qualidade quanto quantidade são conceitos amplamente usados na história da filosofia e, portanto, seus significados são carregados conceitualmente, suportando formas diversas de interpretação dessa dicotomia. Sem nos pretender a defesa de um dos conceitos já existentes de maneira específica, tentaremos erigir uma definição de escopo que seja própria ao nosso gosto e objetivo, buscando dialogar com essas definições anteriores de forma a articular suas características mais fundamentais.

Definir precisamente o escopo da quantidade em oposição à qualidade não é uma tarefa simples. Portanto, vamos oferecer discussões tão precisas quanto possível para a realidade de nosso trabalho, tendo em mente, no entanto, que uma definição rígida de um conceito filosófico seja improvável, demandando esforço dificultoso, exigindo amadurecimento existencial e intelectual. O que, na melhor das hipóteses, chega tardiamente.

A qualidade manifesta as atribuições, o caráter, a natureza e os aspectos distintivos



de um dado objeto a que se refere<sup>1</sup>. Assim, mesmo uma discussão qualitativa não lança mão de uma teoria quantitativa mínima, sem a qual não se poderia falar em gradações. No entanto, concebe-se a qualidade com um sabor metafísico característico, que diz respeito ao teor ôntico de um objeto. Dividimos ainda, juntamente com uma parte significativa da tradição filosófica, dois aspectos fundamentais de um objeto: o *obiectum quod*, que se refere ao objeto conhecido; e o *obiectum quo*, sua contraparte conceitual, isto é, o objeto pelo qual o intelecto conhece.

Todo esse processo de adquirir conceitos e definir o significado dos termos faz parte do primeiro ato do intelecto, conhecido como apreensão simples. A apreensão simples é o conhecimento inicial ou a “captura” de um objeto. Em um ato de apreensão simples, “nossa mente apenas apreende uma coisa sem afirmar ou negar nada sobre ela”. Quando você vê uma maçã, por exemplo, sua mente é capaz de derivar de suas impressões sensoriais os conceitos de “maçã”, “vermelho”, “redondo”, etc. Esse apreender de conceitos é o que se entende por apreensão simples. A apreensão simples é a obtenção da essência ou “quididade” de algo, que pode ser expressa em um termo, e este é o objetivo do primeiro ato do intelecto: definir um termo. (Sullivan, 2013, p.4)

Dizemos de uma referência qualitativa ou intuitiva de um objeto, a fixação de um *obiectum quo*, seja total ou parcial. Com total, queremos dizer que há uma fixação completa de um objeto, ou pelo menos muito próxima da completude de um objeto. Tendo em mente que nossas capacidades epistemológicas não envolvem a onisciência, a fixação de um objeto no intelecto é sempre idealizada, portanto, relacionada à imagem mais ou menos completa de suas atribuições. Em linhas gerais, o aspecto mais valioso para a intuição de um objeto é a sua intuição espaço-temporal, que está relacionada diretamente a um tipo específico de limitação: geométrica e circunstancial. Quanto mais conseguimos *determinar* as características de um dado objeto em relação a uma qualidade específica, tanto mais teremos uma imagem completa dele.

Há objetos, no entanto, cuja determinação torna-se dificultosa, seja por sua abstração, seja por sua grandiosidade em relação a alguma ou muitas qualidades. O infinito é um e o mais radical dessa classe de objetos. Podemos conceber a infinidade como um atributo que se aplica a uma determinada qualidade, ou como algo em si mesmo. Por exemplo, um dado objeto pode ser infinito em extensão, infinitamente quente. Se por outro lado concebemos o infinito como algo em si, ele se mostrará ainda mais problemático. Se concordamos que o conhecimento de um objeto é proporcional à capacidade de determinação de seus limites, sejam esses limites espaço-temporais ou de qualquer outra natureza, o infinito, por definição, se mostrará como uma espécie de saturação, visto que não há forma de limitação possível para qualquer de suas características. Se tratamos do

<sup>1</sup> Pretendemos que o caráter qualitativo de um objeto seja aproximado de uma noção fenomenológica. Sem nos comprometer com qualquer tradição específica de fenomenologia, mas apenas tomando essa palavra em sua concepção etimológica. O termo *fenômeno* tem origem grega, em sua língua materna, *φαινόμενον* significa algo próximo a "aquilo que vem à luz", ou "o que se mostra".

infinito puro. O fato é que quanto mais envolto em infinidade um objeto está, mais somos incapazes de determiná-lo como um objeto para nós (um fenômeno).

A aquisição de conceitos é fundamentalmente qualitativa, mesmo para um conceito puramente ideal, como o infinito. A qualidade de um objeto é sempre inerente à sua construção pelo intelecto humano, sem essa percepção, somos incapazes de conceber conceitos. Muito embora o matemático não possa ser uma exceção a essa regra, a matemática, enquanto área do conhecimento em si mesma, não articula intuições qualitativas de maneira direta. Ela tornou-se uma ciência cujo escopo direciona-se a uma outra tendência discursiva.

Agora vamos nos ater um pouco ao escopo da quantidade para aproximar uma definição. Importante destacar que, embora defendamos uma precedência do aspecto qualitativo sobre a noção de infinidade, a quantidade reivindica uma parte importante desse conceito. De acordo com o dicionário filosófico Cambridge:

**Magnitude**, extensão ou tamanho de algo em relação a algum atributo; tecnicamente, uma quantidade ou dimensão. Uma quantidade é um atributo que admite vários ou um número infinito de graus, em contraste com uma qualidade (por exemplo, triangularidade), que um objeto possui ou não possui. (Audi, 1999, p. 528)

Dessa maneira, a quantidade é sempre relativa a um atributo. É através dela que erigimos um grau de manifestação dele. Nesse sentido, o conceito de uma quantidade pura, ou de um infinito puro como quantidade, careceria de sentido primário, ou necessitaria de uma nova elaboração do problema. Corroboramos, dessa maneira, a precedência do aspecto qualitativo sobre o quantitativo.

Assim, vencemos um primeiro sentido no qual o conceito de infinito é ambíguo, pois, se tratado como uma quantidade, ele deve ser relativo a um atributo, variando seu significado e manifestação de acordo com a natureza do objeto ou do aspecto a que se aplica. Isso mostra que os sentidos de referência da infinidade podem variar em natureza, de maneira que não há um tratamento horizontal entre os diferentes tipos de infinito que podem surgir no escopo de nossas teorias infinitárias.

Esse problema, que diz respeito a uma pluralidade ontológica, é amplamente conhecido e disputado no campo da matemática. Essa ciência procurou, no decorrer de seu desenvolvimento, livrar-se das intuições qualitativas que persistiam nas elaborações teóricas de seus campos. Diferentemente da filosofia, que se desenvolve no cabrocado qualitativo, absorvendo o "inconveniente" do caráter fugidio de conceitos especulativos, a matemática esforça-se incansavelmente em abolir esse aspecto impreciso de sua linguagem.

A quantidade é, portanto, o grau de manifestação de um atributo, não sendo uma forma pura de tratamento do problema. Em seu sentido mais puro possível, uma quantidade pode ser tratada como um conglomerado de partes relacionadas por uma

totalidade da qual fazem parte. Assim, determinar uma quantidade exige a determinação ou de uma totalidade, ou de uma propriedade comum. Percebe-se, portanto, que nossa definição de quantidade tem um sabor extensional acentuado, pois ela será definida de acordo com a coleção dos elementos de uma certa pluralidade.

A Matemática e a Filosofia se desenvolveram em seus respectivos campos, ambas informando-se e valendo-se das intuições umas das outras. Usaremos a metafísica como paradigma conceitual do infinito, cuja concentração investigativa está no aspecto qualitativo do conceito, bem como a matemática estará a cargo do tensionamento quantitativo da ideia. Esperamos que o desenvolvimento do trabalho torne mais clara as contribuições e disputas que enriquecem a discussão do infinito e sua relação com o problema do contínuo.

Nosso esquema de abordagem se dividirá em três capítulos principais. No primeiro, definiremos conceitualmente o problema de nossa pesquisa, delimitando os fundamentos filosóficos da questão, isto é, as ideias de infinidade que trabalharemos no decorrer da investigação, bem como a ideia de quantidade e qualidade. Posteriormente, identificaremos os métodos e o escopo da pesquisa matemática sobre os mesmos conceitos e tópicos levantados na pesquisa metafísica do primeiro capítulo. Procurando mapear as diferenças de cada área e como se dão suas relações teóricas mais evidentes.

Na parte final, daremos uma primeira incursão na Teoria de Conjuntos, identificando como ela internaliza a questão de maneira técnica em seus fundamentos. Comentaremos dois axiomas centrais: Escolha e Determinação, concluindo o último capítulo com a ilustração do que seria o conhecido problema do contínuo, que inspira a pesquisa deste trabalho.

Por fim, faz-se necessária uma última observação terminológica. Há duas formas de entender o conceito de topologia relacionado à diferença metodológica do tratamento de cada quantidade. Interpretamos que o método de quantificação discreta, ou listagem, nos ilustra uma forma *linear* de organização e entendimento da quantidade, por oposição à medida, entendida intuitivamente e tecnicamente do ponto de vista *topológico*. A palavra "topologia" vem de *topos* que, no original, significa lugar. Gostaríamos de esclarecer que um significado possível para essa palavra toma conotação espacial em sentido técnico e terá a ver também com densidade e profundidade. Portanto, quando nos referimos à topologia, podemos ter em mente uma profundidade, em sentido dimensional e figurado. Assim, uma das diferenciações qualitativas, isto é, onto-epistemológicas, que fazemos entre as quantidades tem essa dupla significação. Daí a interpretação desejavelmente ambígua entre as ideias de linearidade e topologia. Essa poderá ser uma boa chave de leitura para compreender a problemática central do presente texto.

## 2 CAPÍTULO I - O CONCEITO

### 2.1 DUAS FORMAS DO INFINITO

Os pitagóricos ficaram conhecidos na história do pensamento ocidental por sua forte relação com a matemática. Seu interesse teórico por essa ciência não era apenas instrumental ou pragmático, mas, e sobretudo, metafísico. Essa escola talvez tenha sido a responsável por introduzir na cultura intelectual do ocidente um interesse mais acentuado pela filosofia da matemática como tema filosófico de primeira importância. Com o pitagorismo, passa-se a vislumbrar nos números não apenas uma nova forma da antiga *arché*, como também uma linguagem técnica que possibilitaria traduzir, num mesmo vocabulário, diferentes temas clássicos da cultura grega, a exemplo das proporções e relações musicais, arquitetura, metafísica e muitos dos elementos centrais de sua cosmologia.

Contemporaneously with these philosophers and before them, the Pythagoreans, as they are called, devoted themselves to mathematics; they were the first to advance this study, and having been brought up in it they thought its [25] principles were the principles of all things. Since of these principles numbers are by nature the first, and in numbers they seemed to see many resemblances to the things that exist and come into being — more than in fire and earth and water... (Metafísica, 985<sup>b</sup>20)

O conceito de número para os gregos, e em particular para os pitagóricos, desempenhava um papel ontológico central, não sendo, muitas vezes, apenas entidades abstratas, mas a própria matéria-prima da realidade. Para os pitagóricos, as coisas eram elas próprias números ou eram constituídas por eles, sua forma de enxergar a realidade circundante era aritmetizada. A palavra aritmética tem raiz grega e vem de *arithmos*, isto é, número, e relaciona-se com a técnica de contagem. Portanto, dizer que sua cosmologia é aritmetizada ilustra, numa expressão sintética, o fundamento ontológico que acabamos de atribuir a esse grupo filosófico e outros grupos que possuam uma concepção próxima a essa.

Não podemos, todavia, tomar o pitagorismo como um movimento de bloco, simplificando irresponsavelmente suas contradições internas e movimentos aberrantes, dados os diferentes estilos e pensadores que, desde a antiguidade, foram alocados sob essa mesma alcunha. Não obstante, a característica de uma proximidade com a matemática era predominante no pensamento dos diferentes autores integrantes dessa tradição. Mesmo o pitagorismo tendo se estendido ao longo dos séculos, chegando até a Idade Média, o Renascimento e a Modernidade, essa tônica se manteve como um fio condutor, ligando os diferentes momentos históricos. Nos importa aqui, sobretudo, a intuição pitagórica — ou sua interpretação aristotélica — que resta latente no imaginário ocidental, na qual os números são ferramentas poderosas para apreender verdades sobre o mundo que nos cerca.

Tal esforço teórico, na busca da construção de um arcabouço aritmético para a física, nos legou um entendimento cosmológico matematizado que se cristalizou no pensamento ocidental, sobretudo nas ciências naturais. Como fica claro no trecho da Metafísica, essa visão substitui as antigas formas da *arché* em favor da concepção de número. Sendo assim, a pesquisa pelo primeiro princípio da realidade se torna uma busca filosófica pela natureza aritmética do cosmos, na medida em que conhecer as propriedades e relações dos números se torna equivalente ao conhecimento da própria *physis*.

Embora Aristóteles estivesse criticando a visão aritmetizada dos pitagóricos e tratando toda a tradição como uma espécie de bloco teórico, há elementos teóricos fortes o suficiente para adotarmos uma visão balizada segundo a qual atribuímos essas características aos pitagóricos. Dado que há divergência teórica quanto a essa assunção, adotaremos a interpretação de Primavesi, segundo a qual:

We will conclude that Aristotle's statement according to which the Pythagoreans "were bringing forward the mathemata" does not just indicate that they introduced mathematics into philosophy, as Jonathan Barnes suggested, but that they achieved progress within the realm of the four mathemata, and thereby prepared the ground for their own philosophy according to which the principles of the mathematical disciplines are the principles of everything there is. (Primavesi, 2014, p.229)

Mas uma ressalva importante é feita logo em seguida sobre como devemos adotar tal interpretação acerca do pitagorismo.

Further more, the second half of the definite account, on the whole heaven being an attunement and number, is not prepared for by the preceding argument. One gets the impression that the version of the theory that is initially associated with the Pythagoreans' interest in the mathemata (as described in the introductory section 985b23-6) might not be quite the same as the version that Aristotle presents as the end-point of the development. (ibid. p.232)

Ou seja, estamos adotando a conclusão teórica aristotélica acerca das implicações do pensamento pitagórico para o desenvolvimento da intuição filosófica sobre o tema da aritmetização. Essa introdução foi importante para a história do pensamento ocidental e, mesmo que não possa ser tomada como um testemunho ao pé da letra, Primavesi nos defende na interpretação de um esforço historiográfico de Aristóteles, com o qual concordaremos. Isto é, concordamos com a interpretação segundo a qual a tradição pitagórica — ou a interpretação corrente sobre o pitagorismo — influenciou nossas teorias científicas. No próprio verbete sobre a matemática grega, podemos encontrar a seguinte descrição:

The Pythagoreans, who represented the height of early demonstrative Greek mathematics, believed that all scientific relations were measureable by natural numbers (1, 2, 3, etc.) or ratios of natural numbers, and thus

they assume discrete, atomic units for the measurement of space time, and motion. (Audi, 1999, p.681)

Além de uma intuição aritmetizada da natureza, os pitagóricos parecem nutrir, no interior do caráter aritmético de sua pesquisa, um gosto pelo fundamento e pela visão construtiva da matemática. Evidentemente, essa característica estava presente no esforço de investigação da *arché* desde Tales, mas os pitagóricos, ao atribuir um fundamento matemático à realidade, estenderam o caráter fundacional da pesquisa às relações aritméticas. Temos, portanto, a tese de que a índole fundacional da pesquisa cosmológica dos primeiros gregos passa à matemática pitagórica por via da aritmetização do cosmos.

Segundo o testemunho de Aristóteles, a filosofia pitagórica, para alguns de seus adeptos, pode ser representada na oposição entre dez contrários, três das quais nos são importantes: a oposição entre *limitado e ilimitado*, *unidade e pluralidade* e *repouso e movimento*<sup>1</sup>. Essas três oposições expressam as direções para o entendimento posterior do infinito como problema ontológico. Na forma como compreendemos e interpretamos a tradição, essas são as oposições-chave para discernir de maneira profunda as categorias do nosso pensamento que deram contorno intelectual às ideias de infinidade. No que diz respeito à geometria, as intuições são de limite e ilimitado, à metafísica, de unidade e pluralidade, e o movimento ou repouso pendem ao escopo da física. Para cada tipo de tema e oposição corresponde uma característica ou uma ideia da infinidade, muito embora todas as diferentes tendências estejam interligadas. Somente o amadurecimento e a análise do problema permitem um entendimento mais apurado das diferenças. O próprio Aristóteles nos traz uma análise de como interpretar a influência desse pensamento sobre a filosofia da posteridade:

But the object of our discussion is that we may learn from these philosophers also what they suppose to be the principles and how these fall under the causes we have named. Evidently, then, these thinkers also consider that number is the principle both as matter for things and as forming their modifications and states, and hold that the elements of number are the even and the odd, and of these the former is unlimited, and the latter limited; and the 1 proceeds from both of these (for it is both even and odd), and number from the 1; and the whole heaven, as has been said, is numbers. (Metafísica, 986<sup>a</sup>10)

A tensão entre os contrários, portanto, era característica da ontologia pitagórica e, como poderemos notar na posteridade, se configurou como herança do pensamento ocidental. Essa tensão entre o ilimitado e o limite será de especial importância para o problema do infinito e da continuidade.

O imaginário grego era amplamente influenciado pela figura alegórica da atribuição de uma forma à matéria. A arte era bastante desenvolvida e privilegiada na cultura grega,

---

<sup>1</sup> Cf. Metafísica 986a20-7.

e seu senso estético estava intimamente ligado à sua visão cosmológica. Os homens de cultura, de alto posto social, assim como eram muitos dos filósofos, cultivavam profunda admiração pelo trabalho do artesão. Em muitas oportunidades, a destreza técnica associada a essa profissão era descrita pela sua capacidade de trazer à tona o ideal estético através da atribuição de uma forma à matéria, como no caso em que se esculpe uma estátua em mármore ou em bronze. Esse paralelo traz elementos muito importantes para a cultura filosófica grega, sobretudo em suas implicações para a metafísica e, conseqüentemente, para a construção de suas opiniões sobre a infinidade.

O tensionamento entre ilimitado (*ápeiron*) e o limitado (*péras*) permeia toda a história da metafísica. Essa relação, descrita na forma da interação matéria-forma, será responsável por estabelecer o lugar de importância do limite para a cultura intelectual ocidental. Nesse contexto, o ilimitado é entendido como indeterminação, uma espécie de estado primordial no qual a matéria resta informe. A ideia grega da infinidade, portanto, nutre relação com a indeterminação, não só como estado anterior à forma, mas também como um continente da realidade, uma espécie de totalidade. Anaximandro foi quem primeiro explorou essa ideia do indeterminado como forma motriz criadora e sustentadora da realidade — também nos baseando nas intuições historiográficas de Aristóteles.

Esse sentido hiperbólico da infinidade como ilimitação que excede a quantificação no sentido de uma contagem ou medida constitui o cerne da noção *qualitativa* da infinidade. Essa noção condensa o polo não quantitativo do conceito. Entende-se o ilimitado como conceito em si mesmo, independente da relação com os graus de manifestação das qualificações de um objeto. Nessa interpretação, o próprio ilimitado (*apeiron*) é tomado como uma entidade, cuja caracterização é dada pela ilimitação absoluta ela mesma. A tendência dessa forma conceitual é distanciar-se do conceito aritmético de infinito, aproximando-se de uma noção onto-epistemológica da ilimitação em seu grau mais elevado. Essa entidade caracteriza-se pela infinidade quanto aos seus atributos, sendo espacialmente e temporalmente transcendente, precedente e ulterior, um continente da realidade em sentido forte. Um algo do qual não se pode pensar nada, nenhuma determinação em absoluto, pois, caso o fosse, seria limitado.

Diferentemente de outros pensadores da *arché*, cada um dos quais postulou o princípio do universo como sendo um entre os quatro elementos, Anaximandro vê, no infinito, uma nova possibilidade de fundamento. O *apeiron* não pode ser visto como um infinito quantitativo, mas qualitativo. Sua ideia de infinidade é literal com a definição do vocábulo, isto é, o infinito como ilimitado ou indeterminado. Ele deve ser entendido como a totalidade, não só como o continente da realidade, mas como o seu princípio, lugar no qual as coisas são e deixam de ser. O surgimento de um objeto é efetivado pelo processo paulatino de individuação de parte dessa totalidade, um crivo que faz surgir, a partir do indeterminado, todas as espécies de coisas de acordo com a sua natureza particular. A partir de um momento de desequilíbrio — entendido como uma (*adicia*) —,

o prevalecimento de um contrário sobre o outro gera uma diferenciação particularizada no estado primordial, dando origem a uma individualidade, e assim por diante. Por isso, a *arché* não poderia ser qualquer tipo, ela própria, de individualidade física, como no caso da eleição de um dos quatro elementos. Era preciso algo ontologicamente independente de qualquer contrariedade a nível natural (*physis*).

A engenhosidade conceitual de Anaximandro está em explorar, no *ápeiron*, as características que antes o fariam marginal às ontologias. No que se refere ao problema da forma, essa representação ultrapassa a simetria ontológica das entidades cujas características tornam as relações simétricas e horizontais, dando a esse novo elemento a capacidade de escapar às dificuldades anteriores; além disso, o *ápeiron* é ilimitado não apenas como objeto do intelecto, mas, antes disso, no tempo e no espaço, ou melhor, fora de ambos como continente desses, o que lhe confere as atribuições ontológicas ideais para eleição à forma subjacente à *physis*: a indestrutibilidade e a eternidade, de onde emana e para onde retorna a natureza em fluxo.

Anaximandro disse que o "Infinito" era o único responsável pelo vir a ser e pelo passar do universo. Anaximandro afirma que os diversos céus foram gerados a partir desse Infinito, assim como, de forma mais geral, todos os mundos, que são infinitos em número. Ele declarou que o passar e (muito antes) o vir a ser ocorrem à medida que todos repetem um ciclo desde o tempo infinito. (Pseudo Plutarco, fr. 172, 2)

Anaximandro capta, na indeterminação, o assombro face à **totalidade** do mundo, o *apeiron* se desenvolve justamente nessa ideia, deve ser interpretado não como um infinito pelo acréscimo iterado de partes, mas como a grandiosidade que extrapola a determinação objetual, cuja natureza não pode ser resumida a uma forma — uma figura — do intelecto. A maneira de apreendê-lo é efetivada como a expressão da própria indeterminação. Como na literatura especializada, às vezes entendido como ilimitado no sentido literal, mas às vezes tendendo à interpretação de *inexperenciado*. Essa característica etimológica do *apeiron* nos mostra a especialidade do *obiectum quo* presente na intuição qualitativa do infinito.

Embora a qualidade tenda a ser entendida como um processo de atribuição de um objeto na tentativa de determiná-lo, essa questão torna-se paradoxal no âmbito do *apeiron*. Enquanto designar qualidades de um objeto qualquer o individualiza por determinação, a indeterminação qualitativa do *apeiron* é justamente o que define a característica qualitativa dessa entidade. Portanto, quando nos referimos ao aspecto qualitativo do infinito, estamos fazendo alusão a uma característica por si mesma indeterminada, ou melhor, à própria indeterminação como característica principal que qualifica a natureza do objeto em questão.

Essa caracterização do ilimitado é dada por sua **unicidade**, ou seja, enquanto todos os outros tipos de objetos são caracterizados por nossa capacidade de determinar suas características qualitativas, o *apeiron* é o único objeto cuja única característica possível



seja a própria indeterminação. Portanto, a menos das diferentes formas de nomear um infinito absoluto, todos eles correspondem a um mesmo e único objeto, evidentemente.

O processo de concepção da ideia de um ilimitado qualitativo em nossa mente é sofisticadamente ilustrado por Rucker em seu livro "Infinity and The Mind". Primeiro, usa-se o conceito de um absoluto, qualificação oportuna para entender a natureza ontológica do apeiron, ou do infinito qualitativo. Ele diz o seguinte em sua descrição:

There is a certain type of nonphysical entity that was not discussed in the last section. God, the Cosmos, the Mindscape, and the class V of all sets—all of these are versions of what philosophers call the Absolute. The word "Absolute" is used here in the sense of "non-relative, non-subjective." An Absolute exists by itself, and in the highest possible degree of completeness. (Rucker, 2005, p.44)

Em seguida, oferece um esquema mais ou menos preciso:

This is a dialectic process in the sense that the thetic component is one's instantaneous unconscious image of the Absolute, the antithetic component is the conscious formalization of this image, and the synthetic component is the formation of a new unconscious image of the Absolute that incorporates one's earlier images and the awareness that they are inadequate. (ibid., p.45)

E reescreve ainda uma forma indutiva de formulação do problema:

If we call the  $n$ th thought  $T_n$ , we can define  $T_n$  in two ways. On the one hand, we can use an inductive definition:  $T_0 = \emptyset$  and  $T_n + 1 = T_n \cup \{T_n\}$ , where for any sets A and B,  $A \cup B$  means the set of all the sets that are members of A or of B. On the other hand, we can use a different sort of inductive definition:  $T_n = \{T_m : m < n\}$ , which means " $T_n$  is the set of all  $T_m$  such that  $m$  is less than  $n$ ". (ibid.)

Rucker descreve precisamente como ocorre o processo de aquisição do conceito do ilimitado. Diferentemente da aquisição de outros conceitos, que correspondem à experiência empírica de um objeto ou não, esse ideal nos impõe uma forma especial de formação intelectual, não encontrada em nenhuma outra forma de aquisição, apenas do ilimitado em suas diferentes formas de manifestação. O que chamamos de transcendente em sentido ontológico tem a ver com o que foi chamado no conceito de absoluto como um "não-relativo". Essa forma de aproximação do conceito nos mostra como a intuição qualitativa do infinito passa à intuição quantitativa desse conceito.

Enquanto estaríamos em dificuldades para cunhar uma contraparte matemática do infinito qualitativo, ao entendê-lo como um absoluto, estamos mais próximos de aproximar as duas formas da infinidade. De fato, não parece natural forçar um conceito matemático do qualitativo para compreender a forma matemática do problema, sendo que, como vimos, essa interpretação reconstitui uma intuição fenomenológica, cujo conteúdo semântico

remonta a um *obiectum quod*. Muito embora essa terminologia pudesse ser adaptada para o contexto formal, entender o qualitativo em termos de absolutidade nos conecta quase que diretamente à relação entre ontologia e matemática via teoria de conjuntos, como já feito por Rucker.

A descrição indutiva do processo que ocorre na mente nos oferece uma forma de passagem da qualidade para a quantidade de uma forma natural. Enquanto no primeiro sentido usam-se conceitos como os de imagem, formação, incorpóreo e físico, a segunda define o problema numa linguagem conjuntista e, portanto, livre de intuições geométricas ou empíricas — ao menos discursivamente. O conceito talvez problemático que ainda pudesse reconstituir uma intuição empírica seja o de um pensamento que, contudo, pode suportar uma definição de natureza conjuntista ainda assim.

A definição de Rucker nos traz à memória a forma padrão de definição de um conjunto infinito na contemporânea teoria de conjuntos, quando exigimos a existência de um menor conjunto indutivo. O axioma do infinito nada mais é que o comprometimento ontológico com uma pluralidade absoluta, na qual não podemos identificar um limite. Sempre que incorporamos à nossa intuição um número finito arbitrariamente grande, devemos articular essa concepção em nossa "componente sintética" estando cientes de que ela não esgota a totalidade dessa pluralidade.

Não é difícil perceber como esse processo imaginativo está na base conceitual do infinito quantitativo na matemática. Essa noção recupera o fundamento empírico dos processos aritméticos e reconecta a noção quantitativa à qualitativa, embora o discurso de ambas as áreas tenha se distanciado ao longo do tempo. Ainda na Grécia, podemos identificar o uso dessa intuição nos mais clássicos problemas matemáticos. Os raciocínios envolvidos nas demonstrações geométricas nos revelam essa herança. O problema da quadratura do círculo, embora não faça uso do infinito como conceito formal, guarda uma intuição infinitária como aquela descrita pelo esquema de Rucker.

O processo de encontrar a quadratura de uma figura geométrica tem a ver com a determinação de sua área. O procedimento envolve encontrar um polígono retilíneo que possua uma área igual à da figura escolhida. Imagine um polígono retilíneo cuja quantidade de lados é arbitrariamente grande, de forma que se assemelhe a um círculo. Para cada segmento que forma um lado do polígono, vamos atribuir um triângulo formado por esse lado e os pseudo-raios que seguem de suas extremidades até o centro do polígono. Se permitirmos uma intuição na qual tal polígono é formado por infinitos triângulos dessa maneira, então estamos aproximando a forma geométrica de um círculo. Reproduzir esse processo, iniciando por um quadrado e inscrito num círculo e inscrevendo outros polígonos regulares de  $2^n$  lados, de maneira sucessiva, nos dá a quadratura de um círculo.

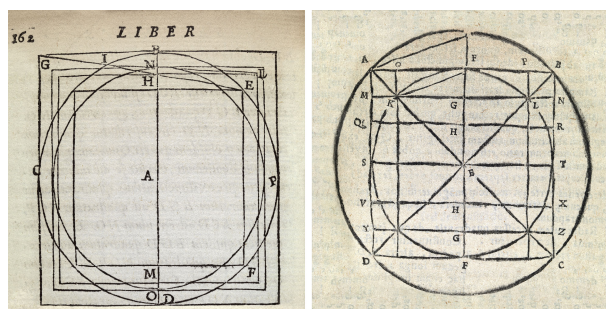


Figura 1 – Diagramas sobre quadratura do círculo.

Embora os matemáticos gregos nutrissem certa repulsa pelo conceito de infinito atual, suas estratégias heurísticas envolviam intuições infinitárias e mecânicas, reconstituindo a herança empírica dessas elaborações formais.

Ao fim desse primeiro movimento argumentativo e histórico, identificamos ao menos duas formas do infinito, aquela em que ele é considerado em si mesmo como *substância*, e aquela que é considerada como *atributo*, seja de uma substância terceira, seja de um processo.

Aristóteles é o responsável por identificar essa distinção entre tipos diferentes de infinitos. Diferentemente de Anaximandro, que considerava o apeiron como uma entidade existente por si mesma, completa e transcendente, a filosofia aristotélica nega o caráter transcendente da questão e considera a existência como um problema de caráter espaço-temporal. Dessa forma, a pergunta pelo caráter ontológico do infinito, para Aristóteles, dirigia-se a uma questão de caráter material, isto é, existência na *Physis*. Portanto, o conceito de infinito se distancia do apeiron de Anaximandro e tende a aproximar-se de um conceito extensional. Sua pergunta pode ser entendida da seguinte forma: há ou não uma extensão infinita e atual no mundo? Sabemos que a resposta de Aristóteles para essa pergunta é negativa, e que apenas os processos, ou a ideia de um infinito potencial, eram aceitas por ele.

Moore, em seu livro "The Infinite" atribui a essa definição aristotélica a gênese da noção realmente matemática da infinidade:

This is highly significant. Here, arguably, was the first explicit characterization of the mathematically infinite — the point at which the mathematically infinite was first clearly registered in Greek consciousness. It is not that there had been no earlier thinkers who had referred to, or alluded to, the mathematically infinite. Zeno is an obvious example; and Anaxagoras had said that, however small anything was, there was something else still smaller, and however big anything was, there was something else still bigger. But nobody else, arguably, had singled the mathematically infinite out and got it into quite such sharp focus as Aristotle. His naturalism had provided him with the perfect forum to do this. Indeed, as we shall see, he was at pains to bring the mathematical conception of the infinite to the fore as the only true conception. He rejected earlier more metaphysical conceptions as being fundamentally

Bom, de fato, há fortes indícios de que Moore identificou na forma aristotélica da esquematização do problema do infinito a herança matemática da modernidade e da contemporaneidade. Não podemos negar que essa seja uma constatação de força argumentativa. Em geral, parece que a forma do tratamento matemático da questão seguiu o curso argumentativo e metafísico aristotélico, sobretudo por seu domínio da cultura intelectual na Idade Média e no Renascimento. Em todo caso, sua posição não parece indiscutível. Em todo caso, a definição aristotélica ainda se configura como uma elaboração de caráter propriamente físico. Para propósitos mais rigorosos, a definição matemática da infinidade só viria muito tempo depois, no fim da modernidade ou, para aqueles mais críticos, apenas com Cantor.

A confusão entre o escopo teórico da física e da matemática de fato pode ser entendida no contexto da filosofia clássica, visto que não havia uma separação mais radical entre os conceitos da mecânica e da matemática nas discussões conceituais sobre o infinito. Podemos até estar soando anacrônicos ao exigir que uma definição grega realmente matemática do problema não pudesse valer-se de conceitos mecânicos para definir o infinito. Não obstante, é importante salientar que a escolha de Moore ao tratar a definição como uma "caracterização explícita do infinito matemático" possa gerar um inconveniente conceitual para os propósitos de nosso trabalho.

E nossa interpretação, embora Aristóteles aproxime um conceito matemático das formas do infinito, o entendimento matemático, em sentido contemporâneo da questão, só vem a posteriori, com a teoria de conjuntos. É claro que Moore estava totalmente ciente do que acabamos de abordar, tendo sido um importante historiador da matemática, sobretudo da teoria de conjuntos. Apesar de nossa discordância terminológica, concordamos com ele que Aristóteles foi o primeiro a modelar o discurso sobre o infinito que ficaria cristalizado na tradição intelectual da posteridade, dominando o campo de discussão. Seu esquema conceitual é a base para todas as discussões clássicas sobre a infinidade e as visões vencedoras são grandemente devedoras de sua formulação inovadora.

## 2.2 DUAS FORMAS DA QUANTIDADE

A principal discussão sobre *quantidade* com a qual dialogaremos está na teoria aristotélica das categorias. Segundo a tradição, há ao menos três aspectos nos quais essa teoria pode ser considerada: um nível *ontológico*, um *lógico* e outro *linguístico-gramatical*. Segundo Bento Santos, tradutor da *Isagoge* para o português, a interpretação dos textos nos leva à dedução precisa de que o teor das categorias é primariamente ontológico, e, posteriormente, lógico; o primeiro tendo como escopo o ser, o segundo tratando de

suas predicacões. Essa separação se adequa oportunamente à forma do nosso problema. Gostaríamos de investigar o infinito como substância e como atributo, posteriormente identificando as possíveis formas de interpretação do problema na Matemática e na Filosofia.

Mas a teoria aristotélica da quantidade não separa as quantidades em finitas ou infinitas. Devemos investigar como a infinidade pode ser acoplada ao seu contexto teórico. Podemos entender a teoria das categorias como propriamente aristotélica ou como uma teoria filosófica geral. Se a tratamos como uma teoria propriamente aristotélica, então devemos tratar a categoria da quantidade exegeticamente, de acordo com o texto aristotélico. Se, por outro lado, a tratamos como uma teoria geral, então podemos ou não adotar as mesmas categorias que Aristóteles e, além disso, podemos ou não aceitar as definições para cada categoria proposta. Em alguns contextos, usaremos a definição aristotélica de maneira direta, em outros, adequando-a à nossa própria visão de cada conceito, procurando esclarecer contextualmente ou diretamente cada tipo de uso aplicado no decorrer do presente trabalho. Teremos em mente as duas formas de tratamento das categorias: tanto como algo propriamente aristotélico, como uma teoria que posteriormente se torna um campo de pesquisa geral da filosofia, sobretudo da metafísica; e entraremos em diálogo com a exegese do texto aristotélico, bem como tentaremos adequar cada definição àquilo que consideramos ideal.

Ao definir e analisar a categoria da *quantidade*, separamos a teoria aristotélica em dois momentos conceituais distintos. Aristóteles aborda essa categoria em dois textos, cada um a seu próprio modo. O primeiro, as *Categorias*, apresenta um sabor geométrico, o outro, a *Metafísica*, nos oferece um tipo definicional onto-epistemológico. Junto a isso, precisamos ter em mente o fato de haver um hiato temporal entre a escrita desses textos, a *Metafísica* sendo mais tardia e, portanto, madura, no contexto cronológico de seu pensamento. A primeira forma da definição é dada da seguinte maneira:

Of quantities some are discrete, others continuous; and some are composed of parts which have position in relation to one another, others are not composed of parts which have position. Discrete are number and language; continuous are lines, surfaces, bodies, and also, besides these, time and place. (Aristóteles, *Categorias*, 4b20)

As noções primárias da continuidade são a linha, a superfície e o sólido. Mas há uma atribuição secundária, que corresponde aos conceitos de tempo e espaço. Essa relação posterior, sobretudo com o tempo, nos interessa analisar. Esse conceito aproximará as formas da quantidade ao ser entendido também como um número. Embora seja considerado nas categorias como uma quantidade discreta, em sua Física, Aristóteles tratará o tempo como uma ideia aplicada de número:

For time is just this — number of motion in respect of ‘before’ and ‘after’. Hence time is not movement, but only movement in so far as it admits of

enumeration. An indication of this: we discriminate the more or the less by number, but more or less movement by time. Time then is a kind of number. (Number, we must note, is used in two ways—both of what is counted or countable and also of that with which we count. Time, then, is what is counted, not that with which we count: these are different kinds of thing.) (Física, 219<sup>1</sup>)

Embora conceda a conceitualização dupla sobre a ideia de número, diferenciando uma forma "pura" e outra "aplicada", e atribuindo o tempo à segunda, ainda podemos identificar um impasse profundo na divisão aristotélica das quantidades. A relação problemática na elaboração estará no fato de classificar tempo e número em gêneros distintos não subordinados. Esse problema embaraça nosso entendimento de onde está a separação entre quantidades discretas e contínuas, dado que os números são das primeiras e o tempo seria naturalmente das segundas. Mas Studmann, em seu artigo "Aristotle's Category of Quantity", propõe a seguinte resolução:

Hence, time has a dual aspect with respect to its continuity. Although it is a kind of number and so is intrinsically discrete, because its underlying subject is continuous, it also shares in continuity. Hence, even though time and number appear in non-subordinate genera in the Categories, time can still be thought of as a kind of number. Put another way, one can think of time not so much as a number but as the numbering of something, namely motion. This in turn reduces the puzzlement as to how something by nature discrete (the number-series) can characterize something continuous — after all continuous quantities can be measured using discrete measures (and the enumerations thereof) plus fractions. (Studmann, 2004, p.74)

Mas Studmann não oferece, em primeiro momento, qualquer resolução positiva ao problema identificado, a não ser a redução do problema ao estabelecimento de uma relação entre os diferentes tipos da quantidade. Não obstante, essa questão não pode permanecer obscura para os propósitos de nossa investigação, e pensamos ter um bom argumento para explicar a relação vista por Aristóteles<sup>2</sup>. Studmann simplesmente deixa de lado as manifestações secundárias da quantidade para a questão relacional, como é o caso do tempo, do espaço e do discurso. Para ele, importa apenas investigar as noções primárias.

Para nós, entretanto, vale ressaltar que a relação entre grandezas discretas e contínuas se dá por meio da ideia aritmética de tempo. Embora não exploremos uma relação conceitual mais profunda, Aristóteles mostra que há ao menos um caminho aberto no qual homogeneizamos os tipos de grandeza, possibilitando que haja um processo no qual existam formas de contagem também para grandezas contínuas, embora sua natureza não seja captada pela discrição. É claro que essa possibilidade se configura como a mais intuitiva e natural para nós. Ela não diz respeito a uma proximidade por natureza, mas por método. Embora discrição e continuidade sejam diferentes, para nós, em natureza,

---

<sup>2</sup> Cf. Cap. 2.

nos deparamos inúmeras vezes com situações nas quais precisamos quantificar de maneira discreta sobre quantidades contínuas, como quando contamos os metros de um corpo extenso, as próprias horas, uma quantidade determinada de espaço e assim por diante.

Portanto, o que Aristóteles faz, nada mais é que identificar um caso específico e paradigmático no qual fazemos esse tipo de combinação teórica entre noções frontalmente diferentes. Num campo teórico, fazemos essa separação de maneira mais radical, todavia, em seu aspecto prático, estamos, por vezes, usando métodos análogos de quantificação tanto para um tipo de quantidade quanto para o outro.

Posteriormente, algumas observações feitas em relação à natureza dos números parecem sugerir um teor aritmético às grandezas discretas, se tomarmos os números como um paradigma mais ou menos ajustado para esse tipo de quantidade.

Discrete are number and language; continuous are lines, surfaces, bodies, and also, besides these, time and place. For the parts of a number have no common boundary at which they join together. For example, if five is a part of ten the two fives do not join together at any common boundary but are separate; nor do the three and the seven join together at any common boundary. Nor could you ever in [30] the case of a number find a common boundary of its parts, but they are always separate. Hence number is one of the discrete quantities. (Aristóteles, *Categorias*, 4b25)

Evidentemente, Aristóteles não poderia ter em mente o conceito de número real, dado o desenvolvimento da matemática na antiguidade clássica, muito embora os conceitos de continuidade e discrição já estivessem conceitualmente maduros. A continuidade é dada nos termos do limite, tomando duas partes de uma grandeza contínua, enxergamos uma convergência de limites numa espécie de ligação entre essas partes da extensão analisada.<sup>3</sup> Já no caso da discrição, não podemos identificar tal característica, o que mostra a convergência da definição categórica aristotélica com a visão contemporânea da quantidade em sua concepção bipartite.

A diferença entre as quantidades, portanto, é definida segundo a disposição das suas partes<sup>4</sup>. Na continuidade, os componentes estão relacionados por posições, as partes da grandeza discreta, ainda assim, corresponderão, no melhor caso, a uma ordem. Cada parte do contínuo pode ser identificada na sua relação com o todo, de forma que "... cada uma, indiscutivelmente, tem que estar situada em algum lugar e cada uma pode ser claramente distinguida" (*Categorias*, 5<sup>a</sup>15). É nisto que Aristóteles centraliza parte da diferença fundamental entre as quantidades. Como exemplo, embora não se possa falar dos números em termos posicionais, é adequado que se fale em uma ordem natural, assim como no tempo, segundo o próprio texto das *Categorias*: "Assim, no que respeita ao número, também é permitido dizer que as partes possuem uma ordem relativa, mas que com certeza não possuem posições." (*ibid*, 5<sup>a</sup>30).

---

<sup>3</sup> Cf. *Categorias*, 5a1-15.

<sup>4</sup> Cf. *Categorias* 5<sup>a</sup>15.

And in virtue of its form each thing is said to be qualified somehow. 'Rare' and 'dense' and 'rough' and 'smooth' might be thought to signify a qualification; they seem, however, to be foreign to the classification of qualifications. It seems rather to be a certain position of the parts that each of them reveals. (Aristóteles, *Categorias*, 10<sup>a</sup>15)

Na metafísica, recupera-se a discussão sobre a diferença entre discrição e continuidade. Aqui temos uma pista mais detalhada de como podemos entender o problema do ponto de vista ontológico e em sua relação com a limitação. Em primeiro lugar, diferencia-se o entendimento das extensões através da forma como são nomeadas, fazendo diferenciação entre uma pluralidade e uma grandeza. Depois, Aristóteles refere o problema a partir do aspecto da complexidade, delimitando as diferenças dimensionais para o que chama de grandezas e os de limitação dentro do contexto das pluralidades.

We call a quantity that which is divisible into two or more constituent parts of which each is by nature a one and a 'this'. A quantity is a plurality if it is numerable, a magnitude if it is measurable. We call a plurality that which is divisible potentially into non-continuous parts, a magnitude that which is divisible [10] into continuous parts; in magnitude, that which is continuous in one dimension is length, in two breadth, in three depth. Of these, limited plurality is number, limited length is a line, breadth a surface, depth a solid. (Aristóteles, *Metafísica* V, 1020a5)

Na concepção aristotélica, a qual adotaremos, a pluralidade é tratada como a quantidade discreta generalizada, enquanto a grandeza é sua contraparte contínua. É importante notar que, embora muito sutil, podemos pensar em uma interpretação mais radical da diferença de potencialidade entre os tipos de quantidades. Em outras palavras, uma grandeza nunca poderá se tornar uma pluralidade e vice-versa, sendo que a potencialidade de cada quantidade está limitada pela sua natureza quantitativa, ou seja, uma grandeza é sempre composta de grandezas enquanto uma pluralidade é sempre composta por partes indivisíveis. Isso implica que há, de fato, uma separação ontológica intrasponível entre as duas formas da quantidade. Quanto a isso, Aristóteles diz o seguinte:

Moreover, if that which is continuous is composed of points, these points must be either continuous or in contact with one another: and the same reasoning applies in the case of all indivisibles. Now for the reason given above they cannot be continuous; and one thing can be in contact with another only if whole is in contact with whole or part with part or part with whole. But since indivisibles have no parts, they must be in contact with one another as whole with whole. And if they are in contact with one another as whole with whole, they will not be continuous; for that which is continuous has distinct parts, and these parts into which it is divisible are different in this way, i.e. spatially separate. (Aristóteles, *Física* VI, 231<sup>a</sup>25)

Começa-se, aqui, a delimitar de maneira ontológica as diferenças fundamentais envolvidas no problema da relação entre discrição e continuidade. Formalmente falando,

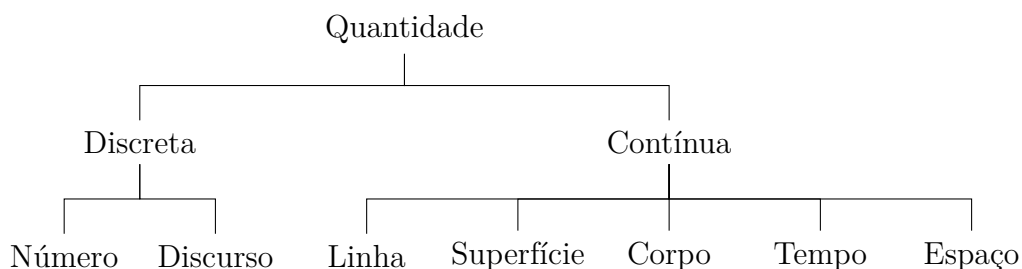


poderíamos diferenciar cada escopo determinando que a discrição relaciona-se com a intuição aritmética, onde cada parte é tomada como um conjunto cujas unidades são consideradas indivisíveis e sua dimensionalidade é desprezada. Por outro lado, a continuidade corresponde a uma intuição geométrica, cujas partes que a compõem são elas próprias contínuas. Quanto à primeira forma, quantificamos através do processo de contagem, enquanto a segunda corresponde à quantificação pela medida. Isto significa, em termos técnicos, que as pluralidades correspondem à quantificação cardinal, enquanto as extensões são quantificadas pela noção de medida. Porém, assim como no aspecto ontológico, essas duas formas da quantificação correspondem a um tipo determinado de grandeza, de forma que aplicá-las ao tipo não correspondente implicaria um erro metodológico.

Mas resta ainda uma questão central para concluirmos nossa investigação sobre a visão aristotélica acerca da quantidade. Resumimos nosso esforço a responder à pergunta: como unificar as definições oferecidas na Metafísica e nas Categorias? Seguiremos de perto o argumento oferecido por Studmann para concretizar essa relação. Em primeiro lugar, identifica-se, na estrutura geral argumentativa de Aristóteles, uma tendência em diferenciar sempre em duas frentes, uma positiva e outra pela privação. Espera-se, portanto, que esse padrão seja repetido com relação às formas da quantidade.

Como vimos anteriormente, na Metafísica, a noção de limite desempenha um papel fundamental na diferenciação das formas nas quais a quantidade se manifesta. Portanto, a diferença positiva é vista nos termos da limitação, como descrita na Metafísica V, 1020a5-15. Studmann argumenta que o esquema esperado para a definição da diferença seja detalhado da seguinte maneira:

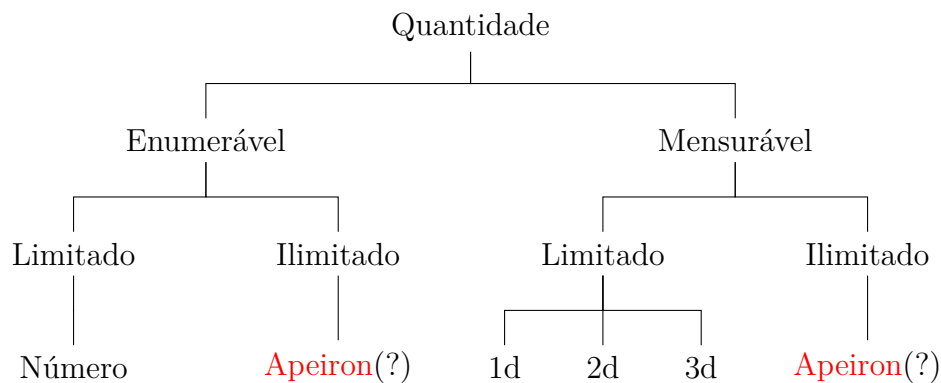
### *Categorias*



Devemos lembrar que o espaço e o tempo são adicionados posteriormente, como espécies de quantidades não básicas ou secundárias. Esse esquema corresponde à primeira divisão, presente no texto das Categorias. Sua contraparte Metafísica será dada

posteriormente, seguindo o escopo da limitação:

### *Metafísica*



Nas árvores ilustradas, esquematiza-se a diferença nos termos que havíamos mencionado anteriormente. Em seu aspecto positivo, estão os ramos que chamamos de "limitado" na *Metafísica*. Já nas *Categorias*, a diferença é dada de maneira direta e a bifurcação representa cada uma das quantidades e seus exemplos paradigmáticos. Por uma questão cronológica, o texto da *Metafísica* apresenta um amadurecimento em relação às ideias de Aristóteles e seu entendimento sobre a quantidade deve ter sido refinado com a passagem do tempo. Mas essa questão de diferenciação entre os conceitos é puramente especulativa, como aponta Studmann. Ao invés disso, será preciso um motivo filosófico para compreender melhor o que vem a ser a diferença de cada abordagem proposta por Aristóteles. Depois, há duas diferenciações, em um primeiro nível, diferencia-se entre as definições de quantidade nos diferentes textos; depois, investiga-se a relação discrição-enumerabilidade de um lado, e continuidade-mensurabilidade de outro.

Poderíamos aceitar o argumento especulativo para justificar que Aristóteles mantém a relação como delimitamos, isto é, discrição e enumerabilidade como formas equivalentes da quantidade; e analogamente para continuidade e mensurabilidade. De fato, defenderemos esse ponto de vista no presente trabalho. No que se refere ao contexto filosófico da questão, todavia, a diferenciação entre os tipos da quantidade, à luz do que já foi elucidado, deveria possuir uma contraparte negativa, isto é, como as quantidades se diferenciam pela privação; já que sua forma positiva está bem articulada nos textos.

Não obstante, Studmann nos mostra que essa definição não segue o padrão argumentativo aristotélico, não encontrando nos textos qualquer alusão ao aspecto negativo da diferença. O inconveniente de oferecer uma definição negativa da diferença entre continuidade e discrição está em aceitar uma quantidade indeterminada. Essa noção remontaria

a um equivalente do ilimitado (apeiron) em uma espécie de expressão quantitativa do conceito. Porém, como vimos anteriormente, Aristóteles nega, em sua física, a existência de um infinito atual, seja na física, seja como forma transcendente. Dessa maneira, a teoria quantificacional deve reduzir seu escopo, compreendendo toda quantidade como limitada, sem aderir a qualquer forma indeterminada de quantificação. Esse argumento é sintetizado por Studmann da seguinte maneira:

As it turns out, the answer to this question is not hard to determine. An unlimited quantity would be *ἄπειρον*, that is without limit. An unlimited quantity, though, would be an instance of the actual infinite whose possibility Aristotle denies. Quantities are for Aristotle implicitly denumerable, which infinities are not (Ph 206a12-20). Hence, both types of quantity admit of differentiation by 'limited' but do not admit of differentiation by the corresponding privative term. (Studmann, 2004, p.76)

O novo aspecto da questão que parece muito natural na análise de Studmann e que, entretanto, impacta fortemente nossa visão sobre a quantidade é que: embora Aristóteles separe as quantidades em discretas e contínuas, quanto ao seu aspecto onto-epistemológico, quantidades serão sempre "implicitamente enumeráveis". Essa asserção aparentemente inocente coloca em xeque nossa visão radical sobre a separação ontológica entre os tipos de quantidade, ou, no mínimo, reduz nossa capacidade intelectual, em última instância, a um aparato monocategorial.

O argumento torna-se, desse modo, mais forte, aproximamos a quantidade não só de uma noção finitária como de uma noção discreta. Levantaremos a hipótese de que essa é, na verdade, a interpretação mais plausível também para a noção contemporânea da quantidade. Muito embora façamos certa diferença entre a intuição geométrica e a intuição aritmética da quantidade, ao fim e ao cabo, resta uma intuição finitária e discreta.

Studmann, assim como nós, acredita que a chave para entender a relação entre as definições diferentes dadas por Aristóteles e a compreensão da verdadeira diferença entre as formas da quantidade está em outro aspecto de sua filosofia, o *hilemorfismo*. Não por acaso, o limite desempenha papel fundamental em ambas as noções descritas por ele na Metafísica.

Ademais, embora os principais textos relacionados sejam Categorias e Metafísica, sua Física tem papel importante na coesão da discussão das quantidades por sua centralidade no pensamento de Aristóteles. Embora os textos anteriores desempenhem função teórica indispensável, é na Física onde vemos as aplicações de seus conceitos, bem como a forma de desenvolvimento do pensamento teórico de Aristóteles em sua maneira aplicada. Essa relação será mediada pelo conceito de *extensão*<sup>5</sup> De acordo com a hipótese teórica de que a extensão desempenha papel central na subjacência das relações entre vários elementos

---

<sup>5</sup> Cf. Skolowski, 1970.

da filosofia aristotélica, está a ideia de que ela seja a *matéria das entidades matemáticas*, o composto tácito das *transformações elementais* e a explicação da *continuidade da matéria sensível*.

Todos os aspectos da extensão serão cruciais em nosso entendimento da herança aristotélica para o pensamento matemático da posteridade, sobretudo o contemporâneo. Se a extensão desempenha papel fundamental no todo de sua teoria, sobretudo no problema das quantidades e, ademais, nos oferece uma forma de interpretação do contexto matemático, em conformidade com as formas de transformação que podem estender-se ao contexto da passagem ontológica entre as quantidades; por último, tangendo ao problema da continuidade da matéria sensível, não podemos deixar de investigar profundamente como esse conceito nos trará elucidação sobre o problema, seja no contexto do pensamento de Aristóteles, seja em suas valiosas intuições para o problema geral do presente trabalho.

A intrincada missão de erigir um conceito de extensão nos tomará alguns parágrafos, mas tornará ainda mais clara a definição e o escopo da quantidade que será de extrema importância posteriormente. O argumento se apoia em duas principais passagens em que Aristóteles parece fazer alusão a uma subjacência, à matéria informe que precede o processo de determinação. Como devemos lembrar, o hilemorfismo está baseado na atribuição de uma forma a uma porção de matéria. Em todo caso, que tipo de entidade resta quando retiramos as atribuições qualitativas? Essa pergunta é conhecida na literatura aristotélica como o problema da "matéria-prima". Ela é definida como a matéria cujo suporte dos atributos é accidental, a qual, ainda assim, não pode ser resumida a nenhum deles.

But when length and breadth and depth have been removed, we do not see anything left over, unless there is something which is bounded by these ... Consequently, this last thing is in itself neither a this nor a quantity nor any of the others. (Aristóteles, Metafísica VII, 1029<sup>a</sup>15)

Embora Aristóteles não assuma nem mencione um comprometimento ontológico com um ilimitado, a matéria-prima cumpre o papel metafísico da subjacência, uma das atribuições do apeiron; na matéria-prima não estão determinadas qualidades especiais ou extensões determinadas. Assim como no apeiron, ela cumpre o papel da sustentação como substrato ontológico da realidade. Mas esse conceito envolve uma segunda característica, embora seja livre da determinação dimensional, envolve a existência de uma extensionalidade. Substitui-se então o conceito espacial da dimensionalidade como expressão da determinação pela forma ao conceito de extensão. Essa matéria possui, dessa maneira, uma capacidade extensional que a propicia receber a determinação dimensional à *posterior*.

If, then, we look at the question in this way the place of a thing is its form. But, if we regard the place as the extension (διάστημα) of the magnitude, it is the matter. For this is different from the magnitude: it is what is contained and defined by the form, as by a bounding plane. Matter or the indeterminate is of this nature; for when the boundary

and attributes of a sphere are taken away, nothing but the matter is left.  
(Física, 209b5-11)

A hipótese do entendimento da matéria-prima como extensão está pautada nessas duas passagens, as quais fizemos uso em nossa argumentação, seguindo o esboço argumentativo de Studmann em referência ao artigo de Sokolowski. A extensão, portanto, configura-se como um conceito de alto teor abstrativo, ao menos na interpretação a qual acabamos de reproduzir. De maneira geral, acreditamos não só no entendimento de Sokolowski, como também atribuímos uma relação desse para com o conceito anaximandrino do apeiron. Studmann acredita, contudo, que a defesa de uma proximidade entre extensão e matéria-prima seja mais adequada à interpretação corrente; embora assumamos uma plausibilidade na definição mais forte defendida por Sokolowski.

Com Sokolowski, Aristóteles sustenta a prioridade da extensão em relação a toda determinação posterior. Não há concepção de entidade que prescindam ontologicamente desse substrato extensivo que permeia todo tipo de intuição da matéria. Em última instância, não há separação conceitual entre matéria, em seu estado puro, e a própria extensão. Dessa maneira, não se pode entender a extensão como um atributo da matéria, visto que não pode haver nada precedente a ela. A ideia de uma extensão como qualidade ou atributo secundário é estranha à filosofia aristotélica, tendo sido interpretada dessa forma apenas tardiamente.

Mas há duas formas distintas de interpretar a matéria e, de acordo com nossa concepção, essa visão deve estender-se à extensão. Ao tentarmos aproximar nossa ontologia extensional da realidade matemática, nos deparamos com a *matéria inteligível*. Essa forma da matéria é associada ao fundamento das realidades geométricas. Aristóteles possuía um posicionamento realista, assim como Platão, acerca das entidades matemáticas. Defendia que essas formas independem de nossa criatividade no sentido em que são materiais e não mentais, em última instância. Essa matéria inteligível é diferenciada em dois tipos, aquela que aplicamos nos raciocínios universais, para identificar um gênero, e aquela que aplicamos à investigação das formas geométricas.

Portanto, embora as entidades matemáticas sejam representadas pelo intelecto, sua realidade está atrelada à materialidade extensiva. A analogia do movimento se encaixa perfeitamente no pensamento sobre o realismo matemático, assim como o movimento é o álibi ontológico, ou o fundamento para o tempo, sendo o movimento externo à nossa mente, também as realidades das formas matemáticas são sustentadas pela matéria inteligível, na qual nossa mente atualiza, ou atribui, o limite geométrico correspondente a cada uma delas.

Diante do exposto, quando imaginamos uma forma geométrica, nada mais estamos fazendo do que determinar um limite geométrico, uma forma abstrata atualizada na extensão, tomada como matéria inteligível. A chave interpretativa para entender a

diferença entre os tipos de matérias está nessa diferença emblemática entre objetos aos quais atribuímos qualidades sensíveis e aqueles aos quais, embora percebamos, não podemos fazê-lo. Os objetos constituídos pela matéria inteligível, portanto, são concebidos independentemente de nossas percepções qualitativas, enquanto aqueles percebidos através de suas qualidades corpóreas, como solidez, temperatura e cor, caracterizam a matéria perceptual.

O experimento mental feito por Aristóteles nos mostra como podemos aproximar a analogia entre os diferentes tipos de matéria e as formas de determinação que nelas derivamos. Para perceber a extensão pura subjacente à matéria dos contrários — ou dos corpos físicos — basta que imaginemos o que resta ao subtrairmos da experiência de um certo objeto, as suas qualidades sensíveis: afeições, produtos e capacidades. Por outro lado, voltando-nos às formas geométricas, bastaria que subtraíssemos delas as suas propriedades dimensionais: tamanho, largura e profundidade. O que resta dessa espécie de experiência degenerada seria a **extensão**, ou a forma subjacente a cada uma das formas da realidade.

A segunda forma de ligação entre as quantidades será, portanto, por motivos onto-epistemológicos. Enquanto o elo através da noção de tempo é dado de maneira pouco explicativa, vemos na matéria uma forma ontológica de ligar as duas formas da quantidade. Considera-se que a quantidade seja, nesse segundo momento, uma forma da matéria, isto é, um tipo particular de manifestação, a extensão indeterminada. A unidade ontológica da quantidade é, dessa maneira, prevista pela matéria-prima, a qual dá origem a duas formas diferentes de manifestação da quantidade. Sob esse ponto de vista, a diferenciação entre quantidades é dada à *posteriori* pela aplicação da forma específica à extensão. A relação de determinação entre extensões discretas e contínuas, assim, deve ser entendida do ponto de vista da análise hilemórfica, como ressalta Studmann:

Because an actual infinite cannot exist, extension, i.e., quantity, must be limited in some way by form. The metaphysically necessary carving up of matter by form, then, results in discrete and continuous composites of form and matter, which can be measured and counted respectively. It results, in other words, in numerable and countable quantities. (Studmann, 2004, p.76)

Acreditamos, com Studmann, além disso, que a ponte conceitual entre as diferentes definições aristotélicas da quantidade, seja nas Categorias, seja na Metafísica, pode ser satisfatoriamente atingida por essa interpretação; bem como construímos um entendimento conceitual sob o qual entende-se a relação ontológica entre as quantidades.

Embora a diferença posterior pareça enfraquecer nossa hipótese de que há uma separação ontológica entre os tipos da quantidade, uma vez que são reunidos conceitualmente por uma mesma subjacência, a extensão, pensamos que o problema da determinação — e aqui não necessariamente estamos de acordo com Aristóteles — é precedente à separação ontológica. Entendemos que há dois níveis ontológicos da discussão e nossa diferença

situa-se no mais superficial. Enquanto estão ontologicamente ligadas por uma primeira matéria-prima, as quantidades diferenciam-se apenas *a posteriori*, sendo fundadas num mesmo substrato. No entanto, há apenas um conceito indeterminado e pré-ontológico, assim digamos, da quantidade. Quando nos referimos às extensões discretas ou contínuas, adentramos a um segundo nível de discussão, onde faremos distinção ontológica entre os tipos da quantidade. Isso significa defender que não exista passagem possível, ou transformação, de uma quantidade discreta para uma quantidade contínua. Uma vez que estejam determinadas por uma forma da quantidade, essa determinação exclui a possibilidade de passagem.

Por último, gostaríamos de encerrar essa seção com a intuição geral de Aristóteles sobre o número e a contagem. Essa intuição define a forma geral sob a qual subsumimos toda ideia de contagem e veremos, na seção procedente, como ela impacta a noção contemporânea de quantidade. Ela não só nos oferece uma boa pista historiográfica, como também deixa clara a intuição, ou o fundamento conceitual, por trás da natureza da prática matemática.

His linking of numbers with discreteness reflects the fact that, unlike measuring, counting is generally directed at discrete entities. When we count, we collect several discrete entities under a single count noun. Count nouns generally bring their own criteria of identity and diversity; and because one criterion of diversity is generally discreteness, counting generally involves the subsumption of a plurality of discrete entities under a single count noun. (Studmann, 2004, p.81-2)

## 2.3 A ARITMETIZAÇÃO DA MATEMÁTICA

Enquanto interpretamos a diferença ontológica entre magnitudes e pluralidades como uma diferença radical, não havendo forma de conciliação ontológica entre elas, a contraparte formal do problema não pode ser interpretada dessa maneira. Como veremos, na matemática, as duas formas da quantidade não só partilham de uma mesma matéria-prima, como podemos construir uma magnitude a partir de uma pluralidade usando um processo de condensação.

Voltando-nos ao contexto do texto filosófico das categorias, na tradição interpretativa que se caracteriza por uma concepção lógica do texto, temos a Isagoge, opúsculo no qual Porfírio, analisando a diferença como problema em si, destaca o seguinte:

De uma maneira geral, toda diferença, vindo acrescentar-se a alguma coisa, torna-a diferente, mas as diferenças comuns ou próprias dão-lhe uma outra qualidade, ao passo que as diferenças interiormente próprias fazem dela mesma outra [coisa]. (Porfírio, 2002, p.46)

O insight proposto pela passagem supracitada, para os propósitos de nosso trabalho, pode ser dividido em dois. Primeiro, como interpretar uma diferença qualitativa no quadro técnico da teoria de conjuntos? E, posteriormente, como identificar essa diferença entre infinitos, isto é, se ela é comum ou inteiramente própria. Em primeiro lugar, necessitaríamos de um vocabulário comum entre lógica e ontologia para uma definição de qualidade, visto que essa categoria não faz parte do aparato técnico da lógica ou da matemática. Em segundo lugar, munidos dessa unificação conceitual, investigar como cada área lida com a questão.

Nosso primeiro problema coteja a ontologia monocategorial da teoria de conjuntos. Enquanto na ontologia somos impelidos naturalmente a uma diferenciação extremamente plural dos objetos, dada a sua interface com a empiria, nas ciências formais como a matemática — e em particular na teoria de conjuntos — somos confrontados com uma ontologia monocategorial<sup>6</sup>. Nesse caso específico, identifica-se apenas uma classe de objetos, os conjuntos. Além disso, embora haja uma relação de dependência entre quantidade e substância na metafísica, sobretudo na filosofia aristotélica, na matemática contemporânea essa relação não acontece necessariamente, o conceito de quantidade pode e será pensado de maneira abstrata e independente. Isso significa que o comum é pensar uma teoria pura da quantidade, tendendo a ver todos os objetos matemáticos, até mesmo as estruturas mais abstratas, como expressões de quantidades e relações entre elas.

Dado que o qualitativo está mais voltado à empiria, o que poderia recuperar uma intuição qualitativa para objetos matemáticos seria sua contraparte geométrica. De fato, esse era o caso na matemática antes de expulsarmos de seu escopo formal as intuições empíricas antes fundamentais. Dessa forma, sabemos que o fundamento de nossas teorias formais é puramente aritmético, o que dificulta ainda mais forçar um conceito qualitativo de característica fundacional.

Historicamente, a tentativa de erigir uma teoria dos números reais a partir de uma construção explícita desse conjunto por conjuntos mais básicos — em especial o conjunto dos números naturais — é o que se chama de *aritmética da análise*. Esse processo nos mostra o motivo histórico e seu contexto nos quais surge a moderna teoria de conjuntos, e como seu quadro é formado já com um sabor aritmético. Todavia, a continuidade se mostrou um problema persistente e um conceito central. Além disso, sua base teórica permaneceu amplamente influenciada pelas definições e conceitos aristotélicos, não somente no que se refere ao quadro ontológico adotado, mas à metodologia, muito embora haja diferenças, surgidas ao longo do desenvolvimento das ciências formais.

Como vimos anteriormente, Aristóteles atribuía um conteúdo empírico e metafísico muito forte à teoria das quantidades, o que distanciava seu aparato teórico do rigor esperado pelos matemáticos da modernidade tardia. Mas Newton nos mostra como

---

<sup>6</sup> Por *monocategorial* imaginamos uma ontologia rígida, onde o tipo ontológico é restrito a apenas um.



a modernidade, no início de seu desenvolvimento matemático, ainda reserva intuições relativamente próximas àsquelas deixadas pela antiguidade clássica, embora já com um desenvolvimento próprio em relação à ideia de número:

By number we understand not a multitude of units, but rather the abstract ratio of any one quantity to another of the same kind taken as unit. Numbers are of three sorts; integers, fractions, and surds: an integer is what the unit measures, the fraction what a submultiple part of the unit measures, and a surd is that with which the unit is incommensurable. (Newton, 1707, p.2)

Percebe-se a clara influência da visão aristotélica sobre a matemática moderna. Assim como na aritmética aristotélica, o princípio da contagem, ou o "princípio do número", está relacionado à eleição de uma unidade. De acordo com a teoria aristotélica, esse conceito precisa satisfazer duas exigências:

- É preciso discernir uma unidade da pluralidade, isto é, destacar uma parte e elegê-la como um *quantum*.
- É preciso que cada elemento da pluralidade recaia sobre um único universal.

De acordo com a análise de Newton, nota-se que a definição conceitual de Aristóteles permanece cristalizada. Evidentemente, havia outros conjuntos numéricos com os quais Newton estava lidando, embora Aristóteles certamente tivesse noção dos três tipos numéricos aos quais Newton se refere. Em todo caso, os tipos de entidades articuladas por Newton encaixam-se perfeitamente na intuição abstrata de Aristóteles.

Mais tarde, já no fim da modernidade, surge um grupo de matemáticos brilhantes determinados a operar uma aritmetização das ideias do cálculo infinitesimal de Newton e Leibniz, bem como, posteriormente, de toda a matemática. Embora Dedekind, Cauchy e Cantor tenham ficado conhecidos como os grandes responsáveis por levar a cabo a toada matemática pela aritmetização, vamos nos apoiar inicialmente na formulação gaussiana do problema.

I come more and more to the conviction, that the necessity of our [Euclidean] geometry cannot be proven, at least not by human understanding nor for human understanding. Perhaps in another life we come to different insights into the essence of space, that are now impossible for us to reach. Until then, we should not put geometry on the same rank with arithmetic, which stands purely a priori, but say with mechanics. (Gauss, 1981, p.177)

A desconfiança de Gauss na confiabilidade das intuições geométricas condensa o real motivo de uma desconfiança generalizada, como também ilustra a questão filosófica em torno da intelectualidade engajada no movimento de aritmetização da análise. Embora não

fosse um epistemólogo ou um metafísico, Gauss faz alusão a um pressuposto epistemológico: não somos capazes de compreender satisfatoriamente a necessidade envolvida nas verdades intuitivas da geometria. Especula, ainda, uma solução para esse problema com o que parece o esboço imaginativo de um mundo possível onde fôssemos capazes de conhecer a "essência do espaço". Embora não tenha conhecido um estudo formal da filosofia, Gauss parece estar de acordo que, com um acesso metafísico à real natureza ontológica do espaço, pudéssemos pleitear uma matemática de fundamento geométrico, o que remonta a um caráter empírico da intuição. Assim como todos os teóricos da aritmetização, Gauss despeja sobre o aspecto qualitativo da matemática a culpa pelas imprecisões e obscuridades.

O problema é reformulado mais à frente:

According to my most intimate conviction, the theory of space has a completely different position with regards to our knowledge a priori, than the pure theory of magnitudes. Our knowledge of the former lacks completely that absolute conviction of its necessity (and therefore of its absolute truth) which is characteristic of the latter. We must humbly acknowledge that, whereas number is just a product of our minds, space also has a reality outside our minds, whose laws we cannot prescribe a priori. (Gauss, 1981, p.201)

A linguagem de Gauss sugere uma forma de idealismo muito próxima à visão kantiana. Enquanto o realismo de Aristóteles lhe proporcionava atribuir conteúdo significativo às intuições geométricas através de sua relação com o tempo e o espaço, Gauss sintetiza muito bem o desconforto idealista em lidar com elementos fundamentais cujo conhecimento não seja *a priori*. A separação, entretanto, é dada nos termos do fundamento da aritmética em relação à geometria. A passagem coloca de maneira clara o desejo de erigir um fundamento de natureza aritmética e totalmente abstrata para a matemática, sem qualquer dependência de intuições geométricas ou empíricas. Gauss separa dois níveis de elaboração matemática, o primeiro e mais elevado sendo o conhecimento aritmético e o segundo, sendo menos confiável, atrelado à geometria e à mecânica.

Ferreirós esquematiza o entendimento gaussiano como uma bifurcação na interpretação entre dois tipos de pesquisa matemática. O primeiro chamado de *matemática mista* e o segundo chamado *matemática pura*. O que distingue cada uma delas, segundo Ferreirós, é o conteúdo ou o fundamento empírico envolvido na primeira que não está presente na segunda.

The third aspect is that Gauss draws a neat distinction between what might be called, using XVIII<sup>th</sup> century language, pure and mixed mathematics. Mixed mathematics is that part of the discipline which deals with knowledge having (at least partly) empirical origins; specifically Gauss indicates that geometry and mechanics belong here. Pure mathematics is that part of mathematical knowledge which stands completely a priori. On the basis of further passages in the correspondence and writings of Gauss, this must be taken to include not only arithmetic, but also what he calls the "pure theory of magnitudes" (reine Grössenlehre), i.e., the

theory of the full complex number system in all its different aspects, which we may presently identify as arithmetical, algebraic, topological, and analytical. Here again, the basic apriorist standpoint might be consistent with the philosophy of either Leibniz or Kant, but not with most other philosophers of the XVII<sup>th</sup> and XVIII<sup>th</sup> centuries. (Ferreirós, 2007, p.238)

O que se tem em mente no esforço de aritmetização, portanto, é a pretensão de um fundamento puramente aritmético e apriorístico. Mas essa fronteira é disputada não somente no campo técnico das ciências formais, ela envolve um entendimento metafísico da questão que muitas vezes é deixado de lado. A questão filosófica da concorrência entre aritmética e geometria bifurca-se em dois aspectos principais: o primeiro relaciona-se com a falta de rigor envolvida nas definições matemáticas dependentes das noções de *magnitude* e *extensão*. Em segundo lugar, relaciona-se com o conhecimento da natureza e das definições dos objetos matemáticos. Como destacado na introdução do problema de nosso trabalho, a viabilidade dos conceitos é extraída de noções e não de notações.

Essa problemática metafísica está fundamentada numa visão ontologicamente essencialista e epistemologicamente idealista, na medida em que atribuímos uma subjacência ontológica ao espaço como entidade absoluta e independente do intelecto e, depois, reconhecendo um limite intransponível entre o *objectum quod* e o *objectum quo* da geometria. A teoria aristotélica poderia erigir um fundamento bifurcado para a matemática, dado o seu realismo, não só em relação ao objeto como fenômeno empírico, mas em relação à sua essência. Como vimos na teoria aristotélica das quantidades, o acesso à essência do espaço não se configurava como um problema intransponível. O problema é solucionado através do conceito do próprio conceito de magnitude abstrata, ou o problema da *matéria-prima*.

Nota-se na noção gaussiana de número uma ligação forte com a tradição aristotélica, que segue a definição newtoniana. Boniface nos esclarece o teor da opinião de Gauss sobre a ideia de número e o que venha a ser a matemática como ciência das magnitudes.

In a standard way at that time, arithmetic operations are presented by Gauss in the text “Zur Metaphysik der Mathematik,” not for numbers (e.g. natural integers), but more generally for magnitudes. Addition and subtraction originate from “the simplest relationship between magnitudes,” that between the whole and its parts. Thus, adding boils down to “finding the whole from its parts”— the whole is then named “sum” or “aggregate”— and subtracting to “finding from the whole and one part, the other part.” Multiplication and division are then defined from the relationship between the “simple” (das Einfache) and the “multiple” (das Vielfache). Multiplication consists in finding the multiple (named the product) from the two other terms named factors. Division consists in finding the number (Zahl) from the two first terms, the simple and the multiple. (Boniface, 2007, p.324)

Embora a noção de número natural seja central para a aritmética, Gauss explora o fundamento filosófico da questão, centralizando, ao invés disso, a generalização das

operações com magnitudes. Ademais, mesmo sem qualquer cultura filosófica mais profunda, vemos no discurso gaussiano um vocabulário relativo à tensão ontológica ou relacional entre *parte* e *todo*, o que, mesmo sem saber, torna claro qual o escopo metafísico da questão matemática associada. O discurso sobre os números naturais, dessa maneira, pode ser considerado como uma formalização da intuição que possuímos sobre as operações geométricas, que lidam com magnitudes. Uma vez que Gauss reinterpreta as questões aritméticas recorrendo a uma espécie simplificada de teoria intuitiva das magnitudes, estamos diante da contraparte metafísica e epistemológica por detrás das teorizações matemáticas. Reinterpretação oferecida por ninguém mais, ninguém menos que um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

Mas, se temos em mente o entendimento das magnitudes infinitesimais, vemos que essa questão, mais que nas outras formas da magnitude, envolve fundamentalmente uma intuição do *movimento*. Na verdade, as noções de movimento e de corpo extenso são os verdadeiros motivos conceituais envolvidos nas definições da continuidade como ideia matemática. Os esforços de Weierstrass e Kronecker acerca da aritmetização da análise têm forte ligação com a tentativa de expulsar da análise a necessidade de recorrer à ideia de movimento e de magnitude, se pensadas nos termos empíricos que Gauss critica.

Vamos agora entender como podemos formalizar nossas intuições de movimento recorrendo apenas a definições aritméticas. Essa forma engenhosa de expulsar da matemática as intuições pouco precisas da geometria foram tomando forma paulatinamente através das ideias de alguns dos matemáticos já citados aqui, e de vários outros. Por sorte, Cantor, influenciado pelas ideias de aritmetização da análise<sup>7</sup>, nos mostrou uma forma conjuntista de compreender essa formalização. Pretendemos reproduzi-la como ilustração.

Imagine uma sequência infinita  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  de forma que a diferença  $a_{n+m} - a_n$  torna-se infinitamente pequena à medida que  $n$  aumenta. Chamemos tal sequência de uma magnitude em sentido geral. Agora tome um número qualquer dessas magnitudes  $a', a'', a''' \dots$  e defina as seguintes relações:

$$(1) a' = a'' \quad , \quad (2) a' < a'' \quad \text{e} \quad (3) a' > a''$$

Se à medida que  $n$  cresce a diferença tende a zero, então temos o primeiro caso. Se ela torna-se cada vez maior que um determinado número positivo, então temos o segundo caso. Por último, se ela fica cada vez menor que um dado número negativo, então temos o terceiro caso.

Dessa maneira, Cantor formaliza a noção de comparação entre magnitudes, relativizando a definição a operações aritméticas. Assim como Gauss havia notado, a aritmética prática nada mais é que a determinação de relações entre magnitudes; exatamente a

---

<sup>7</sup> Até onde se sabe, ele chegou a frequentar as palestras tanto de Weierstrass e Kronecker em Berlim, e estava de acordo com sua tentativa de um tratamento puramente aritmético para as magnitudes.

intuição formalizada no processo esboçado por Cantor, valendo-se das sequências de Cauchy<sup>8</sup>.

Uma vez formadas todas as magnitudes como as que acabamos de exemplificar, elas devem ser reunidas em um conjunto  $S$ . Dessa maneira, poderemos formar sequências de Cauchy com os elementos de  $S$ , uma vez que as relações entre elas estão conceitualmente bem definidas pelas definições precedentes. Então forma-se uma segunda pluralidade  $\mathfrak{c}$  com esses novos objetos e então repetimos o processo de aplicar sequências de Cauchy sobre a pluralidade  $\mathfrak{c}$ . Depois, Cantor atribui uma espécie de ranking para cada estágio de formação dessas pluralidades. Ele chama de *magnitudes numéricas* de  $\lambda$ -ésimo tipo aquelas obtidas por exatamente  $\lambda$  aplicações desse processo. Por último, se  $1 < \mu < \lambda$ , então haverá uma magnitude  $\lambda$ -ésima para cada magnitude  $\mu$ -ésima, ou seja, cada estágio posterior possui uma cópia estrutural correspondente a cada magnitude criada no estágio anterior<sup>9</sup>.

Portanto, embora as intuições agora estejam aritmeticamente definidas, isso não significa, ao fim e ao cabo, que expulsamos delas, de uma vez por todas, as intuições geométricas antes explicitamente usadas nas suas definições, mas apenas substituímos o vocabulário empírico/metafísico por um vocabulário aritmetizado. Se estamos de acordo em aceitar que essas definições e processos oferecidos por Cantor são apenas contrapartes formalizadas das intuições descritas por Gauss como comparação entre as magnitudes, e de processos que fazem menção a elas, então estamos mais próximos de identificar o conteúdo qualitativo das asserções matemáticas, mesmo em um contexto "puramente" aritmético.

O impasse mais importante que desejamos resolver com essa aproximação está no fato de não haver uma forma direta de interpretar o conceito de *propriedade qualitativa* para conjuntos, que já nascem, formalmente, como entidades aritméticas. A definição genérica de qualidade é dada em termos de características ou propriedades de um objeto, podendo ser, em princípio, adaptada a diversos contextos. Esses conceitos, entretanto, são filosoficamente e cientificamente carregados, sobretudo pela ligação histórica que têm com o empirismo. De todo modo, identificam-se ao menos três acepções para o conceito de *qualidade*: como propriedades físicas, construções lógicas de propriedades físicas ou disposições. A princípio, não há, nas definições, indicações explícitas do caráter empírico de cada forma da qualidade, entretanto, o acesso às propriedades de um dado objeto é, em geral, intuitivamente dependente de um dado empírico<sup>10</sup>.

O próprio Aristóteles, que possui definição e usos próprios do conceito de qualidade muito antes da modernidade, identifica três formas de expressão ou tipos da qualidade, quais sejam, (1) hábitos e disposições, (2) qualidades sensoriais ou qualidades passivas e (3) a figura ou a forma. Ao ler o texto aristotélico onde se fala sobre as qualidades, o cap.

<sup>8</sup> Definiremos essas sequências mais à frente.

<sup>9</sup> Cf. Petri; Schapacher, 2007.

<sup>10</sup> Sobretudo pelo realismo aristotélico.

8 das Categorias, o leitor verá que há um quarto tipo: predisposições de um indivíduo como a capacidade ou incapacidade para fazer algo. Não obstante, resumimos a quarta forma à primeira.

As entidades matemáticas estão mais ligadas ao terceiro tipo de aspecto qualitativo por suas interpretações geométricas. Acreditamos que a saída para uma visão qualitativa do problema do contínuo seja por meio da diferença presente nas intuições geométricas que temos de cada tipo de quantidade. Sem recuperarmos e interpretarmos essas características, teremos sérias dificuldades em justificar um tipo de interpretação não-aritmética do problema. Há uma forte ligação entre a concepção ontológica de um objeto e a sua figura ou forma, o que recupera o caráter empírico da questão. Quando pensamos em um objeto, nossa intuição esforça-se para construir uma imagem que possamos atribuir a ele, mesmo que seja abstrato, há sempre uma simbologia imagética envolvida em sua intuição.

O contínuo é composto de partes elas próprias contínuas. Essa característica atribui à continuidade uma complexidade inalcançável do ponto de vista das extensões discretas. As operações aritméticas básicas não são capazes de alcançar uma complexidade suficiente para operar tal passagem. Somente com as engenhosas e polêmicas construções engendradas pelos esforços de aritmetização da análise puderam dar um desfecho técnico ao problema, sem com isso oferecer um substrato conceitual apropriado para a questão. Na interseção entre o quadro matemático e metafísico, gostaríamos de examinar o seguinte: (1) há uma espécie de dependência ontológica entre o contínuo dos reais e os conjuntos discretos que o precedem, uma vez que o primeiro é construído a partir dos outros; (2) há uma diferença ontológica entre conjuntos discretos e contínuos, visto que a intuição sobre o tipo de objeto é alterada; e (3) como conciliar 1 e 2? Vamos analisar uma das muitas construções explícitas possíveis para o conjunto  $\mathbb{R}$  dos reais, a construção por sequências de Cauchy. De maneira geral, além de ser uma construção muito conhecida, as outras formas são herdeiras da mesma ideia — e que está intimamente ligada à ilustração oferecida anteriormente sobre a formalização do movimento e das magnitudes —, que se caracteriza pela obtenção do conjunto  $\mathbb{R}$  por completamento. Exemplos de outras formas de construção explícita são por cortes de Dedekind, por hiper-reais, e construção por números inteiros, conhecida como "os reais de Eudoxo".

Suponhamos que seja dado o conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números racionais. Esse conjunto é denso, tanto do ponto de vista técnico, da topologia, quanto de nossa intuição menos precisa. O problema com esse conjunto, do ponto de vista da continuidade, é que há pedaços faltantes. Se imaginarmos os racionais como uma extensão, seria algo muito próximo a um contínuo, porém por uma diferença de infinitos pontos faltantes. O primeiro problema intuitivo com essa questão é entender como extensões que diferem uma de outra por infinitos elementos podem ser consideradas muito próximas. Mas, do ponto de vista infinitesimal, esse problema pode ser contornado; o ponto mais dramático ficará evidente mais adiante.

Vamos considerar o conjunto dos racionais com a métrica<sup>11</sup>  $d$  usual e definimos uma sequência de Cauchy da seguinte forma:

**Definição 2.3.1.** *Uma sequência  $\{x_i\}$  em  $(X, d)$  tal que para qualquer  $\epsilon > 0$  existe um número  $N$  tal que  $d(x_m, x_n) < \epsilon$  para todo  $m, n > N$ .*

Podemos interpretar a definição acima heurísticamente como definindo uma sequência que converge para um ponto imaginário. Chamamos de imaginário pois não é necessário que o ponto de convergência pertença à sequência, ou seja, a definição permite que  $x_i$  convirja para um buraco. Em sentido técnico, toda sequência convergente é de Cauchy, mas a recíproca não é verdadeira.

Agora tome  $R$  como sendo o conjunto de todas as sequências de Cauchy  $\{x_i\}$ . As operações aritméticas com sequências podem ser feitas da maneira usual com as sequências de Cauchy. Vamos definir a equivalência entre duas sequências se a sua diferença tende a zero, isto é, para qualquer real  $\epsilon > 0$  temos  $|x_m - x_n| < \epsilon$ , onde  $x_m$  e  $x_n$  são as sequências  $\{x_m\}$  e  $\{x_n\}$  de Cauchy, respectivamente. Assim, o conjunto  $R$  de todas as classes de equivalência de sequências de Cauchy é estruturalmente equivalente ao conjunto dos números reais. Toda sequência racional de Cauchy que converge para um dado número real  $r$  é uma representação de  $r$ . Ou seja, esse conjunto obedece aos axiomas de corpo, que caracterizam, a menos de isomorfismo, o conjunto dos números reais.

A técnica suaviza a passagem na medida em que os racionais oferecem uma aproximação qualitativa dos reais tão refinada quanto quisermos. Geometricamente, estamos apenas completando uma reta na qual antes havia buracos. Porém, quando nos voltamos ao fato de  $\mathbb{Q}$  ser um conjunto enumerável, parece haver um salto na intuição que permanece velado pela engenhosidade da construção explícita. Do ponto de vista da quantidade, nada mais foi feito que espremer uma pluralidade discreta até que estivéssemos muito próximos de emular uma quantidade contínua, e então completamos os pontos faltantes. Mas perceba que nenhum tipo de número novo foi adicionado, a não ser sua forma de representação, um número real é, na verdade, uma pluralidade de números racionais organizados ou encarados de uma nova maneira<sup>12</sup>. Ou seja, a forma da passagem não está em acrescentar nada, mas sim mudar a forma de representação.

Um número natural  $n$  em  $\mathbb{N}$  puro não é o mesmo que sua representação em  $\mathbb{Z}$  ou em  $\mathbb{R}$ . Mas depois que todas as passagens foram feitas, desconsideramos esse fato e pensamos estar lidando com conjuntos cujos elementos são os mesmos. Essa ética nos impele a pensar que podemos horizontalizar nossa concepção sobre a quantidade, de maneira que, se conseguimos uma passagem artificial que possibilite tal construção, então podemos,

---

<sup>11</sup> Cf. Apêndice.

<sup>12</sup> Na verdade, apenas os números naturais são tipos originários, os outros tipos de número, na construção explícita, surgem por uma espécie de organização inovadora dos mesmos "ingredientes".

além disso, homogeneizar nosso conceito de quantidade para todos os tipos de conjuntos, considerando suas características estruturais e ignorando suas diferenças qualitativas.

Deve ter ficado claro ao leitor que o raciocínio presente na construção explícita, que representa a forma cantoriana de enxergar a construção, faz um recurso à intuição que poderia passar despercebido. O fato de aceitarmos raciocínios infinitários parece tornar claro que a passagem foi feita, mas ela não é de tudo explícita. Precisamos aceitar, de acordo com nossa intuição, que no infinito, somos capazes de completar os tais espaços faltantes no conjunto dos números racionais, mas essa intuição de completamento é, na verdade, geométrica. A questão é que Cantor conseguiu uma forma de interpretação aritmética do fato geométrico, e nisto está a força da aritmetização, não uma forma puramente aritmética das intuições, mas uma forma puramente aritmética no discurso formal.



# 3 CAPÍTULO II - ESCOPO E MÉTODO

## 3.1 AS FORMAS DA QUANTIFICAÇÃO

Vamos dividir a teoria da quantificação <sup>1</sup> em dois aspectos principais: o aspecto aritmético e o aspecto geométrico. O aspecto aritmético está relacionado ao processo de contagem que pode desprezar as características dimensionais dos objetos aos quais se aplica, apenas quantificando sobre uma pluralidade pela listagem de seus elementos, considerando-os como unidades simples e indivisíveis. Essa forma de quantificação é genérica no sentido que acabamos de expor, no qual o processo homogeniza a natureza das partes que compõem a extensão.

A medida, por outro lado, destina-se primariamente à quantificação de grandezas e está ligada ao comprimento, à área ou ao volume de uma extensão. Embora seja uma maneira de quantificar, assim como a contagem, existe uma nova sutileza proveniente da sensibilidade que a medida tem em relação aos atributos qualitativos e dimensionais das partes de uma extensão. Quando nos referimos à medida, é necessário, como nota Aristóteles, que seja determinada a unidade de acordo com a grandeza que se deseja medir. Embora o critério aristotélico seja dado para o escopo da Física.

Embora a medida tomada em seu aspecto físico não possa ser equivalentemente interpretada em sua concepção matemática, há uma relação pré-teórica entre nossas intuições empíricas e a forma como tratamos a medida em nossas teorias formais. Essa questão não pode ser deixada de lado, sobretudo pelo que vimos anteriormente, onde nossas noções matemáticas surgem de contextos conceitualmente atrelados à medida de magnitudes. Ademais, embora a medida tenha sido reformulada nos termos da aritmetização da matemática, acreditamos haver indícios de uma diferença mais radical entre grandezas e pluralidades que remonta ao problema da física grega. Vamos ver como diferenciamos aspectos da medida que simplesmente são ignorados pela contagem, e como essa relação exemplifica uma diferença não somente ontológica, mas de escopo entre as duas formas de quantificação.

Já deve estar claro ao leitor que há uma diferença de método entre contagem e medida. O processo pelo qual contamos uma pluralidade reconstitui uma intuição de discretização, bem como sua possibilidade está na eleição de um universal sobre o qual recaiam os seus elementos. Da mesma maneira, a medida procede pela eleição de uma

---

<sup>1</sup> Há aqui um problema terminológico na medida em que, na lógica, a teoria da quantificações está ligada à noção de quantificadores lógicos. Nosso uso, no entanto, relaciona-se à teoria aristotélica das quantidades, esta mais íntima ao conceito de medida. Infelizmente não nos ocorreu um conceito mais adequado para referir à teoria que pretendemos investigar, de forma que o inconveniente mereceu esta nota de esclarecimento.

unidade em contraparte com uma totalidade da qual faz parte. A única possibilidade de reconhecer uma quantidade de uma grandeza contínua está no reconhecimento de um *quantum*, a parte menor relativizada, da totalidade, segundo a qual é estabelecido o critério da quantificação.

For measure is that by which quantity is known; and quantity qua quantity is known either by a 'one' or by a number, and all number is known by a 'one'. Therefore all quantity qua quantity is known by the one, and that by which quantities are primarily known is the one itself; and so the one is the starting-point of number qua number. And hence in the other classes too 'measure' means that by which each is first known, and the measure of each is a 'one'—in length, in breadth, in depth, in weight, in speed. (Aristóteles, *Metafísica* X, 1052<sup>b</sup>19)

A proximidade fundamental entre a quantificação das grandezas discretas e contínuas está na necessidade da eleição de uma unidade. A grande diferença entre a quantificação das pluralidades e das extensões está nas exigências que emergem quando estamos elegendo essa unidade. Mas, como destacamos, o processo aritmético é compreendido sempre como uma pluralidade de unidades discretas, enquanto a medida, embora faça uso da determinação de uma unidade básica, é de natureza contínua, em homogeneidade com a grandeza a que se mede. Em geral, a literatura aborda o *critério de homogeneidade* da seguinte forma:

As unidades usadas para a medição precisam ser escolhidas de acordo com a medida: o que será medido e as unidades escolhidas para a medição devem ter a mesma dimensão (não podemos medir o peso de uma mesa em centímetros). Além disso, elas também precisam ter o mesmo grau de complexidade. (SATTLER, 2017, p.13)

O critério de homogeneidade nos mostra o caminho segundo o qual a quantificação de cada grandeza se diferencia em método, espelhando a diferença ontológica de cada tipo de objeto. Poderia objetar-se que, mesmo na medida, reduzimos a complexidade dos objetos quando, elegendo uma unidade de medida, fazemos dela uma consideração como na contagem, onde se despreza a dimensionalidade da unidade e a consideramos como indivisível. De fato, quando elegemos um centímetro ou um metro, ou mesmo um pé, ou uma polegada, como nossas unidades de medida, passamos a considerá-las de maneira semelhante àquela da contagem. Porém, na contagem, essa variabilidade da unidade não se aplica, estamos sempre restritos a uma unidade ideal e invariável, enquanto na medida é necessário que se estabeleça, a cada ocasião; além disso, quando considerada em si, é, ela própria, um contínuo.

Dessa maneira, classificaremos as formas da quantificação em duas: *contagem* e *medida*; ambas diferem quanto ao escopo e objetivo, a primeira estando ligada à aritmética, desprezando a dimensão e o ordenamento das pluralidades sobre as quais quantificam, voltando-se à noção de cardinalidade e às grandezas discretas. A segunda, por sua vez,

destina-se à quantificação dimensional, caracterizada pela sensibilidade às características qualitativas do objeto e aplicando-se às grandezas contínuas, pautada pelo critério de homogeneidade.

Como não há um critério direto para definir uma noção de *qualidade* para entidades essencialmente aritméticas como os conjuntos, vamos propor que nossa chave interpretativa esteja no critério formalizado de homogeneidade. Alguém familiarizado com a teoria da medida notará que o conceito de *dimensão* pode tornar-se ambíguo dada a sua dependência em relação a outros aspectos. Embora tenda-se a atribuir um significado espacial para esse termo, a intuição adequada para cada contexto dimensional pode tornar nossa concepção obscura, como notará Sattler. Ainda segundo ele, vamos adotar o conceito de *dimensionalidade*, em princípio, em seu sentido qualitativo:

As suggested above, I will understand “dimension” here as the aspect under which something is regarded in the process of measuring, hence as the feature, property or quality that is quantified. (Sattler, 2004, p.8)

A noção de dimensionalidade recupera características metodológicas de nossas ciências empíricas para o contexto puramente matemático. Em ambos os casos, além disso, existe uma relação intrínseca entre intuições aritméticas e geométricas. Ou, em outras palavras, como relacionamos o processo de contagem ao processo empírico da medida.

Em primeiro lugar, quando pretendemos determinar a medida de um corpo extenso, ou de uma grandeza abstrata, é preciso que haja uma relação entre a estrutura da grandeza a ser medida e uma estrutura numérica arbitrariamente escolhida. Em geral, escolhemos o conjunto dos números reais. Krantz<sup>2</sup> propõe que se entenda essa relação abstrata como a construção de um homomorfismo entre estruturas, uma sendo a estrutura empírica cuja relação entre os objetos seja mais ou menos apreendida por nossa intuição, do outro lado, uma estrutura numérica que apresente-se útil à quantificação da estrutura anterior.

De acordo com Sattler, esse processo representa o seguinte:

In modern science, this systematic homomorphic mapping transfers the empirical realm to an abelian group of real numbers. As Suppes writes: “What we can show is that the structure of a set of phenomena under certain empirical operations and relations is the same as the structure of some set of numbers under corresponding arithmetical operations and relations”. We may thus use our knowledge of the arithmetical structure to infer information about the homomorphic empirical structure; for example, if we measure two tables and find that one is 80cm in length and the second is 90cm in length, then we may infer from the arithmetical realm that if we put them together (and thus “concatenate” them), together they should be 170 cm in length. (Settler, 2004, p.11)

No que se refere à natureza ontológica da continuidade, no entanto, percebemos uma profundidade e um comprometimento ontológico mais acentuado que na forma da

---

<sup>2</sup> Cf. Krantz, 2006.

discrição. Se, por um lado, podemos tomar a questão do ponto de vista macroscópico, como no caso de Sattler, então a disputa ontológica parece minimizada. Ainda assim, quando tomamos a continuidade em sua constituição última, sua complexidade apresenta-se de maneira incontornável. Diferentemente da discrição, a continuidade deve valer-se da intuição infinitária para dar conta de sua constituição básica. Se as extensões discretas são formadas de suas unidades indivisíveis, quando nos voltamos à continuidade, essa noção não pode ser aplicada sem um recurso ao que fica conhecido na tradição como os *infinitesimais*.

Essas partes últimas, constituintes da continuidade, são ontologicamente dependentes de uma intuição *intencional*, por oposição à característica *extensional* que se aplica ao contínuo sob o ponto de vista de uma totalidade. Defendemos que há ao menos duas formas de encarar a continuidade: de seu ponto de vista *macroscópico* e do *microscópico*. Ainda na filosofia grega, com o surgimento da ideia de continuidade no interior das investigações cinéticas, podemos identificar duas tendências básicas para a abordagem ontológica do contínuo: ou recorre-se à existência de unidades últimas de caráter intencional, como os infinitesimais, ou reduz-se a continuidade à discrição, postulando que, ao fim e ao cabo, o contínuo é composto de entidades indivisíveis, como no atomismo.

De maneira superficial, na cinética, o grande problema sobre a continuidade é postulado com a seguinte questão: como uma quantidade finita de movimento poderia vencer um espaço constituído de magnitudes infinitas, ou como uma quantidade infinita de pontos poderia ser cumprida numa quantidade finita de tempo? Esses problemas estavam relacionados à divisibilidade da matéria, teoria amplamente conhecida dos antigos gregos, cujos problemas inspiraram os paradoxos de Zenão sobre a infinidade e as teorias atômicas de Leucipo e Demócrito. De modo geral, a divisibilidade da matéria postula que essa característica seja de caráter infinitário, isto é, que sempre podemos tomar uma porção de matéria e dividi-la novamente de maneira indefinida. Dessa forma, nunca haveria uma unidade última e indivisível. Na verdade, essa forma de ilustrar o problema já toma o partido da infinidade da divisibilidade, o problema, na verdade, é colocado sobre o limite dessa divisibilidade.

Ao assumir a adequação dos infinitesimais na ontologia da continuidade, somos impelidos a aceitar que a natureza do continuum envolve certa característica intensiva, uma vez que sua constituição última é essencialmente intensiva. Essa poderia ser uma segunda forma de abordagem da diferença qualitativa, ou seja, a diferença entre extensionalidade e intencionalidade. No entanto, essa colocação faria sentido se nosso trabalho encarasse a questão desde o ponto de vista da análise não-standard, por exemplo. Uma vez que desejamos investigar como as diferenças manifestam-se na teoria clássica de conjuntos, precisamos manter o problema dos infinitesimais como um panorama conceitual de fundo, como um indício da diferença ontológica presente em nossas intuições matemáticas, mesmo dentro de um quadro teórico clássico.

Na próxima seção, veremos como os pontos de convergência e divergência impactam o quadro teórico atual e as formas de interpretação das intuições sobre o tratamento de cada tipo da quantidade. Sem propor uma abordagem exaustiva da questão, procura abordar algumas características teóricas que exemplificam uma diferença crucial entre as formas da quantidade e de como a diferenciação do escopo e da natureza de cada uma impacta aspectos relevantes de nossas teorias matemáticas.

Por hora, basta salientar que os pontos de convergência entre as duas formas da quantidade, seja ontologicamente, seja epistemologicamente, estão ligados ao fato de toda forma de quantificação estar subordinada (1) à eleição de uma totalidade, (2) à eleição de um quantum ou uma unidade básica e que (3) em última instância, o processo de determinação de uma quantidade é sempre discreto. Os pontos de divergência, por outro lado, estão no fato de que (1) quantidades discretas desprezam as características qualitativas de suas partes componentes, como extensão, área, volume, e assim por diante, ao passo que a continuidade não pode fazê-lo; e (2) a intuição sobre a continuidade envolve uma característica infinitária e intencional, enquanto a descrição não.

## 3.2 TÉCNICAS DE QUANTIFICAÇÃO

Em teoria de conjuntos, costuma-se tomar o conceito de "tamanho" como sendo a cardinalidade de um conjunto. A cardinalidade, se tomada no contexto finito, será o paradigma técnico usado como a quantificação aritmética, como a definimos no início do presente trabalho. Em sua concepção filosófica, contar os elementos de uma pluralidade estava ligado à eleição de uma totalidade, à determinação de uma unidade e, ademais, à imagem abstrata dos números. No experimento mental, dissemos que a contagem era a reprodução da estrutura dos números naturais sobre uma outra estrutura, no caso, uma estrutura empírica. Na teoria de conjuntos, o processo é semelhante.

Os números naturais na construção de von Neumann são definidos recursivamente como se segue:

$$\begin{aligned}
 0 &= \emptyset, \\
 1 &= \{0\} = \{\emptyset\}, \\
 2 &= \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \\
 3 &= \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \\
 &\vdots \\
 n + 1 &= n \cup \{n\}.
 \end{aligned}$$

Heuristicamente, cada número natural  $n$  é o conjunto de todos os números naturais menores que  $n$ . Há outras formas de construção desses números em teoria de conjuntos, entretanto, elas serão todas equivalentes do ponto de vista estrutural. O que importa para essa teoria é o tipo de estrutura geral à qual nos referimos quando falamos dos números naturais. De todo modo, fixado um conjunto que corresponda à nossa visão de  $\mathbb{N}$ , estamos em posição de definir o que seja a contagem, ou a quantificação aritmética de um conjunto. A contagem<sup>3</sup> de um conjunto  $A$  corresponderá à construção de uma bijeção entre  $A$  e um subconjunto de  $\mathbb{N}$ .

Tomaremos um número  $n = \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$  como uma espécie de protótipo para contar uma determinada quantidade finita. Se um dado conjunto pode ser emparelhado com  $n$  dizemos que tal conjunto possui  $n$  elementos. Formalmente, estamos definindo o seguinte:

**Definição 3.2.1.** *Dizemos que um dado conjunto  $A$  tem  $n$  elementos se existe uma bijeção  $f : A \rightarrow n$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ .*

Além do próprio  $\mathbb{N}$ , outros conjuntos também serão enumeráveis, como o conjunto  $\mathbb{Z}$  e o conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números inteiros e racionais, respectivamente. A possibilidade de colocar os conjuntos em bijeção dá origem a resultados engenhosos como os que acabamos de mencionar. De fato, seria intrigante pensar que, do ponto de vista das magnitudes, uma pluralidade com mais elementos pudesse ter o mesmo "tamanho" que uma com menos elementos; mas aqui podemos até fazer um pouco mais, podemos provar que um conjunto infinito é equipotente a uma parte própria sua.

O que possibilita a expansão de nossa intuição sobre a contagem é o conceito de número transfinito. Conhecemos esses números como *números ordinais*. Heuristicamente, descrevemos um ordinal  $\alpha$  dando o exemplo de um conjunto ordenado  $A$  tal que, se contamos os elementos de  $A$  na ordem correta, então podemos contar até  $\alpha$ , ou seja,  $\alpha$  representa a abstração do tipo da ordem presente em  $A$ . Ou seja, como no processo intuitivo de contagem, abstraímos as qualidades específicas dos elementos de  $A$  e consideramos apenas sua disposição ou ordem.

Trabalharemos com dois tipos de ordem, as *lineares* e as *parciais*. Elas serão definidas respectivamente da seguinte forma:

**Definição 3.2.2.** *Uma **ordem parcial** em um conjunto  $P$  é uma relação binária  $<$  em  $P$  que satisfaz as seguintes propriedades:*

- i.  $\forall x \in P, \quad x \not< x.$
- ii.  $\forall x, y, z \in P, \quad (x < y \wedge y < z) \implies x < z.$

---

<sup>3</sup> Cf. Apêndice 6.1.

Diremos que  $(P, <)$  é um *conjunto parcialmente ordenado*. Em geral, escrevemos apenas  $P$  ao invés do par, se o contexto permitir o uso sem ambiguidades. Além disso, uma ordem parcial é *linear* se a seguinte exigência adicional é cumprida:

$$iii. \forall x, y \in P, \quad x < y, \quad x = y \quad \text{ou} \quad x > y.$$

Além das definições de ordem que estabelecemos, há uma noção fundamental para nossa intuição da organização interna dos conjuntos, essa é a noção de *boa ordem*, definida da seguinte forma:

**Definição 3.2.3.** *Uma ordem linear  $<$  em um conjunto  $P$  é uma **boa ordem** se todo subconjunto não vazio de  $P$  tem um menor elemento.*

Comparar grandezas do ponto de vista fenomenológico ou geométrico torna-se uma tarefa intuitiva e quase imediata. Todavia, do ponto de vista de uma teoria aritmética, é somente graças às noções acima que poderemos comparar conjuntos de acordo com sua organização estrutural. Vejamos como nossa noção expandida de comparação funciona do ponto de vista técnico:

**Definição 3.2.4.** *Seja  $f : P \rightarrow Q$  uma bijeção, se  $f$  e  $f^{-1}$  preservam ordem, então  $f$  é um **isomorfismo** de  $P$  em  $Q$ . Se  $Q = P$ , então  $f$  será chamada um **automorfismo**.*

**Lema 3.2.5.** *Se  $(W, <)$  é um conjunto bem-ordenado e  $f : W \rightarrow W$  é uma função crescente, então  $f(x) \geq x$  para cada  $x \in W$ .*

*Demonstração.* Assuma que o conjunto  $X = \{x \in W : f(x) < x\}$  é não vazio e seja  $z$  o menor elemento de  $X$ . Seja  $w = f(z)$ , então  $f(w) < f(z) < z$  pois  $f$  é crescente. Dessa forma,  $w \in X$ , o que contradiz nossa hipótese de que  $z$  é o menor elemento em  $X$ .  $\square$

**Corolário 3.2.6.** *O único automorfismo de um conjunto bem-ordenado é a identidade.*

*Demonstração.* Pelo Lema 3.2.5,  $f(x) \geq x$  para todo  $x$ , e  $f^{-1}(x) \geq x$  para todo  $x$ .  $\square$

**Corolário 3.2.7.** *Se dois conjuntos bem-ordenados  $W_1, W_2$  são isomorfos, então o isomorfismo de  $W_1$  em  $W_2$  é único.*

Se  $W$  é um conjunto bem-ordenado e  $u \in W$ , então  $\{x \in W : x < u\}$  é um segmento inicial de  $W$  (definido por  $u$ ). Como ambas as funções são isomorfismos, então a

imagem de  $x_0$  o menor elemento em  $W_1$  deve ser o menor elemento em  $W_2$ . Por hipótese de indução, seremos capazes de perceber que se  $f$  e  $g$  concordam num segmento inicial arbitrário  $u_i$ , então  $f(u_{i+1}) = g(u_{i+1}) = \min\{v | v > u_i\}$ .

O lema acima, juntamente com seus dois corolários, nos oferece os resultados segundo os quais podemos balizar nossa intuição sobre como estão dadas as relações de comparação entre conjuntos bem ordenados. Esses resultados demonstram que estão de acordo com nossa intuição e que, em princípio, não há qualquer espécie de mal comportamento quando generalizamos nossa concepção de ordem.

**Lema 3.2.8.** *Nenhum conjunto bem-ordenado é isomorfo a um segmento inicial de si mesmo.*

*Demonstração.* Se  $\text{im}(f) = \{x : x < u\}$ , então  $f(u) < u$ , o que contraria o Lema 3.2.5.  $\square$

**Teorema 3.2.9.** *Se  $W_1$  e  $W_2$  são conjuntos bem-ordenados, então exatamente um dos seguintes três casos ocorre:*

- (i)  $W_1$  é isomorfo a  $W_2$ ;
- (ii)  $W_1$  é isomorfo a um segmento inicial de  $W_2$ ;
- (iii)  $W_2$  é isomorfo a um segmento inicial de  $W_1$ .

*Demonstração.* Para  $u \in W_i$  ( $i = 1, 2$ ), seja  $W_i(u)$  o segmento inicial de  $W_i$  definido por  $u$ . Defina

$$f = \{(x, y) \in W_1 \times W_2 : W_1(x) \text{ é isomorfo a } W_2(y)\}.$$

Usando o Lema 3.2.8, é fácil ver que  $f$  é uma função injetiva. Se  $h$  é um isomorfismo entre  $W_1(x)$  e  $W_2(y)$ , e  $x < x'$ , então  $W_1(x')$  e  $W_2(h(x'))$  são isomorfos. Segue-se que  $f$  preserva a ordem. Se  $\text{dom}(f) = W_1$  e  $\text{im}(f) = W_2$ , então o caso (i) ocorre.

Se  $y_1 < y_2$  e  $y_2 \in \text{im}(f)$ , então  $y_1 \in \text{im}(f)$ . Assim, se  $\text{im}(f) \neq W_2$  e  $y_0$  é o menor elemento de  $W_2 - \text{im}(f)$ , temos  $\text{im}(f) = W_2(y_0)$ . Necessariamente,  $\text{dom}(f) = W_1$ , pois, caso contrário, teríamos  $(x_0, y_0) \in f$ , onde  $x_0$  é o menor elemento de  $W_1 - \text{dom}(f)$ . Logo, o caso (ii) ocorre.

De modo semelhante, se  $\text{dom}(f) = W_1$ , então o caso (iii) ocorre. À vista do Lema 3.2.8, os três casos são mutuamente exclusivos.  $\square$

Quando  $W_1$  e  $W_2$  são isomorfos, dizemos que possuem o mesmo *tipo de ordem*.



**Definição 3.2.10.** Um conjunto  $T$  é transitivo se todo elemento de  $T$  é um subconjunto de  $T$ .

**Definição 3.2.11.** Um conjunto é um Número Ordinal (ou simplesmente um ordinal) se é transitivo e bem ordenado por  $\in$ .

Denotaremos os ordinais por letras gregas minúsculas  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ . A classe de todos os ordinais é denotada por  $\text{Ord}$ .

Definimos:

$$\alpha < \beta \text{ se, e somente se, } \alpha \in \beta$$

**Lema 3.2.12.** As seguintes afirmações são o caso para ordinais:

- (i)  $0 = \emptyset$  é um ordinal.
- (ii) Se  $\alpha$  é um ordinal e  $\beta \in \alpha$ , então  $\beta$  é um ordinal.
- (iii) If  $\alpha \neq \beta$  são ordinais e  $\alpha \subseteq \beta$ , então  $\alpha \in \beta$ .
- (iv) Se  $\alpha, \beta$  são ordinais, então ou  $\alpha \subseteq \beta$  ou  $\beta \subseteq \alpha$ .

*Demonstração.* (i) e (ii) Por definição.

- (iii) Se  $\alpha \subseteq \beta$ , tome  $\gamma$  como o menor elemento em  $\beta - \alpha$ . Uma vez que  $\alpha$  é transitivo, temos que  $\alpha$  é seguimento inicial de  $\beta$  dado por  $\gamma$ . Portanto  $\alpha = \{\xi \in \beta : \xi < \gamma\} = \gamma$ , e  $\alpha \in \beta$ .
- (iv) Evidentemente,  $\alpha \cap \beta$  é um ordinal,  $\alpha \cap \beta = \gamma$ . Teremos  $\gamma = \alpha$  ou  $\gamma = \beta$ , de outra maneira  $\gamma \in \alpha$  e  $\gamma \in \beta$ , por (iii). Então  $\gamma \in \gamma$ , o que contradiz a definição de um ordinal ( $\in$  é uma ordem estrita de  $\alpha$ ).

□

**Definição 3.2.13.** Denotamos o menor ordinal limite não nulo por  $\omega$  (ou  $\mathbb{N}$ ). Os ordinais menores que  $\omega$  (elementos de  $\mathbb{N}$ ) são chamados de ordinais finitos, ou números naturais. Especificamente, temos:

$$0 = \emptyset, \quad 1 = 0 + 1, \quad 2 = 1 + 1, \quad 3 = 2 + 1, \quad \dots$$

Um conjunto  $X$  é finito se houver uma correspondência um-para-um de  $X$  com algum  $n \in \mathbb{N}$ . Dizemos que  $X$  é infinito se ele não for finito.

As noções de ordinalidade expandem nossa intuição aritmética para toda a teoria de conjuntos. Se, por um lado, não podemos contar, em sentido estrito, conjuntos com tamanho maior que o próprio conjunto dos números naturais, por outro lado, temos em mãos um poderoso aparato técnico que nos possibilita induzir uma estrutura de contagem em todo e qualquer conjunto de nosso universo. Apesar disso, veremos que essa forma abstrata da contagem, embora possa ser uma noção geral de quantificação, não captura certos elementos no escopo matemático da quantificação.

Voltando-nos à segunda forma da quantificação, notaremos a centralidade do conjunto  $\mathbb{R}$  dos reais para toda a matemática. Pois é com esse conjunto que somos capazes de formalizar noções de quantificação sobre contínuos, como as dimensões espaciais, o tempo, o peso, a temperatura, pontos numa linha e assim por diante. Historicamente, esse foi um dos mais intrigantes e necessários conjuntos de números, estudado por diferentes civilizações e épocas. Sua especialidade se estende por todo o desenvolvimento do conhecimento matemático e, como visto anteriormente, era de firme interesse dos matemáticos do final do século XVIII e início do século XX. Sua particularidade não está apenas na diferença intuitiva associada, mas no seu desenvolvimento técnico. A aritmetização da análise procura, além de um rigor conceitual mais acentuado, a reunião, sob um mesmo aspecto fundacional, dos conjuntos  $\mathbb{R}$  e dos conjuntos  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Q}$ . Isso significa, em outras palavras: (1) oferecer um fundamento aritmético para a análise e, ademais, (2) descobrir uma construção explícita dos números reais a partir dos conjuntos mais básicos mencionados acima.

Também na teoria de conjuntos — em par com os esforços da aritmetização da análise — o conjunto  $\mathbb{R}$  dos reais se distingue. O conhecido método da diagonal<sup>4</sup> revela a impossibilidade de contar uma grandeza contínua. Como já havia sido demonstrado no problema da medida, a contagem não se configura como o método apropriado para avaliar as grandezas. Assim, não é mera coincidência que haja, mesmo no quadro aritmetizado da teoria de conjuntos, um descompasso fundamental entre as formas da quantificação, como subproduto de uma diferença primária entre os tipos de quantidades representadas por cada conjunto.

Se tomarmos um conjunto  $A = \{1, 3, 5, 7\}$  como exemplo, há ao menos duas formas de perguntar sobre o tamanho de  $A$ . Do ponto de vista aritmético conjuntista,  $A$  possui quatro elementos, quantificação que diz respeito apenas à sua cardinalidade. No entanto, se fizermos um exercício de imaginação no qual cada elemento desse conjunto se torna um ponto numa linha contínua e refizermos a questão, então qual será o tamanho de  $A$ ? A intuição mais acertada dirá que  $A$  tem uma dimensão desprezível, se comparada ao contínuo da linha real. Essa intuição reintroduz um problema de quantificação por medida.

A ideia matemática de um contínuo é a abstração que se aproxima do conceito de

---

<sup>4</sup> Cf. Apêndice 6.2.

corpo extenso na física aristotélica. Internalizamos o fundamento empírico, a experiência fenomênica dos corpos, como o sentido matemático de continuidade multidimensional. Para compreender a forma como a geometria internaliza a ideia de corpo extenso da física, devemos compreender sua maneira de quantificação. Ora, como vimos anteriormente, há duas instâncias de quantificação, uma que se aplica a extensões discretas e enumeráveis, ideia correspondente à aritmética, e a quantificação por medida, aplicada às extensões contínuas. Também na matemática se desenvolveram duas ideias correspondentes, uma para a contagem, outra para a medida. Esta segunda se desenvolveu exponencialmente após a criação da topologia como área de interesse em si mesma.

É importante salientar que a natureza ontológica de um conjunto do ponto de vista de ZFC é dada por *extensionalidade*, isto significa que a compreensão da natureza de um conjunto está restrita a conhecer os seus elementos. O quadro teórico ignora, portanto, o aspecto fenomênico da questão. Mas isso não significa que não haja sempre um residual fenomenológico em cada conceito formal. Ao contrário, o intelecto opera com ferramentas da intuição que não podem nunca estar ausentes e imparciais quanto ao conteúdo intuitivo por trás de cada asserção lógica ou matemática. O problema original da medida é formulado por Aristóteles da seguinte maneira:

in magnitude, that which is continuous in one dimension is length, in two breadth, in three depth. Of these, limited plurality is number, limited length is a line, breadth a surface, depth a solid. (Aristóteles, Metafísica V, 1020<sup>a</sup>10)

Indo além da asserção categórica do trecho acima citado, podemos inferir que a física, se definida como a investigação não dos corpos capazes de movimento, mas como o estudo rigoroso dos objetos apresentados na experiência empírica, envolve sempre um problema de delimitação, ou seja, toda experiência de um objeto (corpo) envolve o reconhecimento de um limite. Em outras palavras, experienciar um corpo é atribuir-lhe um limite. Nesse momento, conseguimos vislumbrar a forma de aproximação entre a topologia e a teoria aristotélica dos corpos através das características topológicas da investigação. Como veremos posteriormente, o problema da *medida exterior de Lebesgue*<sup>5</sup> nada mais é que atribuir uma aproximação, tão próxima quanto possível, através dos abertos/fechados, dos limites geométricos ou aritméticos de um dado conjunto.

Vejamos, então, como a teoria, em seu quadro aritmético, compreende as noções de medida. Definimos  $\mathbb{R}^n$  como sendo o conjunto de vetores<sup>6</sup>  $n$  dimensionais de entradas reais, um intervalo fechado como sendo um retângulo fechado  $s$ . Vamos defini-los da seguinte maneira:

<sup>5</sup> Embora a medida exterior de Lebesgue não seja a única forma de definir uma medida em  $\mathbb{R}$ , nos limitaremos a ela por sua suficiência à análise proposta.

<sup>6</sup> Cf. Apêndice

$$s = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, n\}$$

Podemos imaginar os intervalos em cada eixo do espaço como uma faixa que se complexifica em dimensão à medida que adicionamos mais eixos, o volume de cada retângulo é uma interseção entre diferentes faixas. Perceba que a noção de limitação é expressa pelas cotas atribuídas a cada conjunto que representa um retângulo (Fig. 1). Além disso, a medida de cada objeto obedece ao critério de homogeneidade dimensional, evidentemente. A maneira matemática de apreender o conceito de medida não é simples, pois temos uma definição geral para espaços de altas dimensões. Podemos tratar a forma geométrica e sua dimensionalidade como o processo ao qual Aristóteles se refere ao descrever como se elege uma unidade de medida de acordo com o objeto a ser mensurado.

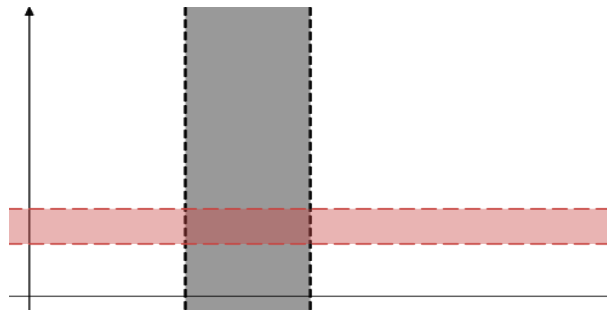


Figura 2 – Retângulo e seu volume em  $\mathbb{R}^2$

**Exemplo 3.2.14.**  $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x_1 \leq 5, 2 \leq x_2 \leq 4\}$  é um intervalo fechado em  $\mathbb{R}^2$ .

Definimos o volume de um intervalo fechado em  $\mathbb{R}^n$  como:

$$v(C) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

A estratégia da medida exterior de Lebesgue é primeiro cobrir um conjunto  $A \subset \mathbb{R}$  com intervalos fechados e, posteriormente, estimar seu volume através do volume desses intervalos. Essa engenhosa ideia certamente nos dá um começo para pensar um novo conceito de tamanho para os conjuntos, mas, a princípio, os intervalos que cobrem  $A$  podem conter elementos que não estão em  $A$ , o que superestimaria o tamanho do conjunto. De fato, dado um conjunto qualquer, podemos construir uma cobertura<sup>7</sup> infinita com uma família de intervalos  $c_k$  em que cada intervalo tenha volume 1.

<sup>7</sup> Cf. Apêndice.

Seja  $S = \{C_k\}$  uma coleção contável de intervalos fechados em  $\mathbb{R}^n$ , se  $A \subseteq \bigcup C_k$ , dizemos que  $S$  é uma cobertura fechada de  $A$ . Tome  $\sigma(S) = \sum v(C_k)$ ; se essa série diverge, então  $\sigma(C_k) = +\infty$ . Ou seja, dada uma coleção de intervalos que cobre um conjunto, se aos somarmos os volumes de cada intervalo, essa soma tende ao infinito, então o volume da família é, ele próprio, infinito.

**Definição 3.2.15.** *Tome  $A \subset \mathbb{R}^n$ . A Medida Exterior de Lebesgue de  $A$  é*

$$m^*(A) = \inf \{ \sigma(S) \mid S \text{ é uma coleção de intervalos fechados que cobre } A \}$$

Essa definição nos dá uma forma de aproximar o tamanho do conjunto  $A$  através do conjunto de medidas das famílias cujos elementos são coberturas do conjunto  $A$ . Diferentemente do processo de contagem, no qual a forma de acesso à quantidade é direta, pela listagem de seus elementos, na medida, a quantificação é feita de maneira indireta, por aproximação. Existe uma diferença de complexidade implicada pelo tipo de quantidade. De maneira análoga ao contexto empírico, onde se aplica o critério de homogeneidade próximo ao que é descrito por Aristóteles, a teoria pura adequa-se primeiro pelo filtro ontológico, na medida em que os objetos são homogeneizados quando trabalhamos apenas com objetos de uma mesma natureza (conjuntos) e, em segundo lugar, exigimos uma adequação dimensional na relação entre a medida e o mensurável.

**Observação 1.** *Dado qualquer conjunto  $A$  e qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe uma cobertura  $S$  de  $A$  por intervalos fechados tal que*

$$\sigma(S) \leq m^*(A) + \varepsilon.$$

Se  $m^*(A) = +\infty$ , a constatação é trivial. Para caso em que  $m^*(A)$  é finito, basta observar que  $m^*(A) + \varepsilon$  não pode mais ser um limite inferior para

$$\{ \sigma(S) \mid S \text{ é uma cobertura de } A \text{ por intervalos fechados} \}.$$

Faremos agora um par de exemplos que nos ajudam a aprofundar um pouco mais nossas intuições sobre o comportamento da medida exterior de Lebesgue, sobretudo quando lidamos com passagens entre espaços de dimensões diferentes.

**Exemplo 3.2.16.** *Seja  $A = [0, 1]$ , evidentemente  $S = \{[0, 1]\}$  é uma cobertura fechada para  $A$ . Aplicando as definições, teremos:*

$$m^*(A) \leq \sigma(S) = 1$$

**Exemplo 3.2.17.** *Seja  $E = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\}$ . Seja  $\epsilon > 0$ . Tome*

$$I_\epsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, -\epsilon \leq y \leq \epsilon\}$$

como a escolha de  $\epsilon$  é arbitrária, escolhemos  $\epsilon = 0$  e, portanto,  $m^*(E) = 0$ .

Prestando atenção nos exemplos 1.4.4. e 1.4.5. percebe-se que imaginamos ambos como segmentos de tamanho 1. Mas a computação da medida exterior de Lebesgue para cada um deles é diferente. O detalhe importante a ser observado é o seguinte: o primeiro exemplo define um conjunto que vive em  $\mathbb{R}^1$ , enquanto o segundo vive em  $\mathbb{R}^2$ . Quando fixamos a variável  $y = 0$  no par  $(x, y) \in \mathbb{R}$  estamos comprimindo o conjunto em uma subvariedade de dimensão inferior, isso resulta num caso particular do seguinte fenômeno geral: Tome constantes  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, s \in \mathbb{R}$ , e um  $k$  fixo, o conjunto.

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i \text{ para } i = 1, \dots, n, \text{ com } x \neq k \text{ e } x_k = s\}$$

tem medida exterior de Lebesgue igual a 0. Ou seja, o caso teórico, com a medida exterior de Lebesgue, expressa o critério de homogeneidade para o critério de medida de várias maneiras, uma delas é o efeito de não reconhecer a medida de um dado conjunto se usamos um critério não adequado para medi-lo. Isto significa, em termos técnicos, que a medida de um conjunto num espaço de dimensão  $n$ , se achatada em relação ao seu espaço ambiente, é sempre 0.

Dadas essas observações iniciais sobre como a matemática internaliza nossa noção intuitiva da medida, gostaríamos de apresentar três resultados que nos asseguram que a medida exterior de Lebesgue corresponde ao volume de um intervalo fechado — em situações que simulariam intuições empíricas de corpos extensos, que seria essa aplicação de uma medida a intervalos fechados:

**Proposição 3.2.18.** *Se  $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ , então  $m^*(A) \leq m^*(B)$ .*

*Demonstração.* Seja  $S$  uma cobertura de  $B$  por intervalos fechados. Então, evidentemente,  $S$  é uma cobertura de  $A$  por intervalos fechados. Assim,

$$m^*(A) \leq \sigma(S),$$

onde  $S$  é uma cobertura de  $B$  por intervalos fechados. Logo,

$$m^*(A) \leq \inf\{\sigma(S) \mid S \text{ é uma cobertura de } B \text{ por intervalos fechados}\}.$$

Portanto,  $m^*(A) \leq m^*(B)$ . □

**Proposição 3.2.19.** *As seguintes propriedades de aditividade valem para a medida exterior de Lebesgue:*

(i) Para quaisquer dois conjuntos  $A$  e  $B$ ,

$$m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B).$$

(ii) Para qualquer coleção enumerável de conjuntos  $\{A_n\}$ ,

$$m^*\left(\bigcup A_n\right) \leq \sum m^*(A_n).$$

*Demonstração.* (i) Se  $m^*(A)$  ou  $m^*(B)$  forem infinitos, então  $m^*(A \cup B)$  também será infinito pela proposição 3.2.18. Assim, nesse caso, o resultado é verdadeiro pela convenção de que  $+\infty \leq +\infty$ . Portanto, assumamos que tanto  $m^*(A)$  quanto  $m^*(B)$  são finitos.

Seja  $\varepsilon > 0$  dado. Pela Observação 1, existe  $S$ , uma cobertura de  $A$  por intervalos fechados, tal que

$$m^*(A) \leq \sigma(S) < m^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

De maneira similar, existe  $T$ , uma cobertura de  $B$  por intervalos fechados, tal que

$$m^*(B) \leq \sigma(T) < m^*(B) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, temos:

$$m^*(A \cup B) \leq \sigma(S \cup T) \leq \sigma(S) + \sigma(T) < m^*(A) + m^*(B) + \varepsilon.$$

Como  $\varepsilon$  é arbitrário, segue que:

$$m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B),$$

como queríamos demonstrar.

(ii) A demonstração segue o mesmo espírito de (i). Como no caso anterior, se  $m^*(A_n)$  for infinito para algum  $n$ , o resultado é válido. Além disso, se  $m^*(A_n) = +\infty$ , a medida exterior de Lebesgue de qualquer conjunto é menor ou igual a  $+\infty$ , então, novamente, o resultado é válido.

Portanto, assumiremos que todas essas quantidades são finitas.

Seja  $\varepsilon > 0$  dado. Para cada  $n$ , tome  $S_n$  como uma cobertura de  $A_n$  por intervalos fechados, tal que

$$m^*(A_n) \leq \sigma(S_n) < m^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Assim, temos:

$$m^*\left(\bigcup A_n\right) \leq \sigma\left(\bigcup S_n\right) \leq \sum \sigma(S_n) \leq \sum \left(m^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right).$$

Como  $\sum \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$ , segue que:

$$m^* \left( \bigcup A_n \right) \leq \sum m^*(A_n) + \varepsilon.$$

Como  $\varepsilon$  é arbitrário, concluimos que:

$$m^* \left( \bigcup A_n \right) \leq \sum m^*(A_n),$$

como queríamos demonstrar.

□

Os resultados acima foram um aquecimento conceitual para começarmos a compreender como a definição de medida exterior de Lebesgue nos conecta com as intuições necessárias para o conceito de medida e como ela se aproxima de nossa prática empírica de medir corpos extensos. Por último, como prometido, teremos:

**Proposição 3.2.20.** *Para qualquer intervalo fechado  $I \subset \mathbb{R}^n$ , temos  $m^*(I) = v(I)$ .*

*Demonstração.* Precisamos mostrar que  $v(I) \leq m^*(I)$ . Devido à discussão acima, basta provar que, se  $S = \{I_k\}$  for uma cobertura enumerável infinita de  $I$  por intervalos fechados, então  $v(I) \leq \sigma(S)$ . Dado

Seja  $\varepsilon > 0$ . Tome  $I_k^*$  como uma versão expandida de  $I_k$  tal que

$$I_k \subseteq \text{int}(I_k^*) \quad \text{e} \quad v(I_k^*) \leq (1 + \varepsilon)v(I_k).$$

Então,  $\{\text{int}(I_k^*)\}$  é uma cobertura aberta de  $I$ . Ou seja,

$$I \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \text{int}(I_k^*).$$

Como  $I$  é compacto (isto é,  $I$  é fechado e limitado),  $I$  pode ser coberto por um subcobertura finita. Digamos,

$$I \subseteq \bigcup_{k=1}^M \text{int}(I_k^*) \subseteq \bigcup_{k=1}^M I_k^*.$$

Isso significa que  $S = \{I_k^*\}_{k=1}^M$  é uma cobertura de  $I$  por um número finito de intervalos fechados.

Assim,

$$v(I) \leq \sum_{k=1}^M v(I_k^*) \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=1}^M v(I_k) \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) = (1 + \varepsilon)\sigma(S).$$



Como  $\varepsilon$  é arbitrário, segue que  $v(I) \leq \sigma(S)$ . Consequentemente,

$$v(I) \leq \inf\{\sigma(S) \mid S \text{ é uma cobertura de } I \text{ por intervalos fechados}\}.$$

Portanto, obtemos a desigualdade necessária:

$$v(I) \leq m^*(I).$$

□

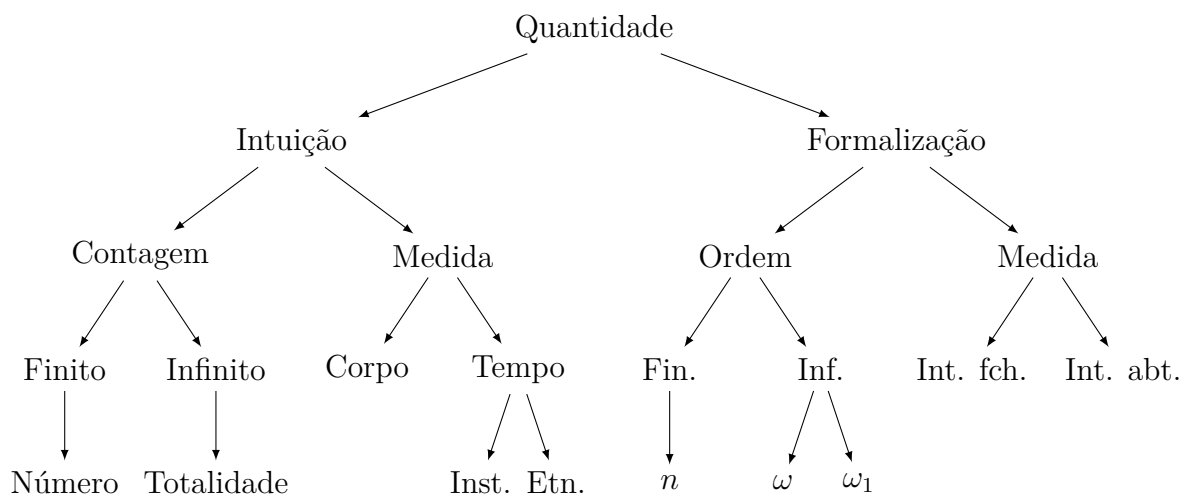
Assim, poderíamos eleger as duas formas de quantificação correspondentes a cada tipo de quantidade também no quadro teórico de ZF. Embora a tradição comum seja pautada numa visão aritmética dos conjuntos, há elementos técnicos que apontam diferenciação conceitual entre as duas formas de quantificação já discriminadas no contexto metafísico. Não obstante, essa questão não seria resolvida de maneira tão direta e simples, sobretudo pelo fato de ZF pretender-se como uma teoria pura e unificada, entendendo o contínuo com uma natureza muito próxima dos conjuntos enumeráveis<sup>8</sup>, todos sendo feitos de uma mesma matéria-prima.

Para além disso, como pudemos notar ao final de nossa investigação, as duas formas de quantificação, embora diferentes em natureza, não são concorrentes, isto é, ambas convivem com o aparato conceitual aritmético de ZF. O conceito de medida, como abordado nessa seção, como próprio da Análise, não se opõe ao teor aritmético da questão de maneira direta, mas, pelo contrário, oferece um novo caminho para pensar o conceito do que venha a ser uma medida, nesse caso, aplicando o conceito de medida puramente a conjuntos e não necessitando da noção de um corpo extenso. Dessa maneira, a matemática, através da topologia, ganha força em sua linguagem aritmética e expulsa de uma vez por todas as noções geométricas dependentes da intuição empírica.

Faremos a seguir dois esquemas de árvores representativos de como devemos entender as noções de quantificação em comparação com sua contraparte filosófica.

---

<sup>8</sup> Cf. Apêndice.



Esquematizamos acima como é dado o paralelo entre as duas formas de entendimento da teoria da quantificação. A parte **intuitiva** corresponde ao nosso entendimento conceitual da quantidade em suas formas de expressão e manifestação. Essa parte da ideia de quantidade se desenvolve não somente em nossa experiência empírica, mas, em outra parte, em nossas elaborações teóricas de cunho filosófico. A **contagem** divide-se em dois tipos principais, nas pluralidades que, na intuição, são sempre **finitas**, ou, por uma espécie de raciocínio indutivo, como forma de expressão intelectual de uma **totalidade**. Acredito que esteja claro o porquê de o número, em nossa intuição, sempre referir uma quantidade finita, visto que não somos capazes de experienciar objetos infinitos. Por outro lado, quando há uma quantidade cujo tamanho se estende indefinidamente, contado por nossa experiência, então tendemos a imaginar uma totalidade. A física moderna nos oferece bons exemplos desse tipo de fenômeno, como quando investigamos o tamanho do universo, a extensão de seu tempo, ou coisas semelhantes.

Por outro lado, a **medida** divide-se em outros dois aspectos. O primeiro, à medida que se aplica sobre objetos tangíveis, os **corpos**. Essa medida é, também na intuição, sempre **finita**. Ela corresponde à nossa capacidade intelectual para determinação de um *objectum quo*. Aqui é expressada novamente a nossa incapacidade de experienciar um objeto infinito, de forma que nossa medida sobre objetos concretos é sempre finita. Depois, a medida aplica-se a fenômenos como a **passagem temporal**, entidade na qual se distinguem duas formas. A primeira, finita, é uma composição de outras partes também finitas que intuitivamente conhecemos como **instantes**, os **quantum** temporais. Em geral, consideramos quantidades infinitas de tempo apenas intencionalmente, não oferecendo uma determinação precisa dessa quantidade como uma pluralidade de instantes, a essa intuição generalizada costumamos chamar **eternidade**.

Um segundo exemplo muito próximo e sempre em par com o de tempo é o conceito de medida espacial. Também como nos casos anteriores. A medida, intuitivamente, nunca

aplica-se à totalidade do espaço, ao espaço absoluto, ou mesmo a uma quantidade infinita de espaço, mas a determinações e limitações dessa ideia ou entidade. Depois, as abstrações como medida de cor, temperatura e outras mais abstratas podem ser mais ou menos resumidas a uma medida discreta, temporal e espacial. Um termômetro, por exemplo, se valerá de uma escala numérica ou uma imagem gerada por um pouco de mercúrio num tubo; a primeira resumindo-se à contagem, a segunda a uma representação geométrica de um fluido num cilindro.

Na formalização mais ou menos correspondente a essas ideias intuitivas, temos o seguinte: Divide-se também em duas formas. A que corresponde à contagem, como vimos no início desta seção, é a ideia de *ordem*, pela qual listamos os elementos de uma dada pluralidade como na ideia de contagem. As ordenações sobre pluralidades finitas são feitas através de números naturais. Por isso usamos  $n$ , um símbolo geralmente tomado para variar através de números naturais. Depois, na contraparte infinita da ordem, temos duas noções básicas, das ordens infinitas enumeráveis, que simbolizamos por  $\omega$  e as contínuas (não-enumeráveis), simbolizada pelo primeiro cardinal não-enumerável  $\omega_1$ .

Já na última parte, correspondente à medida, temos uma indicação pouco precisa que, todavia, serve ao que gostaríamos de ilustrar. A primeira, correspondendo à medida de intervalos fechados, que corresponderia à nossa medida intuitiva de corpos extensos, e a contraparte para intervalos abertos, que corresponderiam a uma ideia abstrata de medida, cuja intuição dependeria em maior grau de uma ideia de limite. O problema com esse novo aspecto é que ele não está diretamente contemplado pela definição de medida que oferecemos na presente seção, uma vez que a medida exterior de Lebesgue está definida para intervalos fechados. Contaremos, portanto, apenas com a ideia intuitiva, amparados no fato de que há outras definições de medida que abrangem os intervalos abertos. Além disso, essas imagens conceituais servem apenas para ilustrar de maneira introdutória como entendemos a teoria geral da quantificação em seus aspectos conceituais principais, nos campos conceituais e formais.

# 4 CAPÍTULO III - A TEORIA

## 4.1 O AXIOMA DA ESCOLHA

Filosoficamente, estaríamos interessados na adequação dos axiomas não somente em sua coesão técnica formal, mas na sua capacidade de reproduzir ou descrever nossas intuições conceituais. Sempre conceituamos e teorizamos a partir de um *objectum quo*, por esse motivo, nossa ideação necessita de um lastro semântico ontologicamente informado pela imagem que fazemos dos objetos sobre os quais teorizamos. Isso significa que estamos constantemente preocupados com a análise conceitual das definições e dos teoremas que construímos. Procuramos entender se nossos axiomas descrevem e caracterizam uma espécie particular de objetos.

A teoria axiomática de conjuntos tenta, portanto, apreender, por meio de asserções básicas (axiomas), a forma de nossa imaginação conceitual desses objetos, os conjuntos — ou melhor, um universo repleto deles — esclarecendo a forma ontológica dessas entidades e de suas relações no contexto de uma totalidade.

Em 1904, Zermelo formula um novo axioma com um objetivo específico: formalizar a intuição cantoriana de que podemos bem-ordenar qualquer conjunto de nosso universo e, conseqüentemente, atribuir a ele uma cardinalidade. Embora essa visão seja realmente desejável do ponto de vista de um quadro aritmético, ela vai contra o conceito metafísico da continuidade em seu sentido geral, que não está necessariamente ligado a uma forma de boa ordenação. Como vimos anteriormente, o contínuo pode estar ligado a várias intuições, à intuição metafísica de totalidade, de corpo extenso, de tempo, espaço, e assim por diante. Noções que não estão necessariamente relacionadas com a ordenação no sentido cantoriano.

Por sua centralidade na discussão de toda a teoria, ao analisarmos esse emblemático axioma, estaremos amplamente envolvidos com questões que não se restringirão a um único axioma, mas à visão do todo envolvida na construção conceitual do universo dos conjuntos. De maneira geral, as investigações sobre o Axioma da Escolha estão circunscritas a duas formas principais: na primeira, estão preocupados em investigar formas equivalentes desse axioma, como o Princípio da Boa Ordem de Zermelo e o Princípio do Máximo de Zorn, ou implicações desse axioma como o conhecido teorema de Tychonoff, ou o paradoxo da decomposição das esferas, de Banach–Tarski; depois, preocupam-se em investigar o teor lógico-filosófico desse axioma por perscrutar suas características matemáticas, como a sua não-construtividade, ou a sua independência em relação aos outros axiomas de ZF.

No que se refere ao tipo de pesquisa citada no parágrafo anterior, poderíamos dizer, de maneira grosseira, que sem o Axioma da Escolha ou suas formas equivalentes,

a matemática se tornaria um tanto mais difícil e, em alguns casos, menos intuitiva ou mais difícil de ser dominada. Esse fato é entendido quando nos damos conta do caráter limitativo desse axioma, e de como sua aplicação aproxima problemas muito abstratos e indomáveis ao comportamento das entidades ou conjuntos finitos. Poderíamos formular nossa visão com o auxílio de um pressuposto epistemológico bastante simples e pouco contestável, a saber, que nosso entendimento adequa-se de maneira mais clara a objetos determinados, limitados ou finitos.

Dessa maneira, teoremas limitativos, como o Axioma da Escolha, nos auxiliam a tornar as intuições infinitárias epistemologicamente mais comportadas. Assim, descreveremos o teor onto-epistemológico desse axioma de maneira duplamente caracterizada, a saber:

1. O Axioma da Escolha tem caráter limitativo;
2. O Axioma da Escolha carrega em si um teor aritmético.

Para facilitar nossa compreensão do que seja cada uma das características citadas acima, vamos fazer um experimento imaginativo de aplicação do Axioma da Escolha.

Suponha que temos uma coleção de caixas, cada uma contendo pelo menos dois objetos. Nada garante que essas caixas estejam organizadas de forma a facilitar nosso acesso a uma ordem prévia entre elas, ou seja, elas não estão, por exemplo, enfileiradas, ou separadas por qualquer critério facilmente reconhecível. Além disso, os objetos no interior de cada caixa são únicos, o que significa que nenhuma caixa compartilha objetos iguais com as outras e, ademais, há um número infinito de caixas:

|               |             |                  |     |             |     |
|---------------|-------------|------------------|-----|-------------|-----|
| Caixa $C_1$   | Caixa $C_2$ | Caixa $C_3$      | ... | Caixa $C_n$ | ... |
| $\{a, b, c\}$ | $\{x, y\}$  | $\{p, q, r, s\}$ | ... | $\{w, z\}$  | ... |

O que nos garante que haja um procedimento bem definido possibilitando que escolhamos um objeto no interior de cada caixa da nossa coleção? Em princípio, nada. A coleção, na verdade, pode estar disposta de uma forma que identifiquemos apenas um montante caótico, no qual não possamos identificar qualquer forma de organização inicial que nos possibilite retirar um objeto de cada uma delas. Mesmo supondo que tivéssemos um tempo infinito e os poderes necessários para permanecer uma eternidade ali abrindo caixas e retirando objetos, ainda assim nada nos asseguraria uma estratégia para ter êxito em nossa missão inicial.

O Axioma da Escolha, todavia, nos assegura que existe uma possível caixa na qual estão os objetos que precisamos, isto é, uma caixa que contém um objeto de cada caixa daquela coleção inicial ou, equivalentemente, que existe um procedimento, mesmo que não saibamos descrever com precisão, que assegura ser possível escolher um objeto de cada caixa.

Em termos de funções, temos o seguinte:

$$f(C_1) = a, \quad f(C_2) = x, \quad f(C_3) = p, \quad \dots$$

onde  $f$  é a função de escolha.

No exemplo acima, podemos notar a força da ideia da escolha no axioma em questão. Em princípio, as entidades ou contextos infinitários nos impõem obstáculos pouco adequados às nossas capacidades intelectuais, a não ser a contestação da sua insuficiência. Assim como na ilimitação do *apeiron*, objetos infinitos podem ser mais ou menos hostis à nossa intuição, em alguns casos, não podem nem mesmo constituir um objeto para ela. No entanto, ao invocarmos um princípio como o da escolha ilustrada no exemplo, o infinito rapidamente se torna algo tratável. A infinidade perde parte de sua indeterminação em favor de uma característica que aproxima sua natureza daquela presente em contextos finitários.

Diferentemente de outros resultados conhecidamente limitativos, em sentido técnico, nos quais podemos identificar a determinação clara de uma fronteira para nossas teorias, como os resultados de incompletude de Gödel ou os teoremas de definibilidade de Tarski, o caráter limitativo da escolha está justamente no que mencionamos no parágrafo anterior, ou seja, em tornar um objeto tão hostil à nossa intuição num outro um tanto mais tratável. O motivo pelo qual fazemos uma distinção primária entre infinitos contáveis e não contáveis está na sua proximidade com o contexto finitário. Embora a infinidade seja sempre uma propriedade pouco apreensível ao nosso entendimento, se distinguimos características que o aproximem de nossa intuição ordinária, então fazemos uma gradação de comportamento daqueles que se aproximam de nosso contexto ordinário para aqueles que se distanciam para um contexto puramente abstrato.

Mas quando há uma separação radical entre as naturezas dos infinitos, entre enumeráveis e não-enumeráveis, ou entre discretos e contínuos, esses últimos tornam-se mais distantes de nosso esforço primeiro com a aritmetização da matemática. Como vimos anteriormente, a aritmetização nada mais é que o esforço geral de submeter toda a matemática à lógica de manifestação e método adotados no contexto dos números naturais e inteiros. Mas se a continuidade não pode ser contada, então seria necessário ampliar nosso conceito de aritmética e contagem para níveis de abstração mais elevados que possibilitassem estender nosso aparato aritmético mesmo em contextos nos quais não conseguimos aplicar nossa forma mais simples da contagem.

A contagem envolve um processo não só de universalização (todo), mas também de individualização (partes). Ao contarmos, precisamos, de antemão, determinar uma totalidade sob a qual recaiam suas partes. Nas grandezas discretas, onde a separação ontológica entre as partes e o todo é mais evidente, nossa intuição reconhece um comportamento epistemológico de contornos mais bem detalhados, onde a diferença entre o todo e as partes é quase imediata. No infinito, contudo, inicia a ser um tanto mais delicado. No que se refere às pluralidades, ainda estamos mais ou menos habilitados a determinar as características que fazem da parte um componente do todo, bem como de suas peculiaridades mais evidentes. Embora identifiquemos aberrações como a igualdade de cardinalidade entre todo e partes destacadas — como no caso da relação entre o todo dos números naturais e o todo dos números ímpares, situação na qual o primeiro conjunto contém o primeiro, mas ambos possuem um mesmo tamanho. Ainda assim, não teríamos dificuldades em diferenciar a natureza de um intervalo da totalidade dos números naturais.

Quando nos referimos a um contínuo, essa facilidade de diferenciação se esvai. No contínuo dos números reais, o intervalo unitário  $(0,1)$ , por exemplo, tem o mesmo tamanho da totalidade dos números reais. Essa é a forma matemática de manifestarmos uma das características de indeterminação envolvidas na ideia de uma totalidade contínua, na qual suas partes reproduzem, ou reconduzem, à própria totalidade.

Essa característica de constituição ontológica do contínuo o torna um objeto epistemologicamente mais complexo e intricado. O fato de o intervalo unitário ter o mesmo tamanho que o todo dos números reais, por exemplo, torna a natureza das partes componentes muito próxima à da totalidade da qual participam. Ela nos impede de ter uma imagem bem detalhada da separação real entre parte e todo de um ponto de vista intuitivo. Esse atributo recupera a condição metafísica do problema, visto que o indeterminado, ou a totalidade enquanto tal, pré-teórica, carrega em seu conceito um sabor de indistinção parte-todo. Se é clara a distinção simbólica ou intencional entre  $(0,1)$  e  $\mathbb{R}$ , essa diferença não é reproduzida do ponto de vista quantitativo.

Dessa maneira, dado que a contagem exige uma diferenciação quase imediata entre todo e parte, a continuidade se configuraria, ontologicamente, como um objeto estranho a esse tipo de quantificação.

Podemos, agora, enxergar a força envolvida na postulação e adoção do Axioma da Escolha, capaz de tornar a abstração da contagem ainda mais abrangente, aplicando-a a contextos originariamente estranhos a ela. Como veremos, entre as principais consequências desse postulado, está o chamado Princípio da Boa Ordenação, sob o qual podemos induzir ou simular um processo de contagem abstrata em um conjunto qualquer de nosso universo. Para ilustrar esse fenômeno, vamos enunciar ambos os postulados e avaliar sua relação lógica.

**Axioma da Escolha.** Seja  $\mathcal{F} : \{A_i : i \in I\}$  uma coleção de conjuntos não vazios dois a dois disjuntos. Então existe um conjunto  $\mathfrak{c} = \{x_i : i \in I\}$  que tem exatamente um elemento  $x_i$  de cada  $A_i \in \mathcal{F}$ .

**Princípio da Boa Ordenação.** Todo conjunto pode ser bem ordenado.

**Teorema 4.1.1.** *A Axioma da Escolha implica o princípio da Boa Ordenação.*

*Prova.* Considere um conjunto  $S$  e seja  $F$  uma função de escolha para todos os subconjuntos não vazios de  $S$ . Devemos encontrar um número ordinal  $\alpha$  tal que a sequência  $a_0, \dots, a_\xi, \dots$  ( $\xi < \alpha$ ) seja uma enumeração injetiva de  $S$ . Construímos a sequência  $a_\xi$  por recursão transfinita, começando com  $a_0 = F(S)$ , e, para todos os  $a_\xi$  subsequentes, temos:

$$a_\xi = F(S \setminus \{a_\eta : \eta < \xi\}).$$

Este novo conjunto  $\{a_0, \dots, a_\xi, \dots\}$  eventualmente conterá todos os elementos de  $S$ , e os elementos estarão bem-ordenados pelos índices.  $\square$

Tendo em mente que aproximamos as noções de aritmética e de contagem e, ademais, que percebemos o caráter psicológico da contagem como uma espécie de listagem dos elementos de uma pluralidade, o teorema 4.1.1 deve ser interpretado como um resultado que generaliza a contagem, de modo a planificar o nosso universo. A exigência envolvida no Axioma da Escolha é, dessa forma, de cunho ontológico, pois, uma vez aceito, é necessário que os objetos da teoria, a despeito do caráter não-construtivo da asserção, sejam adequados à quantificação por contagem. Esse tipo de resultado limitativo restringe as imagens conceituais dos conjuntos àquelas que podemos discretizar virtualmente. Enquanto o infinito do contínuo diferenciava-se dos infinitos discretos por sua natureza distante de nossa realidade ordinária, tornando-o um objeto hierarquicamente mais abstrato, uma vez planificado o universo, essa característica é enfraquecida.

**Definição 4.1.2.** *A cardinalidade de um conjunto  $X$  é o menor ordinal  $\alpha$  equipotente a  $X$ , isto é, um cardinal.*

**Corolário 4.1.3.** *Para todo conjunto infinito  $A$ , existe um único  $\aleph$  tal que  $A$  possui cardinalidade  $\aleph$ , isto é,  $\text{card}(A) = \aleph$ .*

*Demonstração.* Se o Axioma da Escolha (*Axiom of Choice*) é válido,  $A$  pode ser bem-ordenado. Portanto, ele é equipotente a algum ordinal infinito e, assim, a um único número ordinal inicial  $\aleph = \aleph_\alpha$ .  $\square$



Se com o resultado da diagonal de Cantor havíamos nos deparado com uma diferença inconciliável entre as naturezas dos diferentes tipos de infinitos, com a adição do Axioma da Escolha e da descoberta do teorema anterior, forçamos, no contínuo, um aspecto, uma forma arbitrária de determinação. Em outras palavras: se assumimos uma maneira arbitrária de determinar uma característica antes indeterminada, então enfraquecemos a natureza onto-epistemológica do contínuo.

Em alguns contextos, os teóricos dizem que conseguimos estudar os infinitos por um processo indutivo no qual reproduzimos estruturas de comportamento finitárias para números arbitrariamente grandes e de forma indefinida, alcançando, assim, uma intuição mais ou menos balizada da infinidade. Pensamos que o Axioma da Escolha e seus equivalentes ou seus agregados operam de forma análoga a essa, limitando manifestações pouco tratáveis a comportamentos semelhantes aos da finitude ou da enumerabilidade.

A condição de continuidade, na teoria de conjuntos, portanto, perde parte de sua força, não só se perdeu o seu sentido de totalidade, noção na qual a continuidade era entendida em sua face mais radical, como intuição da falta de um ordenamento, mas de qualquer determinação de um objeto foi substituída por uma noção devedora da geometria, como o quadro teórico de ZFC torna a perspectiva conjuntista em um universo planificado.

## 4.2 A DISSENSÃO

Embora a adoção de certos axiomas, como no conhecido formato ZFC seja a prática mais corrente, existem outras formas de axiomatização exploradas na pesquisa matemática afora. Como destacamos na seção anterior, um sistema axiomático é adotado de maneira a formalizar os fundamentos de nossas intuições sobre os objetos matemáticos e, portanto, aspectos pontuais ou mais gerais podem variar de acordo com as diferentes intuições que desejamos apreender matematicamente. Dessa maneira, adotar o Axioma da Escolha não é a única maneira possível para fundamentar a prática teórica. Há, nesse contexto, duas correntes básicas que disputam uma visão de fundo metafísico sobre as verdades matemáticas. Vamos explorá-las antes de passar à discussão central desta seção: o Axioma da Determinação<sup>1</sup>.

Com o desenvolvimento da Teoria de Conjuntos, foram identificados muitos lugares onde a capacidade teórica de ZFC — na verdade, isso se estende para qualquer teoria de primeira ordem — falha, os chamados resultados de independência. Nesses casos, essa teoria

---

<sup>1</sup> Vale ressaltar que fazemos aqui um uso diferente do conceito de *determinação*. Nos capítulos anteriores, quando usamos essa palavra, nos referíamos à determinação epistemológica, conceito relacionado à nossa capacidade de determinar um *objectum quo*. Nesta seção, estaremos comprometidos com a determinação matemática, associada à teoria dos jogos, mais especificamente com a existência de uma estratégia vencedora para um dado jogo.

axiomática mostra-se insuficiente para oferecer provas cujos resultados são considerados desejáveis. Assim, a comunidade matemática dividiu-se em duas formas distintas e concorrentes para interpretar os casos nos quais a teoria satura, esses posicionamentos ficaram conhecidos como *Pluralismo* e *Não-pluralismo*. Suas visões filosóficas dividem-se basicamente da seguinte maneira:

**Pluralismo:** Caracteriza-se pela negação de uma objetividade das teorias matemáticas no sentido de fazer referência a um universo objetivo e independente.

**Não-pluralismo:** Caracteriza-se pela alegação de uma insuficiência de nossos empreendimentos teóricos em oferecer um aparato suficiente para a justificação de nossas asserções matemáticas e que, todavia, não significam uma não-objetividade.

O pluralismo, portanto, sustenta uma espécie de visão antirrealista e, além disso, justifica a adoção de um determinado conjunto de axiomas em detrimento de outro, baseada em motivos práticos. De acordo com a conveniência de cada momento específico da história ou do estado intelectual, somos levados a adotar certo conjunto axiomático em detrimento de outros. O não-pluralismo, por sua vez, tende a interpretar os resultados de independência como indicações a favor de uma realidade objetiva acerca da qual não somos momentaneamente capazes de decodificar, dadas as limitações teóricas de cada sistema em voga.

Após a criação da teoria de conjuntos, o problema sobre as cardinalidades transfinitas — em especial a hipótese do contínuo que veremos mais à frente — tornou-se tema central da pesquisa durante algumas décadas, constituindo a centralidade de  $\mathbb{R}$  como objeto de investigação para a matemática do século XX. Nesse ínterim, a teoria descritiva de conjuntos surge e seu principal intento será estudar um tipo específico de subconjuntos de números reais, os chamados conjuntos definíveis. Jech nos define esse campo de pesquisa da seguinte forma:

Descriptive set theory deals with sets of reals that are described in some simple way: sets that have a simple topological structure (e.g., continuous images of closed sets) or are definable in a simple way. The main theme is that questions that are difficult to answer if asked for arbitrary sets of reals, become much easier when asked for sets that have a simple description. An example of that is the Cantor-Bendixson Theorem: Every closed set of reals is either at most countable or has size  $2^{\aleph_0}$ . (Jech, 2002, p.139)

Heuristicamente, podemos entender que a teoria descritiva de conjuntos se preocupa com os conjuntos que podem ser construídos a partir de conjuntos simples — como, por exemplo, os conjuntos abertos e fechados de um dado espaço topológico<sup>2</sup> —, através de operações como interseção, união, projeção e complementação.

---

<sup>2</sup> Cf. Apêndice.

Ou seja, a teoria descritiva de conjuntos está preocupada em estudar as formas de acessar conjuntos definíveis usando fórmulas matemáticas tão simples quanto possível e, além disso, de oferecer hierarquias para entendermos como esses tipos de conjuntos se comportam no quadro dessas teorias. Boa parte das investigações não necessita da forma forte do Axioma da Escolha, mas apenas de sua forma mais fraca, a *escolha contável*. De fato, é possível provar que o Axioma da Determinação, usado nessa vertente da teoria de conjuntos, implica a versão contável do Axioma da Escolha<sup>3</sup>. Vejamos agora um pouco do contexto técnico e alguns resultados emblemáticos do Axioma da Determinação em relação ao Axioma da Escolha.

Vamos supor que dois jogadores se reúnem para jogar um tipo específico de jogo, que vamos descrever adiante. Imagine ainda que uma partida desse jogo tenha fim após uma infinidade de jogadas. Para isso, escolheremos dois jogadores ideais I e II que sejam capazes de jogar jogos infinitos.

Tome um subconjunto  $A \subset \omega^\omega = \mathcal{N}$  e associe a ele um jogo  $G_A$ . Uma partida é uma sequência  $\langle a_0, b_0, a_1, b_1, \dots \rangle \in \omega^\omega$ . Para cada  $n$ ,  $a_n$  será a  $n$ -ésima jogada do jogador I e  $b_n$  a  $n$ -ésima jogada do jogador II.

Gostaríamos de supor que um dos jogadores possui uma estratégia vencedora. Isto significaria que, ao fim de infinitas jogadas, um dos jogadores atinge o objetivo do jogo, de forma que o outro não tenha o mesmo êxito, isto é, o jogo não termina empatado e há sempre um vencedor.

Uma *estratégia* para o jogador I é uma função  $\sigma$  que assume valores em  $\omega$  e cujo domínio são as sequências finitas  $s \in Seq$  de tamanho par. Heuristicamente, uma estratégia será uma regra preestabelecida que o jogador seguirá (a sequência do jogador I terá tamanho par, representando que ele alterna suas jogadas com um adversário). Além disso, embora, ao final do jogo, tenhamos jogado uma partida infinita, cada jogada da estratégia é dada por um "pedaço" finito.

Suponhamos que o jogador I possua a seguinte estratégia:

- i.  $\sigma(\emptyset) = a_0$
- ii.  $\sigma(\langle a_0, b_0, \rangle) = a_1$
- iii.  $\sigma(\langle a_0, b_0, a_1, b_1 \rangle) = a_2$

E assim por diante. Perceba que cada jogada depende de dois fatores: da estratégia e das jogadas precedentes do adversário  $b = \langle b_m : m \in \omega \rangle$ . Assim, definimos um pedaço da partida como  $\sigma * b$ . Uma estratégia é vencedora para o jogador I sempre que, em cada parcial, a sequência resultante é um subconjunto de  $A$ .

---

<sup>3</sup> Cf. Jech, 2002, cap. 25.

De maneira muito semelhante, uma estratégia para o jogador II será uma função  $\tau$  com valores em  $\omega$ , definida nas sequências finitas  $s \in Seq$  de tamanho ímpar. Se o jogador I joga  $a \in \mathcal{N}$  e o jogador II segue a estratégia  $\tau$ , então o segundo jogador vence se todas as suas parciais pertencem ao complemento de  $A$  em relação a  $\mathcal{N}$ . Definimos as *estratégias vencedoras* de I e II, respectivamente, da seguinte maneira:  $\{\sigma b : b \in \mathcal{N}\} \subset A$  e  $\{\tau a : a \in \mathcal{N}\} \subset \mathcal{N} - A$ . Veremos que o Axioma da Determinação não é compatível com o Axioma da Escolha.

**Axioma da Determinação.** Para todo  $A \subset \omega^\omega$ , o jogo  $G_A$  é determinado.

**Teorema 4.2.1.** *Seja  $F(X; Y)$  o conjunto de todas as funções entre dois conjuntos  $X$  e  $Y$ . Tome  $X$  um conjunto qualquer e  $Y$  um conjunto com ao menos dois elementos. Não existe  $\phi : X \rightarrow F(X; Y)$  sobrejetiva.*

Prova. Tome  $\phi : X \rightarrow \mathcal{F}(X; Y)$  e seja  $\phi(x) = f_x$  para  $x \in X$ . Por hipótese,  $Y$  possui ao menos dois elementos; portanto, seja  $f_x(x)$ , escolhamos  $g(x) \in \mathcal{F}(X; Y)$  de forma que  $g(x) \neq f_x(x)$  para todo  $x \in X$ . Dessa maneira,  $f_x \neq g$  para  $x$  qualquer. Logo,  $g \notin \phi(X)$ .  $\square$

Um corolário muito importante do teorema acima é o fato de que: dados  $X_1, \dots, X_n$  conjuntos infinitos enumeráveis, seu produto  $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$  não é enumerável. Se considerarmos que todo  $X_n = \mathbb{N}$ , então o produtório será igual a  $\mathcal{F}(\mathbb{N}; \mathbb{N})$  que, pelo teorema 6.1, não pode ser enumerável.

Pela definição, toda estratégia é uma função cujo contradomínio é  $\omega$  e o domínio é um conjunto infinito de sequências finitas em  $\omega$ . Aplicando o teorema 6.1, chegamos à conclusão de que o conjunto das estratégias é não-enumerável e tem cardinalidade  $2^{\aleph_0}$ . Se generalizarmos esse raciocínio para um cardinal arbitrário  $\beta$  chegaremos à conclusão de que o Axioma da Determinação não é compatível com o Axioma da Escolha.

O Axioma da Determinação (AD) postula que qualquer jogo  $G_A$  é determinado, ou seja, como gostaríamos de supor no início dessa seção, sempre há um jogador com uma estratégia vencedora.

**Lema 4.2.2.** *Assumindo o Axioma da Escolha, existe  $A \subset \mathcal{N}$  tal que o jogo  $G_A$  não é determinado.*

Prova. Vamos tomar dois conjuntos da seguinte forma:  $\{\sigma_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$  e  $\{\tau_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$  sendo conjuntos que enumeram todas as estratégias dos jogadores I e II, respectivamente. Agora construímos conjuntos  $X = \{x_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$  e  $Y = \{y_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ , ambos subconjuntos de  $\mathcal{N}$ . Dados  $\{x_\xi : \xi < \alpha\}$  e  $\{y_\xi : \xi < \alpha\}$  vamos escolher algum  $y_\alpha = \sigma_\alpha * b$  para algum  $b$  com  $y_\alpha \notin \{x_\xi : \xi < \alpha\}$ . Esse conjunto existe pois o conjunto  $\{\sigma_\alpha * b : b \in \mathcal{N}\}$

é não-enumerável. Analogamente, se escolhemos um  $x_\alpha = a * \tau_\alpha$  para algum  $a$  e  $x_\alpha \notin \{y_\xi : \xi < \alpha\}$ . Então os conjuntos  $X$  e  $Y$  são disjuntos, e não importa o  $\alpha$  escolhido, haverá  $\sigma_\alpha * b \notin X$  e haverá  $a * \tau_\alpha \in X$  de maneira que nem I, nem II possui uma estratégia vencedora para  $G_x$ .  $\square$

O teorema acima nos mostra como, a partir do Axioma da Escolha, podemos construir uma forma de violar a exigência de AD. Primeiro escolhemos um ordinal enumerável  $\alpha$  que usaremos para enumerar todas as estratégias dos jogadores I e II. Depois construímos dois conjuntos que estão contidos no Espaço de Baire  $\mathcal{N}$ , ou seja, os conjuntos  $X$  e  $Y$  são conjuntos de jogadas (sequências de números naturais) construídos a partir do seguinte processo: para toda jogada de I, encontramos uma jogada, sob a mesma estratégia, que não está no conjunto da primeira; o que viola AD. Por outro lado, se escolhemos uma jogada para II que está em um dos conjuntos, também conseguimos escolher uma outra jogada, sob a mesma estratégia, de II, que não está no mesmo conjunto da anterior. Ou seja, nem I, nem II serão capazes de vencer uma partida.

**Lema 4.2.3.** *O Axioma da Determinação implica que toda família contável de conjuntos não vazios de números reais tem uma função escolha.*

Prova. Dada uma família  $\mathcal{X} = \{X_n : n \in \omega\}$  de subconjuntos não vazios de  $\mathcal{N}$ , então provaremos que existe uma  $f$  em  $\mathcal{X}$  tal que  $f(X_n) \in X_n$  para todo  $n$ . Vamos considerar o seguinte jogo: Se I joga  $\langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$  e II joga  $\langle b_0, b_1, b_2, \dots \rangle$ , então II vence se, e somente se,  $b \in X_{a_0}$ . É evidente que I não tem uma estratégia vencedora: uma vez que I joga  $a_0$ , o jogador II encontra algum  $b \in X_{a_0}$ , joga  $b = \langle b_0, b_1, b_2, \dots \rangle$  e então vence. Portanto, II tem uma estratégia vencedora  $\tau$ , e podemos definir  $f$  em  $\mathcal{X}$  como se segue:  $f(X_n) = \tau * \langle n, 0, 0, 0, \dots \rangle$ .  $\square$

O lema 4.2.3 ilustra como construir uma função escolha numa dada família de conjuntos, porém, diferentemente do Axioma da Escolha, essa versão mais fraca exige que a família seja contável. A construção da função é simples, toda vez que o jogador I escolhe uma estratégia em que seus turnos serão as entradas da sequência  $a_0, a_1, a_2, \dots$ . Se o jogador I joga  $a_0$ , como  $X_{a_0}$  é não-vazio, então II encontra um elemento  $b \in X_{a_0}$  e coloca sua sequência aí. Essa estratégia é vencedora para II, pois pode ser executada para uma escolha arbitrária. Chamemos essa estratégia de  $\tau$ , assim podemos definir a função escolha como sendo a aplicação da estratégia na  $a_n$ -ésima jogada de I.

Vemos, dessas maneira, que o Axioma da Determinação se configura como uma possibilidade paralela ao Axioma da Escolha. Além dos resultados que demonstramos aqui, há toda uma literatura em volta desse axioma, explorando sua própria forma de desenvolvimento da ideia do universo dos conjuntos. Vejamos algumas consequências interessantes desse axioma:

## 1. Estrutura Bem-Comportada dos Subconjuntos dos Reais:

- Todo subconjunto dos reais é Lebesgue mensurável.
- Todo subconjunto dos reais tem a propriedade de Baire.
- Todo subconjunto não enumerável dos reais tem um subconjunto perfeito.

## 2. Ordinalidades e Estrutura dos Conjuntos:

- Não existe uma boa-ordenação no conjunto dos números reais.
- Desenvolvimento de hierarquias refinadas.

Esses são alguns dos resultados conseguidos pela teoria descritiva que consideramos de maior interesse para as investigações do presente trabalho, com especial ênfase para o segundo item, sobre Ordinalidades e Estruturas. Além desses resultados, o Axioma da Determinação evita alguns dos principais paradoxos gerados pelo Axioma da Escolha, como o conhecido Paradoxo de Banach-Tarski.

O traço mais importante está ligado à nova forma sob a qual precisamos interpretar o conjunto dos números reais, sem a possibilidade de induzir uma boa ordenação sobre eles, como no caso do Princípio da Boa Ordenação. Essa característica nos mostra que a via antiga de interpretação do universo dos conjuntos não é a única forma interessante de fazer teoria de conjuntos. Além disso, considerando que a teoria descritiva dos conjuntos tem como objeto central os números reais, podemos imaginar que a característica aritmética da boa ordenação poderia não ser a mais adequada para lidar com esses números. A existência do Axioma da Determinação, bem como da tradição descritiva, nos oferece, assim, um exemplo claro de dissensão no quadro técnico de ZF que nos impele a questionar as diferentes formas e interpretações possíveis dentro desse quadro técnico.

## 4.3 O PROBLEMA DAS QUANTIDADES REVISITADO

Daremos, agora, um passo atrás na história da teoria de conjuntos para apresentar o problema central deste trabalho sob seu aspecto matemático: a chamada *Hipótese do Contínuo*. Nosso intuito, contudo, não será, como na maioria dos trabalhos, dar uma introdução à técnica desse problema, mas procurar ventilar possibilidades de interpretações para os resultados já conhecidos sobre ele. Essa hipótese pode ser heurísticamente entendida como a seguinte pergunta: há uma quantidade, ou cardinalidade, que esteja entre a quantidade dos números naturais (discretos) e a quantidade dos números reais (contínuo)? Procuraremos investigar essa pergunta do ponto de vista filosófico como a contribuição desse trabalho para a filosofia da continuidade.

Nossa tentativa será apresentar alguns pontos-chave que nos auxiliarão a entender o que se tem a favor ou contra a Hipótese do Contínuo. Adiantaremos que, tendo em

mente o atual estado de desenvolvimento da teoria de conjuntos, aliado aos interesses filosóficos de Cantor na criação dessa teoria, seria desejável que tal hipótese fosse adotada como verdadeira. No entanto, há inúmeros resultados e avaliações, tanto matemáticas quanto filosóficas, que poderiam contar a seu desfavor.

**Definição 4.3.1.** *Um subconjunto  $A \subseteq X$  de um espaço topológico  $X$  é chamado **denso em  $X$**  se o fecho de  $A$  é igual a  $X$ , ou seja, se:*

$$\overline{A} = X.$$

Equivalente,  $A$  é denso em  $X$  se, para todo ponto  $x \in X$  e para todo aberto  $U \subseteq X$  tal que  $x \in U$ , temos  $U \cap A \neq \emptyset$ . Isso significa que todo aberto de  $X$  contém pelo menos um ponto de  $A$ . Munidos dessa definição, tomemos  $\mathfrak{c}$  como a cardinalidade de  $\mathbb{R}$ .

**Raciocínio 1:** Como o conjunto  $\mathbb{Q}$  de todos os números racionais é denso em  $\mathbb{R}$ , pois todo número real  $r$  é igual a  $\sup\{q \in \mathbb{Q} : q < r\}$  e, como  $\mathbb{Q}$  é enumerável, segue que  $\mathfrak{c} \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Q})| = 2^{\aleph_0}$ .

**Raciocínio 2:** Seja  $\mathfrak{c}$  o conjunto de todos os reais da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n},$$

onde cada  $a_n = 0$  ou  $2$ . O conjunto  $\mathfrak{c}$  é obtido removendo do intervalo fechado  $[0, 1]$  os intervalos abertos  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ,  $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ ,  $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ , etc.

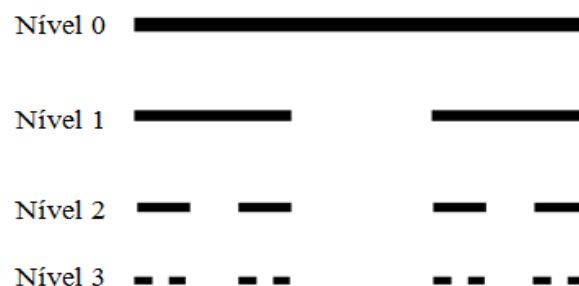


Figura 3 – Conjuntos de Cantor

$\mathfrak{c}$  está em correspondência um a um com o conjunto de todas as  $\omega$ -sequências de 0s e 2s, e assim  $|C| = 2^{\aleph_0}$ . Portanto,  $\mathfrak{c} \geq 2^{\aleph_0}$ , e pelo Teorema de Cantor-Bernstein temos

$$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}.$$

Pelo argumento da diagonal de Cantor<sup>4</sup>, ou pelo teorema 4.2.1,  $\mathfrak{c} > \aleph_0$ . Cantor conjecturou que todo conjunto de números reais é ou no máximo enumerável ou tem a cardinalidade do contínuo. Em ZFC, todo cardinal infinito é um  $\aleph$ , e assim  $2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$ .

**Conclusão:** Somando os raciocínios 1 e 2, chegamos ao seguinte enunciado:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

essa conjectura formaliza o que conhecemos como a *Hipótese do Contínuo*. Ou, em outras palavras, o enunciado acima equivale à Hipótese do Contínuo.

Aqui, porém, há algo que gostaríamos de evidenciar: para formular o problema da Hipótese do Contínuo, precisamos considerar que o *contínuo* possa ser tomado como uma quantidade aritmética, de acordo com a nossa interpretação do que venha a ser uma tal quantidade. Em nossa concepção, uma cardinalidade é uma forma aritmética de quantificação, à vista do que discutimos no presente trabalho. No entanto, aceitar essa interpretação do contínuo significa aceitar uma planificação do universo, mesmo que mais fraca que aquela implicada pelo Axioma da Escolha.

Portanto, a Hipótese do Contínuo, antes de qualquer obstáculo técnico, nos impõe um questionamento conceitual: em que medida seria adequado considerar o contínuo como uma quantidade aritmética? Bom, do ponto de vista puramente metafísico, essa consideração se torna sumariamente incorreta. Como foi visto na construção conceitual das quantidades, com o auxílio da filosofia aristotélica, e de nossas asserções sobre a questão das quantidades, a continuidade e a discrição diferenciam-se terminantemente quanto à sua natureza e o método de quantificação.

Dessa forma, o próprio tratamento aritmético de Cantor sobre o assunto poderia ser considerado inadequado. Não obstante, essa não pode ser uma postura dentro do quadro matemático em que se insere a Teoria de Conjuntos, uma vez que ela exige de nós o assentimento prévio ao espírito de aritmetização proposto já no seu fundamento teórico. Podemos, então, destacar que, embora seja um ultraje conceitual do ponto de vista metafísico, o tratamento puramente aritmético das quantidades, ao considerá-las todas sob uma natureza unicategorial, está de acordo com o propósito matemático fundamental e, para negá-la, seria necessário negar todo o contexto de aritmetização já bem estabelecido na prática matemática.

Mesmo assim, é importante ter em mente que a questão conceitual não pode ser desconsiderada e, à vista do que já foi dito, o desejável é que nossas teorias espelhem parte significativa de nossas intuições sobre os objetos que conceituamos, de forma que a contraparte matemática das quantidades corresponda a uma imagem mais ou menos ajustada dos objetos que temos em mente quando num momento pré-teórico.

---

<sup>4</sup> Cf. Apêndice (Diagonalização).



Poderia-se argumentar que essa diferença de natureza colocada pela filosofia das quantidades é absorvida pela teorização matemática na medida em que Cantor nos mostra uma forma radical de diferenciação entre quantidades discretas e contínuas através do *argumento da diagonal*, que prova a irreconciliável diferença quantitativa entre elas. De fato, esse resultado técnico pode e deve ser interpretado como uma contraparte formal de nossa intuição conceitual desse problema. Mas, voltando ao Axioma da Escolha, enfraquecemos a radicalidade do argumento diagonal ao estender o conceito de quantidade aritmética a todos os objetos da teoria. Em outras palavras, o que o Axioma da Escolha faz é, ao fim e ao cabo, enfraquecer essa diferença natural entre os diferentes tipos de quantidade.

Esse ponto de vista, portanto, questiona o fundamento teórico ao impor a questão conceitual sobre as quantidades que, embora seja pertinente, não pode ser feito sem condenar, com ele, todo o desenvolvimento técnico da matemática moderna e contemporânea em torno não só do Axioma da Escolha, como da aritmetização da matemática, dando lugar, novamente, às intuições espaço-temporais, que tanto importunaram os matemáticos no fim da modernidade. Em todo caso, como vimos na seção sobre o Axioma da Determinação, há posturas que propõem uma substituição do Axioma da Escolha por postulados com caráter aritmético moderado, embora ainda no quadro de ZF. Essas novas formas, muito longe de uma reforma profunda no que concerne ao caráter aritmético da matemática contemporânea, oferecem formas menos radicais de aritmetização ao negar essa planificação imposta pelo Axioma da Escolha e seus equivalentes, em especial o Princípio da Boa Ordenação.

## 5 Conclusão

Em nossa concepção, qualidade tende a resumir o que seria a *qualidade ontológica* de um dado objeto ou entidade. Como construído na introdução deste trabalho, e no decorrer de doutros capítulos, entendemos que a qualidade de um objeto é definida ou determinada por suas características ontológicas. Assim, procuramos investigar como se manifestam, em seu aspecto metafísico e técnico, as diferenças fundamentais entre a discrição e a continuidade na tentativa de uma primeira incursão na construção intelectual de uma diferença qualitativa entre elas.

Resumimos os diferentes aspectos da questão metafísica à filosofia de Aristóteles, pois seu arcabouço conceitual permanece ao longo da história do infinito e, embora as ideias tenham se multiplicado e desenvolvido, seu pensamento aborda os principais temas; de forma que pudemos, em diálogo com ele, evidenciar nossa posição sobre cada um dos aspectos que consideramos transversais em toda a literatura filosófica considerável.

Assim, gostaríamos de fazer um último resumo de como enxergamos a diferenciação pragmática entre as quantidade e suas extensões infinitárias. Vejamos:

| Discrição       | Continuidade  |
|-----------------|---------------|
| Aritmética      | Geométrica    |
| Contagem        | Medida        |
| Individualidade | Homogeneidade |
| Estrutural      | Extensiva     |
| Linear          | Topológica    |

Essas características constituem o coração de nossa diferenciação do ponto de vista híbrido, isto é, entre matemática e metafísica. Acreditamos que essas formas conceituais de diferença constituem um quadro mais ou menos preciso das características ontológicas e metodológicas que apontam para uma *diferença qualitativa* entre as quantidades.

A ideia de infinidade, por ser fugidia e ainda paradoxal ao nosso entendimento, suporta certas ambiguidades que gostaríamos de tornar cada vez menos presentes. A pluralidade reserva em si um sabor de determinação, de algo que temos algum domínio determinativo, seja das dimensões, das partes componentes, do comportamento e assim por diante, é o nosso polo mais ou menos determinado da questão. O contínuo, por sua vez, se apresenta pela outra face. Nele, como ideia pura, não há limites bem determinados, nem

partes bem definidas, ou comportamentos que se reproduzem na finitude. Acreditamos que essa dicotomia, nas outras formas de oposição que podem ser interpretadas e expandidas, é o coração da questão sobre a diferença entre as quantidades e as qualidades a elas referentes.

Em outras palavras, elaboramos um quadro básico de categorias sob as quais o problema das quantidades e dos infinitos pode ser avaliado.

O diagnóstico mais evidente é que, ao fim e ao cabo, nossas teorias e intuições ou interpretam todas as quantidades como discretas, seja pela consideração de partes indivisíveis, seja por um critério de homogeneização entre parte e todo. Ou não consideram o contínuo, em sua maneira pura, como um tipo de quantidade, mas de qualidade.

Pelo que vimos, as teorias metafísicas tendem a usar a continuidade em contextos muito diferentes daqueles investigados por nossas teorias formais, o que torna o impasse conceitual de unificação da ideia de um contínuo ainda mais delicado. Entre as principais peculiaridades de cada área do conhecimento, destacamos que, na Metafísica, a continuidade pode ser usada como uma característica da totalidade do mundo, sendo que essa entidade completa não trabalha através de saltos. Dessa maneira, entidades como o tempo, o espaço e a sua passagem se dão desde um ponto de vista do contínuo, como algo que permeia o todo da realidade, sendo uma espécie de relação intrínseca de funcionamento dinâmico de tudo o que existe.

Por outro lado, a matemática tende a ver o problema do contínuo desde um ponto de vista geométrico, tendo-o transformado num problema de natureza aritmética posteriormente. Transformando as questões qualitativas em marginais ou meramente colaterais.

Dessa forma, não tendo uma teoria unificada das quantidades, somos incapazes de tornar os aspectos metafísicos de maior importância em questões formais de igual interesse e vice-versa. A centralidade da pesquisa sobre o infinito em suas diferentes formas, e sua relação com uma teoria das quantidades pode ser estudada, por hora, encontrando formas de aproximação entre as duas formas da investigação sobre as quantidades, visto que, em seu passado histórico, estão ligadas conceitualmente.

## 6 BIBLIOGRAFIA

- ARISTÓTELES. **Categories**. in: The complete works of Aristotle. New Jersey: Princeton university Press, 1995.
- . **Physics**. in: The complete works of Aristotle. New Jersey: Princeton university Press, 1995.
- . **Metafísica**. in: The complete works of Aristotle. New Jersey: Princeton university Press, 1995.
- AUDI, Robert. **The Cambridge Dictionary of Philosophy**. 2 ed. Nova York: Cambridge University Press, 1999.
- BONIFACE, J. **The Concept of Number from Gauss to Kronecker**. In: Goldstein, C.; Schappacher, N.; Schwermer, J. (eds) The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's *Disquisitiones Arithmeticae*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2007. [https://doi.org/10.1007/978-3-540-34720-0\\_11](https://doi.org/10.1007/978-3-540-34720-0_11)
- FERREIRÓS, José. **Ο Θεός 'Αριθμηρίζει**: The Rise of Pure Mathematics as Arithmetic with Gauss. In: The shaping of arithmetic after CF Gauss's *disquisitiones arithmeticae*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007. p. 234-268.
- GAUSS, C. F. Werke, vol. VIII, **Arithmetik und Algebra**: Nachträge zu Band 1–3, ed. Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Leipzig: Teubner. Repr. Hildesheim, New York: Olms, 1981.
- JECH, Thomas. **Set theory**: The third millennium edition, revised and expanded. Springer Berlin Heidelberg, 2002.
- KRANTZ, D.; LUCE, R.; SUPPES, P.; and TVESKY, A. **Foundations of Measurement**. Dover, 2006
- MOORE, A. W. **The Infinite**. Oxon/New York: Routledge, 2019.
- NEWTON, Isaac. **Arithmetica universalis, sive de compositione et resolutione arithmetica liber**. Cambridge: Tooke, 1707.
- PETRI, B., SCHAPPACHER, N. **On Arithmetization**. In: Goldstein, C., Schappacher, N., Schwermer, J. (eds) The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's *Disquisitiones Arithmeticae*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2007. [https://doi.org/10.1007/978-3-540-34720-0\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-540-34720-0_12)
- PIERPONT, James. **On the arithmetization of mathematics**. 1899.
- PORFÍRIO. **Isagoge**: introdução às categorias de Aristóteles. Trad. Bento S. Santos. São Paulo: Attar, 2002.

PSEUDO-PLUTARCO. *Moralia*, Vol. XV: **Fragments**: *Stromata* (A Patchwork), trad. F. H. Sandbach, W. Heinemann Ltd. Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1969.

SKOLOWSKI, Robert. **Matter, Elements and Substance in Aristotle**. *Journal of the History of Philosophy*, Volume 8, Number 3, July 1970, pp.263-288. DOI: 10.1353/hph.2008.1672

RUCKER, Rudy. **Infinity and The Mind**: the science and philosophy of the infinity. New Jersey: Princeton University Press, 2005.

SATTLER, Barbara M. **Aristotle's Measurement Dilemma**, in Victor Caston (ed.), *Oxford Studies in Ancient Philosophy*, Volume 52 (Oxford, 2017; online edn, Oxford Academic, 21 Sept. 2017), <https://doi.org/10.1093/oso/9780198805762.003.0007>, accessed 7 Nov. 2024.

STUDMANN, Paul. **Aristotle's Category of Quantity**: A Unified Interpretation. *Apeiron*, vol. 37, no. 1, 2004, pp. 69-91. <https://doi.org/10.1515/APEIRON.2004.37.1.69>

SULLIVAN, Scott M. **An Introduction to Traditional Logic**: Classical Reasoning for Contemporary Minds. Houston: Booksurge Publishing, 2013.

PRIMAVESI, Oliver. **Aristotle on the “so-called Pythagoreans”**: from lore to principles. In: Huffman CA, ed. *A History of Pythagoreanism*. Cambridge University Press; 2014:227-249.

KOCANDRELE, R.; COUPRIE, D. L. **Apeiron**: Anaximander on Generation and Destruction. Plzeň: Springer, 2017.

# 7 APÊNDICE

## Conjuntos Enumeráveis

Se conseguimos colocar uma dada pluralidade em parelramento com um subconjunto, ou uma parte, dos números reais, seremos capazes de determinar sua quantidade aritmética, isto é, se somos capazes de atribuir a cada elemento de um conjunto  $A$  os elementos de um dado número  $n$  natural, de forma que não sobrem elementos em nenhum dos dois conjuntos, então  $A$  tem  $n$  elementos. Vejamos um exemplo: Considere os seguintes conjuntos finitos:

$$A = \{a, b, c\}$$

$$B = \{1, 2, 3\}$$

Queremos estabelecer uma correspondência um-para-um entre os elementos de  $A$  e  $B$  utilizando uma função bijetora.

Definimos a função  $f : A \rightarrow B$  da seguinte maneira:

$$f(a) = 1, \quad f(b) = 2, \quad f(c) = 3$$

**Injetividade:** Uma função é injetora se elementos distintos de  $A$  são mapeados para elementos distintos de  $B$ .

- $f(a) = 1 \neq f(b) = 2$
- $f(a) = 1 \neq f(c) = 3$
- $f(b) = 2 \neq f(c) = 3$

Portanto,  $f$  é injetora.

**Sobrejetividade:** Uma função é sobrejetora se todo elemento de  $B$  é imagem de pelo menos um elemento de  $A$ .

- $1 = f(a)$
- $2 = f(b)$
- $3 = f(c)$

Portanto,  $f$  é sobrejetora.

Como  $f$  é simultaneamente injetora e sobrejetora, concluímos que  $f$  é uma **função bijetora**. Ou seja, em linguagem conjuntista, reproduzir fielmente uma parte dos naturais num dado conjunto, ou contar seus elementos, significa colocá-lo em bijeção com um subconjunto de  $\mathbb{N}$ .

Evidentemente, a contagem só está definida para conjuntos finitos, uma vez que, como pudemos ver, esse processo só pode ser aplicado para conjuntos equipotentes a números naturais. No entanto, o conceito de cardinalidade está definido para qualquer conjunto do universo de ZFC. O ajuste que precisa ser feito em nossa definição será apenas considerar um cardinal qualquer, não restringindo nossa definição ao conjunto dos números naturais. Assim abstraímos a noção de cardinalidade para níveis superiores. A cardinalidade dos conjuntos enumeráveis  $\text{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$  será apenas o menor entre os cardinais infinitos.

## Diagonalização

O argumento da diagonal de Cantor demonstra que o conjunto dos números reais em  $(0, 1)$  não é enumerável, ou seja, sua cardinalidade é maior que a dos números naturais. Suponha que existe uma enumeração  $x_1, x_2, x_3, \dots$  que lista todos os números reais em  $(0, 1)$ . Cada número pode ser representado por sua expansão decimal infinita<sup>1</sup>.

Podemos organizar a suposta enumeração em uma tabela, onde cada linha corresponde à expansão decimal de um número:

$$\begin{array}{c|cccc} x_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ x_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ x_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Aqui,  $a_{ij}$  representa o  $j$ -ésimo dígito decimal do número  $x_i$ . Agora, construímos um número  $y$  que difere de todos os  $x_i$  na diagonal:

$$y = b_1 b_2 b_3 \cdots$$

onde  $b_i$  é escolhido de tal forma que:

$$b_i = \begin{cases} a_{ii} + 1 & \text{se } a_{ii} < 9, \\ 0 & \text{se } a_{ii} = 9. \end{cases}$$

---

<sup>1</sup> Precisamos ignorar ambiguidades como  $0.4999\dots = 0.5000\dots$

Com uma argumentação por absurdo simples seremos capazes de ver que o número real  $y$  não está na nossa lista. Bom, suponha que tenhamos uma função  $f : \mathbb{N} \rightarrow (0, 1)$  bijetora. Então existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n = y$ . Mas sabemos que  $y$  difere de  $x_n$  no  $n$ -ésimo termo, logo  $x_n \neq y$ . O que contradiz nossa hipótese.

## Espaço Topológico

Um **espaço topológico** é um par ordenado  $(X, \tau)$ , onde:

- $X$  é um conjunto não vazio;
- $\tau$  é uma coleção de subconjuntos de  $X$ , chamada de **topologia**, que satisfaz as seguintes propriedades:
  1.  $X \in \tau$  e  $\emptyset \in \tau$ ;
  2. Se  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  é uma família de conjuntos em  $\tau$ , então  $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$ ;
  3. Se  $U_1, U_2, \dots, U_n \in \tau$ , então  $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$ .

Os elementos de  $\tau$  são chamados de **abertos**.

Seja  $(X, \tau)$  um espaço topológico. Um subconjunto  $F \subseteq X$  é chamado de **conjunto fechado** se o seu complemento pertence à topologia  $\tau$ , isto é:

$$F \text{ é fechado} \iff X \setminus F \in \tau.$$

### Propriedades de Conjuntos Fechados

1.  $\emptyset, X$  são conjuntos fechados.
2.  $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$  é fechado se  $F_\alpha$  é fechado para todo  $\alpha \in I$ .
3.  $\bigcup_{i=1}^n F_i$  é fechado se  $F_i$  é fechado para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .



## Cobertura

Seja  $X$  um conjunto e  $A \subseteq X$ . Uma coleção de subconjuntos  $\mathcal{C} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ , com  $U_\alpha \subseteq X$  para todo  $\alpha \in I$ , é chamada de **cobertura de  $A$**  se:

$$A \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha.$$

### Cobertura Aberta

Se  $X$  for um espaço topológico com topologia  $\tau$ , e todos os conjuntos  $U_\alpha \in \mathcal{C}$  forem abertos ( $U_\alpha \in \tau$ ), então  $\mathcal{C}$  é chamada de **cobertura aberta** de  $A$ .

### Cobertura Finita

Uma cobertura  $\mathcal{C} = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$  é chamada de **cobertura finita** se o número de elementos em  $\mathcal{C}$  for finito, isto é,  $|\mathcal{C}| < \infty$ .

## Espaço Métrico/Métrica

**Definição:** Seja  $X$  um conjunto não vazio. Uma função  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , chamada de *métrica*, é uma aplicação que satisfaz as seguintes propriedades para todos  $x, y, z \in X$ :

1. **Não negatividade:**  $d(x, y) \geq 0$  e  $d(x, y) = 0$  se, e somente se,  $x = y$ .
2. **Simetria:**  $d(x, y) = d(y, x)$ .
3. **Desigualdade triangular:**  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Se  $d$  satisfaz essas condições, o par  $(X, d)$  é chamado de *espaço métrico*.

## Espaço Vetorial

Seja  $V$  um conjunto não vazio e  $\mathbb{K}$  um corpo (como  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). Dizemos que  $V$  é um *espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{K}$*  se estão definidas duas operações:

- Uma operação de *adição de vetores*  $+: V \times V \rightarrow V$ ,

- Uma operação de *multiplicação por escalares*  $\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$ ,

e essas operações satisfazem os seguintes axiomas para todos  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  e  $a, b \in \mathbb{K}$ :

1. **Associatividade da adição:**

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}).$$

2. **Comutatividade da adição:**

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}.$$

3. **Elemento neutro da adição:** Existe um vetor  $\mathbf{0} \in V$  tal que:

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in V.$$

4. **Inverso aditivo:** Para cada  $\mathbf{u} \in V$ , existe  $-\mathbf{u} \in V$  tal que:

$$\mathbf{u} + -\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

5. **Distributividade da multiplicação escalar com relação à adição de vetores:**

$$a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a \cdot \mathbf{u} + a \cdot \mathbf{v}.$$

6. **Distributividade da multiplicação escalar com relação à adição de escalares:**

$$(a + b) \cdot \mathbf{u} = a \cdot \mathbf{u} + b \cdot \mathbf{u}.$$

7. **Associatividade da multiplicação escalar:**

$$(a \cdot b) \cdot \mathbf{u} = a \cdot (b \cdot \mathbf{u}).$$

8. **Elemento neutro da multiplicação escalar:** Para o elemento  $1 \in \mathbb{K}$ :

$$1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in V.$$

# Axiomas de Zermelo-Fraenkel (ZF)

## ZF1. Axioma da Extensionalidade

Dois conjuntos são iguais se contêm os mesmos elementos:

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \implies x = y).$$

## ZF2. Axioma do Par

Para quaisquer dois conjuntos  $a$  e  $b$ , existe um conjunto que contém exatamente  $a$  e  $b$ :

$$\forall a \forall b \exists c \forall x (x \in c \leftrightarrow (x = a \vee x = b)).$$

## ZF3. Axioma da União

Para qualquer conjunto  $A$ , existe um conjunto  $B$  contendo todos os elementos dos conjuntos em  $A$ :

$$\forall A \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow \exists C (C \in A \wedge x \in C)).$$

## ZF4. Axioma da Potência

Para qualquer conjunto  $A$ , existe um conjunto  $B$  que contém todos os subconjuntos de  $A$ :

$$\forall A \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \subseteq A).$$

## ZF5. Axioma da Regularidade (ou Fundação)

Todo conjunto não vazio  $A$  contém um elemento  $x$  tal que  $x \cap A = \emptyset$ :

$$\forall A (A \neq \emptyset \implies \exists x (x \in A \wedge x \cap A = \emptyset)).$$

## ZF6. Axioma da Substituição

Se  $F$  é uma função definida por uma propriedade  $\varphi$ , então a imagem de um conjunto sob  $F$  também é um conjunto:

$$\forall A \forall F (\forall x \forall y (\varphi(x, y) \implies \exists Y \forall z (z \in Y \leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge \varphi(x, z)))).$$

## ZF7. Axioma do Infinito

Existe um conjunto infinito  $I$  que contém o conjunto vazio e é fechado sob sucessão (adição de elementos):

$$\exists I (\emptyset \in I \wedge \forall x (x \in I \implies x \cup \{x\} \in I)).$$

## ZF8. Axioma do Conjunto das Partes Especificadas (ou Compreensão Restrita)

Dado um conjunto  $A$  e uma propriedade  $P(x)$ , existe um subconjunto de  $A$  contendo exatamente os elementos que satisfazem  $P$ :

$$\forall A \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge P(x))).$$

**ZF9. Axioma do Conjunto Vazio**

Existe um conjunto que não contém elementos:

$$\exists A \forall x (x \notin A).$$