



**Universidade de Brasília**  
**Instituto de Física**

**Função de Correlação de Dois Pontos de  
Lentes Gravitacionais Fracas de Galáxias**

Vítor Storti Mesquita

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - PPGFÍS

Brasília  
2025

**Universidade de Brasília**  
**Instituto de Física**

# **Two-Point Correlation Function of Weak Gravitational Lensing of Galaxies**

Vítor Storti Mesquita

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre.

Orientadora: Prof. Dr. Mariana Penna Lima Vitenti

Brasília  
2025

## FICHA CATALOGRÁFICA

Storti Mesquita, Vítor.

Função de Correlação de Dois Pontos de Lentes Gravitacionais Fracas de Galáxias / Vítor Storti Mesquita; orientadora Mariana Penna Lima Vitenti. -- Brasília, 2025.

93 p.

Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Física - PPGFÍS) -- Universidade de Brasília, 2025.

1. Lenteamento Gravitacional. 2. Função Correlação. 3. Cosmologia. I. Lima Vitenti, Mariana Penna, orient. II. Título.

**Universidade de Brasília**  
**Instituto de Física**

**Função de Correlação de Dois Pontos de Lentes**  
**Gravitacionais Fracas de Galáxias**

Vítor Storti Mesquita

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre.

Trabalho aprovado. Brasília, 13 de Junho de 2025:

---

**Dra. Mariana Penna Lima Vitenti,**  
**UnB/IF**  
Orientadora

---

**Dra. Gabriela Antunes Marques,**  
**CBPF**  
Examinador interno

---

**Dra. Camila Paiva Novaes,**  
**INPE**  
Examinador interno

---

**Caio Cesar Holanda Ribeiro,**  
**UnB/IF**  
Examinador suplente

*Dedico este trabalho a Deus que me abençoou com a possibilidade de realizar um sonho e me cercou de pessoas que me auxiliaram durante todo o processo.*

*Dedico, também, aos meus pais, Fernando Assumpção Mesquita e Gisele Regina Storti Mesquita, que foram fundamentais para sua realização.*

# Agradecimentos

Dedico e agradeço a Deus por me guiar durante a realização deste trabalho.

Agradeço aos meus pais, Fernando Assumpção Mesquita e Gisele Regina Storti Mesquita, que nunca deixaram de me apoiar, bem como meu irmão, Vinícius Storti Mesquita.

Agradeço meus familiares e amigos que colaboraram comigo durante este período.

Agradeço à minha professora e orientadora, doutora Mariana Penna Lima Vitenti, por sempre ter me ouvido e ajudado, mesmo nos meus momentos de maior dificuldade, por ter sido paciente e me incentivado a dar o meu melhor durante todo o período que estivemos trabalhando juntos.

*“As palavras são umas imperfeitas substitutas,  
cheias de fiapos,  
das equações matemáticas.”  
Fundação, Isaac Asimov.*

# Resumo

Para compreender melhor a estrutura e a evolução do universo, assumimos uma teoria da gravidade, como a Relatividade Geral, que relaciona a geometria do espaço-tempo com seus componentes, incluindo matéria escura, matéria bariônica e radiação. Para estudar essas relações, utilizamos os chamados traçadores de matéria, que são fenômenos e estruturas influenciados pela distribuição e quantidade de matéria que os compõem e os circundam, como galáxias, aglomerados de galáxias e lentes gravitacionais, por exemplo.

Nesta pesquisa, aprofundamo-nos no fenômeno do lenteamento gravitacional fraco de galáxias, com o objetivo de calcular sua função de correlação correspondente. Nosso propósito é compreender melhor a relação entre esse fenômeno e a distribuição de matéria no universo. A função de correlação de dois pontos do lenteamento fraco é uma ferramenta cosmológica crucial, amplamente utilizada em diversas análises na Cosmologia. Neste trabalho, estudamos e aplicamos essa função ao nosso caso de interesse.

Com pesquisas em andamento e futuras, como o *Euclid* e o *Legacy Survey of Space and Time* (LSST), uma vasta quantidade de dados estará disponível para estudo. Assim, ferramentas computacionais eficientes tornam-se essenciais para análises precisas. Neste contexto, utilizamos a biblioteca *Numerical Cosmology Library* (NumCosmo) para calcular a correlação de dois pontos do lenteamento gravitacional, investigando a sua variação em relação à distribuição das lentes. Por fim, utilizamos também a biblioteca *Core Cosmology Library* (CCL) e estudamos a validação feita entre essas bibliotecas.

**Palavras-chave:** Lenteamento Gravitacional. Função Correlação. Cosmologia.

# Abstract

To better understand the structure and evolution of the universe, we assume a theory of gravity, such as General Relativity, which relates the geometry of spacetime to its components, including dark matter, baryonic matter, and radiation. To study these relationships, we use so-called matter tracers, which are phenomena and structures influenced by the distribution and amount of matter that compose and surround them, such as galaxies, galaxy clusters, and gravitational lenses.

In this research, we delve into the phenomenon of weak gravitational lensing of galaxies, aiming to compute its corresponding correlation function. Our goal is to understand better the relationship between this phenomenon and the distribution of matter in the universe. The two-point correlation function of weak lensing is a crucial cosmological tool, widely used in various cosmological analyses. In this work, we study and apply this function to our case of interest.

With ongoing and future surveys, such as *Euclid* and the *Legacy Survey of Space and Time* (LSST), a great amount of data will be available for study. Thus, efficient computational tools are essential for precise analyses. In this context, we use the Numerical Cosmology Library (NumCosmo) to calculate the two-point correlation of gravitational lensing, investigating its variation with respect to the distribution of lenses. Finally, we also use the Core Cosmology Library (CCL) and study the validation performed between these libraries.

**Keywords:** Gravitational Lensing. Correlation Function. Cosmology.

# Lista de figuras

|            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |    |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 3.1 | Direção da Deflexão da Luz - Imagem inspirada por (Meneghetti, 2021). .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 26 |
| Figura 3.2 | Geometria das Lentes Gravitacionais. A luz, vindo de uma fonte em $\theta_F$ sendo defletida por um ângulo $\alpha$ a uma nova posição angular $\theta = \theta_{obs}$ por um potencial gravitacional. . . . .                                                                                                                                                                                    | 29 |
| Figura 3.3 | Deflexão da luz de uma fonte localizada em $(\chi, \chi\theta_F)$ e sua imagem observada em $(\chi, \chi\theta)$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                        | 30 |
| Figura 3.4 | Imagem tirada pelo <i>Hubble Space Telescope</i> em 11 de Março de 2006, divulgada pela NASA, retratando o efeito de lentes gravitacionais. "This file is in the public domain in the United States because it was solely created by NASA."                                                                                                                                                       | 39 |
| Figura 3.5 | Efeitos de Lenteamento. Aumento, ou diminuição, na magnitude da imagem, convergência $\kappa$ e o aumento, ou diminuição, desigual da imagem, cisalhamento $\gamma$ . Os efeitos estão exagerados para efeito didático. A imagem foi retirada de Faga, Lucas James - Análise de galáxia-lenteamento de galáxia no espaço harmônico: estudo e aplicação no contexto do Dark Energy Survey. . . . . | 41 |
| Figura 5.1 | Comparação da Densidade de Matéria gerada na CCL e NumCosmo para diferentes Modelos Cosmológicos. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 63 |
| Figura 5.2 | Comparação da distância comóvel calculada usando a CCL e a NumCosmo para diferentes modelos cosmológicos. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 64 |
| Figura 5.3 | Comparação do <i>kernel</i> de lenteamento fraco de galáxias calculado pela CCL e pela NumCosmo para diferentes modelos cosmológicos. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                     | 65 |
| Figura 5.4 | Comparação da auto-correlação dos <i>kernels</i> de lenteamento fraco de galáxias calculado pela CCL e pela NumCosmo para diferentes modelos cosmológicos. . . . .                                                                                                                                                                                                                                | 66 |
| Figura 5.5 | Comparação dos diferentes <i>kernels</i> de lenteamento fraco gerados pela NumCosmo para diversos valores de $\mu$ e $\sigma$ em escala linear. . . . .                                                                                                                                                                                                                                           | 69 |
| Figura 5.6 | Espectro de potência angular $C_\ell$ dos diferentes <i>kernels</i> de lenteamento fraco gerados pela NumCosmo para diversos valores de $\mu$ e $\sigma$ . Diferença relativa entre os valores desse <i>kernel</i> , calculados a partir de $C_\ell^{WLWL1}/C_\ell^{WLWL2} - 1$ . . . . .                                                                                                         | 70 |

# Lista de tabelas

|            |                                                                                                                                                                                        |    |
|------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 5.1 | Parâmetros cosmológicos de entrada utilizados para gerar os <i>kernels</i> de lenteamento fraco e para a comparação entre os valores gerados pelas bibliotecas NumCosmo e CCL. . . . . | 62 |
| Tabela 5.2 | Tabela com modelos cosmológicos e quantidades associadas. . . . .                                                                                                                      | 67 |

# Lista de abreviaturas e siglas

|          |                                       |
|----------|---------------------------------------|
| 2PCF     | <i>Two-Point Correlation Function</i> |
| CCL      | <i>Core Cosmology Library</i>         |
| CMB      | <i>Cosmic Microwave Background</i>    |
| DE       | <i>Dark Energy</i>                    |
| FRLW     | Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker   |
| NumCosmo | <i>Numerical Cosmology Library</i>    |
| RG       | Teoria da Relatividade Geral          |

# Lista de símbolos

## Símbolos romanos

|              |                             |
|--------------|-----------------------------|
| $\vec{D}(t)$ | Distância Coordenada Física |
| $a(t)$       | Fator de Escala             |
| $D_A$        | Distância Diâmetro Angular  |
| $H(t)$       | Fator de Hubble             |
| $H_0$        | Constante de Hubble         |
| $p$          | Pressão                     |
| $z$          | <i>redshift</i>             |

## Símbolos gregos

|                                     |                                                   |
|-------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $\chi(a)$                           | Distância Comóvel                                 |
| $\chi^i$                            | Coordenadas Comóveis                              |
| $\gamma$                            | Cisalhamento                                      |
| $\kappa$                            | Convergência                                      |
| $\Omega_i$                          | Densidade dos Componentes do Universo             |
| $\Phi(t, \vec{x})$                  | Perturbação Espacial de Primeira Ordem da Métrica |
| $\Psi(t, \vec{x})$                  | Perturbação Temporal de Primeira Ordem da Métrica |
| $\rho$                              | Densidade                                         |
| $\vec{\alpha}$                      | Ângulo de Deflexão                                |
| $\vec{\theta} = \vec{\theta}_{obs}$ | Ângulo Observado                                  |
| $\vec{\theta}_F$                    | Ângulo Original da Fonte                          |
| $d\theta$ e $d\varphi$              | Diastâncias Radiais                               |

# Sumário

|          |                                                                                   |           |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                                                                 | <b>15</b> |
| <b>2</b> | <b>Introdução Teórica</b>                                                         | <b>16</b> |
| 2.1      | Teoria da Relatividade Geral                                                      | 16        |
| 2.2      | Cosmologia                                                                        | 17        |
| 2.2.1    | Espaço Maximamente Simétrico                                                      | 18        |
| 2.2.2    | Universo em Expansão                                                              | 19        |
| 2.2.3    | Modelo Cosmológico $\Lambda$ CDM                                                  | 23        |
| <b>3</b> | <b>Deflexão da Luz</b>                                                            | <b>25</b> |
| 3.1      | Deflexão Da Luz Clássica x Relativística                                          | 25        |
| 3.1.1    | Ângulo de Deflexão Clássico                                                       | 25        |
| 3.1.2    | Ângulo de Deflexão Relativístico                                                  | 27        |
| 3.2      | Equação da Lente                                                                  | 29        |
| 3.3      | Aproximação de Lentes Finas                                                       | 34        |
| 3.4      | Lentes Esfericamente Simétricas                                                   | 37        |
| 3.5      | Efeitos de Lenteamento - Convergência e Cisalhamento                              | 39        |
| 3.6      | Explorando o Cisalhamento                                                         | 42        |
| 3.7      | Convergência e Cisalhamento como Traçadores de Matéria                            | 45        |
| 3.7.1    | O Contraste de Densidade de Matéria                                               | 46        |
| 3.7.2    | Convergência e Cisalhamento em Função do Contraste de Densidade de Matéria        | 47        |
| <b>4</b> | <b>Função de Correlação e Espectro de Potência</b>                                | <b>50</b> |
| 4.1      | Função de Correlação de Dois Pontos                                               | 50        |
| 4.2      | Espectro de Potência                                                              | 53        |
| 4.3      | Espectro de Potência dos Traçadores de Matéria                                    | 55        |
| 4.4      | Espectro de Potência Angular $C_\ell$                                             | 56        |
| 4.4.1    | Espectro de Potência Angular dos Contrastes de Densidade                          | 56        |
| 4.4.2    | Espectro de Potência Angular dos Efeitos de Lenteamento                           | 58        |
| <b>5</b> | <b>Análise e Código</b>                                                           | <b>61</b> |
| 5.1      | Motivação da Análise                                                              | 61        |
| 5.2      | Parâmetros e Função de Comparação                                                 | 62        |
| 5.3      | Comparação do <i>kernel</i> de Lenteamento Fraco                                  | 64        |
| 5.4      | Comparação do <i>kernel</i> de Lenteamento Fraco Variando a Distribuição da Fonte | 67        |
| <b>6</b> | <b>Conclusões</b>                                                                 | <b>72</b> |

|                                                                                                               |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Referências</b> . . . . .                                                                                  | <b>75</b> |
| <b>Apêndices</b>                                                                                              | <b>79</b> |
| <b>Apêndice A Comentários e Explicações Breves</b> . . . . .                                                  | <b>80</b> |
| A.1 Vetores de <i>Killing</i> . . . . .                                                                       | 80        |
| A.2 Tensão Anisotrópica . . . . .                                                                             | 81        |
| A.3 Outros Modelos Cosmológicos . . . . .                                                                     | 82        |
| <b>Apêndice B Códigos Utilizados na Análise</b> . . . . .                                                     | <b>84</b> |
| B.1 Primeira Parte: A Função de Comparação . . . . .                                                          | 84        |
| B.2 Segunda Parte: Comparando Variáveis Geradas pelas Bibliotecas . . . . .                                   | 87        |
| B.3 Terceira Parte: Parâmetros Utilizados e Aplicação dos Valores Gerados à<br>Função de Comparação . . . . . | 90        |

# 1 Introdução

Na teoria da gravitação de Isaac Newton (1642–1727), muitos já haviam considerado a possibilidade de a gravidade influenciar a trajetória da luz. No entanto, devido a suas limitações, como a interpretação de que a informação seria transportada instantaneamente pelo universo, essa ideia acabou sendo abandonada. Com a formulação da teoria da Relatividade Geral (RG) por Albert Einstein (1879–1955), a ideia de que campos gravitacionais poderiam distorcer a trajetória da luz foi retomada e formalmente estabelecida.

O fenômeno de desvio da luz por campos gravitacionais, conhecido como lenteamento gravitacional, manifesta-se de diferentes formas dependendo da intensidade da curvatura do espaço-tempo gerada pela massa da lente, podendo ser dividido em três regimes principais: lenteamento forte, fraco e microlenteamento. No regime de lenteamento forte, observam-se efeitos marcantes como a formação de imagens múltiplas, arcos gravitacionais e anéis de Einstein. No regime de lenteamento fraco, por sua vez, os efeitos são mais sutis e detectáveis apenas por análises estatísticas, sendo eles os efeitos de cisalhamento e convergência. O microlenteamento, por outro lado, ocorre quando objetos compactos produzem variações no brilho de fontes distantes, sem formar imagens resolvíveis.

Esses efeitos fornecem informações valiosas sobre a distribuição de matéria, tanto bariônica quanto escura, ao longo da linha de visada entre a fonte e o observador ([Meneghetti, 2021](#)).

Os efeitos do lenteamento gravitacional são, como já dissemos, sutis e difíceis de serem observados e calculados, em sua maioria. Entretanto, com o advento de tecnologias observacionais mais avançadas e técnicas aprimoradas de análise de dados, tornou-se possível analisar esse fenômeno e explorar sua conexão com os componentes do cosmo.

Este trabalho desenvolverá conhecimentos técnicos fundamentais para o entendimento das lentes gravitacionais, partindo da teoria da Relatividade Geral e explorando como a geometria do universo e a matéria e sua distribuição influenciam a trajetória da luz. Além disso, investigaremos como esse fenômeno pode ser utilizado para estudar essa distribuição, por meio de uma análise computacional na biblioteca *Numerical Cosmology Library* (NumCosmo) ([Dias Pinto Vitenti; Penna-Lima, 2014](#)), validando esses resultados ao compará-los com os obtidos na biblioteca *Core Cosmology Library* ([Collaboration, 2025a](#)) ([Chisari et al., 2019](#)).

## 2 Introdução Teórica

Para melhor entendermos a formulação teórica das lentes gravitacionais, vamos fazer uma breve introdução ao arcabouço teórico necessário para avançarmos com o nosso estudo. Vamos começar com uma introdução à teoria da Relatividade Geral, teoria gravitacional que entende a gravidade como uma consequência da geometria do espaço-tempo e que permitiu uma formulação mais profunda de efeitos gravitacionais, como a deflexão da luz, e da sua relação com os componentes do universo.

Em seguida, partiremos para um breve resumo de teorias cosmológicas úteis para o entendimento da formulação teórica dos capítulos seguintes. Iremos discutir as aproximações que adotamos, justificando sua validade analítica e a facilidade teórica que elas nos traz, discutiremos o modelo cosmológico onde desenvolvemos a teoria da deflexão da luz, a expansão do universo e suas características de homogeneidade e isotropia.

Para o desenvolvimento desse capítulo, nos baseamos nas obras (Carroll, 2019), (Dodelson; Schmidt, 2024), (Marques *et al.*, 2024) e (Peebles, 1980), principalmente. Essas obras foram de fundamental importância para o entendimento dos assuntos abordados e para escolha da notação utilizada.

### 2.1 Teoria da Relatividade Geral

A Teoria da Relatividade Geral (RG) é uma teoria gravitacional, i.e., visa descrever a gravidade, seu comportamento e a sua mecânica associada, a equação do movimento atrelada a essa interação. Diferentemente da Teoria da Gravitação Universal de Isaac Newton, a RG interpreta a gravidade não como uma força, mas sim uma consequência da geometria do espaço-tempo (Lorentz *et al.*, 1952)(Schutz, 2022).

O espaço-tempo curva na presença da massa e objetos que viajam neste espaço curvado percorrem geodésicas, dadas pela equação

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0, \quad (2.1)$$

conhecida como equação da geodésica, onde  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$  é chamado símbolo de Christoffel e  $\lambda$  é um parâmetro afim, responsável por parametrizar a trajetória da partícula ou feixe de luz ao longo da curva. Para partículas massivas, que se movem com velocidades inferiores a da luz, o parâmetro afim é, geralmente, o tempo próprio  $\tau$ . Já para a luz, o tempo próprio não varia ao longo da trajetória, pois  $ds^2 = 0$ , então  $\lambda$  é um parâmetro afim arbitrário que ainda preserva a estrutura da equação da geodésica - isso é verdade para as demais partículas não massivas, também - (Carroll, 2019).

A geodésica representa o caminho mais curto entre dois pontos em um espaço não plano, ou curvado, sendo equivalente à reta no espaço plano, ou euclidiano, guardadas as devidas proporções.

Note que estamos usando a notação de somatório de Einstein, onde índices gregos ( $\alpha, \beta, \mu, \text{etc.}$ ) assumem os valores (0, 1, 2 e 3) e índices romanos ( $i, j, k$ ) assumem os valores (1, 2 e 3). Desta forma, coordenadas nesse espaço quadridimensional representam as grandezas  $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$  em coordenadas cartesianas.

A geometria desse espaço é descrita por um tensor simétrico de ordem 2 chamado tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , t.q.

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \delta_\nu^\mu, \quad (2.2)$$

e por ela podemos medir distâncias nesse espaço da seguinte maneira:

$$ds^2 = g^{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.3)$$

A métrica é um objeto fundamental na relatividade geral, pois permite calcular distâncias, ângulos e intervalos de tempo no espaço-tempo. A partir dela, definimos conexões (símbolo de Christoffel), que nos permitem contruir o tensor de Riemann, equação (2.4), um tensor (1,3) que descreve a curvatura intrínseca do espaço-tempo. Este tensor expressa como vetores paralelamente transportados ao longo de curvas fechadas podem sofrer variações, revelando a presença de curvatura mesmo em regiões localmente planas, (Carroll, 2019).

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\sigma\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\sigma\mu} + \Gamma^\rho_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} - \Gamma^\rho_{\lambda\nu} \Gamma^\lambda_{\sigma\mu}. \quad (2.4)$$

Uma propriedade importante é que, se existe um sistema de coordenadas onde os componentes da métrica são constantes, o tensor de Riemann é nulo e, reciprocamente, se o tensor de Riemann é nulo, podemos construir um sistema de coordenadas onde as componentes da métrica são constantes, apesar de restrito a uma região da variedade que seja simplesmente conexa (*simply-connected*), (Carroll, 2019).

Essa foi uma pequena introdução da Teoria da Relatividade Geral de A. Einstein (1879-1955) e de ferramentas que utilizaremos no futuro para desenvolver o tema de interesse dessa dissertação.

## 2.2 Cosmologia

A Cosmologia é a área de estudo que explora a estrutura, as leis, a origem e o futuro do universo. Busca compreendê-lo em sua totalidade e, diferente da Astronomia, que observa corpos celestes individuais, a Cosmologia investiga as leis fundamentais, a composição e o destino do cosmo (Dodelson; Schmidt, 2024).

O entendimento do universo passou por várias mudanças, desde análises mitológicas e religiosas ao sistemático método científico. Desde tempos imemoriais, o cosmo sempre foi objeto de fascinação humana. Atualmente, baseado em modelos Físicos e Matemáticos, no avanço tecnológico para obtenção de dados de maior qualidade e de técnicas de análise computacional, a cosmologia desenvolveu diversas teorias para entendimento das estruturas e da história do Universo, utilizando-se, principalmente, da teoria da Relatividade Geral e da Mecânica Quântica para formulação de hipóteses como a expansão do Universo, a existência de matéria e energia escuras e a possibilidade de multiversos, dentre outras.

Faremos agora uma breve introdução a aspectos do modelo cosmológico padrão relevantes para a discussão desta dissertação e da análise que faremos em seguida, baseando-nos principalmente nas obras ([Dodelson; Schmidt, 2024](#)) e ([Dodelson, 2017](#)).

### 2.2.1 Espaço Maximamente Simétrico

Vamos começar trabalhando em um espaço-tempo sem perturbação para melhor construir nosso conhecimento, aliás, sempre começamos dos casos mais simples. Já no séc.XVI, Copérnico defendia a ideia de que o universo é praticamente o mesmo em todas as direções. Em uma linguagem mais técnica, diremos que nosso espaço é homogêneo e isotrópico, em escalas grandes o suficiente.

Um espaço isotrópico é invariante sob rotação, i.e., dado um ponto na variedade, o espaço será igual independente da direção que observamos - a densidade é a mesma em todas as direções. Em um espaço homogêneo, por sua vez, a métrica é a mesma ao longo de toda a variedade, ou seja, é invariante sob translação - a densidade é a mesma em todos os lugares.

Para grandes escalas, supomos o universo como sendo homogêneo e isotrópico, onde cada uma dessas características não garante a outra, i.e., não é pelo espaço ser homogêneo que é isotrópico e vice e versa. Essas suposições são fortemente apoiadas pelas observações como, por exemplo, a radiação cósmica de fundo (CMB) ser quase idêntica em todas as direções e a distribuição estatística de galáxias em grandes escalas ser aproximadamente uniforme.

Essa escala "grande o suficiente" para considerarmos o cosmo homogêneo e isotrópico foi amplamente estudada como, por exemplo, no trabalho ([Hogg et al., 2005](#)), onde testou-se diretamente o princípio da homogeneidade do universo usando dados do *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS), onde os autores buscaram responder se a distribuição de galáxias realmente é homogênea nessas escalas. Analisando amostras de galáxias luminosas vermelhas (LRGs), encontraram que a densidade média de galáxias desse tipo convergem para uma densidade constante aproximada de escalas da ordem de 100Mpc/h. Outros trabalho, como o baseado nos dados do BOSS (*Baryon Oscillation Spectroscopic Survey*), nos apresentam ambas essas características em escalas de ordem de 150 ~ 200Mpc, aproximadamente ([Ntelis et al., 2017](#)).

Um espaço homogêneo e isotrópico é chamado maximamente simétrico e esse espaço se caracteriza por possuir a maior quantidade de vetores de *Killing* possível. Vetores de *Killing* são campos vetoriais que representam simetrias no espaço-tempo e indicam direções ao longo das quais a métrica do espaço não muda. Falamos mais um pouco, mas ainda de forma abreviada, de vetores de Killing no apêndice A.1.

### 2.2.2 Universo em Expansão

Para representar a realidade, podemos considerar o espaço-tempo como sendo espacialmente homogêneo e isotrópico em grandes escalas, mas evoluindo no tempo, isto é, não podemos trabalhar com um universo estacionário.

Suponha um espaço-tempo quadridimensional de métrica

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)[dx^2 + dy^2 + dz^2], \quad (2.5)$$

em coordenadas espaciais cartesianas. Essa métrica representa um caso particular da métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker, ou FLRW, de forma abreviada, que descreve um espaço-tempo homogêneo e isotópico em expansão. Essa métrica corresponde ao caso em que o universo possui geometria espacial plana ( $k = 0$ , onde  $k$  é um parâmetro de curvatura), e o fator  $a(t)$  descreve a evolução temporal da escala do universo, i.e., essa métrica retrata um espaço-tempo expandindo em função do tempo, descrito pela função  $a(t)$ , chamada fator de escala, (Mukhanov, 2005).

Coordenadas que permanecem em coordenadas espaciais constantes  $x^i$ , i.e., estão movendo junto ao espaço-tempo, são chamadas coordenadas comóveis e são representadas por  $\chi^i$ . Apenas observadores em coordenadas comóveis irão observar o universo como isotrópico.

É fácil imaginar que coordenadas físicas  $\vec{D}(t)$  e comóveis  $\vec{\chi}$  estão relacionadas de alguma forma. Essa relação é dada pelo fator de escala, na forma

$$\vec{D}(t) = a(t)\vec{\chi}, \quad (2.6)$$

e, como usamos a métrica para descrever distância, também podemos imaginar que a distância entre dois pontos cresce devido ao fator de escala. A distância física  $\vec{D}$  entre dois pontos cresce com velocidade

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{D}}(t) = \dot{a}(t)\vec{\chi} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\vec{D}(t) = H(t)\vec{D}, \quad (2.7)$$

onde definimos  $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ , grandeza conhecida como função de Hubble, responsável por computar a rapidez com que o universo se expande e o ponto em  $\dot{a}(t)$  e  $\dot{\vec{D}}(t)$  caracteriza derivada em relação ao tempo físico  $t$ . A equação (2.7) descreve a velocidade de afastamento entre dois pontos devido a expansão do universo. O astônomo Edwin Hubble (1889-1953)

inferiu essa equação de suas observações e a aplicou primeiramente para estabelecer o quão rápido uma galáxias se afasta da Terra e mostrou que essa velocidade é proporcional à distância entre esses objetos.

Como vimos, em um universo plano, a métrica FLRW é a que descreve a expansão homogênea e isotrópica. Em coordenadas espaciais cartesianas e comóveis, ela fica dada pela (2.5). Já em coordenadas espaciais esféricas e comóveis, ela é

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [d\chi^2 + \chi^2 d\theta^2 + \chi^2 \sin^2 \theta d\varphi^2] \quad (2.8)$$

isto é, as componentes do tensor métrico são dadas por:

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1, \\ g_{0i} &= 0, \\ g_{ij} &= a^2(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \chi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \chi^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde adotamos, e seguiremos adotando,  $c = 1$ , a não ser que explicitamente expresso o contrário.

Assim, a distância comóvel entre o observador e um objeto à uma distância física  $D = ct$  é obtida da seguinte forma: igualamos  $ds^2$  a zero, já que estamos interessados na trajetória da luz, e adotamos  $d\theta$  e  $d\varphi$  como sendo nulas, assim obtendo a relação  $d\chi = dt/a$  e basta então integrá-la,

$$\int_0^{\chi(a)} d\chi = \int_{t(a)}^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} \longrightarrow \chi(a) = \int_a^1 \frac{da'}{a'^2 H(a')}. \quad (2.10)$$

Como consequência da expansão do universo, há uma distorção no comprimento de onda emitido  $\lambda_{emitido}$  pelo objeto observado em sua trajetória até nós. Esse fenômeno é conhecido como “*redshift*” ou “desvio para o vermelho” e sua previsão é atribuída à Edwin Hubble, em 1929 (Hubble, 1929). Hubble observou que galáxias se afastavam de nós e uma das outras e que a luz emitida por elas se deslocava para comprimentos de onda maiores, ou seja, para o vermelho. Essa descoberta foi fundamental para a formulação da Lei de Hubble, (2.7).

O conceito de *redshift* pode ser comparado ao efeito Doppler. Semelhante a mudança aparente da frequência do som quando a sua fonte se aproxima, ou se afasta, do observador, a luz, emitida por uma fonte se movendo em relação ao observador, tem uma mudança aparente em sua frequência.

Em sentido geral, Hubble não foi o primeiro a observar esse fenômeno, outros pesquisadores como Willem de Sitter (1872-1934) (Sitter, 1916) e George Lemaître (1894-1966)

(Lemaître, 1927) já haviam publicado trabalhos sobre o *redshift*, todavia, foi Hubble o principal responsável por quantificar e correlacionar as observações do *redshift* com a expansão do universo.

O *redshift* ( $z$ ) se relaciona com o fator de escala da seguinte forma:

$$z + 1 = \frac{\lambda_{\text{observado}}}{\lambda_{\text{emitido}}} = \frac{a_0}{a}. \quad (2.11)$$

Com essa relação, podemos usar o *redshift* para medir distâncias de objetos em relação à Terra ou para se referir a uma determinada época do universo, já que quanto mais distante o objeto está de nós, mais antiga é a imagem que observamos, (Weinberg, 2008). Um exemplo da associação de diferentes fases da evolução cósmica com faixas do *redshift* é

- **Recombinação** ( $z \approx 1100$ ): Quando a radiação cósmica de fundo (*cosmic microwave background* - CMB) foi emitida.
- **Reionização** ( $6 \lesssim z \lesssim 10$ ): Quando as primeiras estrelas e galáxias começaram a ionizar o meio intergaláctico.
- **Formação das primeiras galáxias** ( $z \approx 6$ ): Quando a estrutura do universo começou a se assemelhar ao que vemos hoje.

Desta forma, podemos escrever a distância comóvel em função do fator de escala, como feito na equação (2.10), ou em função do *redshift*, na forma

$$\chi = \int_0^z \frac{dz}{H(z)}. \quad (2.12)$$

Vimos, então, que podemos relacionar a distância física  $\vec{D}(t)$  à distância comóvel  $\vec{\chi}(t)$  por meio tanto do fator de escala quanto do *redshift*. Uma terceira distância muito importante na cosmologia é a distância diâmetro angular  $D_A$ , que relaciona o tamanho físico de um objeto ao seu tamanho aparente no céu. Sabendo o tamanho real de um objeto, podemos usar seu ângulo aparente para estimar sua distância até o observador.

A distância diâmetro angular refere-se à distância real entre os extremos de um objeto que aparece em um determinado diâmetro angular quando observado da Terra. Para um objeto celeste de tamanho físico (ou diâmetro real)  $l$  ocupando um diâmetro angular  $\theta$  (pequeno) no céu, a distância diâmetro angular é dada por

$$D_A = \frac{l}{\theta}. \quad (2.13)$$

E, no caso de universos planos, relacionamos essas três distâncias pela equação

$$D_A = D = a\chi = \frac{\chi}{1+z}. \quad (2.14)$$

O caminho natural ao obtermos uma métrica que descreve nosso universo é usá-la na equação de Einstein. Fazendo isso usando a métrica de FLRW, obtemos as equações de Friedmann (como discutido a seguir).

A equação de Einstein é

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2.15)$$

onde:  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein,  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci,  $R$  é o escalar de Ricci,  $\Lambda$  é a constante cosmológica,  $G$  é a constante gravitacional e  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento da matéria.

As componentes temporais do tensor de Einstein e do tensor energia-momento são dados por

$$G_{00} = 3 \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right), \quad T_{00} = \rho. \quad (2.16)$$

Substituindo na equação de Einstein, obtemos

$$3 \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) + \Lambda = 8\pi G \rho. \quad (2.17)$$

Agora, basta isolarmos o termo da expansão e chegamos em

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.18)$$

a primeira equação de Friedmann.

Para os componentes espaciais, temos

$$G_{ii} = -a^2 \left( 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right), \quad T_{ii} = a^2 p, \quad (2.19)$$

e aplicando na equação de Einstein:

$$-a^2 \left( 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) + \Lambda a^2 = 8\pi G a^2 p. \quad (2.20)$$

Dividindo por  $a^2$ :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.21)$$

chegamos na segunda equação de Friedmann. As quantidades  $\rho$  e  $p$  são a densidade de matéria e pressão de um fluido perfeito.

A primeira equação de Friedmann, equação (2.18), diz como a expansão do universo, lado esquerdo da equação, se relaciona e depende da quantidade de matéria e energia ( $\rho$ ), da curvatura do espaço-tempo ( $k$ ) e da constante cosmológica ( $\Lambda$ ), que atua como uma "pressão negativa". A segunda equação de Friedmann, (2.21), por sua vez, nos mostra se a expansão do universo está acelerando ou desacelerando. Assim, dizemos que as equações de Friedmann descrevem como o universo se expande ao longo do tempo, relacionando o ritmo de expansão com a densidade de matéria, energia, curvatura e a constante cosmológica.

As equações de Friedmann são a base para o modelo cosmológico padrão ( $\Lambda$ CDM) e nos permitem prever o passado e o futuro do universo. Ainda, ajudam a interpretar observações como a radiação cósmica de fundo, supernovas e lentes gravitacionais, por exemplo.

### 2.2.3 Modelo Cosmológico $\Lambda$ CDM

Trabalharemos no modelo cosmológico  $\Lambda$ CDM, que assume um universo composto por radiação, matéria ordinária (ou bariônica), matéria escura fria (CDM - *cold dark matter*) e energia escura, além de descrever a expansão do universo. O modelo  $\Lambda$ CDM é amplamente aceito por sua capacidade de explicar uma vasta gama de observações, incluindo a radiação cósmica de fundo (CMB - *cosmic microwave background*), a distribuição de galáxias e as estruturas em grande escala.

A dinâmica da expansão do universo é governada pelas equações de Friedmann, derivadas das equações de Einstein sob o pressuposto de homogeneidade e isotropia. Nessa formulação, um parâmetro fundamental é a densidade crítica, definida como:

$$\rho_{crit}(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}, \quad (2.22)$$

onde  $H(t) = \dot{a}/a$  é a taxa de expansão do universo (função de Hubble) em função do tempo.

A densidade crítica representa o valor da densidade total de energia que separa diferentes geometrias espaciais. Se a densidade total  $\rho$  do universo for maior que  $\rho_{crit}$ , o universo possui uma curvatura positiva (fechada) e pode colapsar. Outras opções são, se  $\rho < \rho_{crit}$ , o universo tem curvatura negativa (aberta) e se expandirá para sempre, enquanto, se  $\rho = \rho_{crit}$ , o universo é plano e a expansão tende a desacelerar mas nunca para completamente.

A razão entre a densidade de um componente  $i$  e a densidade crítica é chamada de parâmetro de densidade:

$$\Omega_i(t) = \frac{\rho_i(t)}{\rho_{crit}(t)}. \quad (2.23)$$

No instante presente ( $t = t_0$ ), usamos a forma:

$$\Omega_i = \frac{\rho_i(z=0)}{\rho_{crit}(z=0)} = \frac{8\pi G\rho_i(z=0)}{3H_0^2}. \quad (2.24)$$

No modelo cosmológico  $\Lambda$ CDM - plano, a primeira equação de Friedmann pode ser escrita como

$$H(a) = H_0 \sqrt{\Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_{DE}}, \quad (2.25)$$

onde  $H_0$  é o valor atual da constante de Hubble. e os termos  $\Omega_r$ ,  $\Omega_m$  e  $\Omega_{DE}$  representam, respectivamente, as densidades relativas de radiação, matéria total e energia escura. Neste trabalho, ao nos referirmos à matéria, consideramos tanto a matéria bariônica quanto a matéria escura fria (CDM). Assim:

$$\Omega_m = \Omega_b + \Omega_{CDM}. \quad (2.26)$$

Dessa forma, o modelo  $\Lambda$ CDM fornece uma estrutura teórica robusta e bem testada para descrever a dinâmica do universo, desde a radiação cósmica de fundo até a formação

de grandes estruturas. Sua simplicidade e consistência com os dados observacionais mais precisos disponíveis justificam sua ampla aceitação como o modelo cosmológico padrão. Neste trabalho, utilizaremos o  $\Lambda$ CDM como base para os cálculos e análises relacionados aos efeitos do lenteamento gravitacional, investigando como a distribuição da matéria influencia a propagação da luz no universo em expansão.

## 3 Deflexão da Luz

A ideia de que a luz poderia ser defletida pela gravidade não é tão recente quanto pensamos. No séc. XVII, com a Teoria da Gravitação Universal de Newton ([NEWTON, 2016](#)) ([NEWTON, 2012](#)), já haviam aqueles capazes de imaginar a ocorrência de tal fenômeno, todavia, algumas limitações teóricas incapacitaram esforços de melhor compreender este evento da natureza.

No séc. XX, com a Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein, esse fenômeno de deflexão foi melhor explicado e descrito, permitindo-nos chegar na definição atual de lenteamento gravitacional como a deflexão e o atraso da luz por um potencial gravitacional e suas elegantes descrições matemáticas.

Esse entendimento mais aprofundado abriu uma nova porta para a análise do desvio da trajetória da lua e sua relação com o cosmos e seus componentes, a exemplo da sua relação com a distribuição da matéria e com a expansão do universo, dentre outros. Vamos destrinchar um pouco desses fenômenos e relações nesse capítulo e melhor entender a importância do lenteamento gravitacional nas análises cosmológicas atuais.

Nesse capítulo vamos explorar a teoria por trás da deflexão da luz, baseando-nos, principalmente, nas obras ([Meneghetti, 2021](#)), obra da qual seguimos a notação, ([Congdon; Keeton, 2018](#)), ([Faga, 2022](#)), ([Dodelson, 2017](#)) e ([Peebles, 1980](#)).

### 3.1 Deflexão Da Luz Clássica x Relativística

No livro ([Meneghetti, 2021](#)), temos derivada a equação que descreve o ângulo de deflexão da luz calculada sobre a luz das duas teorias gravitacionais citadas, a de Newton e a de Einstein. Vamos agora explorar a derivação dessas equações e entender suas principais diferenças e como essa deflexão se relaciona com as grandezas cosmológicas que conhecemos, como a massa e a distância entre os envolvidos, partindo da teoria da gravitação universal e, depois, da teoria da relatividade geral.

#### 3.1.1 Ângulo de Deflexão Clássico

No século XVII, Sir Isaac Newton mencionou já a possibilidade de a gravidade distorcer a trajetória da luz e alterar a imagem projetada no céu ([Newton, 1952](#)) e abordou de forma aprofundada esse fenômeno para a luz corpuscular ([Newton, 1704](#)). Coube, todavia, ao físico, matemático e astrônomo alemão Johann Georg von Soldner (1776-1833) derivar, pela primeira vez, a equação de deflexão da luz no regime da teoria da gravitação universal, publicando seu resultado em 1804 no trabalho de nome "Sobre a deflexão de um raio de luz de

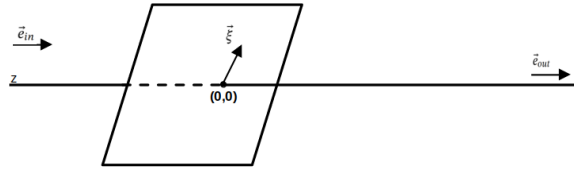


Figura 3.1 – Direção da Deflexão da Luz - Imagem inspirada por (Meneghetti, 2021).

seu movimento retilíneo devido à atração de um corpo celeste ao qual ele passa próximo" em tradução livre para português.

Vamos ver, então, como podemos chegar a essa equação, seguindo os passos de (Meneghetti, 2021), para o regime newtoniano da gravidade.

Se a luz for tratada como partículas com massa  $m$ , ou seja, estamos assumindo que fótons são partículas de massa indeterminada capazes de sentir os efeitos da atração gravitacional, e velocidade  $c$ , que passam por um corpo massivo de massa  $M$  e raio de aproximação  $r$ , a força gravitacional sobre a luz é dada por

$$\vec{F} = -m\vec{\nabla}\Phi, \quad (3.1)$$

onde  $\Phi = -GM/r$  é o potencial gravitacional gerado pela massa  $M$ .

A lei de movimento newtoniana, ou a segunda lei de Newton, diz que  $\vec{F} = m\vec{a}$ , onde  $a$  é a aceleração da partícula. Assim, devido à influência gravitacional de  $M$ , a partícula será acelerada a  $\vec{a} = -\vec{\nabla}\Phi$ , tal que ganhará uma velocidade

$$\Delta\vec{v} = \int_{t_F}^{t_0} \vec{a} dt, \quad (3.2)$$

enquanto sobre a ação da força gravitacional de  $M$  entre o tempo que parte da fonte,  $t_F$ , e o tempo que a observamos,  $t_0$ .

Assumindo que a partícula se mova paralelamente ao eixo  $z$ , pelo menos inicialmente, e que a massa  $M$ , nossa lente, esteja na origem do nosso sistema de referência, como mostra a figura 3.1, resolvemos a integral e obtendo

$$\Delta v \approx \frac{1}{c} \int_{z_F}^{z_0} \vec{a} dz = -\frac{1}{c} \int_{z_F}^{z_0} \nabla\Phi dz. \quad (3.3)$$

Podemos expressar o eixo  $z$  em termos do tempo na forma  $z = ct$ , tal que  $dz = cdt$ .

Decompondo o gradiente do potencial gravitacional em duas componentes ao longo de  $z$  e  $\xi$ , onde  $\xi$  é a coordenada ao longo do eixo perpendicular a  $z$ , obtemos

$$\vec{\nabla}\Phi = \frac{d\Phi}{dz}\vec{e}_z + \frac{d\Phi}{d\xi}\vec{e}_\xi. \quad (3.4)$$

Agora, aplicando para o cálculo de  $\Delta v$  e decompondo as velocidades para as direções perpendicular e paralela à trajetória da luz, da mesma forma que fizemos com o  $\vec{\nabla}\Phi$ , obtemos

$$\Delta v_{\parallel} = \frac{1}{c} [\Phi(z_F, \xi) - \Phi(z_0, \xi)], \quad (3.5a)$$

$$\Delta v_{\perp} = -\frac{2GM}{c\xi}. \quad (3.5b)$$

Assim, a partícula se move com uma velocidade inicial  $\vec{v}_{in} = c\vec{e}_{in}$  e passa a se mover com uma velocidade  $\vec{v}_{out} = c\vec{e}_{out} = c\vec{e}_{in} - \frac{2GM}{c\xi}\vec{e}_{\xi}$  após a deflexão sofrida ao interagir com o objeto de massa  $M$ .

O ângulo de deflexão da partícula, definido como a diferença entre a direção inicial de movimento e a direção final de movimento é:

$$\hat{\alpha} = \vec{e}_{in} - \vec{e}_{out} = \frac{2GM}{c^2\xi}\vec{e}_{\xi}, \quad (3.6)$$

ou ainda, o ângulo de deflexão da luz ao passar a uma distância  $R$  de um objeto de massa  $M$ , de acordo com a teoria da gravitação newtoniana, é dada por

$$\hat{\alpha} = \frac{2GM}{c^2R}. \quad (3.7)$$

### 3.1.2 Ângulo de Deflexão Relativístico

Para a deflexão da luz, segundo a Teoria da Relatividade Geral, é necessário que resolvamos a equação que descreve a trajetória da luz, a equação da geodésica (2.1).

Seja a métrica num espaço-tempo dada pela solução de Schwarzschild, que descreve o campo gravitacional fora de um corpo esférico, estático e sem carga:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)c^2dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.8)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional,  $M$  é a massa do corpo gerador do campo e  $c$  a velocidade da luz. Aplicando esta métrica na equação da geodésica,

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda} \frac{dx^{\beta}}{d\lambda} = 0, \quad (3.9)$$

obtemos que uma partícula descreverá trajetórias neste espaço-tempo dadas pelas equações:

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \cos\theta \sin\theta \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = 0, \quad (3.10)$$

a componente polar da equação, que descreve como a coordenada  $\theta$  varia ao longo da trajetória;

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\phi}{ds} = 0, \quad (3.11)$$

a componente azimutal da trajetória, esta equação governa a variação da coordenada angular  $\phi$ , associada à conservação do momento angular; e

$$\frac{d^2t}{ds^2} + \frac{GM}{c^2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1} \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} = 0 \quad (3.12)$$

a componente temporal da geodésica, representando a variação da coordenada temporal  $t$  ao longo da trajetória - reflete como o tempo se relaciona com a propagação da luz em uma região com campo gravitacional, a exemplo do *redshift* e da dilatação temporal.

Sabendo que, para a trajetória da luz,  $ds^2 = 0$ , chamado trajetória do tipo nulo, e fazendo a mudança de variável  $u = 1/r$ , basta substituímos as equações acima na equação da geodésica para obtermos a equação da trajetória da luz, dada por

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{3GM}{c^2}u^2, \quad (3.13)$$

na métrica de Scharzschild, nas proximidades de um objeto de massa  $M$  simetricamente esférico e estático.

Para resolvermos a equação da trajetória, basta aplicarmos o método de aproximações sucessivas, ou seja, considerando a solução geral como uma série de potências  $u = u^{(0)} + u^{(1)} + u^{(2)} + \dots$ , em que, para cada solução  $u^{(n)}$ , usamos a solução anterior  $u^{(n-1)}$ , até a ordem que nos interessa, no nosso caso, até a ordem um, isso pois, como veremos mais adiante, a curvatura do espaço-tempo é causada por uma perturbação pequena que, em ordens superiores a um, é negligenciável. Assim, a solução de primeira ordem para a trajetória é

$$R = r \cos \phi + \frac{GM}{c^2 R} \left( r \cos^2 \phi + 2r \sin^2 \phi \right), \quad (3.14)$$

onde usamos a substituição  $u = 1/r$  novamente. E, escrevendo em coordenadas cartesianas, obtemos

$$x = R - \frac{GM}{c^2 R} \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (3.15)$$

Se a fonte do feixe luminoso estiver muito distante do observador, tal que,  $y \gg x$ , chegamos a representação das trajetórias como duas retas dadas por

$$x \approx R \pm \frac{GM}{c^2 R} 2y. \quad (3.16)$$

Assim, a trajetória da luz será dada pela composição dessas duas soluções, tal que o ângulo de deflexão da luz por uma lente de massa  $M$  na Relatividade Geral é dada por:

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM}{c^2 R}, \quad (3.17)$$

prevista por Einstein e exatamente o dobro do valor previsto na teoria newtoniana ([César; Pompeia; Studart, 2019](#)). Essa diferença ocorre porque, na teoria newtoniana, o cálculo do desvio da luz é feito de forma aproximada, tratando a luz como uma partícula sob influência do potencial gravitacional, equivalente apenas à curvatura do tempo no contexto relativístico. Já na teoria da Relatividade Geral, a presença de massa curva tanto o tempo quanto o espaço, e essas duas contribuições se somam, a curvatura espacial adiciona um efeito igual ao da curvatura temporal, resultando em um desvio total duas vezes maior que o previsto pela abordagem newtoniana.

De forma semelhante, ambas as teorias admitem que a luz é afetada pela gravidade, mas na de Newton, adota-se um modelo corpuscular para luz, ou seja, a luz afetada por uma força gravitacional, enquanto, para a Relatividade Geral, a luz percorre uma geodésica em um espaço-tempo curvado por uma massa  $M$ .

A hipótese de Einstein para o desvio da trajetória da luz foi testada pela primeira vez em 1919. A observação ocorreu durante o eclipse solar de 29 de Maio daquele mesmo ano, onde foram enviadas duas expedições, uma para a cidade de Sobral, no Ceará, Brasil, liderada por Andrew Crommelin, e outra para a ilha do Príncipe, na costa da África, liderada por Arthur Eddington. Durante o eclipse, os astrônomos fotografaram estrelas próximas ao Sol encoberto. Comparando suas posições com observações feitas com o Sol em outra posição no céu, verificaram que a luz das estrelas era de fato desviada, exatamente como Einstein havia previsto (Dyson; Eddington; Davidson, 1923).

## 3.2 Equação da Lente

Na seção anterior, desenvolvemos brevemente a equação para o ângulo de deflexão da trajetória da luz para uma lente composta por uma massa pontual  $M$  (*point-mass lens*). A partir de agora, desenvolveremos a teoria de lentes gravitacionais para o caso de lentes compostas por uma distribuição estendida de massa (*extended mass distribution*).

O efeito da lente é distorcer o ângulo que seria observado na ausência de deflexão,  $\vec{\theta}_F$ , em uma nova imagem caracterizada por  $\vec{\theta} = \vec{\theta}_{obs}$ . Essa deflexão é descrita pelo ângulo de deflexão reduzido  $\vec{\alpha} = \vec{\theta} - \vec{\theta}_F$ .

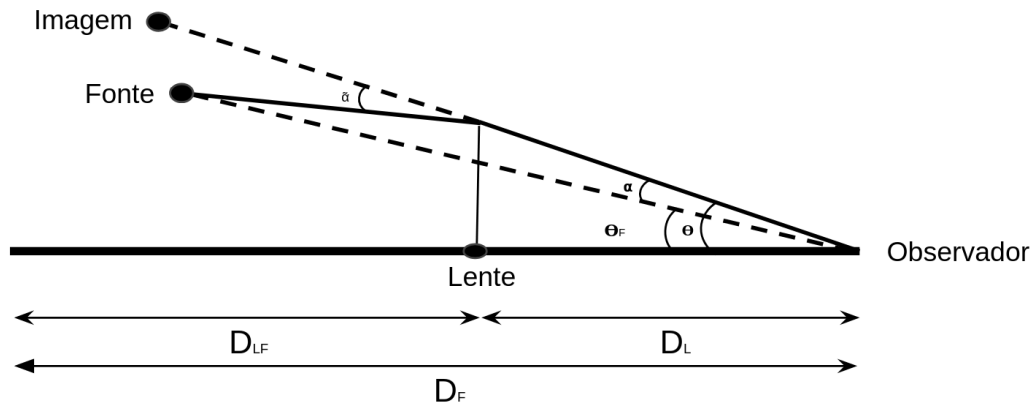


Figura 3.2 – Geometria das Lentes Gravitacionais. A luz, vindo de uma fonte em  $\theta_F$  sendo defletida por um ângulo  $\alpha$  a uma nova posição angular  $\theta = \theta_{obs}$  por um potencial gravitacional.

O ângulo de deflexão reduzido  $\alpha^i$  se relaciona ao ângulo de deflexão  $\hat{\alpha}^i$  por

$$\alpha^i = \frac{D_{LF}}{D_F} \hat{\alpha}^i \quad (3.18)$$

e a equação da lente fica dada por

$$\theta_F^i = \theta^i - \frac{D_{LF}}{D_F} \hat{\alpha}^i, \quad (3.19)$$

onde  $\alpha^i$  indica o componente do vetor  $\vec{\alpha}$ , e o mesmo para os demais elementos das equações (3.18) e (3.19), e os elementos  $D_F$ ,  $D_{LF}$  e  $D_L$  simbolizam, respectivamente, a distância entre o observador e a fonte, a distância entre a lente e a fonte e a distância entre o observador e a lente.

Como vimos no capítulo anterior, segundo a teoria da Relatividade Geral, a gravidade é uma consequência da geometria do espaço tempo, assim, a luz defletida por um potencial gravitacional não deixa de andar em linha reta, é o próprio espaço que se curva, fazendo com que a luz percorra o equivalente a uma reta nessa geometria, uma geodésica.

Nosso interesse nesse capítulo é derivar uma equação que descreva essa mudança na trajetória da luz e nos dê como a posição angular observada,  $\vec{\theta}_{obs}$ , se relaciona com a posição angular original da fonte  $\vec{\theta}_F$ , para uma fonte muito distante (distante o suficiente para podermos considerar o espaço como homogêneo e isotrópico).

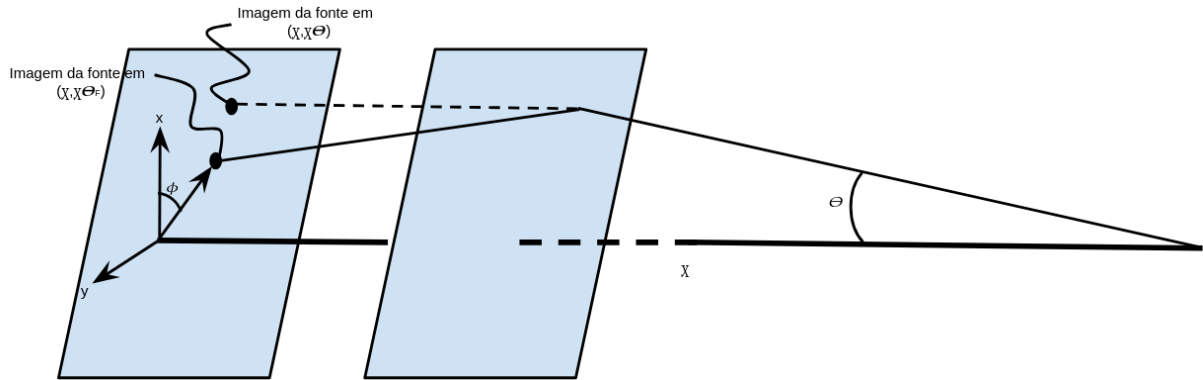


Figura 3.3 – Deflexão da luz de uma fonte localizada em  $(\chi, \chi\theta_F)$  e sua imagem observada em  $(\chi, \chi\theta)$ .

Para encontrar a equação que descreva essa deflexão, é necessário resolver a equação que dita a trajetória da luz, a equação da geodésica. Nosso interesse está na deflexão transversal da luz, limitando nosso problema às componentes espaciais e transversais da equação, apenas. Em coordenadas comóveis, a fonte da luz observada é  $(\chi, \chi\theta_F)$ . Ao ser defletida, todavia, a sua imagem é observada em  $(\chi, \chi\theta)$ , como mostra a figura 3.3.

Para resolver a equação da Geodésica, começamos por fazer a seguinte mudança de variáveis

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dt}{d\lambda} \frac{d}{dt} = \frac{d\chi}{dt} \frac{dt}{d\lambda} \frac{d}{d\chi}. \quad (3.20)$$

Note que a primeira derivada do termo da direita da equação (2.1) é expressa pela relação  $d\chi/dt = -1/a$ . Para determinar  $dt/d\lambda$ , podemos utilizar a relação do quadri-momento

para partículas de massa  $m$ ,

$$P^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} = mu^\mu, \quad (3.21)$$

onde  $u^\mu$  é a quadri-velocidade e é construída de forma que tenha módulo um,

$$u^2 = g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = 1. \quad (3.22)$$

Dessa forma, observamos que existe uma relação simples entre os módulos das grandezas anteriores,

$$P^2 = g_{\alpha\beta}P^\alpha P^\beta = m^2 g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = m^2, \quad (3.23)$$

ou seja, o módulo ao quadrado de  $P$  é igual ao quadrado da massa.

Usando a métrica de FLRW em coordenadas comóveis na teoria da perturbação linear, dada por

$$ds^2 = -(1 + 2\Psi)dt^2 + a(t)^2(1 + 2\Phi) [d\chi^2 + \chi^2 d\theta^2 + \chi^2 \sin^2\theta d\phi^2] \quad (3.24)$$

onde  $\Psi(t, \vec{x})$  e  $\Phi(t, \vec{x})$  são perturbações de primeira ordem na parte temporal e espacial, respectivamente, da métrica, chegamos ao quadri-momento de uma partícula em um espaço-tempo FLRW perturbado, dado por

$$P^\mu = \left[ E(1 - \Psi), p^i \frac{1 - \Phi}{a} \right]. \quad (3.25)$$

Para o caso do fóton,  $m = 0$ , obtemos  $P^2 = g_{\alpha\beta}P^\alpha P^\beta = m^2 = 0$  e, assim, chegamos em

$$g_{00} (P^0)^2 + g_{ij} P^i P^j = 0 \quad (3.26a)$$

$$-(1 + 2\Psi) \left( \frac{dx^0}{d\lambda} \right)^2 + p^2 = 0 \quad (3.26b)$$

$$P^0 = \frac{dt}{d\lambda} = \frac{p}{\sqrt{1 + 2\Psi}} \simeq p(1 + \Psi), \quad (3.26c)$$

onde aplicamos aproximação de primeira ordem nas perturbações na última igualdade, i.e., as perturbações são pequenas e grandezas de segunda ordem e superior em  $\Psi$  e  $\Phi$  são negligenciáveis.

Para o termo da esquerda na equação da geodésicas (2.1), partimos da substituição e usamos os resultados anteriores, obtendo

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} &= \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{dx^i}{d\lambda} \right) = \frac{d\chi}{dt} \frac{dt}{d\lambda} \frac{d}{d\chi} \left( \frac{d\chi}{dt} \frac{dt}{d\lambda} \frac{d}{dx^i \chi} \right) \\ &= \left( -\frac{1}{a} \right) p(1 - \Psi) \frac{d}{d\chi} \left[ \left( -\frac{1}{a} \right) p(1 - \Psi) \frac{d(\chi^{\theta^i})}{d\chi} \right] \\ &\simeq p^2 \frac{d}{d\chi} \left[ \frac{1}{a^2} \frac{d}{d\chi} (\chi^{\theta^i}) \right], \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde usamos, mais uma vez, aproximação de primeira ordem nas perturbações e deduzimos que o produto de  $\Phi$  ( $\Psi$ ) pela posição angular da fonte,  $\theta^i$ , é desprezível.

No lado direito da equação (2.1), usamos novamente a substituição para escrever as derivadas em  $\lambda$  em derivadas em  $\chi$ , e obtemos

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} &= \Gamma_{\alpha\beta}^i \left[ -\frac{p}{a} (1 - \Psi) \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right] \left[ -\frac{p}{a} (1 - \Psi) \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right] \\ \Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} &= \left( \frac{p}{a} \right)^2 (1 - \Psi)^2 \Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{dx^\alpha}{d\chi} \frac{dx^\beta}{d\chi}.\end{aligned}\quad (3.28)$$

Os símbolos de Christoffel são extraídos da métrica (3.26a) e da equação

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left( \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right), \quad (3.29)$$

e obtemos,

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^i &= \frac{1}{2} g^{i\nu} \left( \frac{\partial g_{0\nu}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\nu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu} \right) = \frac{1}{a^2} \partial_i \Psi \\ \Gamma_{0j}^i &= \frac{1}{2} g^{i\nu} \left( \frac{\partial g_{j\nu}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\nu}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^\nu} \right) = \delta_{ij} (H + \partial_0 \Psi) \\ \Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2} g^{i\nu} \left( \frac{\partial g_{k\nu}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j\nu}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\nu} \right) = \delta_{ij} \partial_k \Phi + \delta_{ik} \partial_j \Phi - \delta_{jk} \partial_i \Phi.\end{aligned}\quad (3.30)$$

Os Símbolos de Christoffel são simétricos nos índices inferiores, assim  $\Gamma_{0j}^i = \Gamma_{j0}^i$ . Note que, das combinações  $\Gamma_{jk}^i$ , a única que não zera é a  $j = 3 = k$ , isso é devido a aproximação de primeira ordem, pois  $\Gamma_{jk}^i$  é proporcional ao potencial gravitacional  $\Phi$  que, por sua vez, é pequeno e, por conseguinte, desprezível quando multiplicado por  $D_A = \chi \theta^i$ , que surge em  $i = (1, 2)$ .

Voltando a equação da Geodésica, equação (2.1), e usando os resultados anteriores, sabendo que  $\Phi = -\Psi$  no universo tardio, pois não há tensão anisotrópica, estamos considerando um universo homogêneo e isotrópico,

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^i \left( \frac{dt}{d\chi} \right)^2 &= -\partial_i \Phi = \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{d\chi} \frac{dx^k}{d\chi} \\ \Gamma_{0j}^i \frac{dt}{d\chi} \frac{dx^j}{d\chi} &= -aH \frac{d}{d\chi} [\chi \theta^i].\end{aligned}\quad (3.31)$$

Caso o leitor queira saber um pouco mais sobre tensão anisotrópica, leia o apêndice A.2.

A partir dos resultados acima, obtemos a equação da geodésica em primeira ordem como

$$\begin{aligned}p^2 \frac{d}{d\chi} \left[ \frac{1}{a^2} \frac{d}{d\chi} (\chi \theta^i) \right] &= \left( \frac{p}{a} \right)^2 (1 - \Psi)^2 \Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{dx^\alpha}{d\chi} \frac{dx^\beta}{d\chi} \\ \frac{2aH}{a^2} \frac{dD_A}{d\chi} + \frac{1}{a^2} \frac{d^2 \chi \theta^i}{d\chi^2} &= \frac{2}{a^2} \left[ \partial_0 \Phi + aH \frac{d\chi \theta^i}{d\chi} \right] v \\ \frac{d^2}{d\chi^2} [\chi \theta^i] &= 2\partial_i \Phi.\end{aligned}\quad (3.32)$$

Essa equação nos fornece uma boa noção do sistema que estamos estudando. No caso de ausência de potencial gravitacional entre o observador e a fonte, ou ainda, na presença de um potencial constante, a derivada  $\partial_i \Phi$  é nula e, portanto, o lado direito da equação (3.32) também. Nesse cenário,  $\chi \theta^i$  varia de forma constante até chegar ao observador,

$$\frac{d^2}{d\chi^2} [\chi \theta^i] = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\chi} [\chi \theta^i] = \text{constante.} \quad (3.33)$$

A relação representada pela equação (3.33) não dá a condição de contorno do nosso sistema que usaremos mais tarde para encontrar a equação para a deflexão da luz.

Outra observação interessante diz respeito ao sinal da derivada do potencial gravitacional. Suponhamos, por exemplo, uma lente gravitacional gerada por uma massa pontual  $M$  localizada na origem,  $x = y = 0$ , de modo que o potencial  $\Phi(x, y)$  atinge seu valor máximo próximo à massa e decresce à medida que nos afastamos. Isso implica que  $\frac{\partial \Phi}{\partial x} < 0$  para  $x > 0$ , indicando que o gradiente do potencial aponta em direção à massa. Nesse contexto, a "força gravitacional efetiva" que desvia a trajetória do raio de luz atua no sentido de atraí-lo em direção à lente. O sinal negativo dessa derivada é, portanto, consistente o que esperávamos, a perturbação causada pela massa é mais intensa nas proximidades da lente e diminui ao nos afastarmos, como é típico em campos gravitacionais.

Para obtermos a equação que descreve a deflexão sofrida pela luz, basta integrarmos duas vezes a equação da geodésica do ponto onde se encontra o observador até a fonte. Começamos com a equação que obtemos anteriormente

$$\frac{d^2}{d\chi^2} [\chi \theta^i] = 2\partial_i \Phi \quad (3.34)$$

e integramos nos limites que nos é de interesse:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\chi} [\chi \theta^i] &= 2 \int_0^\chi d\chi' \partial_i \Phi(\vec{x}(\chi')) \\ \chi_F \theta^i &= 2 \int_0^{\chi_F} d\chi'' \int_0^{\chi''} d\chi' \partial_i \Phi(\vec{x}(\chi')). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Note que, na ausência de potencial gravitacional,  $\Phi = 0$ , ou, no caso de um potencial gravitacional constante,  $\partial_i \Phi = 0$ , o primeiro termo da soma é zero - lembre-se: um potencial gravitacional constante não gera campo gravitacional, a "força" gravitacional é dada pelo gradiente do potencial. Como devemos obter a distância angular original da fonte nesse caso (sem deflexão), a condição de contorno, dada por (3.33), nos retorna

$$\chi_F \theta^i = 2 \int_0^{\chi_F} d\chi'' \int_0^{\chi''} d\chi' \partial_i \Phi(\vec{x}(\chi)) + C \quad (3.36)$$

onde  $C$  não é uma constante arbitrária, mas uma condição de contorno aplicada após a integração, tal que

$$C = \chi_F \theta_F^i. \quad (3.37)$$

O limite de integração de  $\chi'$  está restrito ao intervalo  $[\chi', \chi_F]$ , pois há uma dependência entre as distâncias, com  $\chi' < \chi''$  necessária na integral em  $\chi''$ . Isso ocorre porque estamos integrando do local do observador à fonte, impondo essa relação entre os limites. Já para a segunda integral, não há dependência em  $\chi''$ . Obtemos, então,

$$\chi_F \theta^i = \chi_F \theta_F^i + 2 \int_0^{\chi_F} d\chi \partial_i \Phi(\vec{x}(\chi)) (\chi_F - \chi). \quad (3.38)$$

Usando a equação da lente,  $\vec{\alpha} = \vec{\theta} - \vec{\theta}_F$ , para descrever a deflexão por distorção angular, obtemos

$$\alpha_i = \frac{2}{\chi_F} \int_0^{\chi_F} d\chi (\chi_F - \chi) \partial_i \Phi. \quad (3.39)$$

Por último, usando  $\partial_i \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}$  e  $x^i = \chi \theta^i$ , temos uma substituição na forma

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{1}{\chi} \frac{\partial}{\partial \theta^i}, \quad (3.40)$$

e obtemos, finalmente, a equação para o ângulo de deflexão

$$\alpha_i = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \theta^i}, \quad (3.41)$$

onde definimos  $\bar{\Phi}$  como o potencial gravitacional projetado, dado por

$$\bar{\Phi} \equiv \frac{2}{\chi_F} \int_0^{\chi_F} d\chi_L \frac{\chi_{FL}}{\chi_L} \Phi. \quad (3.42)$$

Note que mudamos o índice mudo  $\chi \rightarrow \chi_L$ , pois a integral só é computada onde há lente.  $\chi_L$  é a distância comóvel do observador à lente e  $\chi_{FL}$  a distância comóvel entre a fonte e a lente.

Para acharmos a equação do desvio da luz, usamos uma aproximação muito comum na teoria de lentes gravitacionais fracas, a aproximação de Born, usada para simplificar a trajetória da luz ao calcular o desvio causado por um campo gravitacional. Na aproximação de Born, assume-se que a luz viaja ao longo de uma linha reta na vizinhança da massa defletora, ou seja, a trajetória que ela faria na ausência da lente, e que o efeito gravitacional por ela sofrido é calculado ao longo dessa trajetória. Para uma deflexão pequena o suficiente, como no regime de lentes fracas, podemos usar essa aproximação, que nos permite fazer  $\vec{x}(\chi') = \chi' \vec{\theta}_F$ , (Bartelmann; Schneider, 2001).

### 3.3 Aproximação de Lentes Finas

Estamos considerando algumas aproximações para a análise nesse trabalho. Consideramos o universo homogêneo e isotrópico e consideramos as perturbações como pequenas e,

portanto, qualquer ordem superior a 1ª ordem é negligenciável. Outra consideração que estamos assumindo é que, para o caso de distribuição de matéria tridimensional, essa distribuição tem densidade de matéria  $\rho(\vec{x}')$ .

Agora, vamos supor que a lente seja caracterizada por um potencial gravitacional contido em um intervalo de *redshift* muito pequeno, i.e., muito menor em extensão espacial do que as distâncias entre fonte, lente e observador. Essa é a característica da chamada aproximação de lentes finas.

A validação dessa aproximação foi colocada à teste no trabalho (Suyama; Takahashi; Michikoshi, 2005), entre outros. Ao comparar soluções numéricas com as soluções analíticas sob a aproximação de lente fina, esta pesquisa avalia o erro da aproximação de lentes finas. Os resultados obtidos mostram que o erro relativo da aproximação é pequeno se a espessura geométrica da lente for muito menor do que a distância entre observador e lente, exatamente o que estamos assumindo.

Até mesmo no caso de lenteamento gravitacional por aglomerados de galáxias, o tamanho da lente é geralmente muito inferior as distâncias entre fonte, lente e observador e, assim, temos a possibilidade de simplificar nosso trabalho a partir dessa aproximação. Mais uma vez, reitero a importância da obra (Meneghetti, 2021) para este trabalho, todo o desenvolvimento teórico aqui descrito pode ser encontrado nesse livro.

Seja a lente formada por matéria distribuída em uma casca esférica fina em um dado *redshift*, chamado plano da lente, estendendo-se transversalmente em relação a linha de visada. Vamos determinar o ângulo de deflexão nessa aproximação.

Partimos da solução da equação de Poisson para um potencial gravitacional  $\Psi(\vec{x})$

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{x}) &= -G \int \frac{d^3x}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \rho(\vec{x}') \\ &= -G \int \frac{d^2\vec{x}' dx_{\parallel}}{\sqrt{(\vec{x}_{\perp} - \vec{x}'_{\perp})^2 + (x_{\parallel} + x'_{\parallel})^2}},\end{aligned}\tag{3.43}$$

onde separamos nossas componentes da coordenada física  $\vec{x} = (D, D\vec{\theta})$  em parte paralela e parte transversal à linha de visada. Assim, o potencial projetado  $\bar{\Phi}$ , dado pela equação (3.42), fica

$$\bar{\Psi} = -\frac{2G}{D_F} \int_0^{D_L} dD_L'' \frac{D_{FL}''}{D_L''} \int \frac{d^2\vec{x}' dx_{\parallel} \rho(\vec{x}', \vec{x}_{\parallel})}{\sqrt{(\vec{\theta}'' D_L'' - \vec{x}_{\perp}'')^2 + (D_L'' - x_{\parallel}')^2}}.\tag{3.44}$$

A partir da aproximação de lentes finas, assumimos que a lente gravitacional está concentrada no ponto  $x_{\parallel} = D_L$  da trajetória da luz, de modo que a dependência do denominador da equação (3.44) é fraca. Dessa forma, a distribuição da matéria da lente é completamente dominada pela densidade superficial

$$\Sigma(\vec{x}_{\perp}) \equiv \int dx_{\parallel} \rho(\vec{x}_{\perp}, x_{\parallel}).\tag{3.45}$$

Note que a razão  $D_{FL}/(D_F D_L)$  é aproximadamente constante no limite de lentes finas e, mudando a ordem de integração, obtemos

$$\begin{aligned}
 \bar{\Psi} &= -\frac{2GD_{FL}}{D_F D_L} \int d^2 x'_\perp \Sigma(\vec{x}'_\perp) \int_0^{D_L} \frac{dD''_L}{\sqrt{(\vec{\theta}'' D''_L - \vec{x}''_\perp)^2 + (D''_L - D_L)^2}} \\
 &= -\frac{2GD_{FL}}{D_F D_L} \int d^2 x'_\perp \Sigma(\vec{x}'_\perp) \left[ \ln \left( D''_L - D_L + \sqrt{(\vec{\theta} D''_L - \vec{x}''_\perp)^2 + (D''_L - D_L)^2} \right) \right] \\
 &\simeq -\frac{2GD_{FL}}{D_F D_L} \int d^2 x'_\perp \Sigma(\vec{x}'_\perp) \ln \left( \frac{4D_{FL} D_L}{(\vec{\theta} D_L - \vec{x}'_\perp)^2} \right),
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

mais uma vez usamos a aproximação de lentes finas para avaliar que, quando no limite  $[D_F, 0]$ , a distância transversal é muito menor que as distâncias do outro termo dentro da raiz. Assim, o limite superior fica igual a  $\ln(2D_{FL})$  e nos permite expandir a raiz do limite inferior em Taylor e obtemos que o termo relevante na expansão é  $\ln \left[ (\vec{\theta} D_L - \vec{x}'_\perp)^2 / 2D_L \right]$ .

Como estamos interessados nas derivadas do potencial gravitacional projetado para obter o ângulo de deflexão, equação (3.41), ignoramos os termos que não dependem de  $\vec{\theta}$  (suas derivadas em  $\theta$  serão nulas) e fazemos a mudança de variável

$$\vec{\theta}^i \equiv \frac{x_\perp^i}{D_L} \tag{3.47}$$

obtendo

$$\bar{\Phi}(\vec{\theta}) = \frac{4GD_{FL} D_L}{D_F} \int d^2 \theta' \Sigma(\vec{\theta}') \ln |\vec{\theta} - \vec{\theta}'|. \tag{3.48}$$

A equação (3.48) nos mostra que o logaritmo da distância angular entre a lente - ou elementos de densidade - e a posição observada dita a influência da densidade da lente na distorção da trajetória do fóton. Ainda, note que o efeito da lente é máximo quando a lente está no meio do caminho entre o observador e a fonte:  $\frac{D_{FL} D_L}{D_F} = 1$ , logo  $D_{FL} D_L = D_F$  e, como  $D_{FL} + D_L = D_F$ , obtemos  $D_{FL} = D_L = \frac{1}{2} D_F$ .

Outra informação interessante que podemos observar na equação (3.48) é que o pré-fator  $(\frac{4GD_{FL} D_L}{D_F})$  engloba informação da geometria longitudinal do sistema observador-lente-fonte enquanto a integral contabiliza a geometria transversal da lente (direções 'verticais' - veja a figura 3.2). Assim, a partir das informações fornecidas pelo pré-fator, definimos a densidade crítica como

$$\Sigma_{crit} \equiv \frac{D_F}{4\pi G D_{FL} D_L}, \tag{3.49}$$

onde a densidade de massa superficial crítica ( $\Sigma_{crit}$ ) representa a densidade necessária para que a lente gravitacional produza uma convergência  $\kappa = 1$  em uma determinada posição angular. Esse parâmetro é de fundamental importância na descrição do lenteamento fraco, pois serve como uma escala de comparação entre a densidade superficial projetada da lente

e a eficiência da lente em desviar a luz das fontes (Congdon; Keeton, 2018). Definimos a convergência  $\kappa$ , um dos dois fenômenos de lenteamento que veremos a seguir, como a densidade superficial de massa em unidades da densidade crítica

$$\kappa \equiv \frac{\Sigma(\vec{\theta})}{\Sigma_{crit}}. \quad (3.50)$$

Segundo a definição apresentada na equação (3.50), a convergência é uma grandeza local, i.e, é possível saber seu valor em um ponto  $\vec{\theta}$  apenas olhando para o que acontece na função neste ponto.

A partir da definição de densidade superficial crítica, definimos os lenteamentos gravitacionais fraco e forte. O lenteamento gravitacional forte é caracterizado pela predominância da densidade superficial,  $\Sigma_{crit} < \Sigma \Rightarrow \kappa > 1$ . O Lenteamento gravitacional fraco, por sua vez, é quando se predomina a influencia das posições do sistema observador-lente-fonte,  $\Sigma_{crit} > \Sigma \Rightarrow \kappa < 1$  (Faga, 2022).

Finalmente, tomando as derivadas do potencial gravitacional projetado, segundo a equação (3.41), obtemos o ângulo de deflexão da imagem

$$\alpha_i = \frac{\partial}{\partial \theta^i} \left[ \frac{1}{\pi} \int d^2 \theta' \kappa(\vec{\theta}') \ln |\vec{\theta} - \vec{\theta}'| \right], \quad (3.51)$$

assim,

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int d^2 \theta' \kappa(\vec{\theta}') \frac{\vec{\theta} - \vec{\theta}'}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}'|}. \quad (3.52)$$

Computamos, partindo da aproximação de lentes finas, a contribuição somada de todos os elementos de massa. Essa equação mostra que o cálculo da deflexão da luz é formalmente a convolução da função da densidade superficial de massa com a função, ou *kernel*,  $|\vec{\theta} - \vec{\theta}'|$ .

### 3.4 Lentes Esfericamente Simétricas

A segunda aproximação que utilizaremos é a de lentes esfericamente simétricas, na qual supomos que as massas que compõem a lente estão distribuídas de forma esférica e simétrica, centradas em um dado *redshift*.

Vamos partir da equação para o ângulo de deflexão  $\vec{\alpha}$  na aproximação de lentes finas

$$\alpha_i = \frac{1}{\pi} \int d^2 \theta' \kappa(\vec{\theta}') \frac{\theta^i - \theta'^i}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}'|}, \quad (3.53)$$

e, sabendo que a distribuição de massa é esfericamente simétrica, então a densidade superficial da lente também é, logo,  $\Sigma(\vec{\theta}) \rightarrow \Sigma(\theta)$  e obtemos

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int d^2\theta' \kappa(\theta') \frac{\vec{\theta} - \vec{\theta}'}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}'|}. \quad (3.54)$$

Assim, a única direção que importa é a direção  $\vec{\theta}$  que o observador olha o sistema no plano celeste, isso por conta da simetria oferecida pela aproximação em questão da integração em  $\theta'$ . Note que a distorção causada pela lente não muda a direção da posição angular da fonte. Todavia, há mudança em seu módulo  $\theta$ , essa mudança é descrita por

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = A(\theta)\vec{\theta}. \quad (3.55)$$

Seja um disco de raio  $\theta_{\text{máx}}$  concêntrico à lente, usamos o teorema de Gauss e fazemos

$$\begin{aligned} \int_{\theta < \theta_{\text{máx}}} d^2\theta \vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha}(\vec{\theta}) &= \int_c d\varphi \vec{\theta} \cdot \vec{\alpha}(\vec{\theta}) \\ 2 \int_{\theta < \theta_{\text{máx}}} d^2\theta \kappa(\theta) &= 2\pi A(\theta_{\text{máx}})\theta_{2\text{máx}}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

onde a integral é feita no perímetro do círculo de raio  $\theta_{\text{máx}}$ , dado por  $c$ , e  $\varphi$  o ângulo azimutal tal que  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Dessa forma, obtemos

$$A(\theta) = \bar{\kappa}(\theta) = \frac{1}{\pi\theta^2} \int_{\theta' < \theta} d^2\theta' \kappa(\theta'), \quad (3.57)$$

para qual definimos  $\bar{\kappa}(\theta)$  como a convergência normalizada. Essa quantidade pode ser escrita usando a distância transversal  $R = D_L\theta$  na forma

$$\bar{\kappa}(\theta) = \frac{1}{\pi D_L^2 \theta^2} \int_{R' < R} d^2R' \frac{\Sigma(\vec{R}')}{\Sigma_{\text{crit}}}. \quad (3.58)$$

Integrando a densidade da lente em  $d^2R$ , obtemos que a massa total contida no cilindro é dada por

$$M(R) \equiv \int_{R' < R} d^2R' \Sigma(\vec{R}'), \quad (3.59)$$

e podemos escrever a densidade superficial normalizada como

$$\bar{\kappa}(\theta) = \frac{M(R)}{\pi D_L^2 \theta^2 \Sigma_{\text{crit}}} = \frac{\bar{\Sigma}(R)}{\Sigma_{\text{crit}}}, \quad (3.60)$$

para  $\bar{\Sigma}$  a densidade superficial média no cilindro de raio  $R = D_L\theta$ .

Observando a equação (3.57), vemos que a transformação que descreve o desvio da trajetória da luz é regida pela massa contida no cilindro de raio  $R$ , como é de se esperar. Notamos também que a deflexão é não local, ou seja, seu valor em  $\theta$  não depende apenas de  $\theta$ , mas também do que está contido em  $\theta' < \theta$ .

Dessa forma, a deflexão da luz causada por uma lente fina e esfericamente simétrica é descrita pelo vetor de deflexão dado por

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \bar{\kappa}(\theta)\vec{\theta} = \vec{\theta} \frac{M(R)}{\pi D_L^2 \theta^2 \Sigma_{\text{crit}}}. \quad (3.61)$$

### 3.5 Efeitos de Lenteamento - Convergência e Cisalhamento

Como vimos até agora, feixes de luz - fótons - são defletidos por potenciais gravitacionais em trajetórias bem definida com sentido ao centro da lente. Essa deflexão distorce a imagem de duas formas, ampliando-a, efeito chamado de convergência, e esticando-a, efeito chamado cisalhamento. Podemos ver um exemplo de distorção de imagem na figura 3.4<sup>1</sup>.



Figura 3.4 – Imagem tirada pelo *Hubble Space Telescope* em 11 de Março de 2006, divulgada pela NASA, retratando o efeito de lentes gravitacionais. *"This file is in the public domain in the United States because it was solely created by NASA."*

Como a deflexão se dá em um plano, como vimos na figura 3.3, podemos trata-la como uma transformação matricial simétrica 2x2 onde cada elemento da matriz representa uma direção arbitrária no plano bidimensional da fonte. Essa matriz jacobiana que descreve

---

<sup>1</sup> Esta imagem descreve a distorção da trajetória da luz no caso de lenteamento gravitacional forte, como podemos ver em exemplos de arcos gravitacionais. Já no caso de lenteamento fraco, os efeitos são discretos e só conseguimos percebê-los por meio de análises estatísticas computacionais.

a distorção da imagem da fonte é dada por

$$A \equiv \frac{\partial \vec{\theta}_F}{\partial \vec{\theta}} = \delta_{ij} - \frac{\partial \alpha_i(\vec{\theta})}{\partial \theta_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \Phi(\vec{\theta})}{\partial \alpha_i \partial \theta_j} \quad (3.62)$$

ou ainda, seus elementos são descritos na forma

$$A_{ij} \equiv \frac{\partial \theta_F^i}{\partial \theta_j} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta_1} & -\frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta_2} \\ -\frac{\partial \alpha_2}{\partial \theta_1} & 1 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \theta_2} \end{pmatrix}. \quad (3.63)$$

Analisando as equações (3.41) e (3.52), vemos que podemos escrever os elementos da matriz como combinações das segundas derivadas do potencial da lente. De forma abreviada, usaremos a notação

$$\frac{\partial^2 \Phi(\vec{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \equiv \Phi_{ij}. \quad (3.64)$$

Desta forma, podemos escrever a matriz transformação em função da convergência e do cisalhamento ao obter a parte da matriz sem traço. Fazemos

$$\begin{aligned} \left( A - \frac{1}{2} \text{tr} A \cdot I \right) &= \delta_{ij} - \Phi_{ij} - \frac{1}{2} (1 - \Phi_{11} + 1 - \Phi_{22}) \delta_{ij} \\ &= -\Phi_{ij} + \frac{1}{2} (\Phi_{11} + \Phi_{22}) \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} (\Phi_{11} - \Phi_{22}) & -\Phi_{12} \\ -\Phi_{21} & \frac{1}{2} (\Phi_{11} - \Phi_{22}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Assim, definimos convergência  $\kappa$  como

$$\kappa(\vec{\theta}) \equiv \frac{1}{2} \Phi_{ii} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \theta_2} \right). \quad (3.66)$$

A convergência descreve como a imagem é ampliada, ou seja, o aumento em escala que a imagem sofre ou o aumento em sua magnitude. Já o cisalhamento  $\gamma$ , que avalia como a imagem é esticada, ou seja, a mudança desigual de tamanho que a imagem sofre em uma determinada direção, é dividido em duas componentes definidas como

$$\gamma_1 \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta_1} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \theta_2} \right) \quad (3.67)$$

e

$$\gamma_2 \equiv \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta_2} = \frac{\partial \alpha_2}{\partial \theta_1}, \quad (3.68)$$

onde  $\gamma_1$  registra como a imagem é esticada pelo eixo  $\theta_1$ , quando  $\gamma_1 > 0$ , ou pelo eixo  $\theta_2$ , quando  $\gamma_1 < 0$ , e  $\gamma_2$ , por sua vez, registra esse esticamento nas diagonais,  $\theta_1$  variando junto com  $\theta_2$ , se  $\gamma_1 > 0$ , e o contrário, se  $\gamma_1 < 0$ .

Observe que, segundo vimos na equação (3.62), a matriz de transformação é a matriz identidade menos o fator  $\partial \alpha_i / \partial \theta_j$ , chamado tensor distorção, e quantifica a distorção da

trajetória da luz devido a inhomogeneidade que são as lentes gravitacionais. Como  $\vec{\alpha}$  depende apenas de  $\vec{\theta}$  através da posição transversal  $\vec{x} = \chi\vec{\theta}$ , podemos escrever esse fator como

$$\phi_{ij} \equiv \frac{\partial \alpha_i}{\partial \theta_j} = 2 \int_0^{\chi_F} d\chi \chi \left(1 - \frac{\chi}{\chi_F}\right) \Phi_{ij}(\chi, \chi\vec{\theta}), \quad (3.69)$$

onde foi feita uma mudança de variáveis  $\partial/\partial\theta^i = \chi\partial/\partial x_\perp^i$ . Finalmente, obtemos o tensor distorção para um conjunto de fontes ao integramos a equação (3.59) em  $\chi_F$ . Seja a distribuição normalizada de galáxias fonte  $dn(\chi_F)/d\chi_F$ , obtemos

$$\begin{aligned} \phi_{ij} &= 2 \int_0^{\chi_\infty} d\chi_F \frac{dn(\chi_F)}{d\chi_F} \int_0^{\chi_F} d\chi \chi \left(1 - \frac{\chi}{\chi_F}\right) \Phi_{ij}(\chi, \chi\vec{\theta}) \\ &= \int_0^{\chi_F} d\chi \chi \Phi_{ij}(\chi) 2 \int_0^{\chi_\infty} d\chi_F \frac{dn(\chi_F)}{d\chi_F} \left(1 - \frac{\chi}{\chi_F}\right) \\ &= \int_0^{\chi_\infty} d\chi \Phi_{ij}(\chi) 2\chi \int_\chi^{\chi_\infty} d\chi_F \frac{dn(\chi_F)}{d\chi_F} \left(1 - \frac{\chi}{\chi_F}\right) \\ &= \int_0^{\chi_\infty} d\chi \Phi_{ij}(\chi) g(\chi), \end{aligned} \quad (3.70)$$

onde definimos o *kernel* das fontes  $g(\chi)$  como

$$g(\chi) \equiv 2\chi \int_\chi^{\chi_\infty} d\chi_F \frac{dn(\chi_F)}{d\chi_F} \left(1 - \frac{\chi}{\chi_F}\right). \quad (3.71)$$

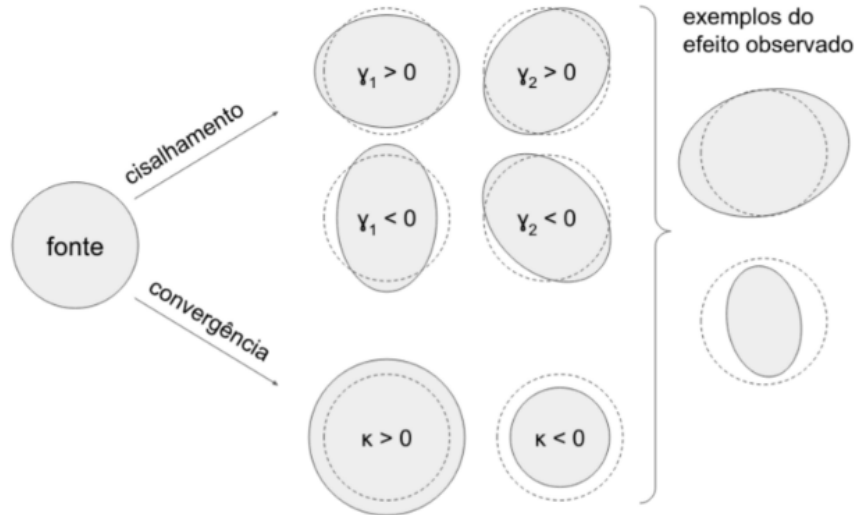


Figura 3.5 – Efeitos de Lenteamento. Aumento, ou diminuição, na magnitude da imagem, convergência  $\kappa$  e o aumento, ou diminuição, desigual da imagem, cisalhamento  $\gamma$ . Os efeitos estão exagerados para efeito didático. A imagem foi retirada de Faga, Lucas James - Análise de galáxia-lenteamento de galáxia no espaço harmônico: estudo e aplicação no contexto do Dark Energy Survey.

### 3.6 Explorando o Cisalhamento

Vamos agora juntar os conhecimentos anteriores e calcular os componentes do cisalhamento para o caso da aproximação de lentes finas e esfericamente simétricas (Meneghetti, 2021) (Sheldon; Huff, 2017). Segundo vimos nas equações (3.67) e (3.68), os componentes do cisalhamento são definidas como derivadas do ângulo de deflexão, dado por

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \vec{\theta} \frac{M(\theta)}{\pi D_L^2 \theta^2 \Sigma_{crit}}. \quad (3.72)$$

Começamos com o componente  $\gamma_1$ , partindo da equação (3.67),

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta_1} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \theta_2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} - \theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) \left[ \frac{M(\theta)}{\pi D_L^2 \theta^2 \Sigma_{crit}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left( \theta_1 \left[ \frac{\partial \theta}{\partial \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] - \theta_2 \left[ \frac{\partial \theta}{\partial \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \right) \left[ \frac{M(\theta)}{\pi D_L^2 \theta^2 \Sigma_{crit}} \right]. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Sabendo que  $|\vec{\theta}| = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2}$ ,  $\cos \varphi = \theta_1/\theta$  e  $\sin \varphi = \theta_2/\theta$ , obtemos

$$\frac{\partial \theta}{\partial \theta_1} = \frac{\theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2}} = \cos \varphi \quad (3.74)$$

e

$$\frac{\partial \theta}{\partial \theta_2} = \frac{\theta_2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2}} = \sin \varphi. \quad (3.75)$$

Assim, como  $M(\theta)/\pi D_L^2 \theta^2 \Sigma_{crit}$  depende apenas de  $\theta$ , ou seja, sua derivada em  $\varphi$  é nula, chegamos em

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \left( \theta \cos \varphi \left[ \frac{\theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2}} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] - \theta \sin \varphi \left[ \frac{\theta_2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2}} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \right) \left[ \frac{M(\theta)}{\pi D_L^2 \theta^2 \Sigma_{crit}} \right]. \quad (3.76)$$

Por fim, usando a propriedade trigonométrica  $\cos(2\varphi) = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$ , obtemos a equação que descreve o componente  $\gamma_1$  do cisalhamento em função de  $\theta$  e  $\varphi$ , da distribuição de massa  $M(\theta)$  e da distância  $D_L$ :

$$\gamma_1 = \frac{\theta \cos(2\varphi)}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{M(\theta)}{\pi D_L^2 \theta^2 \Sigma_{crit}} \right]. \quad (3.77)$$

Vamos agora repetir o processo para encontrar o componente  $\gamma_2$  em função dessas mesmas grandezas, partindo da equação (3.68):

$$\begin{aligned}
 \gamma_2 &= \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta_2} = \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left[ \frac{M(\theta)}{\pi D_L^2 \theta^2 \Sigma_{crit}} \right] \\
 &= \theta_1 \left[ \frac{\partial \theta}{\partial \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \left[ \frac{M(\theta)}{\pi D_L^2 \theta^2 \Sigma_{crit}} \right] \\
 &= \theta \cos(2\varphi) \sin(2\varphi) \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{M(\theta)}{\pi D_L^2 \theta^2 \Sigma_{crit}} \right],
 \end{aligned} \tag{3.78}$$

usando a propriedade trigonométrica  $\sin(2\varphi) = 2 \sin \varphi \cos \varphi$ , obtemos

$$\gamma_2 = \frac{\theta \sin(2\varphi)}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{M(\theta)}{\pi D_L^2 \theta^2 \Sigma_{crit}} \right]. \tag{3.79}$$

Veja que os componentes do cisalhamento dependem, cada um, do seno ou do cosseno de  $2\varphi$ , de forma mais específica,  $\gamma_1 \propto \cos(2\varphi)$  e  $\gamma_2 \propto \sin(2\varphi)$ . Esse resultado sugere que os efeitos de lenteamento são sempre tangenciais ao plano da lente e não dependem da direção de  $\varphi$ .

Uma consequência dessa observação é que podemos separar o cisalhamento em um componente tangencial (ou radial),  $\gamma_t$ , responsável por descrever a deformação ao longo das linhas concêntricas em torno da lente, e um componente transversal (ou cruzada),  $\gamma_\times$ , que descreve a deformação perpendicular a essas linhas. Como os efeitos de lenteamento são sempre tangenciais, o componente transversal do cisalhamento deve ser nulo.

Vamos então descrever esses componentes a partir da formulação teórica feita até agora. O cisalhamento é um campo de spin-2, isso significa que, ao rotacionarmos o sistema de coordenadas em um ângulo  $\varphi$ , o cisalhamento se transforma de acordo com  $2\varphi$ , e os novos componentes são obtidos pela rotação padrão de um vetor bidimensional:

$$\begin{bmatrix} \gamma_t \\ \gamma_\times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\phi) & \sin(2\phi) \\ -\sin(2\phi) & \cos(2\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}. \tag{3.80}$$

Com isso em mente, vamos separar os componentes do cisalhamento entre o tangencial e o transversal à superfície da lente e confirmar nossa suspeita: o componente transversal deve ser nulo, já que os efeitos de lenteamento são sempre tangenciais ao plano de simetria da distribuição de massa, no caso esfericamente simétrico.

A partir dos elementos dessa equação matricial, separamo-os de acordo com o nosso interesse em estudar os componentes do cisalhamento. Começamos pelo componente tangencial  $\gamma_t$ :

$$\gamma_t \equiv -\gamma_1 \cos(2\varphi) - \gamma_2 \sin(2\varphi), \tag{3.81}$$

e, usando as equações (3.77) e (3.79), encontramos

$$\begin{aligned}\gamma_t &= -\frac{\theta \cos^2(2\varphi)}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{M(\theta)}{\pi D_L^2 \theta^2 \Sigma_{crit}} \right] - \frac{\theta \sin^2(2\varphi)}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{M(\theta)}{\pi D_L^2 \theta^2 \Sigma_{crit}} \right] \\ &= -\frac{\theta}{2\pi D_L^2 \Sigma_{crit}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{M(\theta)}{\theta^2} \right].\end{aligned}\quad (3.82)$$

Observe que o cisalhamento tangencial não depende do sinal de  $\varphi$  e carrega apenas a amplitude das funções trigonométricas. O sinal negativo, por sua vez, garante que  $\gamma_t$  seja geralmente positiva, pois a razão  $M(\theta)/\theta^2$  decresce com  $\theta$  na maioria dos casos e, logo, sua derivada é negativa. Isso ocorre pois a concentração de massa é maior no centro da lente, devido a gravidade, em quase todos os casos.

O cisalhamento transversal, por sua vez, é definido como

$$\gamma_{\times} = \gamma_1 \sin(2\varphi) - \gamma_2 \cos(2\varphi) = 0. \quad (3.83)$$

e, como esperávamos, ele é nulo.

Uma consideração que podemos fazer é, já que tanto a convergência  $\kappa$  quanto o cisalhamento tangencial  $\gamma_t$  dependem da massa e da sua distribuição na lente, podemos supor que haja alguma relação matemática entre ambas. Bom, vamos explorar essa ideia. Podemos escrever  $\gamma_t$  em função da convergência  $\kappa$  usando as equações (3.60) e (3.61). Substituindo na equação para o cisalhamento tangencial (3.82) obtemos

$$\begin{aligned}\gamma_t &= -\frac{\theta}{2\pi D_L^2 \Sigma_{crit}} \left( \frac{1}{\theta^2} \frac{\partial M(\theta)}{\partial \theta} - \frac{2M(\theta)}{\theta^3} \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi D_L^2 \theta \Sigma_{crit}} \frac{\partial M}{\partial \theta} + \bar{\kappa}.\end{aligned}\quad (3.84)$$

Para resolver a derivada de  $M(\theta)$ , fazemos a mudança de variáveis  $R = D_L \theta \rightarrow d^2 R' = D_L^2 d^2 \theta'$  e chegamos em

$$\begin{aligned}M(\theta) &= D_L^2 \int_{\theta' < \theta} d^2 \theta' \Sigma(\theta') \\ &= D_L^2 \int_0^\theta d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi \theta' \Sigma(\theta') \\ &= 2\pi D_L^2 \theta \Sigma(\theta),\end{aligned}\quad (3.85)$$

onde usamos que  $\vec{\theta} = (D_L \theta, \varphi)$  em coordenadas polares e no plano da lente.

Assim, o cisalhamento tangencial fica dado por

$$\begin{aligned}\gamma_t &= -\frac{1}{2\pi D_L^2 \theta \Sigma_{crit}} 2\pi D_L^2 \theta \Sigma(\theta) + \bar{\kappa} \\ &= -\frac{\Sigma}{\Sigma_{crit}} + \bar{\kappa} \\ &= \bar{\kappa}(\theta) - \kappa(\theta).\end{aligned}\quad (3.86)$$

À primeira vista, a equação de  $\gamma_t(\theta)$  parece local, pois depende de  $\theta$ , mas a natureza não local está no fato de que  $\bar{\kappa}(\theta)$  envolve uma integração sobre a distribuição de massa. De forma geral, essa equação relaciona o aumento anisotrópico da imagem (cisalhamento) com seu aumento isotrópico (convergência) e mostra que o cisalhamento tangencial, embora dependa de  $\theta$ , é uma grandeza não local, já que depende de  $\bar{\kappa}(\theta)$ , que por sua vez, depende da média da densidade de massa dentro do raio considerado.

### 3.7 Convergência e Cisalhamento como Traçadores de Matéria

Como os efeitos de lenteamento gravitacional dependem da massa e de como ela está distribuída, é possível utilizá-los para estudar como a matéria que compõe a lente está disposta. Em particular, a convergência  $\kappa$  e o cisalhamento  $\gamma$  podem ser empregados para mapear a matéria e compreender melhor a estrutura de massa da lente.

Isso pode e foi usado para prever objetos massivos e distribuição de matéria. Estudos que se debruçam nesses efeitos na atualidade focam em, por exemplo, tentar prever a presença e detectar matéria escura a exemplo dos artigos do *Dark Energy Survey* (Abbott *et al.*, 2019) e (Prat *et al.*, 2018), e do trabalho (Clowe *et al.*, 2006).

Outros levantamentos importantes que fizeram uso do lenteamento gravitacional fraco foram o CFHTLenS (*Canada-France-Hawaii Telescope Lensing Survey*), um das primeiras pesquisas a aplicar análise de lenteamento fraco em larga escala com alta precisão e obtendo importantes resultados sobre estruturas em larga escala, testes de gravidade e parâmetros cosmológicos (Rusin *et al.*, 1999), e o KiDS (*Kilo-Degree Survey*), um *survey* europeu usando o telescópio *VLT Survey Telescope* no Chile, com foco em lenteamento fraco e estrutura em grande escala, que obteve, por exemplo, resultados notáveis em medição da tensão em  $S_8$  (amplitude da flutuação de densidade) comparado com Planck (Giblin *et al.*, 2021) (Heymans *et al.*, 2021). Esses são alguns exemplos de trabalhos que usaram o lenteamento fraco como objeto de estudo e como traçadores de matéria.

Nosso objetivo será escrever como se dá essa conexão entre os efeitos de lenteamento de imagem e a distribuição de matéria do universo. Para isso, vamos escrever a convergência e o cisalhamento em função do campo de densidade de matéria, de forma mais específica, o contraste de densidade de matéria linear.

O raciocínio que seguimos é que, quanto mais matéria há em uma região, mais matéria é atraída para essa região. Assim, regiões com mais galáxias também têm mais matéria escura e vice e versa, i.e, existe uma correlação positiva entre esses dois campos devido ao acoplamento gravitacional. Assim, usaremos os efeitos de lenteamento, cisalhamento e convergência, como traçadores de matéria, já que dependem do potencial gravitacional que,

por sua vez, está relacionada com a distribuição total de matéria (Meneghetti, 2021) (Faga, 2022).

### 3.7.1 O Contraste de Densidade de Matéria

O contraste de densidade de matéria refere-se à variação na densidade de matéria em diferentes regiões do universo e nos permite representar sua distribuição total. Essa variação, ou distribuição, é crucial para entender a estrutura e evolução do cosmos e nosso objetivo é usar os efeitos de lenteamento para estudá-la.

Representamos a distribuição total de matéria da seguinte forma

$$\rho(\vec{x}) \equiv \frac{dm(\vec{x})}{dV}, \quad (3.87)$$

onde  $m(\vec{x})$  é a massa contida em um ponto do espaço  $\vec{x}$  e  $dV$  um volume infinitesimal. A densidade linear de matéria será descrita pelo contraste de densidade  $\delta(\vec{x})$ , dado pela diferença entre a densidade em um ponto de  $\vec{x}$  e a densidade média do campo  $\bar{\rho}$ , em unidades de  $\bar{\rho}$ ,

$$\delta(\vec{x}) \equiv \frac{\rho(\vec{x}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}, \quad (3.88)$$

onde a densidade média do campo é dado por  $\bar{\rho} = V^{-1} \int d^3x \rho(\vec{x})$ .

Uma aplicação usual à esse problema é o contraste de densidade de galáxias. O contraste de densidade do número de galáxias refere-se à diferença da densidade local de galáxias em relação à densidade média de galáxias do universo. Ele é uma medida usada para quantificar variações na distribuição espacial do número de galáxias, indicando regiões com maior ou menor densidade do que a média, a exemplo de aglomerados ou vazios cósmicos.

Definimos o campo discreto de contraste de densidade numérica de galáxia como

$$\delta_g^i = \frac{n_i - \bar{n}}{\bar{n}}, \quad (3.89)$$

para  $n_i$  a densidade numérica de galáxias em um volume  $\delta V_i$  e  $\bar{n}$  seu valor médio. Essa grandeza refere-se à contagem de galáxias em diferentes regiões do espaço, expressa como uma densidade numérica e mede como as galáxias se distribuem numa região do universo.

É natural pensar que haja uma conexão entre o campo discreto de contraste de densidade numérica de galáxia e o contraste de densidade de matéria, já que a gravidade faz com que esses elementos se atraiam. Um exemplo dessa relação é que o contraste de densidade de matéria é um fator determinante na formação de galáxias. Regiões com maior densidade de matéria, incluindo matéria escura, tendem a colapsar sob sua própria gravidade, formando galáxias. Assim, o contraste de densidade de matéria influencia diretamente o contraste de densidade numérica de galáxias.

O modelo mais simples que descreve essa relação é o modelo de viés de galáxia e a conexão entre os contrastes de densidade nesse modelo é dada por

$$\delta_g(\vec{x}) = b(z)\delta(\vec{x}), \quad (3.90)$$

onde  $b(z)$  é chamado viés linear e depende apenas da distância radial, parametrizado pelo *redshift*  $z$ . O modelo de viés de galáxia descreve como a distribuição das galáxias no universo se relaciona com a distribuição total da matéria, bastante útil quando queremos estudar a matéria escura, já que não conseguimos observá-la diretamente.

Podemos, ainda, ver como o contraste de densidade de galáxias em um *redshift*  $z$  se relaciona com o contraste de matéria hoje ( $z = 0$ ) olhando a função

$$\delta(z, \vec{x}) = b(z)G(z)\delta(0, \vec{x}), \quad (3.91)$$

onde  $G(z)$  é chamada função de crescimento e a utilizamos para evoluir o contraste de densidade no tempo.

### 3.7.2 Convergência e Cisalhamento em Função do Contraste de Densidade de Matéria

Vamos agora ver como podemos escrever os efeitos de lenteamento em função do contraste de densidade de matéria para, no futuro, usarmos esses efeitos como traçadores de matéria e podermos estudar sua distribuição.

Como sabemos, a distorção na imagem das fontes é causada pelo potencial gravitacional total e, como o cisalhamento e a convergência são diretamente proporcionais a distribuição de matéria, então ambos devem depender explicitamente do contraste de densidade de matéria.

Vamos primeiro desenvolver esse tema para o caso da convergência. A partir da equação (3.66), fazemos o laplaciano do potencial gravitacional

$$\begin{aligned} \kappa(\vec{\theta}) &= \nabla^2 \varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\chi_\infty} d\chi g(\chi) (\Psi_{11} + \Psi_{22}) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\chi_\infty} d\chi g(\chi) \nabla^2 \Psi, \end{aligned} \quad (3.92)$$

agora escrevemos o laplaciano em função do contraste de densidade da matéria

$$\nabla^2 = 4\pi G a^2 \delta\rho_m(\vec{x}) = \frac{3 H_0^2 \Omega_m}{2 a} \delta(\vec{x}), \quad (3.93)$$

e obtemos, desta forma, que a convergência em função do contraste da matéria é dado por

$$\begin{aligned}\kappa(\vec{\theta}) &= \int_0^{\chi_\infty} d\chi \frac{3}{2} \Omega_m H_0^2 \frac{g(\chi)}{2a(\chi)} \delta(\vec{\chi}, \vec{\theta}) \\ &= \int_0^{\chi_\infty} d\chi W_\kappa(\chi) \delta(\vec{\chi}, \vec{\theta})\end{aligned}\quad (3.94)$$

onde a quantidade  $W_\kappa$  é chamada *kernel* de convergência, definido como

$$W_\kappa \equiv \frac{3}{2} \frac{\Omega_m H_0^2}{a(\chi)} \chi \int_\chi^{\chi_\infty} d\chi_F \left(1 - \frac{\chi}{\chi_F}\right) \frac{dn(\chi_F)}{d\chi_F}. \quad (3.95)$$

Como esperávamos, o efeito de convergência é tanto maior quanto maior a densidade de matéria da lente.

O que percebemos com essas equações é que a convergência pode ser tomada como uma projeção do campo de sobredensidade da matéria no plano do céu. Ao integrarmos o campo radialmente, o *kernel*  $W_\kappa$  age ponderando essa projeção. Note, também, que o *kernel* de convergência depende do *kernel* de distribuição das fontes  $g(\chi)$ . O mesmo pode ser esperado do cisalhamento.

Partimos para calcular agora o cisalhamento em função do contraste de densidade de matéria. Usando a aproximação de lente fina e esfericamente simétrica onde, lembrando, a distorção também é simétrica em  $\theta$  e da forma  $\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \alpha(\theta)\hat{\theta}$ , e partindo das equações para  $\gamma_1$  (3.77) e para  $\gamma_2$  (3.79), obtemos

$$\gamma_1 = \frac{\theta \cos(2\varphi)}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \alpha(\theta) \quad (3.96)$$

e

$$\gamma_2 = \frac{\theta \sin(2\varphi)}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \alpha(\theta). \quad (3.97)$$

Agora, como vimos, o cisalhamento pode ser dividido em componente tangencial e transversal ao plano da lente e, como o cisalhamento transversal é nulo, obtemos o cisalhamento tangencial substituindo os valores anterior na definição (3.81), tal que,

$$\begin{aligned}\gamma_t &= -\gamma_1 \cos(2\varphi) - \gamma_2 \sin(2\varphi) \\ &= -\frac{\theta \cos^2(2\varphi)}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \alpha(\theta) - \frac{\theta \sin^2(2\varphi)}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \alpha(\theta) \\ &= -\frac{\theta}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \alpha(\theta) = -\frac{1}{2} \left( \theta_1 \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_1} + \theta_2 \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(\theta_1 \alpha)}{\partial \theta_1} - \alpha + \frac{\partial(\theta_2 \alpha)}{\partial \theta_2} - \alpha \right] \\ &= \alpha(\theta) - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(\alpha_1)}{\partial \theta_1} + \frac{\partial(\alpha_2)}{\partial \theta_2} \right] = \alpha(\theta) - \frac{1}{2} [\phi_{11} + \phi_{22}] \\ &= \bar{\kappa}(\theta) - \kappa(\theta).\end{aligned}\quad (3.98)$$

A equação (3.98) nos mostra como as componentes  $\phi_{ij}$  do cisalhamento recuperam a convergência na decomposição tangencial e podemos substituir a equação (3.94) para obtermos o cisalhamento tangencial em função do contraste de densidade  $\delta$ ,

$$\gamma_t(\theta) = \bar{\kappa}(\theta) - \int_0^{\chi_\infty} d\chi W_\gamma(\chi) \delta(\vec{\chi}, \theta). \quad (3.99)$$

Observe que, como dito anteriormente, ambos os efeitos de lenteamento podem ser interpretados como projeções do contraste de densidade de matéria pesados, ou ponderados, pelos *kernels*  $W_\kappa = W_\gamma$ .

## 4 Função de Correlação e Espectro de Potência

A relação que buscamos desenvolver no capítulo anterior entre os efeitos de lenteamento gravitacional - convergência e cisalhamento - e a distribuição de matéria nos leva a buscar ferramentas estatísticas que permitam definir uma relação de causalidade entre a lente e a deflexão da luz para uma quantidade grande de galáxias. Ainda, levando em consideração o acoplamento gravitacional, é de se esperar que seja possível prever uma correlação positiva entre aglomeração de galáxias e quantidade de matéria escura e, assim, usar o próprio aglomerado como traçador de matéria.

Estamos supondo um espaço-tempo homogêneo e isotrópico, portanto, em grandes escalas, diferentes regiões do universo são indistinguíveis do ponto de vista estatístico. Isso, pois, inicialmente, a matéria e demais elementos do cosmo foram distribuídos de um mesmo processo estocástico sem direções ou regiões privilegiadas e, então, devido a interações entre esses elementos e a variação da temperatura do cosmo, passaram a evoluir a partir de processos complexos e específicos. Como resultado desse processo evolutivo, as estruturas do cosmo se tornaram estatisticamente homogêneas em larga escala, de modo que suas propriedades são correlacionadas de forma previsível, apesar da separação espacial. Assim, diferentes regiões distantes compartilham da mesma estocasticidade, i.e, análises estatísticas de uma região representam qualquer outra região distante (Peebles, 1980).

Dessa forma, adotamos a suposição de que as amostras são representativas, analisamos a relação entre as galáxias que atuam como lentes e fontes em uma determinada região e consideramos que elas constituem uma amostra válida do conjunto estatístico do universo.

Se for do interesse do leitor entender melhor esse tema, sugiro a leitura da terceira seção do livro (Peebles, 1980). Caso queira buscar um melhor entendimento dos métodos estatísticos usados na cosmologia, recomendo começar pela leitura de (Verde, 2010).

### 4.1 Função de Correlação de Dois Pontos

Para medir a relação entre duas variáveis, usamos a função de correlação de dois pontos (*two point correlation function* - 2PCF). Essa ferramenta estatística mede a intensidade da correlação entre dois pontos em uma função da separação espacial, ou seja, indica a intensidade e as escalas da associação entre variáveis, permitindo entender como uma pode influenciar a outra, e sempre é medida em um espaço comóvel.

Usamos a função de correlação de dois pontos  $\xi(r)$  para restringir o estado dinâmico e geométrico do universo e para estudar o agrupamento de estrelas ou galáxias, buscando

melhor entender seu processo de formação. Para calcular a 2PCF, contamos pares de objetos e medimos o excesso de probabilidade  $dP$  de encontrar, por exemplo, uma galáxia em um elemento de volume  $dV$  a uma distância  $r$  de outra galáxia,

$$dP = n[1 + \xi(r)]dV, \quad (4.1)$$

onde  $n$  representa o número médio de galáxias, neste exemplo. Esse excesso é medido a partir do que esperamos de uma distribuição poissônica aleatória não agrupada (*unclustered random Poisson distribution*) (Peebles, 1980).

Como você já deve ter notado, vamos nos concentrar no caso da correlação entre galáxias. Para medi-la, é necessário examinar a distribuição espacial da densidade de galáxias. Seja o volume infinitesimal  $\delta V$ , tal que comporte apenas uma galáxia, e  $\bar{n}$  a densidade numérica média de galáxias na região de análise, então a probabilidade de um volume infinitesimal  $\delta V$  conter uma galáxia é

$$\delta P = \bar{n}\delta V. \quad (4.2)$$

O número médio de galáxias nesse volume pode ser obtido ao integrarmos a relação (4.2) em  $V$ . Obtemos então  $\langle N \rangle = \bar{n}V$ , onde  $\bar{n} = \langle N \rangle / V$ , por definição.

No caso da distribuição de galáxias ser aleatória (poissônica), a probabilidade conjunta de encontrarmos uma galáxia em  $\delta V_1$  e outra em  $\delta V_2$  é igual ao produto das probabilidades individuais  $\delta P_1$  e  $\delta P_2$ :

$$\delta P_{12} = \delta P_1 \delta P_2 = \bar{n}^2 \delta V_1 \delta V_2. \quad (4.3)$$

No caso dessa distribuição não ser aleatória e sim de haver uma correlação entre os elementos da distribuição, adicionamos um termo chamada função de correlação que quantifica esse nexos, ou esse "excesso de probabilidade". Portanto, para duas galáxias em volumes infinitesimais  $\delta V_1$  e  $\delta V_2$  a uma distância  $r_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ , essa probabilidade é dada por

$$\delta P_{12} = \bar{n}^2 \delta V_1 \delta V_2 [1 + \xi(r_{12})]. \quad (4.4)$$

Da mesma forma, dado uma galáxia qualquer, a probabilidade de encontrarmos uma segunda galáxia a uma distância  $r$  da primeira, em um volume infinitesimal  $\delta V$ , é

$$\delta P = \bar{n}\delta V [1 + \xi(r)]. \quad (4.5)$$

Note que, devido a homogeneidade e isotropia estatística, a função de correlação  $\xi(r)$  depende apenas do módulo de  $r$  e não da direção  $\hat{r}$ , já que, caso contrário, teríamos direções privilegiadas.

A quantidade de galáxias vizinhas a uma distância  $r$  de uma galáxia qualquer é dada pela integral no volume de interesse

$$\int_V \delta P = \bar{n} \int dV (1 + \xi(r)). \quad (4.6)$$

Se essa expressão convergir, então o número médio estimado de galáxias neste volume é dado por

$$\begin{aligned}\langle N \rangle &= \bar{n} \int_{\pi}^0 \int_0^{2\pi} \int_0^r r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta + \bar{n} \int dV \xi(r) \\ &= \frac{4}{3} \pi r^3 \bar{n} + \bar{n} \int dV \xi(r).\end{aligned}\quad (4.7)$$

A função de correlação, quando consideramos apenas a dependência no módulo da distância entre as galáxias, é igual a covariância de contraste de densidade de galáxias. A covariância é responsável por comparar duas variáveis e computar a relação entre elas e como essa relação ocorre.

Uma manobra estatística que vale a pena explorarmos é, escrevendo a quantidade de galáxias em um volume infinitesimal  $\delta V_1$  como a densidade numérica média mais uma sobredensidade,  $n_1 = \bar{n}(1 + \delta_1)$ , a probabilidade de encontrar uma galáxia em  $\delta V_1$  e outra em  $\delta V_2$  a uma distância  $r_{12}$  uma da outra é

$$\delta P_{12} = (n_1 \delta V_1)(n_2 \delta V_2) = \bar{n}^2 \delta V_1 \delta V_2 (1 + \delta_1)(1 + \delta_2). \quad (4.8)$$

Ao calcular a média de todos os pares de volumes infinitesimais a uma distância  $r_{12}$ , conseguimos determinar a probabilidade de localizar duas galáxias quaisquer separadas por essa mesma distância  $r_{12}$

$$\langle \delta P(r_{12}) \rangle = \bar{n}^2 \delta V_1 \delta V_2 \langle 1 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_1 \delta_2 \rangle, \quad (4.9)$$

onde, pela definição de contraste de densidade,  $\langle \delta_i \rangle = 0$ ; podemos provar isso usando a definição

$$\delta(\vec{x}, t) = \frac{\rho(\vec{x}, t)}{\bar{\rho}} - 1 \quad (4.10)$$

portanto

$$\langle \delta \rangle = \frac{\langle \rho \rangle}{\langle \bar{\rho} \rangle} - 1 = 0, \quad (4.11)$$

para  $\bar{\rho}$  a densidade média de matéria. Assim, podemos provar que a função de correlação é igual a covariância:

$$\xi(r_{12}) = \langle \delta(r_1) \delta(r_2) \rangle = \langle \delta(r_1) \delta(r_2) \rangle - \langle \delta(r_1) \rangle \langle \delta(r_2) \rangle \equiv \text{Cov}(\delta(r_1) \delta(r_2)). \quad (4.12)$$

O conceito para um campo contínuo, i.e., o campo de densidade de matéria  $\rho(\vec{x})$ , é análogo. Escrevemos o campo de interesse como um contraste de densidade, seguindo a definição (4.10),

$$\delta(\vec{x}) \equiv \frac{\rho(\vec{x}) - \langle \rho \rangle}{\langle \rho \rangle}, \quad (4.13)$$

e obtemos que a função de correlação de dois pontos a uma distância  $r$  é dada por

$$\xi(r) = \langle \delta(x+r) \delta(x) \rangle - \langle \delta(x+r) \rangle \langle \delta(x) \rangle = \langle \delta(x+r) \delta(x) \rangle. \quad (4.14)$$

Escrevendo esse resultado em termos da densidade  $\rho$ , obtemos

$$\langle \rho(x+r)\rho(x) \rangle = \langle \rho \rangle^2 (1 + \xi(r)). \quad (4.15)$$

A equação (4.15) nos fornece a função de correlação de dois pontos separados por uma distância  $r$  no caso de um campo contínuo.

## 4.2 Espectro de Potência

O formalismo desenvolvido até agora foi feito no espaço de configuração, onde representamos a distribuição do sistema com posição e orientação, apesar dessa última não nos interessar. O mesmo pode ser feito no espaço de Fourier, representando essa distribuição em frequência, amplitude e fases.

A transformada de Fourier da função de correlação de dois pontos é o espectro de potência, usado com frequência para descrever flutuações de densidade observadas na radiação cósmica de fundo, por exemplo, (Peebles, 1980).

Como vimos, a função de correlação de dois-pontos mede quanto dois valores de um campo (ou sinal) estão correlacionados em dois pontos diferentes do espaço-tempo. Em termo gerais, é definido como

$$\xi(\vec{r}) = \langle f(\vec{x})f(\vec{x} + \vec{r}) \rangle, \quad (4.16)$$

onde  $\langle \cdot \rangle$  representa a média, por exemplo, sobre diferentes relações de um campo, e a função  $\xi(\vec{r})$  depende apenas da separação  $\vec{r}$ , e não da posição absoluta, no caso estatisticamente homogêneo. Lembrando que, por conta de nossas considerações de isotropia e homogeneidade, usaremos  $\xi(r)$ .

O espectro de potência  $P(k)$ , por sua vez, nos informa quanta "variância" ou "potência" existe no campo para cada modo  $k$ , a frequência espacial. Ela nos mostra, dentre outras coisas, a distribuição estatística da energia no espaço de Fourier e quais escalas dominam no campo, grandes escalas significa baixas frequências e pequenas escalas, grandes frequências (Peebles, 1980). Esse tipo de análise é bastante usado em áreas como física estatística, cosmologia, processamento de sinais, teoria de campos, dentre outros.

O espectro de potência é uma ferramenta de análise de sinais que fornece uma representação da distribuição da potência de um sinal em função da frequência e é obtido através da Transformada de Fourier que, por sua vez, decompõe um sinal no domínio do tempo em suas componentes de frequência.

Seja a distribuição de densidade  $\rho(\vec{r})$  um campo contínuo, a transformada de Fourier das funções que desenvolvemos até agora e suas transformadas inversas são

$$\begin{aligned}\delta(\vec{k}) &\equiv \int d^3r \delta(\vec{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}, & \delta(\vec{r}) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \delta(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \\ P(k) &\equiv \int d^3r \xi(r) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}, & \xi(r) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P(k) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}.\end{aligned}\quad (4.17)$$

Definimos o espectro de potência  $P(k)$  como a transformação de Fourier da função de correlação de dois pontos,  $\mathcal{F}[\xi(r)] \equiv P(k)$ . O modo  $k$  na equação (4.17) é chamado número de onda e é associado ao comprimento de onda  $\lambda$  de uma perturbação,  $k = 2\pi/\lambda$ , e indica que, quanto menor a escala  $r$  no espaço de configurações, maior será o modo  $k$  no espaço de Fourier e vice-versa (Faga, 2022).

Lembrando do que vimos na seção anterior, uma informação que podemos usar é que correlação é igual a covariância e, assim, podemos definir o espectro de potência a partir da definição

$$\langle \delta(\vec{k}) \delta^*(\vec{k}') \rangle \equiv (2\pi)^3 \delta_D(\vec{k} - \vec{k}') P(k) \quad (4.18)$$

e basta mostrar que ela de fato implica que  $\mathcal{F}[\xi(r)] \equiv P(k)$ :

$$\begin{aligned}\xi(r) &= \langle \delta(\vec{x}) \delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \langle \delta(\vec{x}) \delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k' \langle \delta(k) \delta(k') \rangle e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-i\vec{k}'\cdot(\vec{x}+\vec{r})} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \int d^3k' \delta_D(\vec{k} - \vec{k}') P(k) e^{i(\vec{k}' - \vec{k})\cdot\vec{r}} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k P(k) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \mathcal{F}[\xi(r)].\end{aligned}\quad (4.19)$$

No contexto da cosmologia, o espectro de potência da matéria é usado para entender a formação de estruturas, como de galáxias, aglomerados e filamentos cósmicos. Além disso, espectro de potência do cisalhamento gravitacional revela como a matéria, tanto bariônica como escura, está distribuída em diferentes escalas angulares no céu.

Uma descoberta interessante proporcionada pela correlação de dois pontos de galáxias foi a identificação de um padrão de oscilações acústicas bariônicas (BAOs) na distribuição de galáxias em larga escala. Essas oscilações têm origem nas ondas de pressão que se propagavam no plasma quente do universo primordial antes da recombinação. Embora suas assinaturas também apareçam na radiação cósmica de fundo (CMB), é na distribuição atual de galáxias que os BAOs funcionam como uma régua cósmica, permitindo medir a expansão do universo ao longo do tempo (Bassett; Hlozek, 2010).

### 4.3 Espectro de Potência dos Traçadores de Matéria

Nosso objetivo é, através do campo de contraste de galáxia e dos efeitos de lenteamento, entender melhor a distribuição de matéria no cosmos e estudar sua estrutura, i.e., usar esses efeitos como traçadores de matéria. Para isso, temos que escrever o espectro de potência dessas quantidades.

Para escrever o espectro de potência das quantidades que nos interessam, usamos a equação (4.17) em suas definições. Para galáxias e aglomerados de galáxia, usamos a seguinte definição de contraste de densidade de galáxias  $\delta(z, \vec{x})$  na posição  $\vec{x}$  e no *redshift*  $z$ ,

$$\delta(z, \vec{x})_g = b(z)G(z)\delta(\vec{x}), \quad (4.20)$$

onde  $b(z)$  é chamado fator de viés (*bias*) e expressa como as galáxias traçam o campo de densidade de matéria. Já  $G(z)$  é a função de crescimento das perturbações, que descreve como as flutuações da densidade de matéria evoluem em função do *redshift*  $z$ .

A equação (4.20) nos mostra que o contraste de densidade de galáxias observado hoje, em um dado *redshift* e posição, é proporcional ao contraste de densidade da matéria total hoje, escalado por dois fatores: o viés  $b(z)$ , que depende do tipo de objeto observado, e o fator  $G(z)$ , que representa o crescimento das estruturas com o tempo.

A seguir, aplicamos a transformada de Fourier

$$\begin{aligned} \int d^3x \delta_g(z, \vec{x}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} &= \int d^3x b(z) G(z) \delta(\vec{x}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \\ &= b(z) G(z) \int d^3x \delta(\vec{x}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Obtemos a relação do contraste de densidade de galáxias em um *redshift*  $z$  e a matéria hoje, no domínio da frequência, como

$$\delta_g(z, \vec{k}) = b(z)G(z)\delta(\vec{k}). \quad (4.22)$$

Note que, para a equação (4.21), assumimos o campo numa casca esférica de *redshift*, o chamado *bin* de *redshift*. Usando a definição (4.18) para *bins* de *redshift* centrados em  $z_1$  e  $z_2$ , encontramos como se vinculam os espectros de potência dos dois campos,

$$\begin{aligned} P_g(k, z_1, z_2) &= \left\langle \delta_g(\vec{k}, z_1) \delta_g(-\vec{k}', z_2) \right\rangle \\ &= [b(z_1)G(z_1)] [b(z_2)G(z_2)] \left\langle \delta(\vec{k}) \delta(-\vec{k}') \right\rangle \\ &= [b(z_1)G(z_1)] [b(z_2)G(z_2)] P(k). \end{aligned} \quad (4.23)$$

O que nos permitiu avançar com esse cálculo é o fato de podermos usar um campo tridimensional, i.e., o contraste de densidade, para calcular o espectro de potência tridimensional  $P(k)$ .

Agora, note que os efeitos de lenteamento não são campos tridimensionais. As equações (3.94) e (3.99) para a convergência e cisalhamento tangencial, respectivamente, definem esses efeitos como projeções do *redshift* das galáxias fontes ponderadas por um *kernel*. Assim, devemos trabalhar restritos a uma casca esférica e num domínio de frequência para continuar nossa análise, como consequência, iremos trabalhar no espaço harmônico.

Não se culpe por não ter notado que o campo de contraste de densidade é real,  $\delta(\vec{r}) = \delta^*(\vec{r})$  e, portanto,  $\delta(\vec{k}) = \delta(-\vec{k})$ . Esse fato foi utilizado nos cálculos e o leitor é bem vindo a voltar e analisar as equações anteriores, (Peebles, 1980) e (Faga, 2022).

## 4.4 Espectro de Potência Angular $C_\ell$

Espectro de potência angular é usado na análise de sinais e de imagens. No nosso trabalho, desenvolvemos o cálculo desta quantidade em três passos principais: i) a aplicação da transformada de Fourier, decompondo um sinal em seus componentes de frequência, ii) a análise angular, ou seja, a análise dos componentes em diferentes ângulos, e iii) o cálculo da potência, feita para cada direção (ou ângulo), fornecendo-nos um espectro que mostra como a potência se distribui.

Tendo em mente o que foi discutido na seção anterior, o espectro de potência será definido num dado *bin* de *redshift*, assim, representando uma imagem no céu (uma casca esférica) contendo os objetos que estão a essa distância  $z$ . Vamos discutir o  $C_\ell$  para os campos de convergência e aplicar para os efeitos de lenteamento, convergência e cisalhamento, que já estão projetados em um *bin* de *redshift*, como discutimos nas equações (3.94) e (3.99). Já para os contrastes de densidade de galáxias e de matéria, precisamos primeiro projetá-los no *redshift* das lentes.

Materiais extras que contribuíram para essa seção, além dos já referenciados (Peebles, 1980) e (Faga, 2022), são as obras (Alonso *et al.*, 2019), (Feroz; Hobson; Bridges, 2009) e (Silva, 2023). Convido a todos a se debruçar nesses trabalhos caso tenham interesse em aprofundar mais um pouco seu conhecimento no assunto.

### 4.4.1 Espectro de Potência Angular dos Contrastes de Densidade

Seja a posição tridimensional  $\vec{x} = \chi(z)\hat{n}$ , o contraste de densidade projetado do contraste de densidade de matéria no  $i$ -ésimo *bin* de *redshift* é dado por

$$\sigma_i(\hat{n}) = \int dz \varphi_i(z) \delta(\vec{x}), \quad (4.24)$$

onde  $\varphi_i$  é chamado função de seleção de *redshift* no bin  $i$ .

Como estamos lidando com projeção numa casca esférica, vamos usar harmônicos esféricos na descrição dessa quantidade no *bin* de *redshift*. Decompondo  $\sigma_i(\hat{n})$  em harmônicos

esféricos, obtemos

$$\sigma_i(\hat{n}) = \sum_{lm} a_{lm}^i Y_{lm}(\hat{n}), \quad (4.25)$$

onde  $Y_{lm}$  é a função harmônica e  $a_{lm}$  os coeficientes da expansão, dados por

$$a_{lm}^i = \int d\Omega \delta_i(\hat{n}) Y_{lm}^*(\hat{n}). \quad (4.26)$$

Como sabemos, expansão em harmônicos esféricos nos permite criar uma base ortogonal, o que significa que a integral do produto de dois harmônicos diferentes sobre a superfície da esfera é zero. Além disso, sua capacidade de lidar com a geometria esférica é especialmente útil na análise de imagens tridimensionais.

Agora basta substituírmos esse resultado na equação (4.24) e escrever  $\delta(\vec{x})$  segundo a equação (4.17), no espaço de Fourier:

$$\begin{aligned} \delta(\vec{r}) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \delta(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \\ \sigma_i(\hat{n}) &= \int dz \varphi(z) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \delta(\vec{k}, z) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \\ a_{lm}^i &= \int d\Omega \int dz \varphi(z) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \delta(\vec{k}, z) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} Y_{lm}^*(\hat{n}). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Usando aproximação de onda plana, podemos simplificar essa expressão e encontrar que os coeficientes de expansão são dados por

$$a_{lm}^i = 4\pi \int dz \varphi(z) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} i^l j_l(k\chi) Y_{lm}^*(\hat{k}) \delta(\vec{k}, z). \quad (4.28)$$

Em seguida, para calcular o espectro de potência angular do contraste de densidade de matéria projetado, basta lembrarmos da definição: no caso de interesse, o espectro de potência é igual à covariância da quantidade  $\sigma_{lm}^i$ :

$$\begin{aligned} C_l^i &= \langle (\sigma_{lm}^i) (\sigma_{lm}^i)^* \rangle \\ &= \left\langle \left( \sum_m a_{lm}^i Y_{lm}(\hat{n}) \right) \left( \sum_m a_{lm}^i Y_{lm}(\hat{n}) \right)^* \right\rangle \\ &= \sum_m \sum_{m'} (a_{lm}^i) (a_{lm'}^i)^* \int d\Omega Y_{lm}(\hat{n}) Y_{lm'}(\hat{n})^* \\ &= \sum_m (a_{lm}^i) (a_{lm}^i)^* = \langle |a_{lm}^i|^2 \rangle, \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde usamos a propriedade  $\int d\Omega Y_{lm}(\hat{n}) Y_{lm'}(\hat{n})^* = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$  para cancelar uma das somatórias e usamos a hipótese de amostras honestas para escrever a covariância em todo o *bin* de *redshift*.

Da mesma forma, podemos escrever o espectro de potência angular entre dois *bins* de *redshift*  $i$  e  $j$  usando o cálculo de covariância entre duas amostras,  $C_l^{ij} = \langle (a_{lm}^i)(a_{lm}^j)^* \rangle$ , obtendo

$$C_l^{ij} = \frac{2}{\pi} \int dz_1 \varphi_i(z_1) \int dz_2 \varphi_j(z_2) \int dk k^2 j_l(k\chi_1) j_l(k\chi_2) P(k, z_1, z_2), \quad (4.30)$$

onde  $j_l(x)$  é a função esférica de Bessel da primeira espécie, que surge da decomposição de ondas planas em harmônicos esféricos (Loureiro *et al.*, 2019). Essa função descreve os modos radiais dessa expansão e permite a projeção do espectro de potência tridimensional para o espaço angular, no cálculo de  $C_\ell$  (Abell *et al.*, 2009) (Kent *et al.*, ).

O espectro de potência de galáxias segue o mesmo procedimento, mas para o campo de contraste de galáxias (4.22). Substituímos então  $\delta_g$  conforme vemos na equação (4.23) e obtemos

$$P_{gg} = [b(z_1)G(z_1)] [b(z_2)G(z_2)] P(k),$$

$$C_{gg}^i = \frac{2}{\pi} \int dz_1 b_i(z_1) G_i(z_1) \varphi_i(z_1) \int dz_2 b_i(z_2) G_i(z_2) \varphi_i(z_2) \int dk k^2 j_l(k\chi_1) j_l(k\chi_2) P(k, z_1, z_2), \quad (4.31)$$

onde usamos os mesmos procedimentos, partindo da covariância

$$C_g^i = \langle (\sigma_g^i)(\sigma_g^i)^* \rangle = \langle |\sigma_g^i|^2 \rangle \quad (4.32)$$

no caso de  $\sigma_g^i$ .

#### 4.4.2 Espectro de Potência Angular dos Efeitos de Lenteamento

Vamos agora explorar o caso para os efeitos de lenteamento, a convergência e o cisalhamento. Já temos uma vantagem nessa parte da análise, os campos de lenteamento já estão projetados em um *bin* de *redshift*, como vimos nas equações (3.94) e (3.99):

$$\kappa(\vec{\theta}) = \int_0^{\chi_\infty} d\chi W_\kappa(\chi) \delta(\vec{\chi}, \vec{\theta}) \quad (4.33)$$

e

$$\gamma_t(\theta) = \bar{\kappa}(\theta) - \int_0^{\chi_\infty} d\chi W_\gamma(\chi) \delta(\vec{\chi}, \vec{\theta}), \quad (4.34)$$

onde

$$W_\kappa = W_\gamma = \frac{3}{2} \frac{\Omega_m H_0^2}{a(\chi)} \chi \int_\chi^{\chi_\infty} d\chi_F \left( 1 - \frac{\chi}{\chi_F} \right) \frac{dn(\chi_F)}{d\chi_F} \quad (4.35)$$

são os *kernels* de convergência e cisalhamento, respectivamente, responsáveis por ponderar essa projeção.

Seguindo o que fizemos com os contrastes de densidade, partimos para decompor os campos dos efeitos de lenteamento em harmônicos esféricos.

Seja  $\kappa_i(\hat{n})$  a convergência projetada no *bin* de *redshift*  $i$ , sua decomposição é dada por

$$\kappa_i(\hat{n}) = \sum_{lm} a_{lm}^i Y_{lm}(\hat{n}). \quad (4.36)$$

Usando a definição  $a_{lm}^i = \int d\Omega \delta_i Y_{lm}^*$ , basta substituírmos a equação para a convergência projetada para obtermos

$$\begin{aligned} a_{lm}^\kappa &= \int d\Omega \int_0^{\chi_\infty} d\chi W_\kappa(\chi) \delta(\vec{\chi}, \vec{\theta}) \\ &= \int d\Omega \int_0^{\chi_\infty} d\chi W_\kappa(\chi) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \delta(\vec{k}, z) Y_{lm}^*(\hat{n}) \\ &= 4\pi \int_0^{\chi_\infty} d\chi W_\kappa(\chi) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} i^l j_l(k\chi) \delta(\vec{k}, z) Y_{lm}^*(\hat{n}). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Observe como a única diferença entre a projeção do contraste de matéria e do coeficiente  $\kappa$  é o *kernel* de projeção, o que faz sentido, já que a natureza dessas duas quantias estão ligadas, mas não são iguais - ambas podem ser interpretadas como projeções específicas do campo de contraste  $\delta$ .

Calculando o espectro de potência angular pela definição,  $C_{\kappa\kappa}^{ij} = \langle (a_{lm}^i)(a_{lm}^j)^* \rangle$ , obtemos

$$C_\ell^{\kappa_{1,2}} = \frac{2}{\pi} \int d\chi_1 W_\kappa(\chi_1) \int d\chi_2 W_\kappa(\chi_2) \int dk k^2 j_l(k\chi_1) j_l(k\chi_2) P(k, \chi_1, \chi_2). \quad (4.38)$$

E basta agora repetir o mesmo processo para o cisalhamento tangencial para obtermos

$$C_\ell^{\gamma_{1,2}} = \frac{2}{\pi} \int d\chi_1 W_\gamma(\chi_1) \int d\chi_2 W_\gamma(\chi_2) \int dk k^2 j_l(k\chi_1) j_l(k\chi_2) P(k, \chi_1, \chi_2). \quad (4.39)$$

Usando as definições (3.66), (3.67) e (3.68) para o cisalhamento e para a convergência no espaço harmônico, é possível ver que:

1. O cisalhamento tangencial tem a mesma orientação, o mesmo sinal, da convergência;
2. O cisalhamento tangencial não depende de  $\bar{\kappa}$ , e logo é uma grandeza local, como a convergência.

Então, vimos que o *kernel*  $W(\chi)$  é responsável por ponderar a projeção do cisalhamento e da convergência, encapsulando a geometria da lente gravitacional - dizendo-nos como a luz de uma galáxia em uma certa distância comóvel  $\chi$  é desviada por estruturas ao longo do caminho até nós - e guardando informações da distribuição das galáxias fontes - ou seja, para cada *redshift* ou *bin* de *redshift*  $i$ , as galáxias têm uma função de distribuição  $n_i(\chi)$ , que entra em  $W(\chi)$ . O espectro de potência angular  $C_\ell$ , por sua vez, é a principal estatística usada para descrever o lenteamento gravitacional, sendo usado para quantificar a distribuição do sinal de lenteamento fraco em diferentes escalas angulares no céu (representados pelo número de multipolo  $\ell$ ), para comparar teorias observacionais, comparando o  $C_\ell$

teórico com o observado a partir de dados de distorções de galáxias para inferir parâmetros cosmológicos, e para explorar a evolução da estrutura cósmica e da geometria do universo ao longo do tempo, ao considerar diferentes pares de *bins* de *redshift*  $(i, j)$ . Tudo isso é possível, pois o espectro de potência angular contém toda a informação estatística de segunda ordem do campo de lenteamento, assumindo que a distribuição é gaussiana, o que é uma boa aproximação em largas escalas (Peebles, 1980).

De forma resumida, o *kernel*  $W(\chi)$  é uma função de peso que projeta a distribuição tridimensional de matéria, via  $P(k, z)$ , em uma bidimensional no céu, com base na geometria e distribuição da fonte, enquanto o espectro de potência angular  $C_\ell$  é a medida da correlação angular em multipolos entre dois *bins* de galáxias afetadas por lenteamento.

## 5 Análise e Código

A partir do desenvolvimento teórico apresentado nos capítulos anteriores, realizamos uma análise do *kernel* de lenteamento gravitacional fraco gerado e a sua relação com grandezas cosmológicas, focando naquelas que possuem relação direta com a distribuição de matéria no cosmo, usando código implementado na biblioteca *Numerical Cosmology Library* (NumCosmo). Ainda, para validar estes resultados, comparamos-os a resultados obtidos pela *Core Cosmology Library* (CCL).

O código usado para a geração e cálculo dos parâmetros, definição de variáveis, cálculo de correlação e análise está melhor detalhado e explicado no apêndice B ao final do trabalho. Convido todos que se interessam por essa parte a ler e analisar o programa utilizado e sua explicação, bem como a análise de novos gráficos e figuras.

### 5.1 Motivação da Análise

Como discutido anteriormente, certos fenômenos gravitacionais observáveis, como o agrupamento de galáxias e o lenteamento gravitacional, podem ser utilizados para rastrear e mapear a distribuição da matéria no universo. Chamamos essas observações de traçadores de matéria e, por meio de análises estatísticas, podemos determinar como eles se correlacionam com a distribuição subjacente de matéria.

Um exemplo mais simples do poder de previsão de tais efeitos é a descoberta de Netuno. Após a descoberta de Urano pelo astrônomo e compositor germano-inglês W. Herschel (1738-1822) em 1781, observou-se que sua órbita não se explicava apenas pela presença dos objetos conhecidos do Sistema Solar, sugerindo a existência de outros corpos massivos na região. De modo independente, os matemáticos U. Le Verrier (1811-1877), na França, e John C. Adams (1819-1892), na Inglaterra, trabalharam para calcular a massa e a posição estimadas desse objeto e, em 1846, Le Verrier enviou suas previsões ao astrônomo Johann Galle (1812-1910), do Observatório de Berlim, que encontrou Netuno no mesmo ano (Verrier, 1846) (Verrier, 1847) (Lequeux, 2010).

Esse simples exemplo da descoberta de um planeta em nosso próprio Sistema Solar a partir de previsões matemáticas e da teoria da gravitação universal, com menos tecnologia observacional e de análise de dados que temos acesso hoje, demonstra a capacidade dos efeitos gravitacionais como traçadores de matéria.

O espectro de potência angular, calculado para o *kernel* de lenteamento gravitacional fraco, é uma forma de quantificar a estatística de um campo, definido na casca esférica de um dado bin, como discutido anteriormente. Neste capítulo, exploramos o processo realizado

para a obtenção desses dados e cálculos, assim como sua validação por meio da comparação com outra biblioteca e os resultados obtidos.

## 5.2 Parâmetros e Função de Comparação

O código começa inicializando os parâmetros e variáveis específicos do modelo utilizados para as comparações entre CCL e NumCosmo. Os parâmetros escalares são definidos de forma fixa ao longo da modelagem, enquanto varia-se a matéria escura e as propriedades de neutrinos, i.g., para cenários múltiplos, usando *arrays*. Assim, escalares fixos são aplicados universalmente e *arrays* representam diferentes modelos e configurações. Também foi desenvolvida a função `setup-models` para garantir um cálculo de alta-precisão na CCL, fornecendo-nos resultados mais precisos numericamente ao custo de um aumento no tempo de cálculo.

Os parâmetros utilizados podem ser verificados na tabela 5.1. Note que temos parâmetros cosmológicos de entrada, em que alguns tem somente um valor fixo e outros que podem variar definidos por *arrays*. Nesta mesma parte do código, foi definido o *redshift* máximo para o uso da função de comparação e o valor máximo de multipolos para cálculos angulares.

| Symbol           | Name                                               | Value                                               |
|------------------|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| $\Omega_c$       | <i>Cold Dark Matter Density</i>                    | 0.25                                                |
| $\Omega_b$       | <i>Baryonic Matter Density</i>                     | 0.05                                                |
| $\Omega_\nu$     | <i>Dark Energy Density</i>                         | [0.7, 0.7, 0.7, 0.65, 0.75]                         |
| $\Omega_k$       | <i>Curvature Density</i>                           | [0.000, 0.000, 0.000, 0.050, -0.050]                |
| $h$              | <i>Hubble Constant (dimensionless)</i>             | 0.7                                                 |
| $n_s$            | <i>Scalar Spectral Index</i>                       | 0.96                                                |
| $N_{\text{eff}}$ | <i>Effective N° of Massless Neutrinos</i>          | 3.046                                               |
| $\sigma_8$       | <i>Matter Density Contrast Std. Dev. (8 Mpc/h)</i> | 0.9                                                 |
| $w_0$            | <i>DE Equation of State Parameter</i>              | [-1.0, -1.0, -0.9, -0.9, -0.9]                      |
| $w_a$            | <i>DE Equation of State Parameter</i>              | [0.0, 0.0, 0.1, 0.1, 0.1]                           |
| $m_\nu$          | <i>Neutrino Masses (eV)</i>                        | [[0.0, 0.0, 0.0], [0.04, 0.0, 0.0], [0.0, 0.0,...]] |

Tabela 5.1 – Parâmetros cosmológicos de entrada utilizados para gerar os *kernels* de lenteamento fraco e para a comparação entre os valores gerados pelas bibliotecas NumCosmo e CCL.

Seguimos para a criação da classe responsável pela comparação de diferentes modelos, visando disponibilizar uma análise visual e numérica das diferenças entre duas funções de forma simples e intuitiva. A classe criada, nomeada `CompareFunc1d`, compara duas funções em relação a uma variável independente, nos informando a diferença relativa e absoluta entre elas, oferecendo métodos para exploração quantitativa e visualização dos dados.

A classe `CompareFunc1d` executa determinados cálculos de diferenças relativas, mais especificamente, calcula o valor máximo e mínimo e a média das diferenças entre as funções

comparadas, assim como o desvio padrão e mediana dessas diferenças. Ainda, essa classe nos disponibiliza a representação visual, gráfica, dessa análise.

No programa desenvolvido, criou-se funções para comparação das variáveis cosmológicas, onde o tempo de execução é medido, executando essa função diversas vezes, retornando um objeto `CompareFunc1d` para análise e visualização. Além disso, esse próprio módulo é responsável por converter o *redshift*  $z$  para o fator de escala  $a$  (já que essa é a variável utilizada na CCL), quando necessário, por exemplo, na comparação da densidade de matéria  $\Omega_m$  gerada por cada uma das bibliotecas dado um modelo cosmológico comum.

Um exemplo visual da comparação de variáveis cosmológicas pode ser vista na figura 5.1. Aqui temos a comparação da densidade de matéria gerada na CCL e calculada pela NumCosmo a partir da cosmologia fornecida em cada caso, em diferentes modelos cosmológicos. A diferença relativa, representada no painel inferior da imagem, índice 2, dado por

$$\frac{\Omega_m^1}{\Omega_m^2} - 1, \quad (5.1)$$

é da ordem de  $10^{-15}$  para a maioria dos modelos, exceto para os dois modelos com neutrinos massivos em que a diferença relativa é  $\sim 10^{-10}$ . De qualquer forma, temos uma excelente concordância numérica entre as duas bibliotecas.

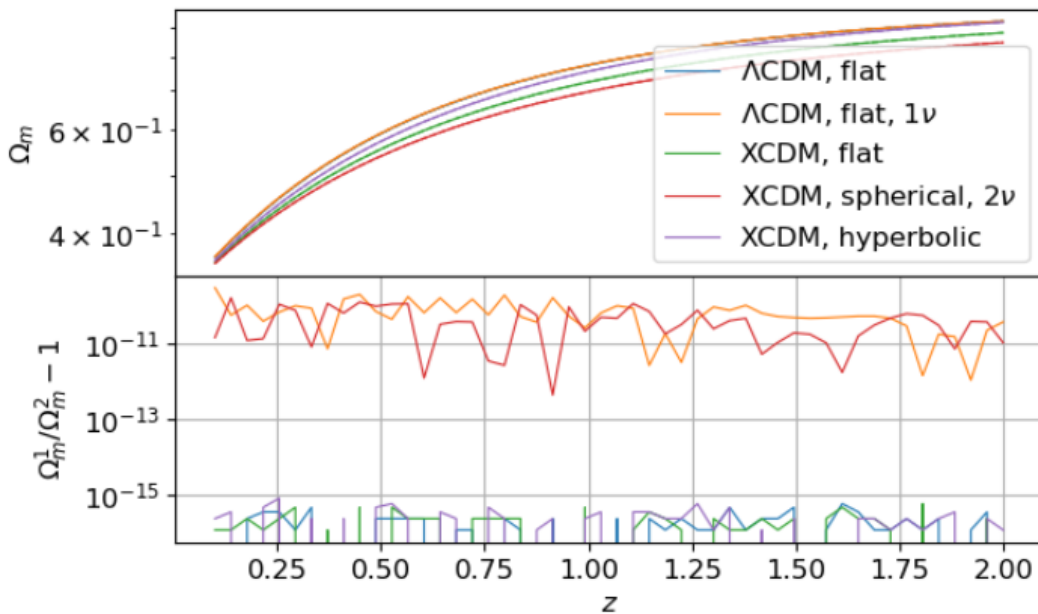


Figura 5.1 – Comparação da Densidade de Matéria gerada na CCL e NumCosmo para diferentes Modelos Cosmológicos.

O programa segue fazendo o cálculo de comparação de diferentes tipos de distância cosmológica entre as duas bibliotecas, avaliando a discrepância entre as suas execuções. Ainda, compara as implementações para o crescimento das estruturas cósmicas e a escala do universo para cada modelo cosmológico proposto, com o objetivo de avaliar os valores

distintos obtidos. Os modelos cosmológicos e suas implicações foram brevemente abordados no apêndice A.3, caso haja interesse do leitor em verificar.

A figura 5.2 mostra a comparação da distância comóvel  $D_c(z)$  ao longo de uma faixa de *redshift* (0.00 ~ 2.00). A distância comóvel entre dois pontos no universo é a distância "fixa" entre eles se congelássemos a expansão do universo no tempo presente. Em outras palavras, ela nos diz quão longe dois objetos estão um do outro no espaço, independentemente da expansão do universo ao longo do tempo. Note que a diferença relativa é de ordem significativamente inferior à ordem da distância comóvel, na faixa de  $10^{-8} \sim 10^{-9}$ , mostrando uma excelente compatibilidade entre os resultados das bibliotecas, mais uma vez.

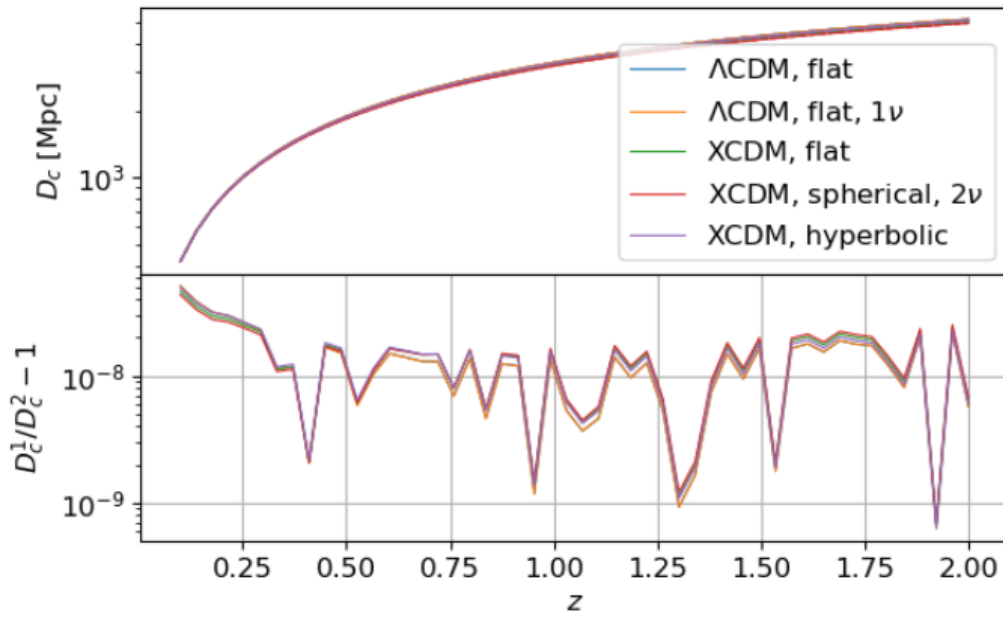


Figura 5.2 – Comparação da distância comóvel calculada usando a CCL e a NumCosmo para diferentes modelos cosmológicos.

### 5.3 Comparação do *kernel* de Lenteamento Fraco

Vamos agora nos concentrar no cálculo numérico e análise do *kernel* de lenteamento fraco. Como vimos anteriormente, o *kernel* de lenteamento fraco é dado pela equação

$$W^\kappa(z) = \frac{3}{2} \frac{\Omega_m H_0^2}{c} \frac{(1+z)}{H(z)} \chi(z) \int dz' \frac{dn}{dz'} \frac{\chi(z') - \chi(z)}{\chi(z')}, \quad (5.2)$$

onde  $dn/dz$  representa a distribuição de galáxias em função do *redshift*. Cada uma das bibliotecas, NumCosmo (Dias Pinto Vitenti; Penna-Lima, 2014) e CCL, possuem sua própria forma de gerar e calcular essa função. Nosso objetivo agora será, dado um modelo cosmológico, gerar essa quantidade a partir de cada uma das bibliotecas, aplicar esse valor na nossa função de comparação e gerar um gráfico no qual poderemos visualizar a discrepância calculada entre os valores gerados para cada modelo.

Para motivo de curiosidade, caso o leitor se interesse em ir mais a fundo no estudo e aplicação da *Numerical Cosmology Library*, a função utilizada por essa biblioteca para gerar o *kernel* de lenteamento fraco é `XcorLimberKernelWeakLensing`. Na documentação da NumCosmo, temos acesso a todas as funções, para que servem e como utilizá-las ([Collaboration, 2025b](#)).

Partimos para o cálculo do *kernel* de lenteamento fraco de galáxias em diferentes modelos cosmológicos em cada uma das bibliotecas.

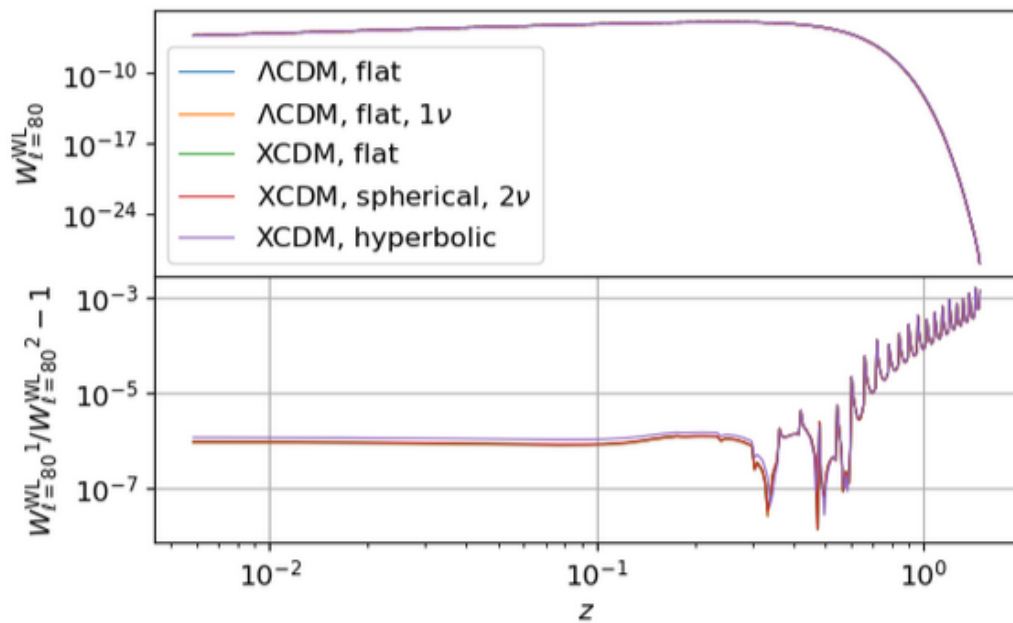


Figura 5.3 – Comparação do *kernel* de lenteamento fraco de galáxias calculado pela CCL e pela NumCosmo para diferentes modelos cosmológicos.

A figura 5.3 mostra o cálculo do *kernel* de lenteamento fraco de galáxias em função do redshift calculados pelas bibliotecas CCL e NumCosmo. Calculados para diferentes modelos cosmológicos, os *kernels* apresentam uma diferença relativa da ordem de  $10^{-6}$  até  $z \sim 0.5$ . É importante mencionar que a CCL garante uma precisão numérica melhor ou da ordem de  $10^{-5}$  na maioria das suas funções, e precisão de  $10^{-4} - 10^{-3}$  no cálculo das auto-correlações e correlações cruzadas. Portanto, a comparação entre a NumCosmo e a CCL está coerente.

Outra análise interessante de se fazer é a comparação da auto-correlação lenteamento fraco, expressa na figura 5.4. A comparação da auto-correlação dos *kernels* de lenteamento fraco compara os espectros de potência angular do mesmo para, mais uma vez, validar as bibliotecas NumCosmo e CCL. Como vimos, o espectro de potência angular é de extrema importância para as análises realizadas na Cosmologia e sua validação é de extrema importância para a conclusão do nosso trabalho.

A figura 5.4 nos mostra uma consistência no cálculo do  $C_\ell$  ao longo dos diversos modelos cosmológicos. Os ruídos obtidos, principalmente os maiores, na faixa de  $\ell = 10^2 \sim$

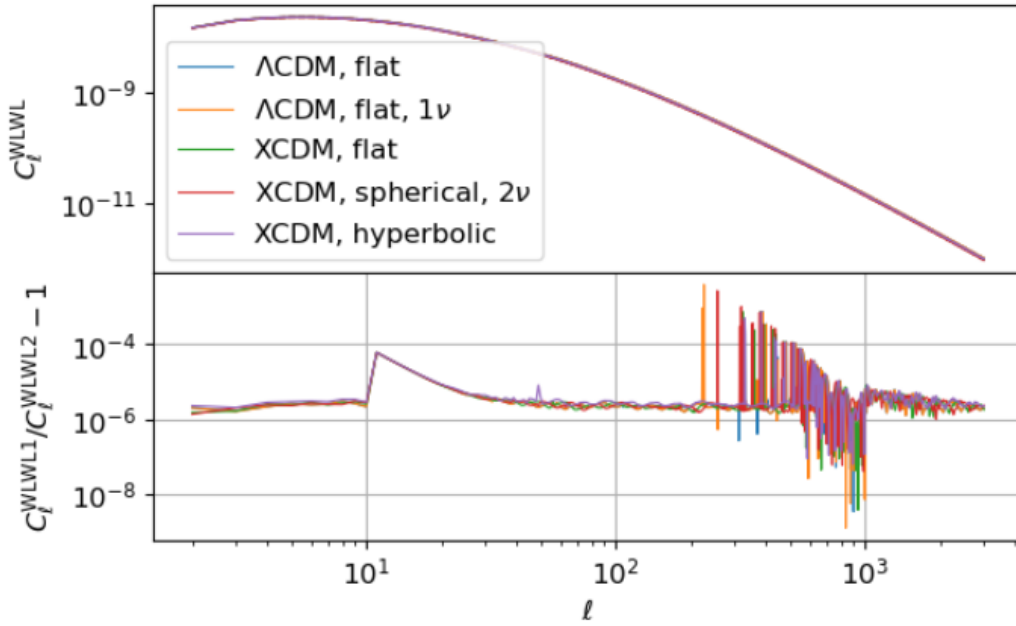


Figura 5.4 – Comparação da auto-correlação dos *kernels* de lenteamento fraco de galáxias calculado pela CCL e pela NumCosmo para diferentes modelos cosmológicos.

$10^3$ , ainda não representam problemas para a nossa análise, por serem de baixa magnitude e podem ser causados, dentre outras coisas, por diferenças na interpolação dos cálculos ou na implementação dos valores gerados para diferentes modelos.

Na Tabela 5.2, apresentamos uma comparação entre diferentes modelos cosmológicos e as quantidades relacionadas ao lenteamento fraco e ao espectro de potência angular dessas quantidades para as duas bibliotecas. Mostramos os modelos e o *kernel* de lenteamento fraco, além das correlações associadas, por meio do espectro de potência angular e suas respectivas diferenças relativas. A coluna *Model* indica o modelo cosmológico considerado no teste. Em seguida, a coluna *Quantity* especifica a quantidade que está sendo comparada, o *kernel*  $W_\ell$  ou o espectro de potência angular  $C_\ell$  do lenteamento fraco (auto-correlação). Temos então as colunas para a diferença relativa mínima e máxima,  $\Delta P_{min}/P$  e  $\Delta P_{max}/P$ , respectivamente, que nos mostram o menor e maior valor relativo da diferença entre os espectros de potência ou *kernels*, seguidas pela diferença relativa média  $\Delta P/P$  ao longo dos pontos analisados, representando o desvio médio relativo entre os modelos. Por último, temos a coluna do desvio padrão das diferenças relativas  $\sigma_{\Delta P/P}$ , que mede a dispersão dos valores de  $\Delta P/P$ , indicando quão estável é a diferença ao longo dos valores gerados. Os resultados numéricos obtidos com o CCL estão em bom acordo com os da NumCosmo.

Uma observação importante é que, para os cálculos realizados nas bibliotecas, usamos um método muito comum na cosmologia conhecido como aproximação de Limber. Aproximação de Limber é uma técnica matemática usada com frequência em cálculos numéricos e análises estatísticas na cosmologia para simplificar o cálculo de correlações angulares projetadas no céu a partir de distribuições tridimensionais de matéria ou galáxias. Essa

aproximação assume que as flutuações ao longo da linha de visada são rapidamente oscilantes e, por isso, o sinal principal vem de correlações em regiões próximas à linha de visada, permitindo colapsar a integral tridimensional em uma integral unidimensional ao longo do *redshift* ou da distância comóvel, para grandes valores de  $\ell$ .

|   | Model                       | Quantity           | $\Delta P_{\min}/P$   | $\Delta P_{\max}/P$   | $\Delta P/P$          | $\sigma_{\Delta P/P}$ |
|---|-----------------------------|--------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 0 | $\Lambda$ CDM, flat         | $W_{\ell=80}^{WL}$ | $1.29 \times 10^{-8}$ | $1.59 \times 10^{-3}$ | $1.46 \times 10^{-4}$ | $2.46 \times 10^{-4}$ |
| 1 | $\Lambda$ CDM, flat, $1\nu$ | $W_{\ell=80}^{WL}$ | $1.33 \times 10^{-8}$ | $1.59 \times 10^{-3}$ | $1.46 \times 10^{-4}$ | $2.46 \times 10^{-4}$ |
| 2 | XCDM, flat                  | $W_{\ell=80}^{WL}$ | $1.33 \times 10^{-8}$ | $1.59 \times 10^{-3}$ | $1.46 \times 10^{-4}$ | $2.46 \times 10^{-4}$ |
| 3 | XCDM, spherical, $2\nu$     | $W_{\ell=80}^{WL}$ | $1.34 \times 10^{-8}$ | $1.59 \times 10^{-3}$ | $1.46 \times 10^{-4}$ | $2.46 \times 10^{-4}$ |
| 4 | XCDM, hyperbolic            | $W_{\ell=80}^{WL}$ | $2.67 \times 10^{-8}$ | $1.59 \times 10^{-3}$ | $1.46 \times 10^{-4}$ | $2.46 \times 10^{-4}$ |
| 5 | $\Lambda$ CDM, flat         | $C_{\ell}^{WLWL}$  | $3.36 \times 10^{-9}$ | $7.37 \times 10^{-4}$ | $4.18 \times 10^{-5}$ | $1.68 \times 10^{-5}$ |
| 6 | $\Lambda$ CDM, flat, $1\nu$ | $C_{\ell}^{WLWL}$  | $1.22 \times 10^{-9}$ | $4.00 \times 10^{-4}$ | $5.78 \times 10^{-5}$ | $6.73 \times 10^{-5}$ |
| 7 | XCDM, flat                  | $C_{\ell}^{WLWL}$  | $3.66 \times 10^{-9}$ | $7.36 \times 10^{-4}$ | $4.78 \times 10^{-5}$ | $1.93 \times 10^{-5}$ |
| 8 | XCDM, spherical, $2\nu$     | $C_{\ell}^{WLWL}$  | $4.02 \times 10^{-8}$ | $2.74 \times 10^{-3}$ | $5.93 \times 10^{-5}$ | $5.74 \times 10^{-5}$ |
| 9 | XCDM, hyperbolic            | $C_{\ell}^{WLWL}$  | $6.15 \times 10^{-8}$ | $7.41 \times 10^{-4}$ | $4.95 \times 10^{-5}$ | $1.99 \times 10^{-5}$ |

Tabela 5.2 – Tabela com modelos cosmológicos e quantidades associadas.

Ainda, note que a análise foi feita para diferentes modelos cosmológicos e que, assim, podemos verificar a influência da geometria do cosmo, da presença de neutrinos massivos e de outras quantidades no efeito de deflexão da luz. Utilizou-se nesta análise desde o modelo principal considerado neste trabalho, o  $\Lambda$ CDM ("*Lambda Cold Dark Matter*"), à outros modelos, como o XCDM *spherical*  $2\nu$ . O leitor pode ler o apêndice A.3 para um breve resumo dos modelos cosmológicos considerados.

De forma geral, podemos resumir nossas considerações à: apesar da análise em diferentes modelos, o nosso resultado para os valores gerados do *kernel* de lenteamento fraco e para as comparações realizadas não se alteram, ou possuem discrepâncias que podemos desconsiderar, por serem muito pequenas comparadas aos valores obtidos. Ou seja, para todos os modelos cosmológicos onde aplicamos a nossa análise, os cálculos de  $W_{\ell}^{WL}$  e  $C_{\ell}^{WLWL}$  coincidem, assim como suas respectivas diferenças relativas.

## 5.4 Comparação do *kernel* de Lenteamento Fraco Variando a Distribuição da Fonte

Vamos propor mais uma análise dentro deste mesmo programa. Como vimos na seção anterior, os valores gerados e a análise realizada pela NumCosmo foram bem sucedidos e validados ao compará-los com os gerados pela CCL. Ainda, notamos que não há diferenças significativas no cálculo do *kernel* de lenteamento fraco para diferentes modelos cosmológicos.

Sendo assim, vamos calcular, na NumCosmo, o *kernel* de lenteamento fraco de galáxias e seu espectro de potência angular (auto-correlação) para diferentes distribuições de galáxias em um único modelo cosmológico, o  $\Lambda$ CDM. Vamos fazer isso variando a quantidade  $dn/dz$ , que representa a distribuição das galáxias em função do *redshift*, como vimos na equação (5.2).

Vamos começar entendendo o que é e como calculamos a distribuição  $dn/dz$ . Essa grandeza representa a distribuição numérica de galáxias num dado *redshift*  $z$ . Essa distribuição de galáxias é a responsável por alterar a trajetória da luz, o que chamamos de lente, ou ainda, é a distribuição de massa que é responsável por defletir a luz.

Em particular, consideramos que a distribuição  $dn/dz$  segue uma distribuição gaussiana. Com isso,  $dn/dz$  será caracterizada pela média, representada por  $\mu$ , o desvio padrão, dado por  $\sigma$ , e o parâmetro  $z\_len$ , que define o número de pontos usados para amostrar a distribuição de galáxias no *redshift*, ou seja, a distribuição será discretizada em  $z\_len$  valores igualmente espaçados no intervalo  $[z_{low}, z_{high}]$ . Parte do código pode ser visto abaixo,

```

1  def prepare_dndz(
2      mu: float,
3      sigma: float,
4      z_len: int,
5  ) -> Ncm.Spline:
6      """Prepare dndz for weak lensing tracer."""
7      z_low = mu - 10.0 * sigma
8      z_low = max(z_low, 0.0)
9      [...]
10     return Ncm.SplineCubicNotaknot.new_full(z_v, nz_v, True)

```

e pode ser visto de forma integral no repositório da NumCosmo.

Para variarmos esta distribuição, precisamos variar a média da distribuição  $\mu$  da nossa análise e o seu desvio padrão  $\sigma$ . Essas mudanças irão causar uma variação na distribuição  $dn/dz$  de massa da nossa lente. Vamos atrás de entender como essa mudança afeta o *kernel* de lenteamento gerados pela *Numerical Cosmology Library*.

A nossa análise foi feita ao variarmos  $\mu$  de 0.3 à 0.8 e  $\sigma$  de 0.01 à 0.1, onde gerou-se valores para o *kernel* de lenteamento fraco e comparamos cada um desses valores. Como não notamos variação significativa nos dados gerados para diferentes modelos cosmológicos nas investigações anteriores, decidimos seguir com essa análise apenas para o caso do  $\Lambda$ CDM, e chegamos no resultado dado pelas figuras 5.5 e 5.6.

O gráfico representado na figura 5.5 nos mostra a comparação entre os *kernels*  $W_{\ell=80}^{WL}$  gerados para diferentes valores de  $\mu$  e  $\sigma$ , agora em escala linear e não mais logarítmica. Da imagem podemos extrair que, para pequenos valores de *redshift*, existe uma concordância

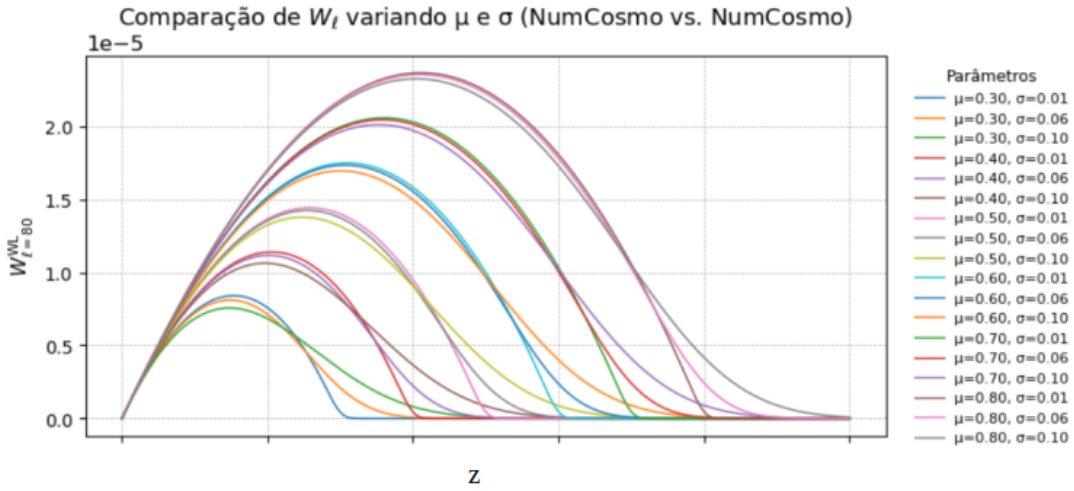


Figura 5.5 – Comparação dos diferentes *kernels* de lenteamento fraco gerados pela NumCosmo para diversos valores de  $\mu$  e  $\sigma$  em escala linear.

entre as curvas do gráfico. Todavia, com o aumento de  $z$ , os valores dos *kernels* gerados para diferentes valores da distribuição  $dn/dz$  começam a se diferenciar uns dos outros.

Observe que, alterando o centro da distribuição, o valor de  $\mu$ , desloca-se o pico da distribuição de massas para diferentes valores de  $z$ , mudando a posição de onde o *kernel* começa a cair. Já a alteração nos valores de  $\sigma$  muda a largura da distribuição, valores pequenos do desvio padrão geram distribuições mais estreitas, com quedas mais abruptas, enquanto valores maiores de  $\sigma$  geram distribuições mais largas, com quedas mais suaves. Isso é exatamente o que esperávamos, já que baseamos nossa distribuição em uma distribuição gaussiana.

De forma geral,  $W$  cresce lentamente para pequenos valores de *redshift* e depois decresce rapidamente para valores maiores de  $z$ . O crescimento lento decorre de que, para pequenos valores de  $z$ , a diferença  $\chi(z') - \chi(z)$ , responsável por definir a magnitude da deflexão, ainda é pequena, o que caracteriza o lenteamento fraco. Já a queda rápida se dá pela aproximação dos valores de  $z$  e de  $\mu$  ou quando a distribuição  $dn/dz$  vai a zero.

Na figura 5.6, plotamos o espectro de potência angular  $C_\ell^{WL \times WL}$  para diferentes distribuições  $dn/dz$ . O espectro assume um formato característico, crescente até o máximo, para  $\ell \sim 10$ , então passa a cair suavemente para valores altos de  $\ell$ . As curvas se sobrepõem em sua maioria, mostrando que pequenas variações nos parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$  da distribuição não impactam drasticamente os valores de  $C_\ell$ , neste intervalo considerado.

O parâmetro  $\ell$ , que representa o número de multipolo no cálculo do espectro de potência, fisicamente indica a escala angular no céu da nossa imagem. Baixos valores de  $\ell$  correspondem a grandes escalas angulares. Altos valores de  $\ell$ , por sua vez, correspondem a pequenas escalas angulares, às estruturas no céu. Na cosmologia, é comum achar a seguinte convenção para valores de  $\ell$  e escalas angulares:  $\ell \sim 10$  representam grandes escalas,  $\ell \sim 10^2$

representam escalas intermediárias e  $\ell \sim 10^3$ , pequenas escalas.

O painel inferior do gráfico 5.6 mostra a diferença relativa entre os espectros para diferentes distribuições em relação à uma distribuição de referência dada por  $\mu = 0,5$  e  $\sigma = 0,05$ . Em  $\ell \sim 10$ , a diferença relativa é pequena, mas aumenta conforme cresce o valor da escala angular. O crescimento da diferença relativa com  $\ell$  indica que as variações na distribuição  $dn/dz$  afetam mais as escalas pequenas, ou seja, grandes  $\ell$ , do que as escalas grandes, pequenos  $\ell$ .

As variações em  $\mu$  e  $\sigma$  no  $dn/dz$  causam pequenas diferenças no espectro angular do *kernel* de lenteamento fraco. Observamos na imagem que essas diferenças são mais perceptíveis em multipolos intermediários ( $\ell \geq 10^2$ ), onde a diferença relativa ultrapassa 2%. Felizmente, essa observação é consistente com a ideia de que a estrutura fina da distribuição de galáxias (capturada por  $dn/dz$ ) afeta mais as escalas angulares pequenas, que correspondem a estruturas menores no céu (Dodelson; Schmidt, 2024).

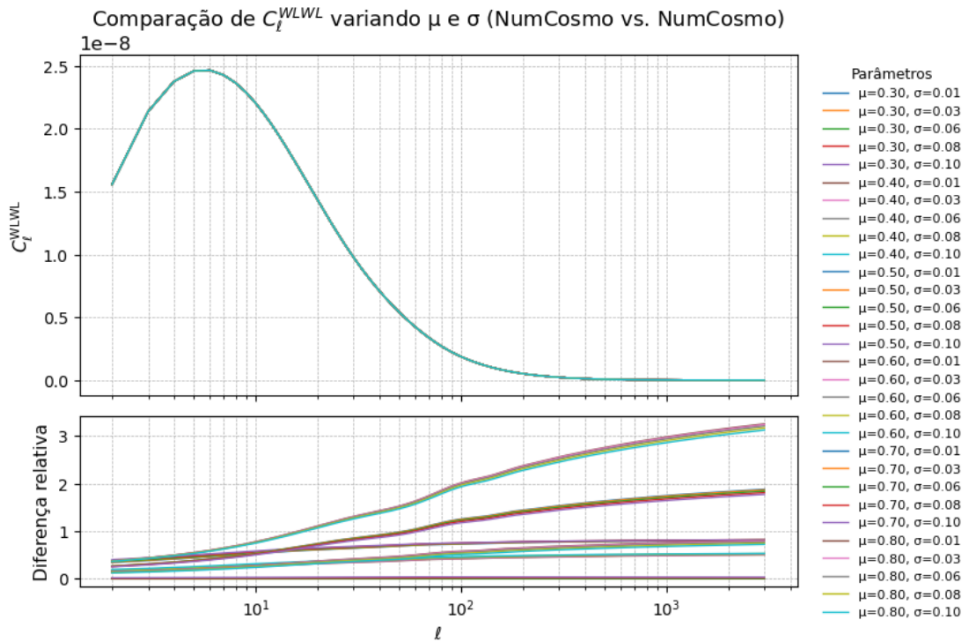


Figura 5.6 – Espectro de potência angular  $C_\ell$  dos diferentes *kernels* de lenteamento fraco gerados pela NumCosmo para diversos valores de  $\mu$  e  $\sigma$ . Diferença relativa entre os valores desse *kernel*, calculados a partir de  $C_\ell^{WLWL1}/C_\ell^{WLWL2} - 1$ .

Assim, a interpretação física que tiramos dos gráficos anteriores é que, quanto maior o valor de  $\mu$ , mais tarde o *kernel* começa a cair. Quanto maior o valor do desvio padrão  $\sigma$ , ou seja, quanto mais espalhada a massa da lente, mais suave é a queda de  $W$ , já que a distribuição  $dn/dz$  é mais espalhada em  $z$ . Essa interpretação corrobora com o nosso entendimento de que a estrutura do *kernel* é dominada pela combinação entre geometria (distâncias comóveis) e a distribuição de massa, como vimos nas equações dos capítulos 3 e 4.

Obtemos a resposta para nossa pergunta: alterações na distribuição  $dn/dz$  afeta

diretamente a forma e o valor do *kernel*  $W$ , confirmando o que discutimos até aqui. Os gráficos mostram que o comportamento de  $W$  é sensível à posição e à largura da distribuição da lente no redshift.

De forma geral, conseguimos nesse capítulo descrever o programa usado para nossa análise, mostrando que `CompareFunc1d` conseguiu comparar com sucesso os resultados obtidos nas bibliotecas NumCosmo e CCL, validando aquela e mostrando-a apta para uso de análises cosmológicas relacionadas a auto-correlação, espectro de potência angular e o *kernel* de lenteamento fraco de galáxias. Ainda, conseguimos mostrar como a distribuição de massa da fonte afeta o lenteamento gravitacional fraco e o espectro de potência angular que o representa relacionando-o a imagem observada no céu.

## 6 Conclusões

Vimos que a distorção nas trajetórias da luz, fenômeno foco deste trabalho, foi previsto já na Teoria da Gravitação Universal de Isaac Newton, mas que, devido a limitações teóricas, não foi devidamente explorado e previsto. Todavia, a Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein foi capaz de não só prever com exatidão o comportamento da luz, ao ser desviada por um potencial gravitacional, como também explicar como esse fenômeno ocorre e suas implicações teóricas.

Para entendermos a deflexão da luz, tema discorrido no capítulo 3, foi necessário uma breve introdução às teorias gravitacional e cosmológica usadas como pano de fundo, sintetizados no capítulo 2. Ali abordamos como modelamos o universo, como se dá a sua expansão e a implicação de um universo homogêneo e isotrópico para a análise de problemas cosmológicos. Falamos, também, de aproximações que tomamos a liberdade de tomar, do porque é justificado tomá-las, e como essas aproximações facilitam o trabalho de análise estatística no estudo da cosmologia, a exemplo da aproximação de um universo maximamente simétrico.

Em seguida, no capítulo 3, focamos no fenômeno em si, no lenteamento gravitacional. Começamos por abordar a equação da lente que, curiosamente, já havia sido calculada para a Teoria da Gravitação Universal e que carregava ali os componentes centrais que estão presentes na equação da lente na Teoria da Relatividade Geral, apesar de errada por um fator de dois, (Meneghetti, 2021). Abordamos também aproximações relevantes para a nossa análise e desenvolvimento teórico e, então, partimos para os efeitos do lenteamento fraco, a convergência e o cisalhamento. Exploramos cada um destes fenômenos e como relacionamo-os com a distribuição de massa da lente a partir do contraste de densidade de matéria.

Considerando a relação entre a distribuição de massa e os fenômenos gravitacionais a ela associados, exploramos a possibilidade de utilizar tais efeitos como ferramenta para investigar a estrutura da matéria responsável por sua ocorrência. Em outras palavras, discutimos como os efeitos gravitacionais podem ser empregados para inferir a distribuição de matéria no universo. Com esse objetivo, analisamos o papel dos chamados traçadores de matéria e sua aplicação em estudos cosmológicos, valendo-nos de cálculos numéricos que também foram abordados neste trabalho e empregados em nossas análises.

Com essa relação entre fenômeno e distribuição em mente, buscamos no capítulo 4 ferramentas estatísticas para auxiliar no nosso estudo. A função de correlação de dois pontos, responsável por indicar-nos a intensidade e direção da associação entre variáveis, nos levou a entender que essas ferramentas são eficazes e ajustáveis a diferentes situações potenciais. Discorreremos sobre o espectro de potência, representando a distribuição no espaço de Fourier

e aplicando nossa análise aos traçadores de matéria. Então chegamos no espectro de potência angular  $C_\ell$ , usado na análise de sinais e de imagens, onde calculamos essa quantidade para os efeitos de lenteamento e que usamos para as análises discorridas no capítulo seguinte.

Em síntese, o capítulo 4 nos serviu para estudarmos métodos de análise comuns e que utilizamos neste trabalho, para a análise de traçadores de matéria e a distribuição de massa que o influencia. Evidenciamos a importância deste estudo mostrando o poder de previsão e a forte relação entre efeito e causa da lente gravitacional e discorremos sobre a importância de métodos computacionais capazes de auxiliar nesta análise.

Nosso objetivo, neste trabalho, foi validar a capacidade computacional de gerar e analisar os resultados obtidos pela biblioteca NumCosmo. No cenário cosmológico atual, onde a grande quantidade de dados domina o cenário da astrofísica e cosmologia observacional, ferramentas computacionais para cálculos numéricos e de análise estatística são de fundamental importância e, tendo disponível uma ferramenta como a NumCosmo, e seus resultados validados ao cruzarmos os mesmos com resultados obtidos por outra biblioteca, auxiliamos no desenvolvimentos das citadas ferramentas computacionais úteis para o desenvolvimento de estudos cosmológicos.

O código que usamos e desenvolvemos, as análises feitas e os resultados obtidos foram abordados no capítulo 5. Falamos do formato utilizado para nossa análise, como geramos os valores do *kernel* de lenteamento fraco nas bibliotecas NumCosmo e CCL e desenvolvemos a comparação destes valores. Mostramos o resultado obtido e justificamos nossas conclusões com base nos gráficos e nas tabelas apresentados.

O estudo da biblioteca NumCosmo e a comparação com a CCL, expostas no capítulo 5, nos mostra sucesso na comparação e validação, apresentando diferenças relativas esperadas, da ordem de  $10^{-8} \sim 10^{-4}$ , quando analisamos o espectro de potência dos *kernels* de lenteamento fraco gerados pelas já citadas bibliotecas.

Assim, mostramos que a biblioteca NumCosmo não só calcula e gera dados para as quantidades estudadas nesse trabalho, como o *kernel* de lenteamento fraco de galáxia e seu espectro de potência angular, como o faz com uma precisão maior do que a oferecida pela CCL. No momento em que estamos na cosmologia, onde a quantidade de dados supera nossa capacidade computacional, a NumCosmo se mostrou uma ferramenta de excelência para aqueles que desejam analisar e estudar dados cosmológicos, calcular e gerar parâmetros cosmológicos e aplicar essas análises em estudos teóricos e observacionais.

A análise, realizada em diferentes modelos cosmológicos, apresentou uma constância de sucesso para os resultados que desejávamos e, então, partimos para analisar a variação no *kernel* de lenteamento fraco gerado pela NumCosmo, quando variamos a distribuição da lente. O resultado obtido nos mostrou como a distribuição de massa altera o fenômeno analisado, nos possibilitando fazer o caminho inverso, utilizando a deflexão da luz para entender o efeito da distribuição de galáxias.

Essa análise nos permitiu unir nosso estudo teórico à análise numérica, onde demos uma volta no estudo de lentes gravitacionais e a disposição do cosmo. Vimos que a geometria do espaço-tempo e as distâncias angulares são ditadas pelas equações de Friedmann, assim como a distribuição de matéria evolui segundo essas equações, essa distribuição de matéria, por sua vez, deflete a trajetória da luz, gerando as lentes gravitacionais, e podemos usar esses fenômenos de lenteamento, convergência e cisalhamento, para inferir a distribuição de massa das lentes e testar os modelos cosmológicos baseados nas equações de Friedmann.

## Referências

- ABBOTT, T. M. C. *et al.* Dark energy survey year 1 results: Constraints on extended cosmological models from galaxy clustering and weak lensing. **Physical Review D**, v. 99, n. 12, p. 123505, 2019. Citado na p. 45.
- ABELL, P. A.; ALLISON, J.; ANDERSON, S. F.; ANDREW, J. R.; ANGEL, J. R. P.; ARMUS, L.; ARNETT, D.; ASZTALOS, S.; AXELROD, T. S.; BAILEY, S. *et al.* Lsst science book, version 2.0. 2009. Citado na p. 58.
- ALONSO, D. *et al.* A unified pseudo- $c_l$  framework. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 484, n. 3, p. 4127–4151, 2019. Citado na p. 56.
- BARTELMANN, M.; SCHNEIDER, P. Weak gravitational lensing. **Physics Reports**, Elsevier, v. 340, n. 4-5, p. 291–472, 2001. Citado na p. 34.
- BASSETT, B.; HLOZEK, R. Baryon acoustic oscillations. **Dark energy: observational and theoretical approaches**, Cambridge University Press Cambridge, UK, v. 246, 2010. Citado na p. 54.
- CARROLL, S. M. **Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019. Citado nas pp. 16, 17 e 80.
- CÉSAR, H. L.; POMPEIA, P. J.; STUDART, N. The gravitational deflection of light: From newton to einstein. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 41, p. e20190238, 2019. Citado na p. 28.
- CHISARI, N. E. *et al.* Core cosmology library: Precision cosmological predictions for lsst. **The Open Journal of Astrophysics**, 2019. Disponível em: <https://github.com/LSSTDESC/CCL>. Citado na p. 15.
- CLOWE, D.; BRADAČ, M.; GONZALEZ, A. H.; MARKEVITCH, M.; RANDALL, S. W.; JONES, C.; ZARITSKY, D. A direct empirical proof of the existence of dark matter. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 648, n. 2, p. L109, 2006. Citado na p. 45.
- COLLABORATION, L. D. E. S. **Core Cosmology Library (CCL)**. 2025. Version 3.2.dev2+gca1b0261. Disponível em: <https://github.com/LSSTDESC/CCL>. Citado nas pp. 15 e 84.
- COLLABORATION, N. **NumCosmo: Numerical Cosmology Library**. 2025. Version 0.24.1. Disponível em: <https://github.com/NumCosmo/NumCosmo>. Citado nas pp. 65 e 90.
- CONGDON, A. B.; KEETON, C. R. **Principles of Gravitational Lensing - Astronomy and Planetary Sciences**. [S.l.]: Springer International Publishing, 2018. Citado nas pp. 25 e 37.

- Dias Pinto Vitenti, S.; Penna-Lima, M. Numcosmo: Numerical cosmology. 2014. Citado nas pp. 15 e 64.
- DODELSON, S. **Gravitational Lensing**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2017. Citado nas pp. 18 e 25.
- DODELSON, S.; SCHMIDT, F. **Modern Cosmology**. [S.l.]: Elsevier, 2024. Citado nas pp. 16, 17, 18, 70 e 82.
- DYSON, F.; EDDINGTON, A.; DAVIDSON, C. A determination of the deflection of light by the sun's gravitational field, from observations made at the total eclipse of may 29, 1919. **Memoirs of the Royal Astronomical Society, Vol. 62, p. A1**, v. 62, p. A1, 1923. Citado na p. 29.
- FAGA, L. J. **Análise de galáxia-lenteamento de galáxia no espaço harmônico: estudo e aplicação no contexto do Dark Energy Survey**. Tese (Doutorado) — Instituto de Física da Universidade de São Paulo, 2022. Citado nas pp. 25, 37, 46, 54 e 56.
- FEROZ, F.; HOBSON, M. P.; BRIDGES, M. Multinest: An efficient and robust bayesian inference tool for cosmology and particle physics. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 398, n. 4, p. 1601–1614, 2009. Citado na p. 56.
- GIBLIN, B.; HEYMANS, C.; ASGARI, M.; HILDEBRANDT, H.; HOEKSTRA, H.; JOACHIMI, B.; KANNAWADI, A.; KUIJKEN, K.; LIN, C.-A.; MILLER, L. *et al.* Kids-1000 catalogue: Weak gravitational lensing shear measurements. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 645, p. A105, 2021. Citado na p. 45.
- HEYMANS, C.; TRÖSTER, T.; ASGARI, M.; BLAKE, C.; HILDEBRANDT, H.; JOACHIMI, B.; KUIJKEN, K.; LIN, C.-A.; SÁNCHEZ, A. G.; BUSCH, J. L. V. D. *et al.* Kids-1000 cosmology: Multi-probe weak gravitational lensing and spectroscopic galaxy clustering constraints. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 646, p. A140, 2021. Citado na p. 45.
- HOGG, D. W.; EISENSTEIN, D. J.; BLANTON, M. R.; BAHCALL, N. A.; BRINKMANN, J.; GUNN, J. E.; SCHNEIDER, D. P. Cosmic homogeneity demonstrated with luminous red galaxies. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 624, n. 1, p. 54, 2005. Citado na p. 18.
- HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. **Proceedings of the national academy of sciences**, National Academy of Sciences, v. 15, n. 3, p. 168–173, 1929. Citado na p. 20.
- KENT, J. L.; NICHOL<sup>12</sup>, R. C.; O'CONNELL<sup>11</sup>, L.; SHETH, R. K.; STEBBINS, A.; SZALAY<sup>10</sup>, A. S.; SZAPUDI<sup>13</sup>, I.; VOGLEY<sup>14</sup>, M. S.; ZEHAVID, I.; ANNIS, J. *et al.* The angular power spectrum of galaxies from early sdss data. **arXiv preprint astro-ph/0107418**. Citado na p. 58.

- LEMAÎTRE, G. Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. **Annales de la Société Scientifique de Bruxelles**, **A47**, p. 49-59, v. 47, p. 49-59, 1927. Citado na p. 21.
- LEQUEUX, J. La découverte de neptune par le verrier (1846). **Bibnum. Textes fondateurs de la science**, FMSH-Fondation Maison des sciences de l'homme, 2010. Citado na p. 61.
- LESGOURGUES, J.; VERDE, L. Neutrinos in cosmology. **Phys. Rev. D** **110**, 030001, 2024. Citado na p. 83.
- LORENTZ, H. A.; EINSTEIN, A.; MINKOWSKI, H.; WEYL, H.; SOMMERFELD, A. **The principle of relativity: a collection of original memoirs on the special and general theory of relativity**. [S.l.]: Courier Corporation, 1952. Citado na p. 16.
- LOUREIRO, A.; MORAES, B.; ABDALLA, F. B.; CUCEU, A.; MCLEOD, M.; WHITEWAY, L.; BALAN, S. T.; BENOIT-LÉVY, A.; LAHAV, O.; MANERA, M. *et al.* Cosmological measurements from angular power spectra analysis of boss dr12 tomography. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 485, n. 1, p. 326-355, 2019. Citado na p. 58.
- MARQUES, G. A. *et al.* Cosmology from weak lensing peaks and minima with subaru hyper supprime-cam survey first-year data. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 528, n. 3, p. 4513-4527, 2024. Citado na p. 16.
- MENEGHETTI, M. **Introduction to Gravitational Lensing: With Python Examples**. [S.l.]: Springer Nature, 2021. Citado nas pp. 9, 15, 25, 26, 35, 42, 46 e 72.
- MUKHANOV, V. **Physical foundations of cosmology**. [S.l.]: Cambridge university press, 2005. Citado na p. 19.
- NEWTON, I. Corpuscular theory of light. 1704. Citado na p. 25.
- NEWTON, I. **Opticks, or, a treatise of the reflections, refractions, inflections & colours of light**. [S.l.]: Courier Corporation, 1952. Citado na p. 25.
- NEWTON, I. Principia, livros ii e iii: Princípios matemáticos de filosofia natural/sistema do mundo. **Tradução de Trieste Ricci et al. São Paulo: EDUSP**, 2012. Citado na p. 25.
- NEWTON, I. Principia, livro i: Princípios matemáticos de filosofia natural. **Tradução de Trieste Ricci et al. São Paulo: EDUSP**, 2016. Citado na p. 25.
- NTELIS, P.; HAMILTON, J.-C.; GOFF, J.-M. L.; BURTIN, E.; LAURENT, P.; RICH, J.; TINKER, J.; AUBOURG, E.; BOURBOUX, H. D. M. D.; BAUTISTA, J. *et al.* Exploring cosmic homogeneity with the boss dr12 galaxy sample. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2017, n. 06, p. 019, 2017. Citado na p. 18.
- PEEBLES, P. J. E. **The Large-Scale Structure of the Universe**. [S.l.]: Princeton University Press, 1980. Citado nas pp. 16, 25, 50, 51, 53, 56 e 60.

- PEEBLES, P. J. E. The standard cosmological model. **arXiv preprint astro-ph/9806201**, 1998. Citado na p. 83.
- PRAT, J. *et al.* Dark energy survey year 1 results: Galaxy-galaxy lensing. **Physical Review D**, v. 98, n. 4, p. 042005, 2018. Citado na p. 45.
- RUSIN, D.; HALL, P.; NICHOL, R.; MARLOW, D.; RICHARDS, A.; MYERS, S. Cfht ao imaging of the class gravitational lens system b1359+ 154. **arXiv preprint astro-ph/9911420**, 1999. Citado na p. 45.
- SANTOS, J. F. G. d. Ondas gravitacionais e o espectro de anisotropia tensorial na presença de neutrinos cosmológicos. 2012. Citado na p. 81.
- SARMAH, P.; DE, A.; GOSWAMI, U. D. Anisotropic lrs-bi universe with  $f(q)$  gravity theory. **Physics of the Dark Universe**, Elsevier, v. 40, p. 101209, 2023. Citado na p. 81.
- SCHUTZ, B. **A first course in general relativity**. [S.l.]: Cambridge university press, 2022. Citado na p. 16.
- SHELDON, E. S.; HUFF, E. M. Practical weak-lensing shear measurement with metacalibration. **The Astrophysical Journal**, v. 841, n. 1, p. 24, 2017. Citado na p. 42.
- SILVA, L. L. d. C. **Espectro de Potência Angular de Galáxias e Lenteamento da Radiação Cósmica de Fundo: Validação das Bibliotecas de CCL e NumCosmo**. Tese (Doutorado) — Instituto de Física da Universidade de Brasília, 2023. Citado na p. 56.
- SITTER, W. D. Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 76, p. 699-728**, v. 76, p. 699–728, 1916. Citado na p. 20.
- SUYAMA, T.; TAKAHASHI, R.; MICHIKOSHI, S. Wave propagation in a weak gravitational field and the validity of the thin lens approximation. **Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology**, APS, v. 72, n. 4, p. 043001, 2005. Citado na p. 35.
- VERDE, L. Statistical methods in cosmology. *In: Lectures on Cosmology: Accelerated Expansion of the Universe*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2010. p. 147–177. Citado na p. 50.
- VERRIER, U. L. Sur la planète qui produit les anomalies observées dans le mouvement d'uranus.—détermination de sa masse, de son orbite et de sa position actuelle. **Compte Rendus de L'Académie des Sciences**, p. 428–438, 1846. Citado na p. 61.
- VERRIER, U. L. Recherches sur les mouvements d'uranus. **Astronomische Nachrichten**, WILEY-VCH Verlag Altona, v. 25, n. 4-5, p. 53–80, 1847. Citado na p. 61.
- WEINBERG, S. **Cosmology**. [S.l.]: OUP Oxford, 2008. Citado na p. 21.
- ZELMANOV, A. On the relativistic theory of an anisotropic inhomogeneous universe. **The Abraham Zelmanov Journal**, v. 1, p. 33–63, 2008. Citado na p. 82.

## **Apêndices**

# Apêndice A – Comentários e Explicações Breves

## A.1 Vetores de *Killing*

Os vetores de *Killing* são campos vetoriais que geram simetrias contínuas de uma métrica em um espaço-tempo ou variedade diferencial, (Carroll, 2019). Em outras palavras, vetores de *Killing* definem direções de simetria da métrica, ou seja, isometrias.

Um vetor  $\xi^\mu$  é chamado vetor de *Killing* se satisfaz a equação de *Killing*, dada por

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0, \quad (\text{A.1})$$

onde  $\nabla_\mu$  é a derivada covariante associada à métrica  $g_{\mu\nu}$ . Essa condição significa que o tensor métrico é invariante sob o fluxo gerado por  $\xi^\mu$ , ou seja, a métrica não muda ao longo da direção definida por  $\xi^\mu$ . Isso implica uma simetria do espaço-tempo.

Exemplos de vetores de *Killing* que aplicamos com frequência nas análises cosmológicas são o vetor  $\partial_t$  em um espaço-tempo estacionário, um vetor de *Killing* associado à invariância temporal (conservação de energia), e o vetor  $\partial_\phi$  em um espaço-tempo axialmente simétrico, um vetor de *Killing* associado à invariância rotacional (conservação de momento angular).

As aplicações de tais vetores são de fundamental importância na cosmologia. São fundamentais para encontrar quantidades conservadas ao longo de geodésicas (como energia e momento angular) e auxiliam a classificar soluções da Relatividade Geral e simplificar equações de movimento. É o vetor de *Killing* que caracteriza a variedade como homogênea e isotrópica.

Na métrica de FLRW, por exemplo, vetores de *Killing* são aplicados na conservação espacial para definir o espaço-tempo. Apesar do fator de escala depender do tempo, a métrica é espacialmente homogênea e isotrópica. Isso implica que existem seis vetores de *Killing* espaciais, correspondendo a translações espaciais ( $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ ) e rotações espaciais ( $y\partial_z - z\partial_y, z\partial_x - x\partial_z, x\partial_y - y\partial_x$ ). Esses vetores satisfazem a equação de Killing porque o fator de escala  $a(t)$  é comum a todos os termos espaciais e não depende de  $x, y, z$ . Isso garante a invariância sob rotações e translações espaciais.

O tempo não é uma simetria geral na métrica de FLRW. De forma geral, não existe um vetor de *Killing* temporal  $\partial_t$ , pois a métrica muda com o tempo devido a  $a(t)$ . Isso significa que não há conservação de energia global no universo em expansão, apenas em casos especiais (como espaço-tempo de de Sitter ou Minkowski) pode haver simetria temporal.

Um detalhe importante e bastante útil para diversas análises cosmológicas é que a contração do vetor de *Killing* com o vetor tangente à Geodésica é uma constante. Seja  $u^\mu$  um vetor tangente à geodésica, isto é  $u^\mu = dx^\mu/d\lambda$ , onde  $\lambda$  é o parâmetro afim da geodésica, então

$$\frac{d}{d\lambda}(\xi_\mu u^\mu) = 0, \quad (\text{A.2})$$

nos indicando que a projeção do vetor de *Killing* na direção da trajetória da partícula,  $\xi_\mu u^\mu$ , é conservada ao longo da geodésica. Isso permite identificar quantidades conservadas associadas às simetrias do espaço-tempo e serve como uma generalização do teorema de Noether: simetrias geram conservações.

Um exemplo prático e útil para lentes gravitacionais, dentre outros fenômenos cosmológicos, é, se uma partícula de luz segue uma geodésica nula ( $u^\mu u_\mu = 0$ ), e  $\xi^\mu$  é um vetor de *Killing* associado a uma simetria rotacional, a quantidade  $\xi_\mu u^\mu$  representa o momento angular da luz, que é conservado. Isso nos auxilia a calcular desvios angulares e trajetórias em métricas esfericamente simétricas (como Schwarzschild ou FLRW com curvatura positiva).

## A.2 Tensão Anisotrópica

Definimos tensão anisotrópica como a diferença nas pressões ou tensões ao longo de diferentes direções espaciais em um sistema físico (Santos, 2012) (Sarmah; De; Goswami, 2023). Para a cosmologia, esse fenômeno simboliza a possibilidade de diferenças na expansão do universo ao longo de diferentes direções.

Na Relatividade Geral, o tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$  de um fluido perfeito é dado por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (\text{A.3})$$

onde  $\rho$  representa a densidade de energia,  $p$  a pressão escalar (isotrópica) e  $U_\mu$  o quadrivetor velocidade.

Se o fluido tem pressões diferentes ao longo de direções quaisquer, substituímos o termo  $pg_{\mu\nu}$  por um tensor de pressão anisotrópico, descrito por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + p_\perp g_{\mu\nu} + (p_\parallel + p_\perp)k_\mu k_\nu, \quad (\text{A.4})$$

onde  $p_\parallel$  representa a pressão ao longo da direção paralela e  $p_\perp$  a pressão na direção perpendicular à essa direção privilegiada que, por sua vez, é definida pelo vetor unitário  $k_\mu$  - não é necessariamente um vetor de *Killing*, pois não precisa gerar uma isometria. A tensão anisotrópica pode surgir, por exemplo, devido à presença de campos vetoriais, campos tensoriais ou até mesmo defeitos topológicos no universo primordial.

O universo tardio, ou seja, o universo após a recombinação ( $z \approx 1100$ ), é marcado por dois aspectos fundamentais: a radiação cósmica de fundo (CMB) já havia se desacoplado

da matéria, e a expansão era predominantemente influenciada pela matéria, com a energia escura começando a desempenhar um papel importante apenas em tempos mais recentes ( $z \leq 0,3$ ). Para um universo perfeitamente homogêneo e isotrópico, o modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), no qual a expansão ocorre da mesma forma em todas as direções, seria suficiente para descrevê-lo. No entanto, algumas evidências sugerem pequenas anisotropias na expansão, especialmente em levantamentos de galáxias e medições da taxa de expansão do universo em diferentes direções.

Algumas hipóteses foram criadas para explicar o surgimento da tensão anisotrópica no universo tardio. Algumas das motivações prováveis são: os campos magnéticos cósmicos, campos magnéticos primordiais que poderiam gerar pequenas tensões anisotrópicas; a energia escura pode apresentar comportamento anisotrópico, afetando a expansão em algumas direções privilegiadas; e efeitos de grandes estruturas, devido a distribuição de superaglomerados de galáxias que poderiam perturbar gravitacionalmente a expansão do universo em alguma direção.

Para se aprofundar mais no tema, recomendo a leitura do artigo (Zelmanov, 2008), bastante instrutivo e introdutório ao assunto.

### A.3 Outros Modelos Cosmológicos

Como vimos no capítulo 5, outros modelos cosmológicos, além do modelo  $\Lambda$ CDM foram usados para a nossa análise. Na tabela 5.2 podemos ver esses modelos e, aqui nesse apêndice, vamos fazer um breve resumo para melhor entendimento do leitor.

O modelo  $\Lambda$ CDM, como já vimos, é aquele que tem a energia escura descrita pela constante cosmológica  $\Lambda$ , responsável pela aceleração da expansão do universo, e tem a equação de estado dada por  $w = -1$ .

O modelo  $\Lambda$ CDM é bem sucedido em explicar uma série de fenômenos e observações, como a radiação cósmica de fundo (CMB), a expansão acelerada do universo, a distribuição de galáxias, a formação de estruturas de grande escala e as lentes gravitacionais, dentre outros fenômenos (Dodelson; Schmidt, 2024).

Já o modelo XCDM é caracterizada pela presença de uma forma mais genérica de energia escura, representada pela letra X, com uma equação de estado constante  $w = p/\rho$ , onde  $p$  é a pressão e  $\rho$  a densidade da energia escura. Esse modelo é uma generalização do modelo anterior ( $\Lambda$ CDM), mas mantendo o caráter dela se manter constante no tempo.

*Flat*, ou plano, refere-se à curvatura espacial do universo, que, neste caso, é nula, ou seja, o espaço-tempo é plano. A notação usada para representar esse caso é  $\Omega_k = 0$ . Já um universo *spherical*, um universo esférico, possui uma curvatura positiva, representada por  $\Omega_k < 0$ , ou seja, um universo fechado, de geometria esférica.

Os símbolos  $1\nu$  e  $2\nu$  estão relacionados aos tipos de neutrinos massivos, ou seja, indicam que o modelo considera um ou dois tipos de neutrinos massivos no conteúdo do universo, respectivamente. Essas considerações estão ligadas à expansão do universo, à formação de estruturas e ao comportamento dos modos de oscilação no universo primordial.

Sendo assim, o modelo  $\Lambda$ CDM *spherical*  $2\nu$ , por exemplo, representa um modelo cosmológico com energia escura (constante, mas não necessariamente  $\Lambda$ ), curvatura positiva e com dois tipos de neutrinos massivos na composição do universo.

O leitor é convidado a ler os trabalhos ([Peebles, 1998](#)) e ([Lesgourgues; Verde, 2024](#)), onde podem ver mais dos assuntos relacionados a modelos cosmológicos e a relação entre neutrinos e o desenvolvimento do Cosmo para como ele se encontra hoje.

## Apêndice B – Códigos Utilizados na Análise

O código que usamos para desenvolver a análise abordada nesse trabalho foi desenvolvido na biblioteca *Numerical Cosmology Library* (NumCosmo), com o objetivo de estudar o *kernel* de lenteamento fraco e sua dependência em relação ao *redshift* e às grandezas cosmológicas, como densidade de matéria bariônica  $\Omega_b$  e matéria escura fria (*cold dark matter*-CDM)  $\Omega_c$ , dentre outros.

Validamos, então, o resultado gerado nessa análise ao compará-los com os resultados obtidos pela biblioteca *Core Cosmology Library* (CCL), desenvolvida pelo *Dark Energy Science Collaboration* (DESC) do *Vera C. Rubin Observatory's Legacy Survey of Space and Time* (LSST). A CCL implementa diferentes quantidades cosmológicas, como funções de crescimento de estrutura, espectros de potência e distâncias cosmológicas ([Collaboration, 2025a](#)).

Podemos dividir o programa utilizado em três partes: a primeira parte, onde definimos a função de comparação entre as bibliotecas e sua representação gráfica; a segunda parte, onde geramos e calculamos as grandezas em cada uma das bibliotecas; e a terceira parte, onde definimos os parâmetros utilizados e aplicamos os valores gerados à função de comparação, produzindo os gráficos analisados no capítulo 5.

### B.1 Primeira Parte: A Função de Comparação

A função responsável por comparar os valores gerados e nos devolver um gráfico representando essa comparação é chamada `CompareFunc1d`. Começamos por importar as bibliotecas que serão utilizadas, a NumCosmo e a CCL, claro, além do numpy, timeit, dentre outras que podem ser vistos abaixo.

```

1  import sys
2  import numpy as np
3  import math
4  import matplotlib.pyplot as plt
5  from IPython.display import HTML, Markdown, display
6
7  # CCL
8  import pycc1
9  import pandas as pd
10
11  # NumCosmo

```

```

12 from numcosmo_py import Nc, Ncm
13 from numcosmo_py.ccl.nc_ccl import create_nc_obj, CCLParams, dsigmaM_dlnM
14
15 from numcosmo_py.plotting.tools import set_rc_params_article, format_time
16 import numcosmo_py.cosmology as ncc
17 import numcosmo_py.ccl.comparison as nc_cmp

```

Partimos então para a função de comparação. A classe `CompareFunc1d` compara duas funções representadas no código por `y1` e `y2` em relação a uma variável independente `x`. Essa classe calcula as diferenças relativas e absolutas entre essas duas funções e oferece métodos para análise estatística e visualização dos dados.

Dentro desta classe temos definido um construtor `__init__` que recebe três *arrays* numpy (`y1`, `y2` e `x`) e valida que possuem todos o mesmo tamanho. Também é responsável por calcular a diferença relativa `diff` quando `y1` for diferente de zero e a diferença absoluta `abs_diff` em módulo. Ainda a classe possui propriedades estatísticas bem definidas, dentre elas o método `@property` para obter estatísticas da diferença relativa, dados pela diferença mínima e máxima e média, desvio padrão e mediana das diferenças.

Para a representação visual dos dados, a classe `CompareFunc1d` plota as funções `y1` e `y2` no primeiro eixo e a diferença absoluta no segundo. Define escala e rotula cada eixo, definindo as unidades, se houver, e adiciona rótulo e legenda adequados.

Aqui abaixo está parte da classe `CompareFunc1d`

```

1 class CompareFunc1d:
2     """Class for functions comparison."""
3
4     def __init__(
5         self,
6         x: npt.NDArray[np.float64],
7         y1: npt.NDArray[np.float64],
8         y2: npt.NDArray[np.float64],
9         *,
10        model: str = "unnamed",
11        name1: str = "1",
12        name2: str = "2",
13        x_symbol: str = "x",
14        y_symbol: str = "y",
15        x_unit: str | None = None,
16        y_unit: str | None = None,
17        xscale: str = "linear",

```

```

18     yscale: str = "log",
19 ) -> None:
20     """Compare CCL and NumCosmo results for a function."""
21     assert x.shape == y1.shape
22     assert x.shape == y2.shape
23
24 [...]
25
26     non_zero_indices = y1 != 0.0
27     zero_indices = ~non_zero_indices # 0 til (~) é o operador de negação bit a
    ↪ bit (bitwise NOT)
28     self.diff[non_zero_indices] = y2[non_zero_indices] / y1[non_zero_indices] -
    ↪ 1.0
29     self.diff[zero_indices] = y2[zero_indices] - y1[zero_indices]
30     self.abs_diff = np.abs(self.diff)
31
32 @property
33 def rel_diff_min(self) -> float:
34     """Return the minimum relative difference."""
35     return np.min(self.abs_diff)
36
37 @property
38 def rel_diff_max(self) -> float:
39     """Return the maximum relative difference."""
40     return np.max(self.abs_diff)
41
42 [...]
43
44 def plot(
45     self,
46     axs: list[plt.Axes],
47     *,
48     color: str = "black",
49     lw: float = 0.8,
50 ) -> None:
51     """Plot the comparison."""
52     assert len(axs) == 2
53     assert isinstance(axs[0], plt.Axes)
54     assert isinstance(axs[1], plt.Axes)
55     y1_name, y2_name = (
56         f"{self.y_symbol}^{\mathrm{{{self.name1}}}}",

```

```

57         f"{self.y_symbol}^{\mathrm{{{self.name2}}}}",
58     )
59     axs[0].plot(
60         self.x, self.y1, label=self.model, lw=lw, color=color, linestyle="--"
61     )
62     axs[0].plot(self.x, self.y2, lw=lw, color=color, linestyle="--")
63     if np.sum(self.abs_diff) > 0.0:
64         axs[1].plot(self.x, self.abs_diff, lw=lw, color=color)
65     axs[1].set_xscale(self.xscale)
66
67     [...]

```

## B.2 Segunda Parte: Comparando Variáveis Geradas pelas Bibliotecas

Aqui está a maior parte do programa. A comparação é feita entre todas as variáveis geradas pela NumCosmo e pela CCL, desde variáveis cosmológicas como a densidade de radiação  $\Omega_g$  até o *kernel* de lenteamento fraco e a auto-correlação angular. Eu vou resumir parte das funções de comparação, separando em tópicos que imagino facilitar o entendimento do leitor e seguindo a ordem do próprio programa.

A comparação de variáveis cosmológicas começa com a função `compute_times` que mede o tempo de execução de uma função e, logo em seguida, parte para a função que compara os valores de densidade de matéria  $\Omega_m$  gerados pelas bibliotecas CCL, representada pela sigla `pyccl`, e NumCosmo, representada por `ncc`, nomeada `compare_Omega_m`. Essa função calcula  $\Omega_m$  para ambas as bibliotecas e retorna um objeto `CompareFunc1d`. Esse processo é semelhante para todas as variáveis cosmológicas seguintes.

Em seguida, partimos para a parte do código que compara diferentes definições de distância cosmológica entre as bibliotecas. O objetivo é avaliar discrepâncias entre as implementações das duas bibliotecas, nos fazendo repetir, a partir do cálculo de cada tipo de distância nas duas bibliotecas e retornando um objeto `CompareFunc1d` para análise. Aqui são comparadas as distâncias comóvel radial, comóvel transversal, angular, dentro outras, como mostra o fragmento de código abaixo:

```

1     def compare_distance_comoving(
2         ccl_cosmo: pyccl.Cosmology,
3         cosmology: ncc.Cosmology,
4         z: np.ndarray,

```

```

5      *,
6      model: str = "unnamed",
7  ):
8      """Compare comoving distance from CCL and NumCosmo."""
9      cosmo = cosmology.cosmo
10     dist = cosmology.dist
11     a = 1.0 / (1.0 + z)
12
13     RH_Mpc = cosmo.RH_Mpc()
14
15     ccl_D = np.array(pyccl.comoving_radial_distance(ccl_cosmo, a))
16     nc_D = (
17         np.array(dist.comoving_array(cosmo, npa_to_seq(z)), dtype=np.float64) *
18         ↪ RH_Mpc
19     )
20
21     return CompareFunc1d(
22         x=z, y1=ccl_D, y2=nc_D, model=model, x_symbol="z", y_symbol="D_c",
23         ↪ y_unit="Mpc"
24     )

```

Os processos são repetidos para a comparação de fatores de crescimento e escala cosmológica, para a comparação de lentes fracas, do espectro de potência e então chegamos na correlação de dois-pontos.

Os gráficos e análises usadas neste trabalho derivam do módulo de correlação de dois-pontos do *kernel* de lenteamento-fraco de galáxias, que compara o kernel de lentes fracas e as funções auto-correlacionadas entre as bibliotecas CCL e NumCosmo. Essa parte é composta por três funções:

1. A função `prepare_dndz`, responsável por preparar a distribuição  $dn/dz$ , a distribuição de galáxias em função do *redshift*, para o traçador de lentes gravitacionais. Essa função usa uma distribuição gaussiana centrada em  $\mu$  com desvio padrão  $\sigma$  e retorna uma *spline* que representa a função  $dn/dz$ .
2. A função `compare_galaxy_weak_lensing_kernel` compara o *kernel* de lentes fracas entre CCL e NumCosmo para um valor específico de multipolos  $\ell$ . Em outras palavras, calcula e compara o  $W_\ell$  para lentes fracas.
3. A função `compare_galaxy_weak_lensing_auto`, por fima, compara a auto-correlação de lentes fracas entre CCL e NumCosmo para um conjunto de multipolos  $\ell$ , de forma muito semelhante à função anterior, calculando os espectros de potência angular  $C_\ell$  para lenteamento fraco de galáxias.

As funções da NumCosmo e da CCL tem alguns parâmetros comuns que são utilizados no cálculo do *kernel* de lenteamento fraco e nas comparações. Ambos dependem de um objeto de cosmologia pré-definido, no caso da CCL é o objeto `ccl-cosmo`, para a NumCosmo, o objeto `cosmology`. Outros parâmetros comuns são os multipolos (o nível de escala angular para lentes fraca), os parâmetros da função de distribuição  $dn/dz$ , isto é, a média  $\mu$  e o desvio padrão  $\sigma$ , e o objeto `z_len`, responsável pela resolução para o *redshift* (número de pontos da grade de  $dn/dz$ ).

```

1 def compare_galaxy_weak_lensing_kernel(
2     ccl_cosmo: pycc1.Cosmology,
3     cosmology: ncc.Cosmology,
4     ell: int,
5     *,
6     model: str = "unnamed",
7     n_samples: int | None = None,
8     mu: float = 0.5,
9     sigma: float = 0.1,
10    z_len: int = 1000,
11 ):
12     """Compare weak lensing kernel from CCL and NumCosmo."""
13     dndz = prepare_dndz(mu, sigma, z_len)
14     nc_wl = Nc.XcorLimberKernelWeakLensing.new(0.0, 2.0, dndz, 3.0, 7.0,
15     ↪ cosmology.dist)
16     nc_wl.prepare(cosmology.cosmo)
17     z_a = np.array(dndz.peek_xv().dup_array())
18     nz_a = np.array(dndz.peek_yv().dup_array())
19
20     if n_samples is not None:
21         ccl_wl = pycc1.WeakLensingTracer(
22             ccl_cosmo, dndz=(z_a, nz_a), n_samples=n_samples
23         )
24     else:
25         ccl_wl = pycc1.WeakLensingTracer(ccl_cosmo, dndz=(z_a, nz_a))
26
27     z_a, _, H_Mpc_a, ccl_Wchi_a = tp.compute_kernel(ccl_wl, cosmology, ell)
28
29     nc_Wchi_a = (
30         np.array(
31             [nc_wl.eval_full(cosmology.cosmo, z, cosmology.dist, int(ell)) for z in
32             ↪ z_a]
33         )
34     )

```

```

32     * H_Mpc_a
33 )
34
35 return CompareFunc1d(
36     x=z_a,
37     y1=ccl_Wchi_a,
38     y2=nc_Wchi_a,
39     model=model,
40     x_symbol="z",
41     y_symbol=r"{W_{\ell}={ " + str(ell) + " } }^{\mathrm{WL}}",
42     xscale="log",
43     yscale="log",
44 )

```

As funções retornam objetos `CompareFunc1d`, como era de se esperar, que organiza e compara os resultados entre CCL e NumCosmo, com gráficos gerados em escala logarítmica para  $\ell$  e  $z$  e suas respectivas quantidades. Essas funções servem para comparar os cálculos de lentes fracas, como o kernel e a auto-correlação, entre as bibliotecas CCL e NumCosmo, oferecendo visualizações das diferenças para uma melhor análise, como vimos no capítulo 5.

### B.3 Terceira Parte: Parâmetros Utilizados e Aplicação dos Valores Gerados à Função de Comparação

Seguimos nosso trabalho, agora para efetivamente compararmos as bibliotecas e validarmos os valores gerados e cálculos realizados pela NumCosmo. Como vimos, é necessário uma série de parâmetros para realização deste cálculo, assim como a importação das respectivas cosmologias de cada uma das bibliotecas.

Começamos esse processo inicializando um objeto de cosmologia CCL usando parâmetros globais pré-definidos para, então, gerar um objeto de cosmologia NumCosmo, inicializado com os mesmos parâmetros que o modelo da CCL, usando a função `create_nc_obj` da `numcosmo_py`.

No programa desenvolvido, parâmetros escalares são fixos ao longo de todo o modelo e são aplicados universalmente, enquanto *arrays* definem variações em energia escura e propriedades de neutrinos para múltiplos senários, ou seja, representam diferentes configurações de modelos, permitindo uma ampla possibilidade de análise. Em seguida temos a função `setup_models`, onde temos a viabilidade de habilitar cálculos de alta precisão em CCL, melhorando a concordância geral entre a CCL e NumCosmo ao custo do aumento do tempo de computação, (Collaboration, 2025b).

Os parâmetros podem ser vistos na tabela 5.1 e parte do código utilizado pode ser visto abaixo. O código completo está disponível no repositório do *GitHub* ou no site <https://numcosmo.readthedocs.io/en/latest/>.

```

1  from numcosmo.py.ccl.nc_ccl import create_nc_obj
2
3  PARAMETERS_SET = [
4      r"$\Lambda$CDM, flat",
5      r"$\Lambda$CDM, flat, $1\nu$",
6      r"$\Lambda$CDM, flat",
7      r"$\Lambda$CDM, spherical, $2\nu$",
8      r"$\Lambda$CDM, hyperbolic",
9  ]
10 COLORS = plt.rcParams["axes.prop_cycle"].by_key()["color"][:5]
11
12 def setup_models(
13     Omega_c: float = 0.25, # Cold dark matter density
14     Omega_b: float = 0.05, # Baryonic matter density
15     h: float = 0.7, # Dimensionless Hubble constant
16     [...]:
17
18 ):
19
20     """Setup cosmological models."""
21     Omega_v_vals = np.array([0.7, 0.7, 0.7, 0.65, 0.75]) # Dark energy density
22     [...]
23
24     # Neutrino masses (eV) for each model: [m1, m2, m3]
25     mnu = np.array(
26         [
27             [0.0, 0.0, 0.0],
28             [0.04, 0.0, 0.0],
29             [0.0, 0.0, 0.0],
30             [0.03, 0.02, 0.0],
31             [0.0, 0.0, 0.0],
32         ]
33
34     [...]:
35
36     parameters = [
37         r"$\Omega_c$", "Cold Dark Matter Density", Omega_c],

```

```

38     [...]
39     ["$m_\\nu$", "Neutrino Masses (eV)", [f"{m.tolist()}" for m in mnu]],
40 ]
41 models = []
42 if high_precision:
43     CCLParams.set_high_prec_params()
44
45 [...]
46
47     cosmology = create_nc_obj(ccl_cosmo, dist_z_max=dist_z_max)
48     models.append({"CCL": ccl_cosmo, "NC": cosmology})
49
50 return parameters, models

```

Finalmente, partimos para a aplicação da análise das funções de interesse e geramos as representações visuais dos cálculos realizados, os gráficos da análise. A comparação do *kernel* de lenteamento fraco de galáxias e do espectro de potência angular implementado na CCL e na NumCosmo nos devolveu os gráfico 5.3 e 5.4. O código implementado cria uma lista contendo as comparações para diferentes modelos cosmológicos onde cada função é aplicada à todos os modelos e armazenada em `gwl_auto_comparisons`. Em seguida, parte para criação dos gráficos de comparação, criando uma figura com dois *subplots* empilhados, como vimos nas figuras já mencionadas, por exemplo.

O código abaixo nos mostra como essa análise foi implementada e os gráficos foram gerados.

```

1 gwl_auto_comparisons: list[nc_cmp.CompareFunc1d] = [
2     [
3         nc_cmp.compare_galaxy_weak_lensing_kernel(
4             m["CCL"], m["NC"], ell_kernel_test, model=name
5         )
6         for m, name in zip(models, PARAMETERS_SET)
7     ],
8     [
9         nc_cmp.compare_galaxy_weak_lensing_auto(m["CCL"], m["NC"], ells,
10            ↪ model=name)
11         for m, name in zip(models, PARAMETERS_SET)
12     ]

```

Os resultados para todos os conjuntos foram resumidos na tabela 5.2 e chegamos

a conclusão que todos os cálculos de CCL concordam com os resultados do NumCosmo, mostrado no capítulo [5](#).