



Universidade de Brasília  
Instituto de Física

**Sistema de Interação Efetiva Quark-Antiquark Pesado  
via Mecânica Quântica Simplética**

Renato Rodrigues Luz

Brasília-DF

2025





Universidade de Brasília  
Instituto de Física

**Sistema de Interação Efetiva Quark-Antiquark Pesado  
via Mecânica Quântica Simplética**

Tese apresentada ao Instituto de Física da  
Universidade de Brasília, para à obtenção  
do título de Doutor em Física.

Renato Rodrigues Luz

Orientador: Prof. Dr. Tarcísio Marciano da Rocha Filho

Coorientador: Prof. Dr. Ademir Eugênio de Santana

Brasília-DF

2025



## License Permission

This thesis includes the following papers that have been reproduced with permission

- R. R. Luz, G. X. A. Petronilo, A. E. Santana, Caroline S. R. Costa, R. G. G. Amorim, and R. A. S. Paiva, “Quark–Antiquark Effective Potential in Symplectic Quantum Mechanics,” *Advances in High Energy Physics* **2022**, 10 (2022). [⟨https://doi.org/10.1155/2022/3409776⟩](https://doi.org/10.1155/2022/3409776), Copyright © 2022 Hindawi;
- R. R. Luz, M. Abu-Shady, G. X. A. Petronilo, A. E. Santana, and R. G. G. Amorim, “Fractional Effective Quark–Antiquark Interaction in Symplectic Quantum Mechanics,” *Advances in High Energy Physics* **2023**, 7 (2023). [⟨https://doi.org/10.1155/2023/8366154⟩](https://doi.org/10.1155/2023/8366154), Copyright © 2023 Hindawi;
- M. Abu-Shady, R. R. Luz, G. X. A. Petronilo, A. E. Santana, & R. G. G. Amorim, “On the fractional quark–antiquark confinement and symplectic quantum mechanics,” *International Journal of Modern Physics A*, **39** (02n03), 2450011 (2024). [⟨https://doi.org/10.1142/S0217751X24500118⟩](https://doi.org/10.1142/S0217751X24500118), Copyright © 2024 World Scientific;
- R. R. Luz, G. X. A. Petronilo, R. A. S. Paiva, A. E. Santana, T. M. Rocha Filho, & R. G. G. Amorim, “Cornell Interaction in the Two-body Pauli–Schrödinger-type Equation Framework: The Symplectic Quantum Mechanics Formalism,” (2025). [⟨https://doi.org/10.48550/arXiv.2507.20045⟩](https://doi.org/10.48550/arXiv.2507.20045), Copyright © 2025 arXiv. (submissão para **IJMPA**- International Journal of Modern Physics A)



# Publication List

## Journal Articles

- G.X.A. Petronilo, R.R. Luz, A.E. Santana, R.A.S. Paiva, & R.G.G. Amorim, “Symplectic Quantum Physics in Husimi representation”, 2025. (submissão para **BJP**-Brazilian Journal of Physics)
- R. P. M. Moreira, R. R. Luz, & L. R. Silva, “O termo CPT do Modelo Padrão Estendido” e-Boletim da Física **10**, 1 (2021).
- R. R. Luz, Gabriella V. Ambrósio, C. N. da Costa, R. P. M. Moreira, R. A. S. Paiva, & G. X. A. Petronilo, “Campos de Calibre e o Modelo Padrão de Partículas Elementares: uma revisão pedagógica” e-Boletim da Física **10**, 1 (2021).
- F.S. Costa, J.C.A. Soares, J. Vanterler Sousa, R.R. Luz, J.A.R. Santos, “LIE POINT SYMMETRIES AND CONSERVATION LAW TO FRACTIONAL  $\zeta(t)$ -KDV EQUATION” (2024). (<https://hal.science/hal-04838247>) (submissão para International Journal of Theoretical Physics)
- R.R. Luz, J.C.A. Soares, F.S. Costa, J.V.C. Sousa, “Lie point Symmetries and Conservation Law for Symplectic Schrödinger Equation,” (2025). (<https://hal.science/hal-05151716v1>)(submissão para Few-Body Systems)



# Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus, Senhor eterno, abrigo seguro. O desenvolvimento do presente trabalho escrito nas páginas seguintes foi fruto de intensa pesquisa, muito esforço e dedicação. Mas, a realização só foi possível mediante a imensa contribuição dos professores, Ademir Eugênio de Santana e Tarcísio Marciano da Rocha Filho pela excelente atenção e orientação. Uma vez que, estiveram presentes propondo os melhores conselhos e ensinamentos que será constantemente lembrados em minha carreira científica e nesta vida.

Agradeço aos meus amigos do grupo (produto estrela  $\star$ : representações simpléticas e representações de simetrias) pelas valiosas discussões e colaboração na concretização deste trabalho, Rendisley, Ronni, Eduardo, Roemir, Lucas e o Professor Ademir, que deram contribuições importantes, sempre motivando a todos com muito entusiasmo, alegria, tornando o ambiente de trabalho mais produtivo.

Agradeço a minha querida mãe Francisca Rodrigues e minha namorada Gabriella Ambrósio pelo apoio incondicional, que sempre estiveram presentes nos momentos mais difíceis, dando motivação para continuar nessa caminhada acadêmica, superando todos os percalços no caminho. Aqui presto grande admiração e amor. Aos meus irmãos Rafael Rodrigues Luz, Raycilene Luz que estão presentes em minha vida. Aos meus amigos que foram imprescindíveis para a minha jornada até aqui.

Aos professores de Física (UEMA) que contribuíram na minha formação, Edvan Moreira, Fernando Moucherek, Marcio Tavares, David L. Azevedo (UnB), Gil de Oliveira Neto (UFJF) e os colegas de pesquisa, Félix, Júnior Soares, deixo aqui minha profunda gratidão e sinceros agradecimentos a todos.

Aos estimados amigos da pós graduação do Instituto de Física da Universidade de Brasília. Sou grato a todos os professores que colaboraram na minha formação durante o

doutorado e os funcionários da secretaria da pós graduação do IF-UnB.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq pelo suporte financeiro.

“A entropia há de vencer, mas hei de continuar lutando.”

Ademir Eugênio de Santana.

“Podemos dizer que a mecânica quântica é uma deformação da mecânica clássica. A constante de Planck  $h$  é o parâmetro de deformação correspondente. Esta é para mim a formulação mais concisa do princípio da correspondência e explica o que se entende por quantização.”

Ludwig Faddeev



# Resumo

Este trabalho apresenta uma investigação aprofundada de um sistema bidimensional não-relativístico de interação forte, que modela um estado ligado de quark-antiquark pesado. O estudo é realizado no domínio da mecânica quântica simplética e das derivadas fracionárias generalizadas, com o sistema de partículas interagindo por meio do potencial fenomenológico de Cornell, que inclui tanto um termo do tipo-coulombiano quanto um termo linear de confinamento. A metodologia empregada envolveu o método de Nikiforov-Uvarov generalizado fracionário e o mapeamento de Levi-Civita (ou mapa de Bohlin) para resolver a equação de Schrödinger no referencial do espaço de fase. Em uma das abordagens, o sistema de interação efetiva é separado em duas partes, onde uma parte é tratada como um análogo ao oscilador harmônico (solução não perturbada) e a outra parte é analisada usando a teoria de perturbação até primeira ordem. A quantização do hamiltoniano é realizada com os operadores estrela, e as autofunções (perturbadas e não perturbadas) são associadas à função de Wigner através do produto estrela de Weyl e da teoria de representação do grupo de Galilei. A não-classicalidade dos estados do méson é investigada usando um indicador de não-classicalidade da função de Wigner, que permite quantificar o desvio do comportamento quântico em relação ao clássico. O estudo prossegue com uma análise detalhada do efeito dos parâmetros fracionários  $\alpha$  e  $\beta$  na solução do estado fundamental, que é analisado por meio da função de Wigner. Uma das contribuições fundamentais do modelo é a determinação dos espectros de massa de quarkônios pesados ( $c\bar{c}$ ,  $b\bar{b}$  e  $b\bar{c}$ ). Os resultados obtidos estão em excelente acordo com dados experimentais, melhorando estudos teóricos anteriores. Prosseguindo, o comportamento quântico do sistema charme-anticharme ( $c\bar{c}$ ) que se move sob o potencial de Cornell é investigado. Para isso, utilizamos as abordagens da mecânica quântica simplética e da função de Wigner, incluindo o efeito do spin. Inicialmente, derivamos a representação simplética da equação do tipo Pauli-Schrödinger. Dentro deste formalismo, analisamos três aspectos fundamentais: (i) o confinamento do sistema, (ii) o espectro de energia e o (iii) surgimento de não-classicalidade para os estados do quarkônio. Além disso, calculamos os espectros de massa do méson  $c\bar{c}$  e os resultados

obtidos estão em concordância com o dado experimental, aprimorando estudos teóricos anteriores.

**Palavras Chaves:** Interação Efetiva Quark-antiquark, Potencial fenomenológico de Cornell, Função de Wigner, Mecânica Quântica Simplética, Transformação de Bohlin, Derivadas fracionárias generalizadas.

# Abstract

This work presents an in-depth investigation of a two-dimensional non-relativistic strongly interacting system that models a bound state of a heavy quark-antiquark pair. The study is conducted within the framework of symplectic quantum mechanics and generalized fractional derivatives, with the interacting particles governed by the phenomenological Cornell potential, which incorporates both a Coulomb-like term and a linear confining term. The methodology employed involves the generalized fractional Nikiforov–Uvarov method and the Levi-Civita mapping (also known as the Bohlin transformation) to solve the Schrödinger equation in the phase-space representation. In one of the approaches, the effective interaction system is separated into two parts: one part is treated as an analogue of the harmonic oscillator (unperturbed solution), while the other is analyzed using first-order perturbation theory. Quantization of the Hamiltonian is carried out via star operators, and the corresponding (perturbed and unperturbed) eigenfunctions are associated with the Wigner function through the Weyl star product and the Galilean group representation theory. The non-classicality of meson states is investigated using a non-classicality indicator derived from the Wigner function, which allows for a quantification of the deviation from classical behavior. The study further includes a detailed analysis of the effects of the fractional parameters  $\alpha$  and  $\beta$  on the ground-state solution, which is explored through the Wigner function. One of the central contributions of the model is the determination of the mass spectra of heavy quarkonia ( $c\bar{c}$ ,  $b\bar{b}$  and  $b\bar{c}$ ). The obtained results show excellent agreement with experimental data, improving upon previous theoretical studies. Subsequently, the quantum behavior of the charm-anticharm system ( $c\bar{c}$ ) under the Cornell potential is investigated using the symplectic quantum mechanics framework and the Wigner function formalism, incorporating spin effects. Initially, the symplectic representation of the Pauli–Schrödinger-type equation is derived. Within this formalism, three fundamental aspects are examined: (i) the confinement of the system, (ii) the energy spectrum, and (iii) the emergence of non-classicality in the quarkonium states. Furthermore, the mass spectra of the  $c\bar{c}$  meson are computed, with results that are consistent with experimental

observations and provide improvements over previous theoretical models.

**Key words:** Effective Quark-antiquark interaction, Phenomenological Cornell potential, Wigner function, Quantum mechanics symplectic, Bohlin transformation, Generalized Fractional derivatives.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xv</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Função de Wigner e o Produto de Weyl</b>	<b>7</b>
2.1 A Matriz Densidade . . . . .	8
2.2 Função de Wigner e suas propriedades . . . . .	9
2.3 Operadores Equivalentes na Representação de Wigner . . . . .	19
2.4 O Produto de Weyl . . . . .	21
2.5 Evolução Temporal da Função de Wigner . . . . .	23
2.6 Propriedades do Produto de Weyl . . . . .	24
<b>3 Mecânica Quântica Simplética</b>	<b>29</b>
3.1 Espaço de Hilbert e a Estrutura Simplética . . . . .	29
3.2 Operadores de Bopp . . . . .	31
3.3 Operadores no Espaço de Hilbert sobre $\Gamma$ . . . . .	32
3.3.1 Operadores Unitários . . . . .	33
3.3.2 Operador Translação no Espaço de Hilbert Simplético $\mathcal{H}(\Gamma)$ . . . . .	33
3.3.3 Operador Posição no Espaço de Hilbert Simplético $\mathcal{H}(\Gamma)$ . . . . .	34
3.4 O Grupo de Galilei sobre $\mathcal{H}(\Gamma)$ . . . . .	35
3.5 Equação de Schrödinger no Espaço de Fase . . . . .	42
<b>4 Campo de Interação Forte</b>	<b>47</b>
4.1 Representação SU(3) do Quark . . . . .	47
4.2 Densidade de Lagrangiana de Campo da QCD . . . . .	49

<b>5</b>	<b>Potencial Efetivo de Quark-Antiquark em Mecânica Quântica Simplética</b>	<b>51</b>
5.1	Mecânica Quântica Simplética: esboço e notação . . . . .	52
5.2	Confinamento de Quark . . . . .	53
5.3	Potencial de Cornell e Equação de Schrödinger Simplética . . . . .	56
<b>6</b>	<b>Representação Fracionária da Interação Quark-Antiquark Efetiva na Estrutura da Mecânica Quântica Simplética</b>	<b>63</b>
6.1	Potencial de confinamento . . . . .	64
6.2	Análise dos Resultados . . . . .	65
<b>7</b>	<b>Sobre o Confinamento de Quark-Antiquark Fracionário e Mecânica Quântica Simplética</b>	<b>71</b>
7.1	O Método Nikiforov-Uvarov Generalizado Fracionário . . . . .	72
7.2	Sistema Quark-Antiquark Fracionário . . . . .	74
7.3	Análise dos Resultados . . . . .	80
<b>8</b>	<b>Interação de Cornell no Escopo da Equação do Tipo Pauli-Schrödinger para Dois Corpos: O Formalismo da Mecânica Quântica Simplética</b>	<b>85</b>
8.1	Estados Ligados de Quark-Antiquark . . . . .	86
8.1.1	Solução de ordem zero . . . . .	88
8.1.2	Correção de primeira ordem . . . . .	90
8.2	Funções de Wigner dos estados estacionários . . . . .	92
8.2.1	Espectro de Massa do Méson $c\bar{c}$ . . . . .	95
<b>9</b>	<b>Considerações Finais e Perspectivas Futuras</b>	<b>99</b>
<b>A</b>	<b>Sistema de Interação Efetiva Quark-Antiquark</b>	<b>103</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>107</b>

# Lista de Figuras

1.1	potencial de Cornell. . . . .	3
2.1	Gráfico da função de Wigner versus $q$ e $p$ referente ao estado fundamental ( $n = 0$ ) do oscilador harmônico. . . . .	11
2.2	Gráfico da função de Wigner versus $q$ e $p$ referente ao primeiro estado excitado ( $n = 1$ ) do oscilador harmônico. . . . .	11
5.1	Função de Wigner para o estado fundamental do méson $c\bar{c}$ . . . . .	55
5.2	As curvas (a)-(d) representam gráficos cortados da Figura 5.1 para o estado fundamental do méson $c\bar{c}$ com variação da energia cinética. . . . .	55
5.3	Função de Wigner para os níveis de energia $n = 0$ figura 5.3(a) e $n = 1$ figura 5.3(b) para o méson $c\bar{c}$ . . . . .	61
6.1	A linha pontilhada (.....) representa o nível fundamental de energia, $E_0$ , e a linha tracejada (- - - -) representa o primeiro nível de energia excitado, $E_1$ ; ambos em função do parâmetro $\beta$ , com $\zeta = 1$ . As massas dos quarks são tomadas como $m = 0,336 \text{ MeV}$ e $\lambda = 0,22 \text{ MeV}^2$ [21, 23]. . . . .	66
6.2	A diferença dos níveis de energia $\Delta E = E_1 - E_0$ em função do parâmetro $\beta$ , com $\zeta = 1$ . . . . .	67
6.3	Comparação das funções fracionárias de Wigner e não fracionárias no corte de $\frac{p^2}{2m} = 0$ na equação (6.15). Aumentando o valor de $\frac{p^2}{2m}$ no corte da função Wigner mostrará um deslocamento para a esquerda, dando assim um valor máximo de $p$ para a existência da função. A função Wigner original é fornecida quando $\alpha = \beta = 1$ . . . . .	67
6.4	É apresentada apenas uma pequena parte da figura 6.3. Observa-se que a distância máxima de existência diminui com a diminuição de $\beta$ . . . . .	68

7.1	A densidade de probabilidade obtida a partir da função de Wigner fracionária com ordem fracionária $\alpha = 0.155$ (linha sólida preta) (méson $c\bar{c}$ ), $\alpha = 0.155$ (linha sólida azul) (méson $b\bar{b}$ ), $\alpha = 0.155$ ( linha sólida vermelha) e $\beta = 0.5$ para o estado 1S. . . . .	80
8.1	Função de Wigner com correção de primeira ordem para o estado ( $n_1 = 0, n_2 = 0$ ) (estado fundamental) do méson $c\bar{c}$ , grafada em função da distância interquark $q$ na região $0 \leq q \lesssim 4 \text{ GeV}^{-1}$ , com momento $p = 0 \text{ GeV}$ e campo magnético $B = 0 \text{ GeV}^2$ . . . . .	94
8.2	Função de Wigner com correção de primeira ordem para o mesmo estado ( $n_1 = 0, n_2 = 0$ ) do méson $c\bar{c}$ , grafada em função da distância interquark $q$ na região $0 \leq q \lesssim 4 \text{ GeV}^{-1}$ , para os momentos $p = 2.3 \text{ GeV}$ (vermelho), $p = 2.5 \text{ GeV}$ (verde), e $p = 2.9 \text{ GeV}$ (azul), com $B = 0 \text{ GeV}^2$ . . . . .	94
8.3	Comportamento gráfico da função de Wigner com correção de primeira ordem para o estado ( $n_1 = 0, n_2 = 0$ ) (estado fundamental) do méson $c\bar{c}$ para o valor do campo magnético $B = 0.38 \text{ GeV}^2$ e momento fixo ( $p = 0 \text{ GeV}$ ). . . . .	95

# Lista de Tabelas

5.1	Os valores experimentais para confinamento linear $\lambda$ , massa reduzida $m$ e distância relativa máxima $q$ para o méson $c\bar{c}$ <sup>[4, 118]</sup> . . . . .	56
5.2	Parâmetro de negatividade $\eta(\psi)$ para os níveis $n_1, n_2 = 0, 1$ . . . . .	61
6.1	Massas Experimentais e Teóricas (em $MeV$ ) dos mésons charmônio. . . . .	69
7.1	Nível fundamental de energia e espectro de massa dos mésons ( $c\bar{c}$ , $b\bar{b}$ , $b\bar{c}$ ) em ( $GeV$ ) com ( $\alpha = 0.155$ e $\beta = 0.5$ ), ( $\lambda = 0.3093 GeV^2$ , $\sigma = 0.1130 GeV^3$ , $m_{c\bar{c}} = 0.73 GeV$ ), ( $m_{b\bar{b}} = 2.34 GeV$ , $\lambda = 0.2370 GeV^2$ , $\sigma = 0.1185 GeV^3$ ), ( $m_{b\bar{c}} = 1.11 GeV$ , $\lambda = 0.1721 GeV^2$ , $\sigma = 0.0488 GeV^3$ ) <sup>[17, 6, 125]</sup> . . . . .	83
7.2	Espectros de massa do estado 1S (em $GeV$ ) para o sistema $c\bar{c}$ em diferentes valores dos parâmetros fracionários generalizados $\alpha$ e $\beta$ . Os parâmetros ( $\lambda$ , $\sigma$ , $m_{c\bar{c}}$ ) são os mesmos utilizados na Tabela 7.1. . . . .	83
8.1	Nível fundamental de energia e espectro de massa do méson $c\bar{c}$ (em $GeV$ ), calculado usando o modelo atual e comparado com o dado experimental e diversos trabalhos teóricos. Os parâmetros utilizados foram: $\alpha = 0.472$ , $\beta = 0.191 GeV^2$ , $m_c = 1.3205 GeV$ , $m = 0.6602 GeV$ , $B = 0.15 GeV^2$ , $\omega = 0.959 GeV$ , $\Delta^{(1)} = 20$ <sup>[130]</sup> . . . . .	96



# Capítulo 1

## Introdução

O advento dos estudos do sistema charmônio (um estado ligado do quark  $c$  e sua antipartícula  $\bar{c}$ ), e o avanço na Cromodinâmica Quântica (em inglês, sigla QCD), impeliram na forma de se compreender a física de hádrons [1]. A semelhança com o positrônio era evidente, logo, o termo quarkônio foi proposto [2, 3]. Desde então, a busca em explicar o fenômeno do confinamento de quarks e a dinâmica da QCD foi fundamentada usando várias abordagens teóricas, a saber: QCD na rede, teoria de campo efetiva e modelos de potenciais [4, 10, 11, 12, 13, 14].

Quando se trata de testar as previsões da QCD, o méson  $c\bar{c}$  mostrou-se ser um candidato adequado. Neste cenário da QCD, o cálculo das propriedades do méson são completamente não-perturbativos. Dessa forma, o cálculo direto com técnicas de QCD na rede tornou-se o método mais plausível a ser empregado. Os quarks leves em um méson possuem massa do estado ligado muito maior que a massa do quark, movendo-se a velocidades relativísticas. Por outro lado, a velocidade dos quarks pesados, denominados de bottom e charme em seus respectivos quarkônios é reduzida o bastante de modo que os efeitos relativísticos sejam restringidos. Além do mais, a velocidade  $v$  é estimada em torno de  $0.3c$  para o charmônio [5, 6]. Então, uma expansão em série de potências  $v^2/c^2$  é utilizada para tornar o cálculo aproximativo. Tal método é denominado na literatura de QCD não relativística (em inglês, sigla NRQCD) [5, 7, 8, 9].

As massas dos estados quarkônio pesados podem ser determinadas usando modelos de potenciais efetivos. Um dos modelos de potenciais mais proeminentes é o potencial de Cornell (ou funil) [15, 16]. Este modelo foi proposto primeiramente pelo grupo de Cornell e proporcionou resultados satisfatórios para o cálculo da espectroscopia de massas do charmônio e do bottomônio [21, 22]. Especificamente, o sistema é descrito pela combinação do potencial tipo Coulomb somado com um potencial linear. O estudo deste potencial

leva em conta duas características essenciais no campo da Cromodinâmica Quântica: a liberdade assintótica e o confinamento [2, 1, 4, 8].

Dentro da QCD não relativística o potencial de Cornell é de particular interesse para realizar a detecção caracterizando as peculiaridades eletromagnéticas de mésons e do espectro de massa para estados acoplados [17, 18]. Outro interesse, é que o potencial de Cornell tem sido utilizado para investigar a transição de fase de confinamento e deconfinamento da matéria [21, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30]. Em outros campos da física, o potencial de Cornell tem apresentado uma relevância considerável, tais como, física de plasma, física de partículas, física nuclear e eletrodinâmica não linear [18, 19, 20].

O potencial de Cornell é representado como,

$$V(q) = \frac{b}{q} + aq, \quad (1.1)$$

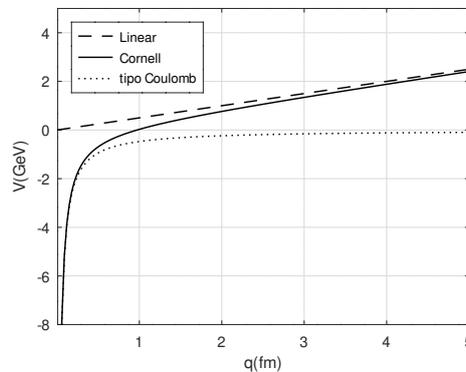
onde o primeiro termo representa a interação em pequenas distâncias entre um quark e seu antiquark mediante a troca de um glúon, o segundo termo de interação linear leva em consideração o fenômeno de confinamento e é dominante para uma distância grande. É conhecido que o potencial  $V(q)$  definido na equação (1.1) reproduz dois aspectos típicos da interação forte incorporados no primeiro e segundo termos.

O termo de interação tipo Coulomb exibe um caráter chamado de liberdade assintótica. Este processo demonstra que a constante de acoplamento da interação forte é uma função do momento transferido [31]. No processo de colisão entre um quark e sua antipartícula, o momento transferido aumenta em distâncias muito próximas. Quando isso acontece, a constante de acoplamento é suficientemente mínima para que os quarks e glúons possam ser considerados livres, de tal forma que a teoria de perturbação pode ser usada para explicar suas interações. Por outro lado, à medida que a constante de acoplamento da interação forte cresce, o momento transferido diminui em distâncias relativamente grandes. No outro extremo, para separações da ordem de  $10^{-15} m$  ou 1 *fentômetro* (*fm*), surge um mecanismo denominado de confinamento o qual mantém quarks e antiquarks definitivamente contidos dentro dos hádrons [10, 14]. Através do modelo tubo de fluxo, o confinamento é descrito de forma qualitativa. Quando a separação entre os quarks e antiquarks aumenta, o campo de glúon entre as duas cargas de cores cria uma estrutura semelhante a uma corda (designado tubo de fluxo) [26]. Consequentemente, a densidade de energia no tubo entre os quarks que mantém o campo de glúons se torna constante em grandes distâncias [32]. Então, a densidade de energia armazenada no campo é proporcional ao afastamento dos quarks, fornecendo

o termo de interação linear na equação (1.1). Assim, em vez de um quark livre, a energia potencial pode produzir novos pares de quarks em formas incolores em um espaçamento significativamente maior. Nos últimos anos, os esforços têm se voltado para compreender o confinamento através do método de QCD na rede [10, 13, 26].

Na literatura, a equação de Schrödinger com o potencial de Cornell, como modelo de quark, tem sido amplamente empregada para explorar sistemas quarkônio no espaço de configuração. Este é o caso de estudos em espectroscopia de massa de quarks pesados e das propriedades do estado ligados de mésons  $b\bar{b}$  e  $c\bar{c}$  [33, 34, 35, 36, 40]. Em termos teóricos, Vega et al. [37], analisaram as propriedades dos hádrons pesados usando a equação de Schrödinger, o potencial de Cornell e a formulação variacional, no âmbito da mecânica quântica supersimétrica (em inglês, sigla SUSYQM) [5, 38, 39]. Métodos matemáticos computacionais, como o método iterativo exato analítico (em inglês, sigla AEIM), foi aplicado por Khoka et al. [39] para solucionar a equação de Schrödinger com um potencial de Cornell estendido no espaço N-dimensional. Com isso, o espectro de massa e a energia dos sistemas de mésons pesados foram obtidos.

Ainda neste cenário, Bruni et al. [27], utilizando outra abordagem, chamada de espaço anti-de Sitter, com base na ação de Nambu-Goto, estimaram a energia associada a uma dada separação entre um par de quark-antiquark. Como resultado, o aspecto da energia assume a forma de um potencial Cornell. Também, Abu-Shady et al. [41], exploraram o potencial Cornell e a parte radial da equação de Schrödinger em altas dimensões para um sistema quarkônio. Este sistema foi examinado em um tratamento analítico usando o método Nikiforov-Uvarov [8, 41, 42]. Além disso, recentemente Petronilo et al. [29], investigaram o modelo efetivo quark-antiquark na estrutura do espaço de fase usando o formalismo de Wigner e a dinâmica de campos térmicos (TFD). Nesse modelo, foi calculado o efeito Casimir no ponto  $q_0$  do potencial de Cornell, tal que  $V(q_0) = 0$ , conforme a figura 1.1.



**Figura 1.1:** *potencial de Cornell.*

A função de Wigner (ou função densidade de quase-probabilidade) foi introduzida em 1932 [43] para a descrição da mecânica quântica no espaço de fase [44, 45, 46, 47, 48, 49]. Este teve como motivação estudar as correções quânticas na mecânica estatística clássica [49], relacionando a função de onda que aparece na equação de Schrödinger a uma quase distribuição de probabilidade no espaço de fase. O termo “quase densidade” está associado com a presença de valores negativos para a função de Wigner, que em certo sentido, devido ao princípio da incerteza de Heisenberg, caracteriza sua natureza quântica [44, 51]. O conhecimento da função de Wigner permite encontrar os valores médios das características de um sistema quântico ao longo do espaço de fase. Esse formalismo nos permite considerar sistemas quânticos em termos da física clássica [52, 53]. Dessa maneira, cada operador  $A$  definido no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  é associado com uma função chamada de  $a_W(q, p)$  no espaço de fase  $\Gamma$  [49, 54, 55]. Então, existe uma aplicação dada por  $\Omega_W : A \rightarrow a_W(q, p)$ , tal que a álgebra associativa dos operadores definidos em  $\mathcal{H}$ , leva a uma álgebra associativa mas não comutativa em  $\Gamma$ , dada por  $\Omega_W : AB \rightarrow a_W \star b_W$ , onde o produto de Weyl-Moyal ou produto estrela  $\star$  é definido por [49, 56, 57, 58]

$$a_W \star b_W = a_W(q, p) e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}} b_W(q, p), \quad (1.2)$$

em que  $\Lambda = \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q - \overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p$ . Neste trabalho é considerado  $\hbar = c = 1$  as unidades naturais.

Note que a equação (1.2), pode ser vista como um operador  $\widehat{A} = (a_W \star)$  atuando em funções  $b_W$ , tal que  $\widehat{A}(b_W) = a_W \star b_W$  [56, 63]. O produto de Weyl-Moyal é importante para estudos de representações unitárias irredutíveis de grupos cinemáticos considerando operadores do tipo  $(a_W \star)$  [49, 56, 57]. Dessa forma, existe estratégias distintas analisadas no que diz respeito a natureza não comutativa em  $\mathcal{H}$  que é associada a estrutura não comutativa em  $\Gamma$  [49, 56, 57]. Tanto o formalismo de estrutura simplética bem como o produto de Weyl-Moyal têm sido estudados nas representações unitárias do espaço de fase, permitindo a representação simplética da equação de Schrödinger [49, 56, 57, 131]. Esta perspectiva de estrutura simplética oferece um mecanismo apropriado para deduzir a função de Wigner operando de modo concreto a invariância de calibre e efeitos de superposição [56, 57, 61, 63]. Nesse panorama, essa representação simplética tem sido aplicadas em teorias cinéticas [48, 61, 63].

Nesta perspectiva, Amorim *et al.* [54] estenderam para o caso relativístico utilizando operadores do tipo  $(a_W \star)$  e utilizando representações unitárias e irredutíveis. Com isso, levaram à equação de Klein-Gordon e a equação de Dirac no espaço de fase [64, 65, 66]. No entanto, levando em consideração a riqueza física da representação do espaço de fase, muitos aspectos ainda precisam ser explorados, como à estrutura fracionária da equação

de Schrödinger simplética que descreve um sistema quark-antiquark pesado.

O uso do cálculo fracionário tem atraído a atenção em diversas campos da física e engenharias [67, 68, 69, 70, 71, 72, 73]. Para sistemas quarkônios pesados, métodos matemáticos e computacionais como a formulação Nikiforov-Uvarov e a interação analítica exata foram explorados para fornecer soluções analíticas da equação de Schrödinger radial N-dimensional na estrutura do espaço fracionário [68, 72]. Uma categoria de potenciais, incluindo o potencial oscilador, o potencial de Woods-Saxon e o potencial de Hulthén, também foram estudadas analiticamente com a equação de Schrödinger radial fracionária pelo método Nikiforov-Uvarov [72, 74]. A fim de investigar a energia de ligação e a dissociação de temperatura, a formulação fracionária conformável foi estendida para um contexto de temperatura finita [72]. Recentemente, Abu-Shady e Kaabar [73, 76, 77] sugeriram uma nova definição para derivada fracionária chamada de derivada fracionária generalizada que coincide com a derivada fracionária clássica que correspondem uma ferramenta simples para equações diferenciais fracionárias [72, 75].

No presente trabalho foi explorado um sistema efetivo de interação forte bidimensional que representa um quark-antiquark pesado de estado ligado, onde consideramos o modelo do potencial fenomenológico de Cornell utilizando a representação da mecânica quântica simplética bem como o formalismo das derivadas fracionárias generalizadas (ou derivadas fracionárias Abu-Shady-Kaabar [73]).

Analisamos o comportamento da função de Wigner dada em termos da função de Airy, a qual descreve a interação forte de quark-antiquark pesado não relativístico. Em particular, estudamos o estado fundamental do méson charm-anticharm no formalismo da mecânica quântica simplética. Para esse propósito, na primeira parte, tratamos a natureza confinada do sistema considerando somente o termo de interação linear que é o modelo mais simples do potencial de Cornell. Em seguida, é resolvida a equação de Schrödinger simplética a fim de obter a solução da função de onda que representa o estado ligado do quark charm com seu antiquark anticharm e os seus correspondentes autovalores de energia. Para isso, utilizamos o método da transformação de Bohlin e a teoria de perturbação em primeira ordem para o potencial de Cornell. De posse da função de onda, obtemos a função de Wigner, a qual representa o campo que descreve o comportamento do méson  $c\bar{c}$  nessa representação da mecânica quântica simplética. Conseqüentemente, estudamos a não-classicalidade dos estados quântico do méson enfatizando o estado fundamental e o primeiro estado excitado calculando o parâmetro de negatividade da função de Wigner, que por sua vez, apresentou comportamento não clássico. O estudo da função de Wigner é

fundamental para entender mais acerca da natureza caótica do sistema sob investigação.

Em seguida, exploramos a aplicabilidade da abordagem das derivadas fracionárias generalizadas ao estudo da dinâmica de quarks, especificamente, o méson charm-anticharm via representação da mecânica quântica simplética. Posteriormente, o comportamento da função de Wigner para o estado fundamental do méson  $c\bar{c}$  é analisado sob a perspectiva das derivadas fracionárias generalizadas. Para tanto, a equação de Schrödinger simplética é reescrita na forma fracionária com o termo de interação linear do potencial de Cornell para o sistema considerado. Além dos aspectos físicos, a análise fornece um procedimento mais simples para estudar este tipo de sistema.

O estudo prossegue usando a prescrição das derivadas fracionárias generalizadas embutida na mecânica quântica simplética. Neste cenário, uma análise detalhada do efeito dos parâmetros fracionários  $\alpha$  e  $\beta$  na solução do estado fundamental é analisado por meio da função de Wigner. Uma das contribuições fundamentais do modelo é a determinação dos espectros de massa de quarkônios pesados ( $c\bar{c}$ ,  $b\bar{b}$  e  $b\bar{c}$ ). Os resultados obtidos estão em excelente acordo com dados experimentais, melhorando estudos teóricos anteriores.

Em um estudo complementar, o comportamento quântico do sistema charme-anticharme ( $c\bar{c}$ ) que se move sob o potencial de Cornell é investigado. Para isso, implementamos as abordagens da mecânica quântica simplética e da função de Wigner, incorporando o efeito do spin. Inicialmente, derivamos a representação simplética da equação do tipo Pauli-Schrödinger. Neste cenário, analisamos três aspectos fundamentais: (i) o confinamento do sistema, (ii) o espectro de energia e o (iii) surgimento de não-classicalidade para os estados do quarkônio. Além disso, calculamos os espectros de massa do méson  $c\bar{c}$  e os resultados obtidos estão em concordância com os dados experimentais, aprimorando estudos teóricos anteriores.

Nesta perspectiva, a referida tese está organizada da seguinte maneira. No capítulo 2 é realizado uma breve revisão do formalismo de Wigner, bem como as propriedades do produto estrela de Weyl, no qual é exposto uma aplicação ao oscilador. O capítulo 3, é apresentado uma revisão da Mecânica Quântica Simplética com base na representação da álgebra de Lie do grupo de Galilei estendida. O capítulo 4, enfatiza alguns aspectos que estão envolvidos do campo de interação forte. Os capítulos 5, 6, 7, 8, discutimos os novos resultados deste trabalho. Por fim, o capítulo 9 expomos a conclusão.

## Capítulo 2

# Função de Wigner e o Produto de Weyl

Neste capítulo, realizaremos uma breve revisão acerca do formalismo de Wigner e o produto de Weyl-Moyal (produto estrela  $\star$ ). Com isso, o formalismo da Mecânica Quântica, que inclui a regra de quantização de Weyl e a função de Wigner, serão analisados no contexto do espaço de fase [56, 57].

A função quase-distribuição de Wigner foi apresentada por Wigner em 1932 [80]. Este tinha como propósito corrigir a mecânica estatística clássica através de correções quânticas, além de buscar resolver o problema da superfluidez do hélio [43, 56, 50]. A função de Wigner tem se desenvolvido desde então, revelando ser não somente uma ferramenta poderosa do ponto de vista matemático [58, 57, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 88, 63, 87], mas possuindo aplicações em diversos campos da Física tais como ótica quântica, física de partículas e nuclear e a física da matéria condensada [58, 57, 81, 82, 83].

## 2.1 A Matriz Densidade

Na mecânica quântica representa-se o estado macroscópico de um sistema através do operador densidade

$$\rho = \sum_i \omega_i |\psi_i(t)\rangle\langle\psi_i(t)|,$$

onde  $\{\psi_i\}$  é o ensemble estatístico e  $\omega_i = \frac{N_i}{N}$  é o peso estatístico. A matriz densidade abrange toda a informação física que podemos obter sobre o ensemble em estudo [83, 84]. Tomando o estado puro, obtém-se

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|. \quad (2.1)$$

A média de um operador  $A$  sobre os ensembles enunciada pela mecânica quântica estatística é escrita como

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle = \text{Tr}(\rho A) = \text{Tr}(A \rho). \quad (2.2)$$

onde  $\rho$  apresenta as propriedades:

- $\rho = \rho^\dagger$ ;
- $\text{Tr}\rho = 1$ ;

A equação de evolução temporal para  $\rho$  é obtida a partir da equação de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle,$$

onde  $H(t)$  é a energia total. Tomando a derivada temporal de  $\rho$  na Eq. (2.1), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|) = \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle \right) \langle\psi(t)| + |\psi(t)\rangle \left( \frac{\partial}{\partial t} \langle\psi(t)| \right) \right], \\ &= \frac{1}{i\hbar} H(t) |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| + \frac{1}{-i\hbar} |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| H(t). \end{aligned}$$

Ou seja, se obtém uma equação que é governada pela evolução temporal de  $\rho$ , denominada equação de Liouville-von Neumann, dada por

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H(t), \rho(t)]. \quad (2.3)$$

Então, observamos que será viável através da matriz densidade construir mecânica quântica no espaço de fase. Esta representação é denominada de método da função de Wigner [89, 90, 57, 91, 45, 44].

## 2.2 Função de Wigner e suas propriedades

Existem várias formas de representação matricial concedida para o operador estatístico  $\rho$ , podendo ser dada na representação de posição por  $\langle q|\rho|q'\rangle$  e na representação de momentum por  $\langle p|\rho|p'\rangle$ , sendo estas basicamente as mais usuais [90, 58, 57, 81, 82]. Nesta perspectiva, se define a função de Wigner como uma transformada de Fourier dos elementos da matriz densidade [89, 44], isto é,

$$f_w(q, p) = \Omega(\rho) = (2\pi\hbar)^{-1} \int dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \left\langle q - \frac{z}{2} \left| \rho \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle. \quad (2.4)$$

ou, de forma semelhante

$$f_w(q, p) = \Omega(\rho) = (2\pi\hbar)^{-1} \int dk \exp\left(\frac{-iqk}{\hbar}\right) \left\langle p - \frac{k}{2} \left| \rho \right| p + \frac{k}{2} \right\rangle. \quad (2.5)$$

Ou seja, temos o mapeamento linear  $\Omega : \rho \rightarrow f_w(q, p)$ . Assim, para estado puro  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ , a função de Wigner fica na forma

$$f_w(q, p) = (2\pi\hbar)^{-1} \int dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \psi^\dagger\left(q + \frac{z}{2}\right) \psi\left(q - \frac{z}{2}\right). \quad (2.6)$$

Como exemplo, vamos obter a função de Wigner para o oscilador harmônico. Para calcular a função de Wigner de um sistema, devemos ter a solução da equação de Schrödinger do sistema correspondente [88]. A equação de Schrödinger para o oscilador harmônico unidimensional na representação da posição é escrita como

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{m\omega^2}{2} q^2\right) \psi(q) = E\psi(q).$$

A solução desta equação acima é dada por [88]

$$\psi_n(q) = \langle q|n\rangle = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}2^n n!}\right)^{1/2} H_n(\alpha q) e^{-\frac{\alpha^2 q^2}{2}},$$

onde  $\alpha = \sqrt{m\omega/\hbar}$  e  $H_n(\alpha q)$  são os polinômios de Hermite. Desse modo, a função de Wigner

do oscilador harmônico pode ser calculada a partir da integral

$$f_w(q, p) = (2\pi\hbar)^{-1} \left( \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}2^n n!} \right) e^{-\alpha^2 q^2} \int dy e^{ipy/\hbar - \alpha^2 y^2/4} H_n[\alpha(q - y/2)] H_n[\alpha(q + y/2)],$$

Utilizando o método de completar quadrado na exponencial dentro da integral, temos

$$\begin{aligned} f_w(q, p) &= (2\pi\hbar)^{-1} \left( \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}2^n n!} \right) e^{-\alpha^2 q^2 - \frac{p^2}{4\alpha^2 \hbar^2}} \times \\ &\times \int dy e^{-\left(-\frac{ip}{2\hbar\alpha} + \alpha y/2\right)^2} H_n[\alpha(q - y/2)] H_n[\alpha(q + y/2)], \end{aligned} \quad (2.7)$$

e realizando uma mudança de variáveis para  $z = -\frac{ip}{2\hbar\alpha} + \alpha y/2$ , obtemos

$$f_w(q, p) = (-1)^n \frac{2}{\alpha} (2\pi\hbar)^{-1} \left( \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}2^n n!} \right) e^{-\alpha^2 q^2 - \frac{p^2}{4\alpha^2 \hbar^2}} \times \quad (2.8)$$

$$\times \int dz e^{-z^2} H_n[\alpha(z + \frac{ip}{2\hbar\alpha} + q)] H_n[\alpha(q + \frac{ip}{2\hbar\alpha} - q)]. \quad (2.9)$$

Fazendo uso da relação

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} H_m(z + a) H_n(z + b) = \sqrt{\pi} 2^n m! b^{n-m} L_m^{n-m}(-2ab),$$

temos

$$f_w(q, p) = 2(-1)^n (2\pi\hbar)^{-1} e^{-\alpha^2 q^2 - \frac{p^2}{4\alpha^2 \hbar^2}} L_n \left( 2\alpha^2 q^2 + \frac{p^2}{2\hbar^2 \alpha^2} \right). \quad (2.10)$$

Onde as soluções para  $n = 0$  e  $n = 1$  são dadas por

$$f_w^0(q, p) = \frac{1}{\pi} e^{-(q^2 + p^2)}, \quad (2.11)$$

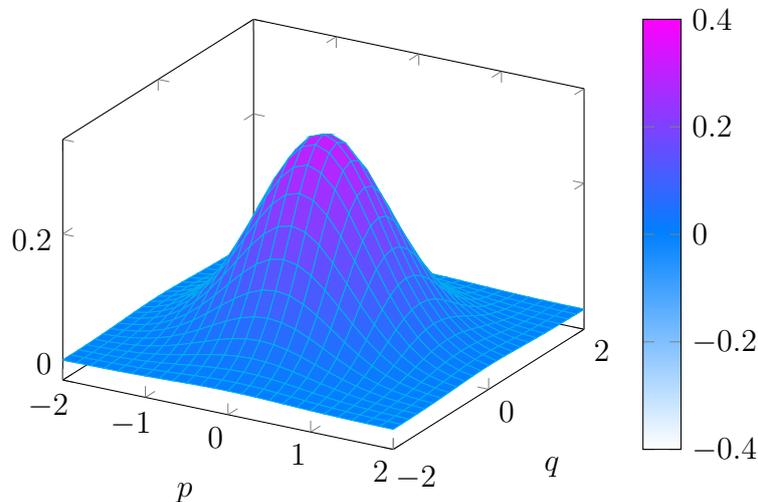
e

$$f_w^1(q, p) = \frac{1}{\pi} e^{-(q^2 + p^2)} (2p^2 + 2q^2 - 1). \quad (2.12)$$

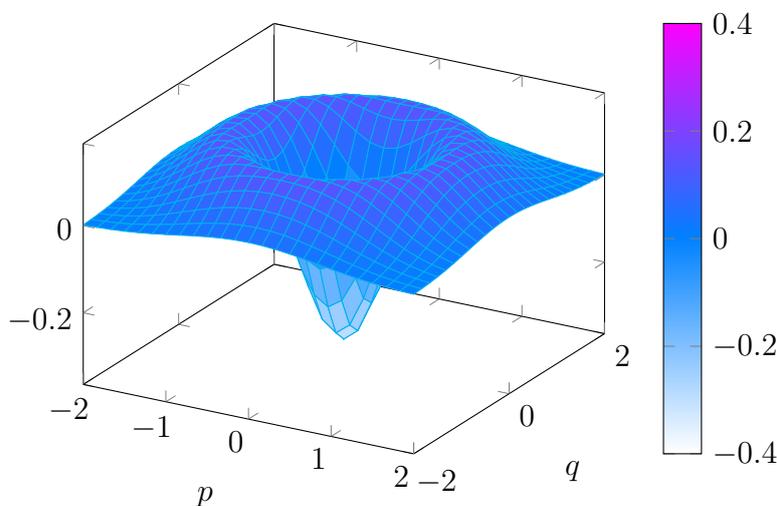
Os gráficos (2.1) e (2.2), mostra o comportamento no espaço de fase da função de Wigner versus as coordenadas  $q$  e  $p$  para o estado fundamental e o primeiro estado excitado de acordo com a Eq. (2.11) e (2.12).

Conseqüentemente, observa-se que a função de Wigner conforme ilustra os gráficos,

apresenta valores negativos no espaço de fase. Portanto, este caráter está relacionado com a caoticidade do sistema [55, 66, 88].



**Figura 2.1:** Gráfico da função de Wigner versus  $q$  e  $p$  referente ao estado fundamental ( $n = 0$ ) do oscilador harmônico.



**Figura 2.2:** Gráfico da função de Wigner versus  $q$  e  $p$  referente ao primeiro estado excitado ( $n = 1$ ) do oscilador harmônico.

A função de Wigner é real, porém, pode ser negativa. Por tal razão, não pode ser considerada como uma distribuição de probabilidade [58, 57]. Tomando o produto das funções

de Wigner  $f_\alpha$  e  $f_\beta$  correlacionadas aos estados  $|\psi\rangle$  e  $|\phi\rangle$ , tem-se

$$|\langle\psi|\phi\rangle|^2 = (2\pi\hbar)^{-1} \int f_\psi(q, p; t) f_\phi(q, p; t) dq dp, \quad (2.13)$$

onde o lado esquerdo da equação acima pode assumir valores positivos ou nulo se, e somente se, os kets satisfazem a relação de ortogonalidade. Admitindo que seja nulo, isto resulta numa integral de  $f_\psi^\dagger(q, p; t) f_\phi(q, p; t)$  nula [58, 57, 81, 82]. Contudo, observa-se que  $f_\psi(q, p; t)$  e  $f_\phi(q, p; t)$  não são nulas. Isso implica em valores negativos. Em vista disso, a função de Wigner é uma função real normalizada, mas não é positiva definida [58, 57, 81]. A seguir analisamos algumas propriedades da função de Wigner com base nos trabalhos [58, 57, 81].

A função de Wigner é delimitada no certo intervalo.

### Demonstração:

Considere um estado puro, disposto pela Eq. (2.4), isto é

$$f_w(q, p) = \Omega(\rho) = (2\pi\hbar)^{-1} \int dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \left\langle q - \frac{z}{2} \left| \rho \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle.$$

Definimos as funções de onda normalizadas na forma

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{ipz}{\hbar}} \psi^\dagger\left(q + \frac{z}{2}\right), \\ \varphi_2(z) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(q - \frac{z}{2}\right). \end{aligned}$$

Neste caso, a função de Wigner é representada como o produto escalar

$$f_w(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int dz \varphi_1^\dagger(z) \varphi_2(z) = \frac{1}{\pi\hbar} \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle,$$

e deste modo, temos

$$|f_w(q, p)| = \frac{1}{\pi\hbar} |\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle|.$$

Fazendo uso da desigualdade de Cauchy-Schwartz

$$|\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle|^2 \leq \langle \varphi_1 | \varphi_1 \rangle \langle \varphi_2 | \varphi_2 \rangle,$$

e sabendo que as funções  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são normalizadas.

$$|\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle|^2 \leq 1.$$

Temos que,

$$|f_w(q, p)| \leq \frac{1}{\pi\hbar}. \quad (2.14)$$

Assim a desigualdade  $|f_w(q, p)| \leq \frac{1}{\pi\hbar}$  implica que a função de Wigner é diferente de zero em uma região cuja a área do espaço de fase é menor ou igual a  $2/h$  [80]. Dessa forma, para um estado puro, vemos que a função de Wigner contém informação acerca do princípio de incerteza de Heisenberg, de maneira que, as coordenadas  $q$  e  $p$  nunca devem está posicionado no espaço de fase na forma de um único ponto [58, 57, 80].

Integrando a função de Wigner em  $p$  ou  $q$ , recupera-se as densidades de probabilidades para as funções de onda, isto é,

$$|\psi(q)|^2 = \int f_w dp = \langle q | \rho | q \rangle, \quad (2.15)$$

$$|\psi(p)|^2 = \int f_w dq = \langle p | \rho | p \rangle. \quad (2.16)$$

### Demonstração:

Para provar a Eq. (2.15) introduzimos a Eq. (2.4) em  $\int f_w dp$ , que leva a

$$\int dp f_w = (2\pi\hbar)^{-1} \int dp dz \left\langle q - \frac{z}{2} \middle| \rho \middle| q + \frac{z}{2} \right\rangle \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right). \quad (2.17)$$

Inicialmente, realizamos a integração em  $p$ , o que nos leva a obter

$$\int dz \left\langle q - \frac{z}{2} \middle| \rho \middle| q + \frac{z}{2} \right\rangle \left( \int dp (2\pi\hbar)^{-1} \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \right), \quad (2.18)$$

onde a expressão dentro do parênteses é a função delta de Dirac,  $\delta(z)$ . Desta maneira, se obtém a densidade de probabilidade de encontrar a partícula numa região entre  $q$  e  $q + dq$ , ou seja,

$$\int dz \left\langle q - \frac{z}{2} \middle| \rho \middle| q + \frac{z}{2} \right\rangle \delta(z) = \langle q | \rho | q \rangle = |\psi(q)|^2. \quad (2.19)$$

Procedendo de forma semelhante para Eq. (2.16), substituindo na Eq. (2.4), tem-se

$$\int dq f_w = (2\pi\hbar)^{-1} \int dk dq \exp\left(\frac{-iqk}{\hbar}\right) \left\langle p - \frac{k}{2} \left| \rho \right| p + \frac{k}{2} \right\rangle. \quad (2.20)$$

Integrando em  $q$ , obtemos

$$\int dk \left\langle p - \frac{k}{2} \left| \rho \right| p + \frac{k}{2} \right\rangle \left( \int dq (2\pi\hbar)^{-1} \exp\left(\frac{-iqk}{\hbar}\right) \right), \quad (2.21)$$

em que a expressão dentro do parênteses é a função delta de Dirac,  $\delta(k)$ . Logo, a densidade de probabilidade de encontrar uma partícula entre  $p$  e  $p + dp$  é dada por

$$\int dz \left\langle p - \frac{k}{2} \left| \rho \right| p + \frac{k}{2} \right\rangle \delta(k) = \langle p | \rho | p \rangle = |\psi(p)|^2. \quad (2.22)$$

A função de Wigner é normalizada, isto é

$$\int f_w(q, p) dq dp = \text{Tr} \rho = 1. \quad (2.23)$$

### Demonstração:

Substituindo a Eq. (2.4) em (2.23), temos

$$\int f_w(q, p) dq dp = (2\pi\hbar)^{-1} \int dz dp dq \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \left\langle q - \frac{z}{2} \left| \rho \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle, \quad (2.24)$$

integrando na coordenada  $p$ , temos

$$\int f_w(q, p) dq dp = \int dz dq \left\langle q - \frac{z}{2} \left| \rho \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle \left( (2\pi\hbar)^{-1} \int dp e^{i\frac{p}{\hbar}z} \right), \quad (2.25)$$

em que a expressão dentro do parênteses é a função delta de Dirac. Dessa forma, obtém-se

$$\int f_w(q, p) dq dp = \int dz dq \left\langle q - \frac{z}{2} \left| \rho \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle \delta(z). \quad (2.26)$$

$$= \int dq \langle q | \rho | q \rangle = \text{Tr} \rho = 1, \quad (2.27)$$

Integrando o produto de duas funções de Wigner  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , temos

$$\int dqdp f_{w1}(q, p) f_{w2}(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \text{Tr}(\rho_1 \rho_2). \quad (2.28)$$

### Demonstração:

Utilizando a Eq. (2.4), temos que

$$\begin{aligned} \int dqdp f_{w1}(q, p) f_{w2}(q, p) &= \left( \frac{1}{2\pi\hbar} \right)^2 \int dqdp dz_1 dz_2 e^{\frac{ip}{\hbar}(z_1+z_2)} \\ &\times \left\langle q - \frac{z_1}{2} \left| \rho_1 \right| q + \frac{z_1}{2} \right\rangle \left\langle q - \frac{z_2}{2} \left| \rho_2 \right| q + \frac{z_2}{2} \right\rangle. \end{aligned}$$

Integrando em  $p$ , surge uma função delta de Dirac  $\delta(z_1 + z_2)$ , e integrando em  $z_2$ , obtemos

$$\int dqdp f_{w1}(q, p) f_{w2}(q, p) = \left( \frac{1}{2\pi\hbar} \right) \int dq dz_1 \left\langle q - \frac{z_1}{2} \left| \rho_1 \right| q + \frac{z_1}{2} \right\rangle \left\langle q - \frac{z_1}{2} \left| \rho_2 \right| q + \frac{z_1}{2} \right\rangle.$$

Introduzindo a mudança de variáveis

$$q' = q - \frac{z_1}{2}, \quad q'' = q + \frac{z_1}{2},$$

$$\int dqdp f_{w1}(q, p) f_{w2}(q, p) = \left( \frac{1}{2\pi\hbar} \right) \int dq' dq'' \langle q' | \rho_1 | q'' \rangle \langle q'' | \rho_2 | q' \rangle. \quad (2.29)$$

Em seguida, com a propriedade de completeza na equação acima, temos

$$\begin{aligned} \int dqdp f_{w1}(q, p) f_{w2}(q, p) &= \left( \frac{1}{2\pi\hbar} \right) \int dq' \langle q' | \rho_1 \rho_2 | q' \rangle, \\ &= \left( \frac{1}{2\pi\hbar} \right) \text{Tr}(\rho_1 \rho_2). \end{aligned} \quad (2.30)$$

As funções  $A_w(q, p)$  estão associadas ao operador  $A(Q, P)$  na forma

$$A_w(q, p) = \int dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \left\langle q - \frac{z}{2} \left| A(Q, P) \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle, \quad (2.31)$$

ou,

$$A_w(q, p) = \int dz \exp\left(\frac{-iqk}{\hbar}\right) \left\langle p - \frac{k}{2} \left| A(Q, P) \right| p + \frac{k}{2} \right\rangle. \quad (2.32)$$

O equivalente de Wigner para o operador densidade  $\rho$  é dado por

$$f_w = (2\pi\hbar)^{-3} \rho_w. \quad (2.33)$$

Uma vez definido os correspondentes em Wigner para qualquer operador quântico na representação de Wigner [57]. O valor médio é

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle = \int dpdq A_w(q, p) f_w(q, p) = \text{Tr}(A\rho). \quad (2.34)$$

**Demonstração:**

Substituindo a Eq. (2.4) e (2.32) na Eq. (2.34) tem-se

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \int dpdq A_w(q, p) f_w(q, p) = \text{Tr}(\rho A) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^3 \int dqdpdz' dz'' \exp\left(\frac{ipz'}{\hbar}\right) \\ &\quad \times \left\langle q - \frac{z'}{2} \left| A(Q, P) \right| q + \frac{z'}{2} \right\rangle \left\langle q - \frac{z''}{2} \left| A(Q, P) \right| q + \frac{z''}{2} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Integrando em  $p$ , surge uma função delta de Dirac  $\delta(z' + z'')$ . Integrando na variável  $z''$ , temos

$$\langle A \rangle = \int dqdz' \left\langle q - \frac{z'}{2} \left| A(Q, P) \right| q + \frac{z'}{2} \right\rangle \left\langle q - \frac{z'}{2} \left| A(Q, P) \right| q + \frac{z'}{2} \right\rangle. \quad (2.36)$$

Introduzindo uma mudança de variáveis,

$$q' = q - \frac{z_1}{2}, \quad q'' = q + \frac{z_1}{2},$$

temos

$$\langle A \rangle = \int dq' dq'' \langle q' | A(Q, P) | q'' \rangle \langle q'' | \rho | q' \rangle = \text{Tr}(\rho A). \quad (2.37)$$

Um aspecto é estabelecer de modo unívoco o equivalente de um operador quântico  $A(Q, P)$  com o seu recíproco na representação de Wigner  $A_w(q, p)$ . Neste caso, usa-se a

quantização de Weyl [57, 88]. Assim, se define a função de Weyl como, dada uma função no espaço de fase,  $\alpha(\tau, \sigma)$ , há um operador quântico no espaço de Hilbert,  $A(Q, P)$  [88], correlacionado a  $\alpha(\tau, \sigma)$  de modo que

$$A(Q, P) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int d\tau d\sigma e^{\frac{i(\sigma Q + \tau P)}{\hbar}} \alpha(\tau, \sigma), \quad (2.38)$$

onde se associa o  $\tau$  com à coordenada de posição e  $\sigma$  à coordenada de momento no espaço de fase. Escrevendo o operador quântico  $A(Q, P)$  em termos de  $A_w(q, p)$  obtém-se

$$\alpha(\tau, \sigma) = \int dq dp e^{\frac{i(\sigma Q + \tau P)}{\hbar}} A_w(q, p). \quad (2.39)$$

Essa equivalência pode ser analisada, demonstrando que o operador  $W(Q, P) = e^{\frac{i(\sigma Q + \tau P)}{\hbar}}$ , respeita a condição de ortogonalidade e completeza no espaço dos operadores de classe  $A(Q, P)$  [57, 88]. Usando a relação de Baker-Hausdorff,  $e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A, B]}$ , se escreve  $W(P, Q)$  na forma

$$W(Q, P) = e^{\frac{i\sigma Q}{\hbar}} e^{\frac{i\tau P}{\hbar}} e^{\frac{i\sigma\tau}{2\hbar}},$$

onde  $[Q, P] = i\hbar$ . Resolvendo a expressão a seguir

$$\langle q' | e^{\pm \frac{i}{\hbar}(\sigma Q + \tau P)} | q \rangle = \langle q' | e^{\pm \frac{i\sigma Q}{\hbar}} e^{\pm \frac{i\tau P}{\hbar}} e^{\pm \frac{i\sigma\tau}{2\hbar}} | q \rangle.$$

Onde a equação de autovalor é definida por  $Q | q \rangle = q | q \rangle$ , tal que  $e^{\pm \frac{i}{\hbar}\sigma Q} | q \rangle = e^{\pm \frac{i}{\hbar}\sigma q} | q \rangle$ . O operador de translação possui a propriedade  $e^{\frac{i\tau P}{\hbar}} | q \rangle = | q - \tau \rangle$ , o que resulta em

$$\langle q' | e^{\pm \frac{i}{\hbar}(\sigma Q + \tau P)} | q \rangle = e^{\pm \sigma(\frac{i}{\hbar}q' \pm \frac{\tau}{2})} \delta(q' - q \pm \tau).$$

Usando este último resultado podemos escrever

$$\text{Tr} e^{-\frac{i}{2}(\sigma Q - \tau P)} = (2\pi\hbar)^3 \delta(\sigma) \delta(\tau),$$

observe que é válida a propriedade para o traço de um operador  $A$  definido por  $\text{Tr} A =$

$\int dqdp \langle q'|A|q \rangle = (2\pi\hbar)^{-3} \int dqdp A_w(q, p)$ . Com isso, tem-se

$$\begin{aligned} \text{Tre}^{-\frac{i}{\hbar}(\sigma Q - \tau P)} &= (2\pi\hbar)^{-3} \int dqdp \int dz \exp(ipz) \left\langle q - \frac{z}{2} \left| e^{-\frac{i}{\hbar}(\sigma Q - \tau P)} \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle, \quad (2.40) \\ &= (2\pi\hbar)^{-3} \int dqdp \int dz \exp(ipz) \exp(i\sigma(q - z - \tau)) \delta(z + \tau). \end{aligned}$$

Integrando a expressão acima em  $z$  e usando a função delta de Dirac. Obtemos

$$\text{Tre}^{-\frac{i}{\hbar}(\sigma Q - \tau P)} = (2\pi\hbar)^{-3} \int dqdp e^{\frac{ip\tau}{\hbar}} e^{\frac{iq\sigma}{\hbar}}. \quad (2.41)$$

Logo, verifica-se a presença de duas funções deltas representadas na forma integral, isto é,

$$\text{Tre}^{-i\hbar(\sigma Q + \tau P)} = (2\pi\hbar)^3 \delta(\sigma) \delta(\tau).$$

O resultado obtido aqui revela às relações de ortogonalidade

$$\text{Tre}^{-\frac{i}{\hbar}(\sigma' Q - \tau' P)} e^{-\frac{i}{\hbar}(\sigma Q - \tau P)} = (2\pi\hbar)^3 \delta(\sigma' - \sigma) \delta(\tau' - \tau). \quad (2.42)$$

Se percebe que há uma equivalência entre a Eq. (2.32) e (2.33) e a Eq. (2.38) e (2.39). O ponto de partida é utilizar a expressão

$$A(Q, P) = \int d\sigma d\tau \alpha(\sigma, \tau) e^{\frac{i}{\hbar}(\sigma Q' + \tau P')}. \quad (2.43)$$

Assim, usando a propriedade de ortogonalidade tal que

$$\alpha(\sigma, \tau) = \frac{1}{2\pi\hbar} \text{Tr} \left\{ A(Q, P) e^{-\frac{i}{\hbar}(\sigma Q' + \tau P')} \right\}.$$

Vamos mostrar que a Eq. (2.43) existe. Neste caso, substituindo a equação

$$\alpha(\sigma, \tau) = \int dqdp e^{-\frac{i}{\hbar}(\sigma Q + \tau P)} A_w(q, p), \quad (2.44)$$

diretamente na Eq. (2.43). Com isso, efetuando os cálculos dos elementos de matriz representados na coordenada de posição. Obtemos

$$\begin{aligned} \langle q|A(Q, P)|q' \rangle &= (2\pi\hbar)^{-3} \int d\sigma d\tau dq'' dq''' \langle q''|A(Q, P)|q''' \rangle \\ &\times \langle q'''|e^{\frac{i}{\hbar}(\sigma Q' + \tau P')}|q'' \rangle \langle q|e^{\frac{i}{\hbar}(\sigma Q + \tau P)}|q' \rangle. \end{aligned}$$

Com o auxílio da Eq. (2.42), encontramos

$$\langle q|A(Q, P)|q'\rangle = \langle q|A(Q, P)|q'\rangle. \quad (2.45)$$

Logo, isso mostra que a expansão (2.43) também existe.

## 2.3 Operadores Equivalentes na Representação de Wigner

Nesta seção, vamos demonstrar as propriedades que trata dos operadores descritos na representação usual da Mecânica Quântica e os seus correspondentes em Wigner de acordo com os trabalhos [48, 64, 57, 88, 58, 59, 61, 62].

Tomando um operador  $A = A(P)$  que depende apenas de  $P$ , ou seja, o correspondente em Wigner  $A_w = A(p)$  terá a mesma forma funcional. Onde  $P$  é substituído por  $p$ .

**Demonstração:**

Dado um operador  $A(P)$ , e expandindo numa série de  $P$ , ou seja

$$A(P) = A(0) + PA'(0) + \dots \quad (2.46)$$

Usando a Eq. (2.31) e substituindo  $A(Q, P)$  pela expansão, obtém-se

$$A_w(q, p) = \int dk \exp\left(-\frac{iqk}{\hbar}\right) \left\langle p - \frac{k}{2} \left| A(0) + PA'(0) + \frac{P^2}{2!}A''(0) + \dots \right| p + \frac{k}{2} \right\rangle. \quad (2.47)$$

Tendo em mente a equação  $P|p\rangle = p|p\rangle$ , obtemos

$$\begin{aligned} A_w(q, p) &= A(0) \int dk \exp\left(-\frac{iqk}{\hbar}\right) \left\langle p - \frac{k}{2} \left| p + \frac{k}{2} \right\rangle \right. \\ &+ A'(0) \int dk \exp\left(-\frac{iqk}{\hbar}\right) \left(p + \frac{k}{2}\right) \left\langle p - \frac{k}{2} \left| p + \frac{k}{2} \right\rangle \right. \\ &+ A(0)'' \int dk \exp\left(-\frac{iqk}{\hbar}\right) \frac{\left(p + \frac{k}{2}\right)^2}{2!} \left\langle p - \frac{k}{2} \left| p + \frac{k}{2} \right\rangle \right. + \dots \end{aligned}$$

Considerando  $\left\langle p - \frac{k}{2} \left| p + \frac{k}{2} \right\rangle = \delta(k)$  calculamos a integral em  $k$ , isto é

$$A_w(p) = A(0) + pA'(0) + \frac{p^2}{2!}A''(0) + \dots = A(p). \quad (2.48)$$

Usando o análogo para a Eq. (2.32), temos para o caso em que o operador  $A = A(Q)$  depende apenas de  $Q$ , isso implica em  $A_w(q, p) = A(q)$ .

Um operador multiplicativo é dado por  $A(Q, P) = 1c$ , onde  $c$  é uma constante.

**Demonstração:**

Utilizando a Eq. (2.31) e colocando uma constante  $c$  na posição do operador  $A(Q, P)$ , onde constantes não atuam em kets. Temos

$$\begin{aligned} A_w(q, p) &= \int dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \left\langle q - \frac{z}{2} \left| c \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle, \\ A_w(q, p) &= c \int dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \left\langle q - \frac{z}{2} \left| q + \frac{z}{2} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Usando a propriedade  $\langle p - \frac{k}{2} | p + \frac{k}{2} \rangle = \delta(k)$  e integrando em  $z$ , temos

$$A_w(q, p) = c. \quad (2.50)$$

O traço é  $\text{Tr}A = (2\pi\hbar)^{-3} \int dqdp A_w(q, p)$ .

**Demonstração:**

Tomando a expressão  $(2\pi\hbar)^{-3} \int dqdp A_w(q, p)$  e inserindo a mesma na Eq. (2.31), obtemos

$$(2\pi\hbar)^{-3} \int dqdp A_w(q, p) = \int dqdp \int dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \left\langle q - \frac{z}{2} \left| A(Q, P) \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle.$$

Observa-se que surge uma delta de Dirac quando é feita uma integração em  $p$ , de tal maneira

$$(2\pi\hbar)^{-3} \int dqdp A_w(q, p) = \int dqdp \left\langle q - \frac{z}{2} \left| A(Q, P) \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle \int dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right).$$

Assim, temos

$$(2\pi\hbar)^{-3} \int dqdp A_w(q, p) = \int dqdz \left\langle q - \frac{z}{2} \left| A(Q, P) \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle \delta(z). \quad (2.51)$$

o que nos conduz a equação,

$$(2\pi\hbar)^{-3} \int dqdp A_w(q, p) = \int dq \langle q | A(Q, P) | q \rangle = \text{Tr}A. \quad (2.52)$$

Da relação acima, integrando a função  $A_w(q, p)$  na coordenada de momento, obtém-se o valor esperado de um operador  $A$  projetado na representação da posição posto na forma  $\int dp A_w(q, p) = (2\pi\hbar)^{-3} \langle q|A|q \rangle$ . Ao passo que, é válido a inversa [57].

A propriedade a seguir trata do produto de operadores na formulação de Wigner e fala sobre os elementos não diagonais de um operador. Essa propriedade é dada por

$$\langle q|A(Q, P)|q' \rangle = (2\pi\hbar)^{-6} \int d\sigma e^{i\sigma \frac{q+q'}{2\hbar}} \alpha(\sigma, q - q'), \quad (2.53)$$

onde  $\alpha(\sigma, \tau)$  é a transformada de Fourier de  $A_w(q, p)$ .

**Demonstração:**

Usando a relação para um dado operador genérico  $A(Q, P) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int d\sigma d\tau e^{\frac{i(\sigma Q + \tau P)}{\hbar}} \alpha(\tau, \sigma)$ , obtemos a expressão como segue

$$\langle q|A(Q, P)|q' \rangle = \int d\sigma d\tau \alpha(\sigma, \tau) \langle q|e^{i\frac{\sigma Q + \tau P}{\hbar}}|q' \rangle. \quad (2.54)$$

Utilizando a relação de Baker-Campbell-Hausdorff  $e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A, B]}$  aplicada no bracket dentro da integral e utilizando a (2.42), obtemos

$$\langle q|A(Q, P)|q' \rangle = (2\pi\hbar)^{-6N} \int d\sigma e^{i\sigma \frac{q+q'}{2\hbar}} \alpha(\sigma, q - q'). \quad (2.55)$$

Portanto, o estudo de operadores equivalentes na representação de Wigner passa a ser conhecido [57]. A seguir é estudado os produtos de operadores correspondentes na formulação de Wigner.

## 2.4 O Produto de Weyl

Um ponto característico importante do método de Wigner se refere a transformada de Weyl do produto de dois observáveis,  $AB$  [57, 50]. Na formulação de Wigner, representa-se o produto de dois observáveis  $AB$  em função dos correspondentes em Wigner de  $A$  e  $B$  como [57, 59, 88]

$$(AB)_w = \int dz e^{i\frac{2z}{\hbar}} \left\langle q - \frac{z}{2} \left| AB \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle. \quad (2.56)$$

Usando a relação de completeza  $\int dq |q\rangle\langle q| = 1$ , temos

$$(AB)_w = \int dzdq e^{i\frac{pz}{\hbar}} \left\langle q - \frac{z}{2} \middle| A \middle| q \right\rangle \left\langle q \middle| B \middle| q + \frac{z}{2} \right\rangle. \quad (2.57)$$

Tal expressão pode ser escrita utilizando a Eq. (2.55), ou seja

$$(AB)_w = (2\pi\hbar)^{-12} \int dzdq e^{i\frac{pz}{\hbar}} \int d\sigma d\sigma' e^{i\frac{\sigma}{2\hbar}(q+q'(q+q'-\frac{z}{2}))} \alpha(\sigma, q' - q + \frac{z}{2}) \\ \times e^{i\frac{\sigma'}{2\hbar}(q+q'(q+q'-\frac{z}{2}))} \beta(\sigma', q - q' + \frac{z}{2}).$$

Fazendo as mudanças de variáveis,  $\tau = q' - q + \frac{z}{2}$  e  $\tau' = q - q' + \frac{z}{2}$ , obtemos

$$(AB)_w = (2\pi\hbar)^{-12} \int d\sigma d\sigma' d\tau d\tau' e^{i\frac{\sigma\tau+\tau q}{\hbar}} \alpha(\sigma, \tau) e^{i\frac{\sigma'\tau+\sigma\tau'}{2\hbar}} \beta(\sigma', \tau') e^{i\frac{\sigma'q+\tau'p}{\hbar}}. \quad (2.58)$$

Onde  $e^{i\frac{\sigma'\tau+\sigma\tau'}{2\hbar}}$  pode ser expandida numa série de potências. Neste caso, é substituída por um fator  $e^{\frac{i\Lambda}{2\hbar}}$ , em que  $\Lambda$  é um operador bidiferencial, isto é [93, 63]

$$\Lambda = \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q}}.$$

Onde as flechas indicam o sentido de atuação. Usando as funções  $A_w = \int dqdp e^{i\frac{\sigma q+\tau p}{\hbar}} \alpha(\sigma, \tau)$  e  $B_w = \int dqdp e^{i\frac{\sigma' q+\tau' p}{\hbar}} \beta(\sigma', \tau')$ , encontra-se o produto de operadores na representação de Wigner dado por [88, 90]

$$(AB)_w = A_w(q, p) e^{\frac{i\Lambda}{2\hbar}} B_w(q, p),$$

ou

$$(AB)_w = B_w(q, p) e^{-\frac{i\Lambda}{2\hbar}} A_w(q, p).$$

Assim, o produto deformado entre os equivalentes de Wigner  $A_w$  e  $B_w$ , por meio de  $e^{\frac{i\Lambda}{2\hbar}}$  é o produto estrela de Weyl definido por

$$(AB)_w = A_w(q, p) e^{\frac{i\Lambda}{2\hbar}} B_w(q, p) = A_w(q, p) \star B_w(q, p).$$

O produto de Weyl (produto estrela) gera um novo campo na matemática chamado de geometria não - comutativa [88]. A geometria não - comutativa se originou nas pesquisas

de Weyl e Moyal os quais estudaram regras de quantização no espaço de fase [88]. Uma observação a ser feita é que o produto de Weyl não é comutativo. O produto  $\star$  conecta o método de Wigner com o formalismo da quantização de Weyl [57, 93, 63, 58, 88].

## 2.5 Evolução Temporal da Função de Wigner

A equação que descreve a evolução temporal da função de Wigner é uma equação diferencial de primeira ordem no tempo representada no espaço de fase [57, 93]. Essa equação é obtida a partir da equação de Liouville-von Neumann escrita como [90, 63, 88]

$$i\hbar\partial_t\rho = H\rho - \rho H, \quad (2.59)$$

onde  $H$  é o Hamiltoniano do sistema. O mapeamento linear é  $\Omega : A \rightarrow a_W(q, p)$  onde  $\Omega(A) = (2\pi\hbar)^{-1} \int dz e^{\frac{ipz}{\hbar}} \langle q - \frac{z}{2} | A | q + \frac{z}{2} \rangle$ . Isto é, temos uma álgebra associativa de operadores em  $\mathcal{H}$  que leva uma álgebra associativa não-comutativa em  $\Gamma$  [90]. Aplicando o operador  $\Omega$  na equação de Liouville-von Neumann em ambos os lados, isto é

$$i\hbar\Omega(\partial_t\rho) = \Omega(H\rho) - \Omega(\rho H). \quad (2.60)$$

Como resultado, temos

$$i\hbar\frac{\partial f_W}{\partial t} = H_W \star f_W - f_W \star H_W \quad (2.61)$$

em que o parênteses de Moyal é dado por  $\{H_W, f_W\}_M = H_W \star f_W - f_W \star H_W$ . O parênteses de Moyal pode ser escrito como

$$\{a, b\}_M = a \star b - b \star a = 2ia(q, p) \operatorname{sen} \left[ \frac{\hbar}{2} \left( \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \right) \right] b(q, p), \quad (2.62)$$

onde nesta expressão a função seno pode ser interpretada como uma série de potência correspondente ao parênteses de Moyal. Utilizando a identidade  $e^{i\hbar\Lambda/2} - e^{-i\hbar\Lambda/2} = 2i \operatorname{sen} \left( \hbar\frac{\Lambda}{2} \right)$  e expandido  $\operatorname{sen} \left( \hbar\frac{\Lambda}{2} \right)$ , ou seja [90, 57, 88]

$$\operatorname{sen} \left( \hbar\frac{\Lambda}{2} \right) = \frac{\hbar\Lambda}{2} - \frac{1}{3!} \left( \hbar\frac{\Lambda}{2} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left( \hbar\frac{\Lambda}{2} \right)^5 + \dots \quad (2.63)$$

No limite clássico ( $\hbar \rightarrow 0$ ), a equação dinâmica para a função de Wigner satisfaz a

equação de Liouville-von Neumann clássica escrita como [63, 57, 90, 59]

$$\frac{\partial f_W}{\partial t} = \frac{\partial H_W}{\partial q} \frac{\partial f_W}{\partial p} - \frac{\partial H_W}{\partial p} \frac{\partial f_W}{\partial q} = \{H_W, f_W\}, \quad (2.64)$$

com  $H_W$  substituindo a função hamiltoniana. Ou seja, o método de Wigner resgata as equações canônicas da mecânica clássica. Observa-se que há uma conexão do formalismo de Wigner e o princípio de correspondência [57, 93, 58, 82, 48].

O formalismo de Wigner apresentado até agora, está descrito na representação de Schrödinger da mecânica quântica, onde o estado do sistema evoluem no tempo. Contudo, pode ser estudado na representação de Heisenberg [57, 82, 48].

## 2.6 Propriedades do Produto de Weyl

O produto de Weyl ou produto estrela é uma ferramenta matemática que modifica operadores da Mecânica Quântica usual em funções no espaço de fase [58, 88]. O produto de Weyl satisfaz as seguintes propriedades.

O produto  $\star$  entre  $f(q, p)$  e  $g(q, p)$  é definido por [88]

$$f(q, p) \star g(q, p) = f(q, p) \exp \left[ \frac{i\hbar}{2} \left( \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} - \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} \right) \right] g(q, p). \quad (2.65)$$

O produto  $\star$  se trivializa [57, 88].

$$c \star f(q, p) = f(q, p) \star c = cf(q, p). \quad (2.66)$$

### Demonstração:

Expandindo em série o operador  $e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}}$ , temos

$$c \star f(q, p) = c \left\{ 1 + \frac{i\hbar}{2} \left( \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} - \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} \right) + \frac{1}{2!} \left( \frac{i\hbar}{2} \right)^2 \left( \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} - \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} \right)^2 + \dots \right\} f(q, p).$$

O produto de Weyl não comuta.

$$f(q, p) \star g(q, p) \neq g(q, p) \star f(q, p). \quad (2.67)$$

ou

$$f(q, p)e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}}g(q, p) \neq g(q, p)e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}}f(q, p),$$

**Demonstração:**

1:

$$q \star p = \left( q + \frac{i\hbar}{2} \partial_p \right) p = qp + \frac{i\hbar}{2}.$$

2:

$$p \star q = \left( p - \frac{i\hbar}{2} \partial_q \right) q = pq - \frac{i\hbar}{2}.$$

O produto  $\star$  de duas funções eleva uma à posição de operador, isto é

$$\begin{aligned} f(q, p) \star g(q, p) &= f \left( q + \frac{i\hbar}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial q} \right) g(q, p) \\ &= f(q, p) g \left( q + \frac{i\hbar}{2} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q} \right). \end{aligned}$$

**Demonstração:**

Considere  $a$  e  $b$  definidos como  $a \equiv \frac{\vec{\partial}}{\partial p}$  e  $b \equiv \frac{\vec{\partial}}{\partial q}$ , ou seja

$$f(q, p) \star g(q, p) = f(q, p) e^{\frac{i\hbar}{2} (a \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q} - b \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p})} g(q, p).$$

Sabe-se que  $e^{a\partial_x} f(x) = f(x + a)$ . Com isso, temos

$$f(q, p) \star g(q, p) = f \left( q + \frac{i\hbar}{2} a, p - \frac{i\hbar}{2} b \right) g(q, p).$$

Logo, substituindo  $a$  e  $b$ , onde  $a = \frac{\partial}{\partial p}$  e  $b = \frac{\partial}{\partial q}$ , temos

$$f(q, p) \star g(q, p) = f \left( q + \frac{i\hbar}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial q} \right) g(q, p).$$

Onde

$$\hat{f} = f(q, p) \star.$$

O conjugado complexo muda a ordem do produto estrela.

$$(f \star g)^\dagger = g^\dagger \star f^\dagger. \quad (2.68)$$

**Demonstração:**

Utilizando a Eq. (2.65), e mudando as variáveis por  $q' = q$  e  $p' = p$ , ou seja

$$f(q, p) \star g(q, p) = \exp \left[ \frac{i\hbar}{2} \left( \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p'} - \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q'} \right) \right] f(q, p) g(q', p') \Big|_{q', p' = q, p}. \quad (2.69)$$

Expandindo a função exponencial em série de Taylor, temos

$$\exp \left[ \frac{i\hbar}{2} (\partial_q \partial_{p'} - \partial_p \partial_{q'}) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{i\hbar}{2} \right)^n (\partial_q \partial_{p'} - \partial_p \partial_{q'})^n.$$

Conseqüentemente, escrevendo o binômio para a expressão  $(\partial_q \partial_{p'} - \partial_p \partial_{q'})^n$ , isto é

$$(\partial_q \partial_{p'} - \partial_p \partial_{q'})^n = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q \partial_{p'}]^{n-m} [\partial_p \partial_{q'}]^m. \quad (2.70)$$

O produto estrela de Weyl é escrito como

$$f(q, p) \star g(q, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{i\hbar}{2} \right)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m} \partial_p^m f(q, p)] [\partial_q^m \partial_p^{n-m} g(q, p)]. \quad (2.71)$$

Quando realiza-se o complexo conjugado da equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} (f(q, p) \star g(q, p))^\dagger &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{i\hbar}{2} \right)^n \left\{ (-1)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m} \partial_p^m f^\dagger(q, p)] \right. \\ &\quad \left. \times [\partial_q^m \partial_p^{n-m} g^\dagger(q, p)] \right\}, \end{aligned} \quad (2.72)$$

em que o termo  $(-1)^n$  surge da conjugação complexa do termo  $(i\hbar/2)^n$ . Associando esse

termo no binômio, tem-se

$$(-1)^n(\partial_q\partial_{p'} - \partial_p\partial_{q'}) = (-\partial_q\partial_{p'} + \partial_p\partial_{q'}) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_p\partial_{q'}]^{n-m} [\partial_q\partial_{p'}]^m.$$

Quando atua estes operadores em duas funções no espaço de fase, encontra-se

$$(\partial_q\partial_{p'} - \partial_p\partial_{q'})f(q,p)g(q',p') = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m}\partial_p^m f(q,p)] [\partial_q^m\partial_p^{m-n}g(q,p)].$$

e

$$(-1)^n(\partial_q\partial_{p'} - \partial_p\partial_{q'})f(q,p)g(q',p') = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m}\partial_p^m g(q,p)] [\partial_q^m\partial_p^{m-n}f(q,p)].$$

Comparando às últimas duas equações, chega-se na expressão

$$\begin{aligned} (-1)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m}\partial_p^m f(q,p)] [\partial_q^m\partial_p^{m-n}g(q,p)] \\ = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m}\partial_p^m g(q,p)] [\partial_q^m\partial_p^{m-n}f(q,p)]. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Substituindo a Eq. (2.73) em (2.72), obtem-se

$$\begin{aligned} (f(q,p) \star g(q,p))^\dagger &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^n \left\{ (-1)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m}\partial_p^m g^\dagger(q,p)] \right. \\ &\quad \times \left. [\partial_q^m\partial_p^{n-m}f^\dagger(q,p)] \right\}, \\ &= g^\dagger(q,p) \star f^\dagger(q,p). \end{aligned}$$

O produto estrela é associativo. Considere o produto estrela entre  $f$ ,  $g$  e  $h$  dado por

$$(f(q,p) \star g(q,p)) \star h(q,p) = f(q,p) \star (g(q,p) \star h(q,p)). \quad (2.74)$$

**Demonstração:**

Temos que

$$\begin{aligned} (f(q,p) \star g(q,p)) \star h(q,p) &= \left\{ f \left( q + \frac{i\hbar}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial q} \right) g(q,p) \right\} h \left( q - \frac{i\hbar}{2} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}, p + \frac{i\hbar}{2} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q} \right), \\ &= f \left( q + \frac{i\hbar}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial q} \right) g \left( q + \frac{i\hbar}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial q} \right) h(q,p), \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} f(q,p) \star (g(q,p) \star h(q,p)) &= f \left( q + \frac{i\hbar}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial q} \right) \left\{ g(q,p) h \left( q - \frac{i\hbar}{2} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}, p + \frac{i\hbar}{2} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q} \right) \right\}, \\ &= f \left( q + \frac{i\hbar}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial q} \right) g \left( q + \frac{i\hbar}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2} \frac{\vec{\partial}}{\partial q} \right) h(q,p). \end{aligned}$$

No capítulo seguinte, serão introduzidos determinados operadores estrela com o propósito de construir uma representação unitária do grupo de Galilei. Tal formulação possibilita o desenvolvimento de uma mecânica quântica coerente com o formalismo de Wigner, baseada na noção de funções de onda — ou quase-amplitudes — definidas no espaço de fase.

## Capítulo 3

# Mecânica Quântica Simplética

As variáveis dinâmicas no formalismo de Wigner são representadas por funções no espaço de fase, onde o produto de tais funções é determinado através das propriedades do produto de Weyl-Moyal (produto estrela  $\star$ ). Isto significa que se define um operador estrela  $\hat{A} \equiv A\star$  tal que ao atuar em uma função  $B$  resulta em  $\hat{A}(B) = A\star B$ . A Mecânica Quântica Simplética analisa esta situação e procura estabelecer uma representação da álgebra de Lie do grupo de Galilei estendida, utilizando operadores definidos por meio da aplicação do produto estrela.

Neste capítulo, realizaremos uma breve revisão acerca do formalismo da Mecânica Quântica Simplética com base nos seguintes trabalhos [\[48, 49, 56, 63, 64, 90, 93, 131\]](#).

### 3.1 Espaço de Hilbert e a Estrutura Simplética

Considere  $\mathcal{G}$  uma variedade diferencial de dimensão  $n$ , na qual pode-se associar a cada ponto  $q \in \mathcal{G}$  e representado pelas coordenadas  $q = (q^1, \dots, q^n)$ , um espaço vetorial real  $T_q\mathcal{G}$   $n$ -dimensional denominado espaço tangente de  $\mathcal{G}$  em  $q$  [\[56, 63, 90\]](#). Especifica-se por  $T^*\mathcal{G}$  ou  $T\mathcal{G}^*$  o espaço dual, também conhecido no estudo de geometria diferencial como espaço cotangente onde as coordenadas de cada ponto são tratadas por  $(q, p) = (q^1, \dots, q^n, p^1, \dots, p^n)$  [\[63\]](#). Nesse caso, se equipa o espaço cotangente com uma estrutura simplética, dada pela 2-forma [\[90\]](#)

$$\omega = dq \wedge dp. \tag{3.1}$$

A partir dessa forma simplética, em conjunto com a definição do operador

$$\Lambda = \left( \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \right), \quad (3.2)$$

obtemos para as funções  $f(q, p)$  e  $g(q, p)$  em  $C^\infty$ , os parênteses de Poisson

$$\omega(f\Lambda, g\Lambda) = f\Lambda g = \{f, g\}, \quad (3.3)$$

em que se define esses colchetes como  $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q}$ . Segue que o espaço dual  $T^*\mathcal{G}$  caracterizado por uma estrutura simplética é classificado como espaço de fase denotado por  $\Gamma$ , de modo que um dado vetor relacionado é explicitado da seguinte forma  $\omega = (\omega^1, \dots, \omega^n) = (q^1, \dots, q^n, p^1, \dots, p^n)$  e  $q = (q^1, \dots, q^n)$  e  $p = (p^1, \dots, p^n)$  são vetores posição e momentum pertencentes a variedade  $\mathcal{G}$  [81]. Observa-se na Eq. (3.3) que, ao fazermos uso dos operadores  $\mathbf{X}_f$  e  $\mathbf{X}_g$ , definidos por

$$\mathbf{X}_f = f\Lambda = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q}, \quad (3.4)$$

e

$$\mathbf{X}_g = g\Lambda = \frac{\partial g}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q}, \quad (3.5)$$

determinam campos vetoriais em relação ao espaço de fase  $\Gamma$  [63, 81, 90]. Com base nessas definições, a partir de  $\Gamma$  inserimos o espaço de Hilbert correlacionado ao espaço de fase  $\Gamma$  [90, 63].

Nesse espaço vetorial complexo, definimos um conjunto de funções complexas de quadrado integráveis,  $\varphi(q, p)$  em  $\Gamma$ , de maneira que

$$\int dpdq \varphi(q, p)^* \varphi(q, p) < \infty,$$

é uma forma bilinear real [48]. Nesse caso, podemos escrever  $\varphi(q, p) = \langle q, p | \varphi \rangle$ , com auxílio de

$$\int dqdp |q, p\rangle \langle q, p| = 1,$$

onde  $\langle \varphi |$  é o vetor dual de  $|\varphi\rangle$ . Este espaço de *Hilbert simplético* é denotado por  $\mathcal{H}(\Gamma)$  [48, 93, 81, 80].

### 3.2 Operadores de Bopp

Os operadores de Bopp <sup>[95]</sup>, também conhecidos como operadores pseudo-diferenciais, são obtidos de maneira formal pela seguinte regra de quântização <sup>[95]</sup>

$$\hat{q} = q + \frac{1}{2}i\hbar\frac{\partial}{\partial p}, \quad (3.6)$$

e de forma equivalente para a coordenada  $p$

$$\hat{p} = p - \frac{1}{2}i\hbar\frac{\partial}{\partial q}. \quad (3.7)$$

Esses operadores são outra representação para as coordenadas de posição  $\hat{q} \rightarrow q$  e momento  $\hat{p} \rightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}$ . Na literatura os operadores  $\hat{q} \rightarrow q + \frac{1}{2}i\hbar\partial_p$  e  $\hat{p} \rightarrow p - \frac{1}{2}i\hbar\partial_q$  recebe o nome de “Bopp Shifts” <sup>[95]</sup>. Tais operadores atuam sobre funções ou distribuições definidas no espaço de fase  $\Gamma$ . Os operadores de Bopp no espaço de fase foram estudados por de Gosson na teoria de espaços modulados <sup>[94]</sup>.

Considere um exemplo, onde o produto estrela é uma ferramenta fundamental na análise de quantização da deformação de funções definidas sobre  $\Gamma$  <sup>[95]</sup>. Temos por definição que

$$c = a \star b$$

de modo que

$$c(q) = \left(\frac{1}{4\pi\hbar}\right)^{2n} \int \int e^{\frac{i}{2\hbar}\sigma(q',q'')} a\left(q + \frac{1}{2}q'\right) b\left(q - \frac{1}{2}q'\right) dq' dq''.$$

Nesta equação a transformada de Fourier simplética para o produto de dois operadores de Weyl é definido como

$$\hat{c} = \hat{a}\hat{b}.$$

Analogamente, escrevemos para  $c$  a transformada de Fourier simplética dada na forma

$$c_\sigma(q) = \left(\frac{1}{4\pi\hbar}\right)^n \int e^{\frac{i}{2\hbar}\sigma(q',q'')} a_\sigma(q - q') b_\sigma(q') dq',$$

o que nos leva depois de feito alguns cálculos, a obter

$$\begin{aligned}
 q \star a &= \left( q + \frac{1}{2} i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \right) a, \\
 p \star a &= \left( p - \frac{1}{2} i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \right) a,
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

onde  $\frac{\partial}{\partial q}$  e  $\frac{\partial}{\partial p}$  são os gradientes das coordenadas de posição e momento <sup>[95]</sup>.

### 3.3 Operadores no Espaço de Hilbert sobre $\Gamma$

Quando se introduz um espaço vetorial estruturado no qual se tem definidas funções sobre  $\Gamma$ , a forma do mapeamento  $\Omega : \mathcal{H}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{H}(\Gamma)$  <sup>[48]</sup> pode ser observada através da aplicação de um operador linear, de modo que os vetores  $|\Phi\rangle$  e  $|\Psi\rangle$  pertence ao espaço de Hilbert  $\mathcal{H}(\Gamma)$  <sup>[93, 81, 58, 90, 63]</sup>. Considere a relação

$$\Omega|\Phi\rangle = |\Psi\rangle.$$

$\Omega$  é um operador linear, isto é

$$\Omega(c_1|\Psi\rangle + c_2|\Phi\rangle) = c_1\Omega|\Psi\rangle + c_2\Omega|\Phi\rangle.$$

Considere  $\varepsilon = \{\Omega, \Theta, \dots\}$  um conjunto de operadores lineares sobre  $\mathcal{H}(\Gamma)$ , é um espaço vetorial ordenado e equipado com operações de adição e multiplicação satisfazendo as relações <sup>[93, 81]</sup>

$$[\Omega + \Theta]|\Psi\rangle = \Omega|\Psi\rangle + \Theta|\Psi\rangle$$

e

$$[c\Omega]|\Psi\rangle = c[\Omega|\Psi\rangle].$$

Nota-se que o ket  $\Omega|\Psi\rangle$  e bra  $\langle\Psi|\Omega$  não são dual, ou seja,  $\Omega|\Psi\rangle \leftrightarrow \langle\Psi|\Omega^\dagger$  <sup>[81]</sup>. Se  $\Omega^\dagger = \Omega$ , tem-se

$$(\Omega\Theta)^\dagger = \Theta^\dagger\Omega^\dagger.$$

Neste caso, se  $\Omega = \Omega^\dagger$ , obtemos

$$\langle\Psi|\Omega|\Theta\rangle = \langle\Theta|\Omega^\dagger|\Psi\rangle^\dagger.$$

Tomando dois vetores de estado  $|\Psi\rangle$  e  $|\Phi\rangle$ , o produto externo entre eles fica na forma  $B = |\Phi\rangle\langle\Psi|$ . Neste caso é válida a relação  $B = B^\dagger$ . O seu adjunto é  $B^\dagger = |\Psi\rangle\langle\Phi|$  [81, 93].

Se o operador linear  $\Omega$  aplicado em  $|\omega\rangle$ , resulta em

$$\Omega|\omega\rangle = \omega|\omega\rangle,$$

onde  $\omega$  representa um autovalor real, então o operador  $\Omega$  obedece a relação  $\Omega = \Omega^\dagger$ . Esta propriedade classifica os operadores como hermitianos [81, 93, 48].

### 3.3.1 Operadores Unitários

Operadores unitários satisfaz a relação

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1.$$

Neste caso, a condição de adjunto é equivalente ao inverso do operador linear, isto é

$$U^\dagger = U^{-1}.$$

Neste caso,  $|\Psi_1\rangle$  e  $|\Psi_2\rangle$  se transforma na forma

$$U|\Psi_1\rangle = |\Psi'_1\rangle,$$

$$U|\Psi_2\rangle = |\Psi'_2\rangle,$$

podemos escrever o produto escalar

$$\langle\Psi'_1|\Psi'_2\rangle = \langle\Psi_1|U^\dagger U|\Psi_2\rangle = \langle\Psi_1|\Psi_2\rangle.$$

Logo, temos uma transformação unitária que conserva o produto escalar e sua norma [48, 81, 93].

### 3.3.2 Operador Translação no Espaço de Hilbert Simplético $\mathcal{H}(\Gamma)$

Consideramos a seguir a definição geral de translação espacial, sendo  $t(a_i)$ , escrito da seguinte forma [81]

$$t(a_i)\Psi(q_i, p_i) = e^{i\phi}\Psi\left(q_i + \frac{a_i}{2}, p_i\right), \quad (3.9)$$

em que temos uma fase arbitrária  $e^{i\phi}$ . A seguir, iremos explorar quatro propriedades referentes ao operador de translação com base no trabalho [81].

1. Conservação da probabilidade. Se  $|\Psi\rangle$  encontra-se normalizado, então para  $t(a)|\Psi\rangle$  transladado, a normalização é válida. Para tanto, a translação  $\langle\Psi|\Psi\rangle = \langle\Psi|t^\dagger(a_i)t(a_i)|\Psi\rangle$  precisa ser unitária.
2. Interpreta-se duas translações infinitesimais  $a_i$  e  $b_i$  formando uma translação apenas. Isto é,  $a_i + b_i$ , nos leva a  $t(a_i)t(b_i) = t(a_i + b_i)$ .
3. Existe uma translação  $t(-a_i) = t^{-1}(a_i)$ .
4. Tomando o  $\lim_{a_i \rightarrow 0} t(a_i) = 1$  recupera-se o operador identidade.

Assim escrevemos o operador  $t(a_i) = e^{i\hat{k}_i \hat{a}_i}$ . Isso permite escrever  $\hat{p}_i = \hbar \hat{k}_i$  na representação  $t(a_i) = e^{i\frac{\hat{p}_i a_i}{\hbar}}$ . Considerando a expansão para a Eq. (3.9),  $t(a_i) = 1 + \frac{i\hat{p}_i a_i}{\hbar}$ , tem-se

$$\left(1 + \frac{i\hat{p}_i a_i}{\hbar}\right) \Psi(q_i, p_i) = e^{i\phi} \Psi\left(q_i + \frac{a_i}{2}, p_i\right).$$

Utilizando o operador  $e^{a\partial_r}$  na representação da posição  $e^{a\partial_r} g(r) = g(r + a)$ , obtém-se

$$\hat{p}\Psi(q_i, p_i) = \frac{\hbar\phi}{a_i} \Psi(q_i, p_i) - \frac{i\hbar}{2} \partial_q \Psi(q_i, p_i),$$

em que escrevemos o fator  $\frac{\hbar\phi}{a_i}$  na forma  $\frac{\hbar\phi}{a_i} = c$ , o que resulta em  $\phi = \frac{ac}{\hbar}$ . Logo  $c$  tem dimensão de momentum, ou seja,  $c = p$ , o que leva  $\hat{p}$  a ser escrito na forma [81]

$$\hat{p} = q - \frac{i\hbar}{2} \partial_q. \tag{3.10}$$

Como o operador satisfaz a condição  $\partial_q = -\partial_q^\dagger$ , isto implica que o operador  $\hat{p}$  é um observável físico [81, 93]. E ainda, escrevemos (3.10) de forma mais compacta  $\hat{p} = p\star$ . A seguir será tratado o operador posição.

### 3.3.3 Operador Posição no Espaço de Hilbert Simplético $\mathcal{H}(\Gamma)$

Como vimos anteriormente o operador  $\hat{p}$  é hermitiano. Isto corresponde a ser um observável. Logo, teremos o análogo para o operador de posição de tal modo que a transformação imposta  $t(a)\hat{q}t^\dagger(a) = \hat{q} + a$  seja válida [81, 93]. Nesse sentido, considere o operador arbitrário dado por

$$\hat{q} = Aq + Bp + C\partial_q + D\partial_p,$$

onde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são constantes. Usando a relação de Heisenberg temos

$$[Aq + Bp + C\partial_q + D\partial_p, p - \frac{i\hbar}{2}\partial_q] = i\hbar.$$

Assim, temos

$$\frac{i\hbar A}{2} + D = i\hbar.$$

Definindo  $A = 1$  e  $D = \frac{i\hbar}{2}$ , encontramos o operador posição escrito como

$$\hat{q} = q + \frac{i\hbar}{2}\partial_p, \quad (3.11)$$

ou seja, escreve-se  $\hat{q} = q\star$ .

Recorrendo a transformação

$$t(a)\hat{q}t^\dagger(a) = \hat{q} + a, \quad (3.12)$$

esta relação acima é verificada aplicando o operador  $e^A B e^{-A}$  e utilizando a fórmula de Baker-Hausdorff-Campbell  $e^A B e^{-A} = A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} [A, B]_n$ , onde  $n$  indica o número de comutadores repetidos. Isto é

$$\exp\left[i\frac{\hat{p}a_i}{\hbar}\right]\hat{q}\exp\left[-i\frac{\hat{p}a_i}{\hbar}\right] = \hat{q} + a. \quad (3.13)$$

Conseqüentemente, se nota que o operador em (3.13) realiza deslocamentos nas quantidades de movimento, isto é, um gerador de translação. Contudo, também se observa a presença de uma fase. Motivado pelos operadores de Bopp que representam os operadores de posição e momento, um estudo a seguir referente ao grupo de Galilei no espaço de fase é apresentado.

### 3.4 O Grupo de Galilei sobre $\mathcal{H}(\Gamma)$

As transformações de Galilei para dois sistemas de referência associados  $(\mathbf{x}, t)$  e  $(\mathbf{x}', t')$  são definidas pelas equações [\[63, 90\]](#).

$$\begin{aligned} x'_i &= R x_i + v_i t + a, \\ t' &= t + \tau, \\ p'_i &= p + m v_i, \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde  $x'$  são as coordenadas espaciais,  $R$  é uma matriz de rotação pertencente ao grupo  $O(3)$ ,  $t$  e  $\tau$  é a coordenada temporal e de translação temporal,  $a$  é o deslocamento no espaço,  $m$  e  $v_i$  são a massa da partícula e a velocidade relativa indicando a alteração de sistemas de referência inerciais, isto é, *boost*. Com as transformações unitárias conhecidas  $U : \mathcal{H}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{H}(\Gamma)$ , e tomando a Eq. (3.10) e (3.11), a relação de comutação adquire o seguinte aspecto

$$\begin{aligned} [\widehat{Q}, \widehat{P}] &= [q + \frac{i\hbar}{2}\partial_p, p - \frac{i\hbar}{2}\partial_q] \\ &= [q, p] + \frac{i\hbar}{2}[\partial_p, p] - \frac{i\hbar}{2}[q, \partial_q] + \frac{i^2\hbar^2}{4}[\partial_p, \partial_q] \\ &= i\hbar\delta_{ij}. \end{aligned}$$

com  $\widehat{Q}$  e  $\widehat{P}$  especificando os geradores que levam a obedecer a relação de Heisenberg [93, 81, 50]. Agora, dando ênfase a álgebra de Galilei-Lie inserimos os ingredientes necessários tendo o operador  $\widehat{K}$  definido como

$$\widehat{K} = m\widehat{Q} - t\widehat{P}, \quad (3.15)$$

onde  $m$  e  $t$  são parâmetros. Em seguida, se define o operador estrela da seguinte forma

$$\begin{aligned} \widehat{K}_i &= k\star = mq\star - tp\star \\ &= m(q + \frac{i\hbar}{2}\partial_p) - t(p - \frac{i\hbar}{2}\partial_q). \end{aligned}$$

No espaço de Hilbert simplético  $\mathcal{H}(\Gamma)$  o operador momento angular fica escrito na forma

$$\widehat{L}_i = \epsilon_{ijk}\widehat{Q}_j\widehat{P}_k, \quad (3.16)$$

onde  $\epsilon_{ijk}$  é um tensor antissimétrico. Utilizando as Eqs. (3.10) e (3.11) na (3.16), obtemos o operador estrela equivalente

$$\widehat{L}_i = L_i\star = \epsilon_{ijk}q_jp_k - \frac{i\hbar}{2}\epsilon_{ijk}q_j\partial_{q_k} + \frac{i\hbar}{2}\epsilon_{ijk}q_k\partial_{p_j} + \frac{\hbar^2}{2}\epsilon_{ijk}\partial_{p_j}\partial_{q_k}. \quad (3.17)$$

Um sistema livre de interação é descrito por um gerador de evolução temporal escrito como

$$H = \sum_{i=1}^3 \frac{P_i^2}{2m} = \frac{P_1^2 + P_1^2 + P_1^2}{2m}. \quad (3.18)$$

No formalismo da mecânica simplética, temos o correspondente definido pelo operador estrela dado por

$$\begin{aligned}\widehat{H} &= H\star = \frac{\widehat{P}^2}{2m} = \sum_{i=1}^3 \frac{\widehat{P}_i^2}{2m} \\ &= \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^3 \left( p_i - \frac{i\hbar}{2} \partial_{q_i} \right)^2.\end{aligned}\quad (3.19)$$

Deste modo, temos a álgebra de Galilei-Lie estendida de acordo com os comutadores dos geradores do grupo de Galilei [\[50, 63, 90\]](#)

$$\begin{aligned}[\widehat{L}_i, \widehat{L}_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{L}_k, & [\widehat{L}_j, \widehat{H}] &= 0, \\ [\widehat{L}_i, \widehat{K}_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{K}_k, & [\widehat{K}_i, \widehat{K}_j] &= 0, \\ [\widehat{L}_i, \widehat{P}_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{P}_k, & [\widehat{P}_i, \widehat{P}_j] &= 0, \\ [\widehat{K}_i, \widehat{P}_j] &= i\hbar m\delta_{ij}\widehat{1}, & [\widehat{P}_i, \widehat{H}] &= 0, \\ [\widehat{K}_i, \widehat{H}] &= 2mi\hbar\widehat{P}_i,\end{aligned}\quad (3.20)$$

Onde  $m$  é um parâmetro que corresponde a massa [\[90, 63\]](#). Em seguida, faremos algumas demonstrações dessas relações de comutação fundamentada nas referências [\[50, 66, 49, 60\]](#).

**Demonstração 1.** Para provar a relação  $[\widehat{K}_i, \widehat{P}_j] = i\hbar m\delta_{ij}\widehat{1}$ , utilizaremos a seguinte propriedade  $[a + \alpha b, c] = [a, c] + \alpha[b, c]$ , com  $\alpha$  constante complexa e  $a, b, c$  representam operadores, temos que

$$[\widehat{K}_i, \widehat{P}_j] = [m\widehat{Q}_i - t\widehat{P}_i, \widehat{P}_j], \quad (3.21)$$

reescrevendo a relação [\(3.21\)](#), tem-se

$$[\widehat{K}_i, \widehat{P}_j] = m[\widehat{Q}_i, \widehat{P}_j] - t[\widehat{P}_i, \widehat{P}_j].$$

nos leva a obter

$$[\widehat{K}_i, \widehat{P}_j] = m\delta_{ij}\widehat{1}. \quad (3.22)$$

**Demonstração 2.** Para deduzirmos a expressão  $[\widehat{K}_i, \widehat{H}] = 2mi\hbar\widehat{P}_i$ , recorreremos a iden-

tidade  $[a + \alpha b, c] = [a, c] + \alpha[b, c]$ , ou seja

$$\begin{aligned} [\widehat{K}_i, \widehat{H}] &= [m\widehat{Q}_i - t\widehat{P}_i, \widehat{P}_j\widehat{P}_j], \\ &= m[\widehat{Q}_i, \widehat{P}_j\widehat{P}_j] - t[\widehat{P}_i, \widehat{P}_j\widehat{P}_j]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Temos também a propriedade  $[a, bc] = [a, c]b + c[a, b]$ , tal que encontraremos outra forma de escrever (3.23)

$$\begin{aligned} [\widehat{K}_i, \widehat{H}] &= m[\widehat{Q}_i, \widehat{P}_j]\widehat{P}_j + m\widehat{P}_j[\widehat{Q}_i, \widehat{P}_j] \\ &= 2mi\hbar\delta_{ij}\widehat{P}_j \\ &= 2mi\hbar\widehat{P}_i. \end{aligned} \quad (3.24)$$

**Demonstração 3.** Para que a relação de comutação  $[\widehat{L}_i, \widehat{P}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{P}_k$  seja verificada, usando a expressão  $[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b$ , temos

$$\begin{aligned} [\widehat{L}_i, \widehat{P}_m] &= [\epsilon_{ijk}\widehat{Q}_j\widehat{P}_k, \widehat{P}_m] \\ &= \epsilon_{ijk}\widehat{Q}_j[\widehat{P}_k, \widehat{P}_m] + \epsilon_{ijk}[\widehat{Q}_j, \widehat{P}_m]\widehat{P}_k \\ &= i\hbar\delta_{jm}\epsilon_{ijk}\widehat{P}_k \\ &= i\hbar\epsilon_{imk}\widehat{P}_k. \end{aligned} \quad (3.25)$$

**Demonstração 4.** O comutador de  $[\widehat{L}_i, \widehat{K}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{K}_k$  é verificado usando as regras de comutação  $[a + \alpha b, c] = [a, c] + \alpha[b, c]$  e  $[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b$ , ou seja

$$\begin{aligned} [\widehat{L}_i, \widehat{K}_m] &= [\epsilon_{ijk}\widehat{Q}_j\widehat{P}_k, m\widehat{Q}_m - t\widehat{P}_m] \\ &= m\epsilon_{ijk}[\widehat{Q}_j\widehat{P}_k, \widehat{Q}_m] - t\epsilon_{ijk}[\widehat{Q}_j\widehat{P}_k, \widehat{P}_m] \\ &= -im\hbar\delta_{km}\epsilon_{ijk}\widehat{Q}_j - it\hbar\delta_{jm}\epsilon_{ijk}\widehat{P}_k \\ &= i\hbar m\epsilon_{ijm}\widehat{Q}_j - it\hbar\epsilon_{imk}\widehat{P}_k \\ &= i\hbar m\epsilon_{ijk}\widehat{Q}_k - it\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{P}_k \\ &= i\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{K}_k. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Logo, está verificada a álgebra associada aos operadores estrela. Onde  $\widehat{P}$ ,  $\widehat{K}$ ,  $\widehat{L}$ ,  $\widehat{H}$  no cenário da simetria Galileana, correspondem aos geradores de translações, transformações puras de Galilei, rotações e translação temporal [50, 49]. Nesta representação  $\widehat{Q}$  e  $\widehat{P}$  são

transformado pelas transformações puras de Galilei de acordo com

$$e^{-i\mathbf{v}\frac{\hat{K}}{\hbar}}\hat{P}_je^{i\mathbf{v}\frac{\hat{K}}{\hbar}} = \hat{P}_j + mv_j\mathbf{1}, \quad (3.27)$$

$$e^{-i\mathbf{v}\frac{\hat{K}}{\hbar}}\hat{Q}_je^{i\mathbf{v}\frac{\hat{K}}{\hbar}} = \hat{Q}_j + v_jt\mathbf{1}. \quad (3.28)$$

Além disso

$$[\hat{Q}_j, \hat{P}_k] = i\hbar\delta_{jk}\mathbf{1}. \quad (3.29)$$

Note que as Eqs. (3.27) e (3.28) foram obtidas usando  $e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \dots$

Assim,  $\hat{Q}_j$  e  $\hat{P}_j$  podem ser interpretados como observáveis físicos de posição e momento, com as Eqs. (3.27) e (3.29) especificando a direção que  $\hat{Q}$  e  $\hat{P}$  transforma-se sob transformações puras de Galilei [63, 49, 50]. Nesta representação, temos os invariantes de Casimir da álgebra de Galilei-Lie que são dados por

$$I_1 = \hat{H} - \frac{\hat{P}^2}{2m} \quad (3.30)$$

$$I_2 = \hat{L} - \frac{1}{2m}\hat{K} \times \hat{P}. \quad (3.31)$$

Onde  $I_1$  é o invariante que descreve a Hamiltoniana de uma partícula livre, ao passo que  $I_2$  corresponde ao invariante relacionado com os graus de liberdade do spin. Neste trabalho, é considerado  $I_2 = 0$ .

Representa-se o observável físico através do gerador de translação temporal  $\hat{H}$ . A evolução temporal desse observável é dada por [50, 49]

$$\hat{A}(t) = e^{-it\frac{\hat{H}}{\hbar}}\hat{A}(0)e^{it\frac{\hat{H}}{\hbar}}, \quad (3.32)$$

em que  $\hat{A}(t)$  é o observável físico no instante  $t$ . Conseqüentemente, a equação que descreve a dinâmica para o operador  $\hat{A}(t)$  é obtida tomando-se a derivada temporal da Eq. (3.32),

$$\frac{\partial\hat{A}(t)}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}[\hat{A}(t), \hat{H}] + \frac{\partial\hat{A}(0)}{\partial t}, \quad (3.33)$$

a qual resulta na equação de Heisenberg.

Com os elementos constituintes da Mecânica Quântica no espaço de fase é possível a construção de uma base em  $\mathcal{H}(\Gamma)$  [49, 50]. Para tanto, na construção da base, considere os

operadores de posição e momentum definidos por

$$\begin{aligned}\widehat{P} = p\star &= p\mathbf{1} - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q} \\ &= p\mathbf{1} + \frac{1}{2}\widetilde{P}.\end{aligned}\tag{3.34}$$

De maneira análoga, temos

$$\begin{aligned}\widehat{Q} = q\star &= p\mathbf{1} + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p} \\ &= q\mathbf{1} + \frac{1}{2}\widetilde{Q}.\end{aligned}\tag{3.35}$$

Obtemos formalmente operadores multiplicativos (*c-number*) diretamente associados ao operador identidade escritos na forma

$$\overline{P} = 2p\mathbf{1},\tag{3.36}$$

e

$$\overline{Q} = 2q\mathbf{1},\tag{3.37}$$

que são  $\overline{Q}$  e  $\overline{P}$  operadores hermitianos. Estes operadores podem ser escritos como

$$\widehat{P} = \frac{1}{2}(\overline{P} + \widetilde{P}).\tag{3.38}$$

e

$$\widehat{Q} = \frac{1}{2}(\overline{Q} + \widetilde{Q}).\tag{3.39}$$

E quando submetidos a transformação pura de Galilei, os operadores  $\overline{Q}$  e  $\overline{P}$  se transformam como posição e momentum, isto é

$$e^{-iv\frac{\widehat{K}}{\hbar}} 2\overline{Q} e^{iv\frac{\widehat{K}}{\hbar}} = 2\overline{Q} + vt\mathbf{1},\tag{3.40}$$

e

$$e^{-iv\frac{\widehat{K}}{\hbar}} 2\overline{P} e^{iv\frac{\widehat{K}}{\hbar}} = 2\overline{P} + mv\mathbf{1}.\tag{3.41}$$

Em consequência, os operadores  $\overline{Q}$  e  $\overline{P}$  comutam entre si, isto é,  $[\overline{Q}, \overline{P}] = 0$ , isto significa que  $\overline{Q}$  e  $\overline{P}$  não são interpretados como observáveis físicos, uma vez que a relação de Heisenberg não é obedecida <sup>[49]</sup>. Contudo, o uso desses operadores possibilita a construção de um

referencial de espaço de fase no espaço de Hilbert [49, 50]. Então, se define uma base de autovetores normalizados  $|q, p\rangle$  com um conjunto de autovalores  $\{q\}$  e  $\{p\}$  satisfazendo

$$\bar{Q}\Psi(q, p) = q\Psi(q, p), \quad (3.42)$$

e, analogamente,

$$\bar{P}\Psi(q, p) = p\Psi(q, p), \quad (3.43)$$

em que  $\Psi(q, p) = \langle q, p|\Psi\rangle$  é uma função de onda no espaço de fase  $\Gamma$ .

Através da relação de completudeza, obtemos o produto interno

$$\langle \Psi_1|\Psi_2\rangle = \int \Psi_1^*(q, p)\Psi_2(q, p)dqdp. \quad (3.44)$$

De forma semelhante, tem-se

$$\langle \Psi_1|\Psi_2\rangle = \int \Psi_1^*(q, p) \star \Psi_2(q, p)dqdp. \quad (3.45)$$

Um operador  $\hat{A}$  aplicado em  $\Psi$ , fica dado

$$\langle q, p|\hat{A}\Psi\rangle = \int \langle q, p|\hat{A}|q', p'\rangle \langle q', p'|\Psi\rangle dqdp, \quad (3.46)$$

onde  $\int |q', p'\rangle \langle q', p'|dqdp = 1$ . Para o cálculo do valor médio na base  $\{q, p\}$ , toma-se o correspondente do operador  $\hat{A} = a(q, p)\star$  no espaço de fase, ou seja

$$\begin{aligned} \langle \Psi|\hat{A}|\Psi\rangle &= \int \langle \Psi|q, p\rangle \langle q, p|\hat{A}|q', p'\rangle \langle q', p'|\Psi\rangle dqdpdq'dp' \\ &= \int \Psi^*(q, p)a(q, p) \star \Psi(q, p)dqdp \\ &= \int a(q, p) [\Psi(q, p) \star \Psi^*(q, p)] dqdp. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Onde  $\langle q, p|\hat{A}|q', p'\rangle = \hat{A}\delta(p - p')\delta(q - q')$ . O valor esperado de  $\hat{Q}$  é dado por

$$\begin{aligned} \langle \Psi|\hat{Q}|\Psi\rangle &= \int q [\Psi(q, p) \star \Psi^*(q, p)] dqdp \\ &= \int q\sigma(q)dp, \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde  $\sigma(q)$  é a densidade de probabilidade para medir  $\widehat{Q}$  na representação da posição  $q$  [87], isto é

$$\sigma(q) = \int [\Psi(q, p) \star \Psi^*(q, p)] dp. \quad (3.49)$$

Analogamente, temos

$$\sigma(p) = \int [\Psi(q, p) \star \Psi^*(q, p)] dq. \quad (3.50)$$

### 3.5 Equação de Schrödinger no Espaço de Fase

Quando se projeta um vetor  $|\Psi(t)\rangle$  sobre o espaço  $\mathcal{H}(\Gamma)$ , gerado pelos kets  $|q, p\rangle$ , se obtém uma função de onda que evolui no tempo dada na forma [49, 50, 96, 64, 87].

$$\Psi(q, p, t) = \exp\left(\frac{-itH}{\hbar}\right) \star \Psi(q, p, 0), \quad (3.51)$$

onde  $U(t, 0) = \exp\left(\frac{-itH}{\hbar}\right)$ . Derivando a Eq. (3.51) com relação ao tempo, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(q, p, t)}{\partial t} &= \frac{(-i)}{\hbar} h(q, p) \star \exp\left(\frac{-itH}{\hbar}\right) \star \Psi(q, p, 0) \\ &= \frac{(-i)}{\hbar} h(q, p) \star \Psi(q, p, t). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Consequentemente, a equação de evolução temporal para  $\Psi(q, p, t)$  é escrita do seguinte modo

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(q, p, t)}{\partial t} = H \star \Psi(q, p, t). \quad (3.53)$$

Utilizando o operador Hamiltoniano definido na forma usual

$$H = \frac{(p\star)^2}{2m} + V(q\star), \quad (3.54)$$

então a Eq. (3.53) é escrita como

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(q, p, t)}{\partial t} = \left( \frac{p^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{8m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} - \frac{i\hbar p}{2m} \frac{\partial}{\partial q} \right) \Psi(q, p, t) + V\left(q + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q}\right) \Psi(q, p, t), \quad (3.55)$$

que é a equação de Schrödinger no espaço de fase. A dedução desta equação somente é verificada se a extensão central (3.20) que rotula a representação for ( $m \neq 0$ ) [64, 63, 49, 87, 97].

A Eq. (3.55) através da densidade Lagrangiana dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{i\hbar}{2}(\Psi^\dagger \partial_t \Psi - \Psi \partial_t \Psi^\dagger) + \frac{i\hbar}{4m} p(\Psi^\dagger \partial_q \Psi - \Psi \partial_q \Psi^\dagger) \\ & - \frac{p^2}{2m} \Psi \Psi^\dagger + V(q) \star (\Psi \Psi^\dagger) - \frac{\hbar^2}{8m} \partial_q \Psi \partial_q \Psi^\dagger. \end{aligned} \quad (3.56)$$

é invariante por transformação de calibre.

Usando a propriedade  $f(q, p) \star c = cf(q, p)$  introduzida no método de separação de variáveis, tem-se

$$\begin{aligned} \Psi(q, p, t) &= \psi(q, p) \star \Phi(t) \\ &= \psi(q, p) \Phi(t), \end{aligned} \quad (3.57)$$

substituindo o produto de funções escrita na Eq. (3.52), obtém-se a equação de autovalor

$$\begin{aligned} \widehat{H}\psi(q, p) &= H \star \psi(q, p) \\ &= E\psi(q, p), \end{aligned} \quad (3.58)$$

em que  $E$  é uma constante. Assim, a solução geral da Eq. (3.52) é escrita como

$$\Psi(q, p, t) = \psi(q, p) \exp\left(\frac{-itE}{\hbar}\right). \quad (3.59)$$

Considerando que existe uma associação com a função de Wigner e a solução da Eq. (3.52), temos a seguinte relação para função  $f_W$ ,

$$f_W(q, p, t) = \Psi(q, p, t) \star \Psi^\dagger(q, p, t). \quad (3.60)$$

Então a conexão pode ser verificada usando a equação de Schrödinger simplética e o complexo conjugado da função  $\Psi$ , ou seja

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi^\dagger(q, p, t)}{\partial t} = \Psi^\dagger(q, p, t) H. \quad (3.61)$$

Multiplicando  $\Psi^\dagger$  pelo lado esquerdo da Eq. (3.52), enquanto que a segunda Eq. (3.61) é feito uma multiplicação por  $\Psi \star$  pelo lado direito, e tomando a diferença entre as duas

equações, obtemos

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial (\Psi \star \Psi^\dagger)}{\partial t} &= H (\Psi \star \Psi^\dagger) - (\Psi \star \Psi^\dagger) H \\ &= H \star f_W - f_W \star H, \end{aligned} \quad (3.62)$$

que leva ao resultado final

$$i\hbar \frac{\partial f_W(q, p, t)}{\partial t} = \{H, f_W\}_M. \quad (3.63)$$

onde  $\{a, b\}_M = a \star b - b \star a$  representa os parênteses de Moyal. Desse modo, a Eq. (3.63) pode ser encontrada na literatura como equação de Moyal para o formalismo do espaço de fase [90, 97, 119]. E conseqüentemente existe uma analogia com a equação de Heisenberg, ou seja, os operadores evoluem no tempo e as funções de onda não possuem dependência temporal [87, 97]. Assim, a partir da equação de Moyal, as funções de Wigner apresentam comportamento de permanecerem estacionárias inicialmente enquanto que as transformadas de Weyl dos operadores são dependentes do tempo. A dinâmica dessa equação é equivalente à equação de Liouville-von Neumann, onde o estado do sistema será descrito pela função de Wigner seguido pelo parênteses de Moyal que substitui o comutador [87].

Além do mais, a função de Wigner satisfaz a condição de normalização, dada por

$$\int f_W(q, p, t) dq dp = \int \Psi(q, p, t) \star \Psi^\dagger(q, p, t) dq dp = 1 \quad (3.64)$$

Também pode-se verificar com base na relação (3.60) que a função de Wigner é real, isto é,

$$\begin{aligned} [\Psi(q, p, t) \star \Psi^\dagger(q, p, t)]^\dagger &= [\Psi^\dagger(q, p, t)]^\dagger \star [\Psi(q, p, t)]^\dagger \\ &= \Psi(q, p, t) \star \Psi^\dagger(q, p, t) \\ &= f_W = f_W^\dagger, \end{aligned} \quad (3.65)$$

na qual a função  $f_W$  não é positiva definida. Outro aspecto importante da função de Wigner, é quando se multiplica por  $\star \psi^\dagger(q, p)$  pelo lado direito na Eq. (3.58), levando-nos assim a escrever a equação da seguinte forma

$$\begin{aligned} H f_W(q, p) &= H \star f_W(q, p) \\ &= E f_W(q, p). \end{aligned} \quad (3.66)$$

onde  $H$  é o hamiltoniano. A Eq. (3.66) para um sistema físico definido e descrito por uma função que comuta  $H(q, p)$ , possibilita obter as auto-energias e os auto-estados. A função  $H(q, p)$  corresponde a transformada de Weyl para um operador hamiltoniano  $\hat{H}$  [87, 97]. Assim, tem-se a função de Wigner representando o auto-estado que descreve o sistema associado com o autovalor. Logo, conhecida a solução  $\psi$ , encontra-se a função de Wigner no espaço de fase. Tal resultado fornece um significado físico para as funções de onda em  $\mathcal{H}(\Gamma)$ , que são denominadas de quasi-amplitude de probabilidade [87, 63, 90, 66, 131].

A fim de destacar alguns elementos adicionais da representação na física de partículas, é instrutivo analisar a interação entre quarks em um méson, considerando um setor específico da cromodinâmica. Essa análise é abordada no próximo capítulo.



## Capítulo 4

# Campo de Interação Forte

Existe um tipo de força fundamental na natureza que mantém os núcleos atômicos estáveis. Essa força que supera as repulsões eletromagnéticas é chamada de força nuclear forte [98, 104, 105]. A teoria de campo proposta na década de 1970 por David Politzer, Frank Wilczek e David Gross, responsável por explicar as interações nucleares fortes denominada de Cromodinâmica Quântica (QCD) [99, 106, 107], é tida como uma teoria de calibre não abeliana (Yang-Mills), representada através do grupo de simetria  $SU(3)$  [10, 12, 108, 109]. Nesta teoria, as partículas que constituem a matéria são descritas pelos quarks. E, além disso, esta prevê a existência de partículas mediadoras da interação forte denominados de glúons. Estes glúons são os bósons de calibre distribuídos em oito espécies [107, 110]. Apesar de muito ser conhecido sobre a QCD, o entendimento do confinamento dos quarks e glúons permanece sendo o principal desafio a ser vencido, despertando o interesse de pesquisadores de várias áreas da física e mesmo fora dela. Neste capítulo é apresentado de forma breve a matemática do grupo  $SU(3)$  e posteriormente a lagrangiana representativa da QCD com base nas referências [13, 56, 14, 98, 99, 102, 103, 106, 111, 112, 113, 116, 117].

### 4.1 Representação $SU(3)$ do Quark

As partículas (ou campos) que compõem o que podemos observar estão inseridas em dois grupos denominadas de partículas de matéria (ou campos de matéria) e bósons de calibre. O primeiro grupo forma os blocos constituintes fundamentais da matéria que são representados em duas categorias: quarks e léptons, cujas características consistem em ser todos fermiônicos com spin semi-inteiro [13, 14, 102]. Os quarks podem existir em três estados completamente degenerados no qual possui a mesma massa e exatamente a mesma interação sendo denominados de estados de cor [14, 104]. Quarks e glúons são os campos da interação forte e o grupo de simetria que representa a interação forte é o  $SU(3)$  [104, 114].

O conjunto das matrizes unitárias de dimensão  $3 \times 3$  com determinante igual a um forma o grupo especial unitário  $SU(3)$ , que está acoplado a oito geradores <sup>[14]</sup>. Os geradores são matrizes  $3 \times 3$  e é comum denotá-los por  $\lambda_i$  onde  $i = 1, 2, \dots, 8$  e expressas como:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

$$\lambda_7 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Essas são as matrizes de Gell-Mann. E, por sua vez, tais matrizes  $\lambda_i$  satisfazem as condições

$$\lambda^\dagger = \lambda, \quad (4.4)$$

$$Tr[\lambda_i] = 0. \quad (4.5)$$

O grupo  $SU(3)$  pode ser expressado por oito geradores hermitianos independentes, tal que a transformação de simetria  $SU(3)$  é escrita como <sup>[14, 56]</sup>

$$\hat{U} = e^{i\alpha\hat{T}} \quad (4.6)$$

o que permite escrever os oito geradores em termos dos  $\lambda_i$ ,

$$\hat{T}_i = \frac{1}{2}\lambda_i \quad (i = 1, \dots, 8). \quad (4.7)$$

As matrizes  $\lambda_i$  escritas na base canônica possuem a seguinte forma

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Vemos que os operadores  $\hat{T}_i$  correspondem as cargas de cor e obedecem as relações de comutação da álgebra de Lie do  $SU(3)$ , ou seja,

$$[\hat{T}_i, \hat{T}_j] = if_{ijk}\hat{T}_k, \quad (4.9)$$

onde  $f_{ijk}$  são as constantes de estrutura. E são antissimétricos, isto é

$$f_{ijk} = -f_{jik} = f_{jki}. \quad (4.10)$$

Ainda, as relações de anti-comutação para  $\hat{T}_i$  são dadas por

$$\{\hat{T}_i, \hat{T}_j\} = \frac{4}{3}\delta_{ij}1 + 2d_{ijk}\hat{T}_k \quad (4.11)$$

de modo que  $d_{ijk}$  são constantes simétricas [\[14, 56\]](#).

## 4.2 Densidade de Lagrangiana de Campo da QCD

A teoria da Cromodinâmica Quântica (Quantum Chromodynamics - QCD) representa uma lagrangiana renormalizável da teoria quântica de campos das interações fortes [\[106\]](#). Os elementos chaves da QCD são os campos fermiônicos de spin 1/2 denominados de quarks que carregam carga elétrica fracionária e os campos de calibre de spin 1 não-abelianos chamados de glúons que correspondem aos bósons de calibre associados a cor [\[13\]](#). Sendo assim, a densidade de Lagrangiana da QCD que descreve a interação entre quarks e glúons é escrita na forma [\[106\]](#).

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\mathcal{D} - m)q - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu}, \quad (4.12)$$

onde  $\mathcal{D} = iD_\mu\gamma^\mu$  e ( $i = 1, \dots, 8$ ). O termo  $\bar{q}i\gamma^\mu D_\mu q$  representa as interações de calibre entre quarks e glúons,  $F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu}$  é o termo cinético do glúon,  $q$  é o campo de quark representado tanto no espaço de Dirac quanto no espaço de cor e são acomodados em três componentes de cor definidas como [\[106\]](#),

$$q = \begin{pmatrix} q^r \\ q^g \\ q^b \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

onde os índices sobrescritos são rotulados por *red*, *green* e *blue* que corresponde as diferentes cargas da interação forte. A densidade de Lagrangiana (4.12) é invariante perante as leis de transformações [13, 114, 108]

$$q \rightarrow e^{i\phi_i(x)\frac{\lambda_i}{2}} q, \quad (4.14)$$

$$D_\mu q \rightarrow e^{i\phi_i(x)\frac{\lambda_i}{2}} D_\mu q, \quad (4.15)$$

$$A_\mu^i \rightarrow A_\mu^i - \frac{1}{g_s} \partial_\mu \phi_i(x) + f_{ijk} \phi_j(x) A_{\mu k}. \quad (4.16)$$

A etapa seguinte está relacionado com o estudo de um dado setor de interação forte, a ser tratado no espaço de fase. Em particular, no estudo do méson  $c\bar{c}$ , visto que este representa o objeto fundamental em física hadrônica por se tratar de um sistema simples em sua composição por quarks, e ainda mais adequado aos testes experimentais. Sabe-se que as massas do quark e do antiquark no sistema quarkônio são maiores do que a escala cromodinâmica, ou seja,  $\mathbf{M}_{q,\bar{q}} \gg \Lambda_{QCD}$  [115]. Portanto, o tratamento não relativístico é adequado para sistemas com estados ligados pesados. Sendo assim, a equação de Schrödinger do sistema de dois corpos em leituras do potencial de Cornell é resolvida no referencial da Mecânica Quântica Simplética afim de tratar a natureza confinada do sistema.

## Capítulo 5

# Potencial Efetivo de Quark-Antiquark em Mecânica Quântica Simplética

No presente capítulo, nosso objetivo é o estudo do sistema de interação quark-antiquark pesado no regime não-relativístico utilizando o formalismo da Mecânica Quântica Simplética. Para esse propósito, consideramos o modelo do potencial de Cornell, que é uma combinação linear dos potenciais do tipo Coulomb e linear, o qual desempenha um papel importante, pois leva em conta com sucesso as duas características cruciais da QCD, ou seja, a liberdade assintótica (a uma pequena distância ou alta energia) e o confinamento de quark (a uma grande distância ou baixa energia). Numa primeira etapa, para tratar a natureza confinada do sistema, é considerado o termo de interação linear do potencial de Cornell no âmbito da Mecânica Quântica Simplética. Nesse caso, estudamos o comportamento da função de Wigner associada ao estado fundamental para o méson  $c\bar{c}$ .

Posteriormente, a fim de tratar a equação de Schrödinger no espaço de fase, um procedimento baseado no método da transformação de Levi-Civita (também chamado método de Bohlin) é apresentado e aplicado no modelo de potencial de Cornell que descreve um estado ligado de quark-antiquark. Com esse procedimento trataremos o problema do potencial de Cornell do espaço de configuração para o espaço de fase de forma separada, tal que a primeira parte do sistema consiste ter oscilador, enquanto que a outra parte é usado métodos perturbativos. Em seguida, analisamos a função de Wigner referente ao estado fundamental do méson  $c\bar{c}$ , primeiro estado excitado, e o parâmetro de negatividade é calculado.

A apresentação deste capítulo está organizada da seguinte maneira. Na Seção 5.1, escrevemos a equação de Schrödinger na estrutura do espaço de fase e estabelecemos a relação entre a quase-amplitude no espaço de fase e a função de Wigner.

Na Seção 5.2, resolvemos a equação de Schrödinger no espaço de fase para o potencial de quark-antiquark e calculamos a função de Wigner.

Passando para a seção 5.3, o método perturbativo é apresentado para resolver a equação de Schrödinger no contexto do espaço de fase com o potencial fenomenológico de Cornell, e a função de Wigner é calculada.

Os resultados considerados nesta seção foram retirados do trabalho:

- R. R. Luz, G. X. A. Petronilo, A. E. Santana, Caroline S. R. Costa, R. G. G. Amorim, and R. A. S. Paiva, Adv. in High Energy Phys. **2022**, 10 (2022). <https://doi.org/10.1155/2022/3409776> [5].

## 5.1 Mecânica Quântica Simplética: esboço e notação

Nesta seção, construímos um formalismo para a mecânica quântica no espaço de fase. Para este propósito, introduzimos um espaço de Hilbert associado ao espaço de fase, denotado por  $\mathcal{H}(\Gamma)$ . Nesse caso, a associação do espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  com o espaço de fase  $\Gamma$  é dada por  $\int dpdq \phi^*(q, p)\phi(q, p) < \infty$  onde  $\phi(p, q) \in \Gamma$ . Então, escrevemos  $\phi(q, p) = \langle q, p | \phi \rangle$ , com o auxílio de  $\int dpdq |q, p\rangle \langle q, p| = 1$  tal que  $\langle \phi |$  é o vetor dual de  $|\phi\rangle$ . Este espaço de Hilbert simplético é representado por  $\mathcal{H}(\Gamma)$ . Para construir uma representação simplética da mecânica quântica, definimos os operadores de momento e posição

$$\hat{P} = p\star = p - i\frac{\partial}{\partial q}, \quad (5.1)$$

$$\hat{Q} = p\star = q + i\frac{\partial}{\partial p}. \quad (5.2)$$

Os quais satisfazem a relação de comutação de Heisenberg  $[\hat{Q}, \hat{P}] = i$ .

Introduzindo os seguintes operadores,

$$\hat{K}_i = m\hat{Q}_i - t\hat{P}_i, \quad (5.3)$$

$$\hat{L}_i = \epsilon_{ijk}\hat{Q}_j\hat{P}_k, \quad (5.4)$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m}, \quad (5.5)$$

obtemos o seguinte conjunto das relações de comutação:

$$\begin{aligned}
 [\widehat{L}_i, \widehat{L}_j] &= i\epsilon_{ijk}\widehat{L}_k, \\
 [\widehat{L}_i, \widehat{k}_j] &= i\epsilon_{ijk}\widehat{K}_k, \\
 [\widehat{K}_i, \widehat{H}] &= i\widehat{P}_i, \\
 [\widehat{L}_i, \widehat{P}_j] &= i\epsilon_{ijk}\widehat{P}_k, \\
 [\widehat{K}_i, \widehat{P}_j] &= im\delta_{ij}\mathbf{1}.
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Onde as outras relações de comutação são nulas. Esta é a álgebra de Galilei-Lie com uma extensão central caracterizada por  $m$ , onde  $\widehat{P}$ ,  $\widehat{K}$ ,  $\widehat{L}$  e  $\widehat{H}$ , são, respectivamente, os geradores de translação, transformações de Galileu (Galilean boosts), rotação e translação temporal.

A evolução da função de onda no espaço de fase é

$$\psi(q, p, t) = e^{\widehat{H}t}\psi(q, p, 0), \tag{5.7}$$

derivando com relação ao tempo, obtemos

$$\partial_t\psi(q, p; t) = \left( \frac{\widehat{P}^2}{2m} + V(\widehat{Q}) \right) \psi(q, p; t). \tag{5.8}$$

Esta é a equação tipo Schrödinger no espaço de fase.

A associação de  $\psi(q, p, t)$  com uma função  $f_W$  é dada por

$$f_W(q, p, t) = \psi(q, p, t) \star \psi^\dagger(q, p, t).$$

Que possui todas as propriedades da função de Wigner <sup>[90]</sup>. Na próxima seção, resolveremos a equação de Schrödinger de representação no espaço de fase e estabeleceremos a relação das quase-amplitudes no espaço de fase e a função de Wigner para o sistema de méson  $c\bar{c}$ .

## 5.2 Confinamento de Quark e Equação de Schrödinger no Espaço de Fase

A equação que descreve o sistema quark-antiquark pesado (sistema de dois corpos) na representação da mecânica quântica simplética é escrita como

$$\frac{(p^\star)^2}{2m}\psi(q, p) + \lambda(q^\star)\psi(q, p) = E\psi(q, p). \tag{5.9}$$

E usando as equações (3.11) e (3.10) na equação (5.9), obtemos

$$\frac{1}{2m} \left( p^2 - ip\partial_q - \frac{1}{4}\partial_q^2 \right) \psi + \lambda \left( q + \frac{i}{2}\partial_p \right) \psi = E\psi, \quad (5.10)$$

onde foi usado  $\hbar = 1$ . Fazendo a transformação  $\omega = \frac{p^2}{2m} + \lambda q$ , tal que

$$\frac{\partial\psi}{\partial q} = \frac{\partial\psi}{\partial\omega} \frac{\partial\omega}{\partial q} = \lambda \frac{\partial\psi}{\partial\omega}, \quad (5.11)$$

com isso, obtemos

$$\alpha \frac{\partial^2\psi}{\partial\omega^2} - \omega\psi = -E\psi, \quad (5.12)$$

no qual  $\alpha = \frac{\lambda^2}{8m}$ . Então, a equação de Schrödinger é representada como a equação de Airy,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\omega^2} - \kappa\psi = 0. \quad (5.13)$$

Tendo que  $\kappa = \frac{\omega-E}{\alpha}$ . A solução desta equação é

$$\psi(q, p) = C_1 A_i \left[ \left( \frac{\lambda^2}{8m} \right)^{-1/3} \left( \frac{p^2}{2m} + \lambda q - E \right) \right], \quad (5.14)$$

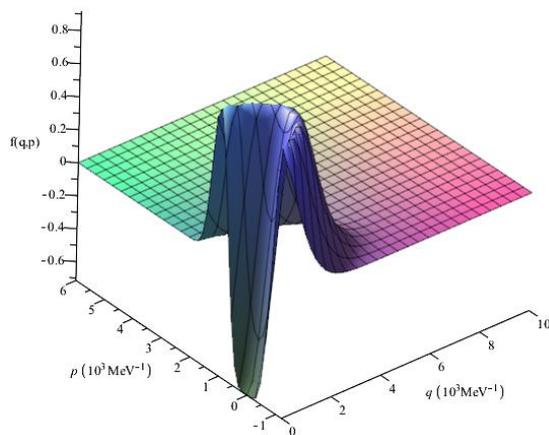
em que  $\psi(q, p)$  é uma função real. Como consequência, pela virtude da associatividade,  $\psi \star \psi \propto \psi$ , podemos escrever a solução da função de Wigner em termos da função de Airy

$$f_w(q, p) = N A_i \left[ \left( \frac{\lambda^2}{8m} \right)^{-1/3} \left( \frac{p^2}{2m} + \lambda q - E \right) \right]. \quad (5.15)$$

Sendo  $N = \alpha^{-1/3}$  e  $m$  é a massa reduzida do constituinte quark e sua antipartícula anti-quark. Na sequência, analisamos a solução acima da função de Wigner para o sistema de méson  $c\bar{c}$ .

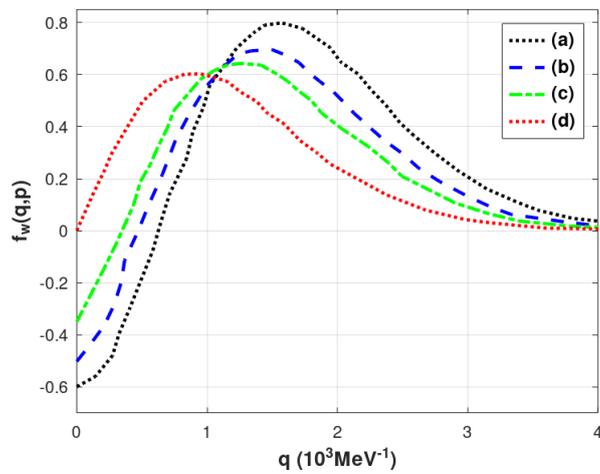
O comportamento da função de Wigner para a interação forte dos quarks pesados é mostrado nas (Figuras 5.1 e 5.2).

**Figura 5.1:** Função de Wigner para o estado fundamental do méson  $c\bar{c}$ .



Fonte: [5]

**Figura 5.2:** As curvas (a)-(d) representam gráficos cortados da Figura 5.1 para o estado fundamental do méson  $c\bar{c}$  com variação da energia cinética.



Fonte: [5]

**Tabela 5.1:** Os valores experimentais para confinamento linear  $\lambda$ , massa reduzida  $m$  e distância relativa máxima  $q$  para o méson  $c\bar{c}$  [4, 118]

(a)	(b)	(c)	(d)
$\frac{p^2}{2m} = 0 \text{ MeV}$	$\frac{p^2}{2m} = 100 \text{ MeV}$	$\frac{p^2}{2m} = 200 \text{ MeV}$	$\frac{p^2}{2m} = 400 \text{ MeV}$
$\lambda = 600 \text{ MeV}^2 \text{ (Exp.)}$	$\lambda = 600 \cdot 10^3 \text{ MeV}^2 \text{ (Exp.)}$	$\lambda = 600 \text{ MeV}^2 \text{ (Exp.)}$	$\lambda = 600 \text{ MeV}^2 \text{ (Exp.)}$
$m = 630 \text{ MeV} \text{ (Exp.)}$	$m = 630 \text{ MeV} \text{ (Exp.)}$	$m = 630 \text{ MeV} \text{ (Exp.)}$	$m = 630 \text{ MeV} \text{ (Exp.)}$
$q = 4.077 \cdot 10^{-3} \text{ MeV}^{-1} \text{ (Exp.)}$			

Fonte: [5]

A partir do gráfico 5.1 observa-se que para o estado fundamental do méson  $c\bar{c}$  a função de Wigner apresenta valores negativos no espaço de fase e este fato está relacionado ao caráter quântico desse estado. No gráfico 5.2, quando  $p = 0 \text{ MeV}$ , tem-se uma função de Wigner que possui valores negativos indicando o caráter não-clássico desse estado do méson  $c\bar{c}$ , curva (a). Isto também é observado nas curvas (b) e (c). Em particular,  $p = 0 \text{ MeV}$  representa um extremo. Quando variamos a energia cinética para  $p = 100 \text{ MeV}$  ocorre um deslocamento do gráfico da função de Wigner para o lado esquerdo, curva (b). Podemos prosseguir aumentando a energia cinética para  $p = 200 \text{ MeV}$ , o que evidencia ainda mais o afastamento para a esquerda do gráfico da função de Wigner, curva (c). Se variarmos a energia cinética para  $p = 400 \text{ MeV}$  notamos que o gráfico da função de Wigner se deslocou visivelmente para à esquerda, curva (d). Assim, observamos que existe um limite à direita de existência para a função de Wigner não ser zero. Esse limite se aproxima do valor experimental referente a distância relativa máxima de aproximação entre quark charme e seu antiquark anti-charme que é da ordem de  $q = 4.077 \times 10^{-3} \text{ MeV}^{-1}$  aproximadamente. Então, uma condição de contorno é imposta no zero e, assim, percebe-se que a existência do quark-antiquark é do zero até onde vai a função de Wigner, respectivamente. Notamos que, a análise no espaço de fase está revelando que para a variação da energia cinética se tem um limite máximo de existência do méson charme-anti-charme conforme identificado no gráfico acima. Esse sistema observado no espaço de fase, embora seja muito simples no caso da análise do potencial linear para descrever essa situação de quarks, permite observar o confinamento o que não é observado com a solução do espaço de configuração.

### 5.3 Potencial de Cornell e Equação de Schrödinger Simplética

Nesta seção, analisamos a interação quark-antiquark no contexto do espaço de fase. Para esse propósito, consideramos o potencial de Cornell dado na equação (1.1). Desta forma, apresentamos uma solução para a equação de Schrödinger com o potencial de Cornell no

espaço de fase e a função de Wigner associada. O hamiltoniano clássico bidimensional do sistema méson  $c\bar{c}$  é dado como

$$H = \frac{P_{1x}^2 + P_{1y}^2}{2m} + \frac{P_{2x}^2 + P_{2y}^2}{2m} + V(r), \quad (5.16)$$

onde  $m$  é massa reduzida em unidades de  $MeV$ . Para resolver a equação de Schrödinger para este hamiltoniano, a transformação de Bohlin é utilizada. Então, o mapeamento de Bohlin é definido por [\[66, 97, 119\]](#)

$$x + iy = (q_1^2 - q_2^2) + i(2q_1q_2), \quad (5.17)$$

$$x = q_1^2 - q_2^2, \quad (5.18)$$

$$y = 2q_1q_2, \quad (5.19)$$

pela definição

$$P_x + iP_y = \frac{p_1 + ip_2}{2(q_1 + iq_2)}. \quad (5.20)$$

O que leva a

$$P_x = \frac{p_1q_1 + p_2q_2}{2(q_1^2 + q_2^2)}, \quad (5.21)$$

$$P_y = \frac{p_2q_1 - p_1q_2}{2(q_1^2 + q_2^2)}. \quad (5.22)$$

Substituindo as equações (5.18), (5.19), (5.21), (5.22) na equação (5.16), leva para o hamiltoniano

$$H = \frac{1}{4} \left[ \frac{(p_1^2 + p_2^2)}{2m(q_1^2 + q_2^2)} \right] + \frac{b}{(q_1^2 + q_2^2)} + a(q_1^2 + q_2^2). \quad (5.23)$$

Conseqüentemente, a hiper-superfície no espaço de fase definido por  $H = E$  proporciona

$$\frac{(p_1^2 + p_2^2)}{2m} - 4E(q_1^2 + q_2^2) + 4a(q_1^2 + q_2^2)^2 = -4b, \quad (5.24)$$

onde  $p_1$  e  $p_2$  são os momentos canônicos conjugados. A equação (5.24) pode ser escrita

como

$$\left[ \frac{(p_1^2 + p_2^2)}{2m} - 4E(q_1^2 + q_2^2) + 4a(q_1^2 + q_2^2)^2 + 4b \right] \star \psi(q_1, p_1, q_2, p_2) = 0. \quad (5.25)$$

Observe que a equação (5.25) é obtido do hamiltoniano clássico através do produto estrela. Portanto, o mapeamento de Bohlin que leva à equação (5.24) é uma transformação clássica. Por esta razão, a teoria de perturbação é usada para analisar a equação (5.25). Assim, a equação no espaço de fase é dada por

$$\left[ \widehat{H}_0 + \widehat{H}_1 \right] \star \psi(q_1, p_1, q_2, p_2) = -4b\psi(q_1, p_1, q_2, p_2), \quad (5.26)$$

em que  $\widehat{H}_0 = \frac{(p_1^2 + p_2^2)}{2} - 4E(q_1^2 + q_2^2)$  e  $\widehat{H}_1 = 4a(q_1^2 + q_2^2)^2$ .

A equação para  $\widehat{H}_0$  tem a forma

$$\widehat{H}_0 \psi^{(0)}(q_1, p_1, q_2, p_2) = b_{n_1, n_2}^{(0)} \psi^{(0)}(q_1, p_1, q_2, p_2), \quad (5.27)$$

onde  $\psi^{(0)}(q_1, p_1, q_2, p_2)$  corresponde à autofunção do hamiltoniano não perturbado.

Definindo os operadores

$$\widehat{a} = \sqrt{\frac{mW}{2k}} \left( q_1 \star + \frac{ip_1 \star}{mW} \right), \quad (5.28)$$

$$\widehat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{mW}{2k}} \left( q_1 \star - \frac{ip_1 \star}{mW} \right), \quad (5.29)$$

$$\widehat{b} = \sqrt{\frac{mW}{2k}} \left( q_2 \star + \frac{ip_2 \star}{mW} \right), \quad (5.30)$$

$$\widehat{b}^\dagger = \sqrt{\frac{mW}{2k}} \left( q_2 \star - \frac{ip_2 \star}{mW} \right). \quad (5.31)$$

De modo que  $-4E = \frac{mW^2}{2}$ , e os operadores estrela  $(q_i \star)$ ,  $(p_i \star)$  são dados por

$$(q_i \star) = q_i + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad (5.32)$$

$$(p_i \star) = p_i - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q_i}, \quad (5.33)$$

então, o hamiltoniano fica escrito como

$$\widehat{H} = \frac{(p_1^2 \star + p_2^2 \star)}{2} - 4E(q_1^2 \star + q_2^2 \star) + 4a(q_1^2 \star + q_2^2 \star)^2. \quad (5.34)$$

O hamiltoniano não perturbado é definido como

$$\widehat{H}_0 = \frac{(p_1^2 \star + p_2^2 \star)}{2} - 4E(q_1^2 \star + q_2^2 \star), \quad (5.35)$$

e a parte perturbada corresponde a

$$\widehat{H}_1 = 4a(q_1^2 \star + q_2^2 \star)^2. \quad (5.36)$$

A equação a ser analisada é dada por

$$\widehat{H} \star \psi(q_1, p_1, q_2, p_2) = -4b\psi(q_1, p_1, q_2, p_2). \quad (5.37)$$

E, a equação não perturbada

$$\widehat{H}_0 \psi^{(0)}(q_1, p_1, q_2, p_2) = b_{n_1, n_2}^{(0)} \psi^{(0)}(q_1, p_1, q_2, p_2). \quad (5.38)$$

A parte não perturbada,  $\widehat{H}_0$ , tem soluções da seguinte forma

$$\psi_{n_1, n_2}^0(q_1, p_1, q_2, p_2) = \Phi_{n_1}(q_1, p_1) \Gamma_{n_2}(q_2, p_2), \quad (5.39)$$

Os operadores atuantes nos vetores de estados correspondem a

$$\widehat{a} \Phi_{n_1} = \sqrt{n_1} \Phi_{n_1-1}, \quad (5.40)$$

$$\widehat{a}^\dagger \Phi_{n_1} = \sqrt{n_1 + 1} \Phi_{n_1+1}, \quad (5.41)$$

$$\widehat{b} \Gamma_{n_2} = \sqrt{n_2} \Gamma_{n_2-1}, \quad (5.42)$$

$$\widehat{b}^\dagger \Gamma_{n_2} = \sqrt{n_2 + 1} \Gamma_{n_2+1}. \quad (5.43)$$

Utilizando as relações  $\widehat{a} \Phi_0 = 0$ ,  $\widehat{b} \Gamma_0 = 0$ , a solução do estado fundamental resulta ser

$$\psi_{0,0}^{(0)}(q_1, p_1, q_2, p_2) = N e^{-(q_1^2 + p_1^2)} L_{n_1}(q_2^2 + p_2^2) e^{-(q_2^2 + p_2^2)} L_{n_2}(q_2^2 + p_2^2), \quad (5.44)$$

onde  $L_{n_1}$ ,  $L_{n_2}$  são polinômios de Laguerre e  $N$  é uma constante de normalização.

Em consequência, a solução para perturbações de primeira ordem é dada por

$$\begin{aligned} \psi_{n_1, n_2}^{(1)}(q_1, p_1, q_2, p_2) &= \psi_{n_1, n_2}^{(0)}(q_1, p_1, q_2, p_2) \\ &+ \sum_{\substack{m_1 \neq n_1, \\ m_2 \neq n_2}} \frac{\langle \psi_{m_1, m_2}^{(0)}(q_1, p_1, q_2, p_2) | \widehat{H}_1 | \psi_{n_1, n_2}^{(0)}(q_1, p_1, q_2, p_2) \rangle}{b_{n_1, n_2}^{(0)} - b_{m_1, m_2}^{(0)}} \\ &\times \psi_{m_1, m_2}^{(0)}(q_1, p_1, q_2, p_2). \end{aligned} \quad (5.45)$$

Assim, o estado fundamental do méson  $c\bar{c}$  é

$$\psi_{0,0}^{(1)} = \psi_{0,0}^{(0)} + \frac{a}{2W^3} \left[ -4\sqrt{2}\psi_{2,0}^{(0)} - \psi_{2,2}^{(0)} - \frac{7}{2}\sqrt{2}\psi_{0,2}^{(0)} - \frac{\sqrt{6}}{2}\psi_{0,4}^{(0)} \right]. \quad (5.46)$$

E para estados excitados do méson  $c\bar{c}$ , as funções de onda são

$$\psi_{1,0}^{(1)} = \psi_{1,0}^{(0)} + \frac{a}{2W^3} \left[ -\frac{\sqrt{30}}{2}\psi_{5,0}^{(0)} + \frac{-1 - 11\sqrt{6}}{2}\psi_{3,0}^{(0)} - 3\psi_{3,2}^{(0)} - 5\sqrt{2}\psi_{1,2}^{(0)} - \frac{\sqrt{6}}{2}\psi_{1,4}^{(0)} \right], \quad (5.47)$$

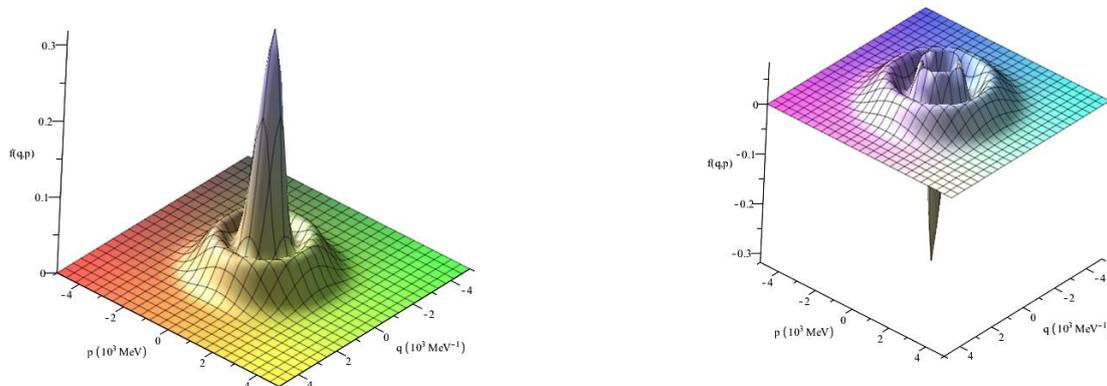
$$\psi_{0,1}^{(1)} = \psi_{0,1}^{(0)} + \frac{a}{2W^3} \left[ -\frac{\sqrt{30}}{2}\psi_{0,5}^{(0)} + \frac{-1 - 11\sqrt{6}}{2}\psi_{0,3}^{(0)} - 3\psi_{2,3}^{(0)} - 5\sqrt{2}\psi_{2,1}^{(0)} - \frac{\sqrt{6}}{2}\psi_{4,1}^{(0)} \right]. \quad (5.48)$$

A função de Wigner para o méson  $c\bar{c}$  é dada por

$$f_w(q_1, p_1, q_2, p_2) = \psi_{n_1, n_2}^{(1)}(q_1, p_1, q_2, p_2) \star \psi_{n_1, n_2}^{\dagger(1)}(q_1, p_1, q_2, p_2). \quad (5.49)$$

Os gráficos 5.3(a) e 5.3(b) mostram o comportamento da função de Wigner associada ao estado fundamental e ao primeiro estado excitado para o méson  $c\bar{c}$ . Deve-se notar que todos os gráficos consideram as coordenadas  $q_2, p_2$  constantes para representar uma figura tridimensional, enquanto  $q_1 = q, p_1 = p$ . No gráfico 5.3(b), vê-se claramente a presença de valores negativos para a função de Wigner no nível excitado do méson  $c\bar{c}$ . No gráfico 5.3(a), a função de Wigner parece estritamente positiva para o estado fundamental.

**Figura 5.3:** Função de Wigner para os níveis de energia  $n = 0$  figura 5.3(a) e  $n = 1$  figura 5.3(b) para o méson  $c\bar{c}$ .



(a) Função de Wigner para o  $n = 0$  do méson  $c\bar{c}$ .

(b) Função de Wigner para o  $n = 1$  do méson  $c\bar{c}$ .

Fonte: [5]

Com a função de Wigner determinada para o méson  $c\bar{c}$ , podemos calcular o parâmetro de negatividade para este sistema, este parâmetro está correlacionado com a não classicidade do sistema [92]. Os resultados deste cálculo são mostrados na tabela (5.2). Como pode ser visto na tabela (5.2), o parâmetro de negatividade aumenta quando  $n_1, n_2$  crescem. O parâmetro de negatividade é uma ferramenta relevante no contexto do formalismo de Wigner, pois está relacionado tanto com a não classicidade dos sistemas físicos quanto com o comportamento caótico. Nesse sentido, analisando a negatividade da função de Wigner é possível estudar aspectos que o formalismo usual da função de onda não permite. Então, o estudo no espaço de fase é crucial para entender mais sobre a natureza caótica.

**Tabela 5.2:** Parâmetro de negatividade  $\eta(\psi)$  para os níveis  $n_1, n_2 = 0, 1$ .

$n_1, n_2$	$\eta(\psi)$
0,0	0
0,1	0.230
1,0	0.230

Fonte: [5]

Além disso, no caso do potencial linear na representação do espaço de fase, o espectro do sistema quark-antiquark foi melhorado escrevendo a equação de Schrödinger simplética em termos das derivadas fracionárias generalizadas oriundas do cálculo fracionário. O Cálculo Fracionário representa uma extensão natural do cálculo clássico, fundamentada na generalização dos operadores diferenciais e integrais para ordens arbitrárias, não necessariamente inteiras ou mesmo reais. Embora suas raízes históricas remontem a mais de três séculos com contribuições fundamentais de nomes como Leibniz, Euler, Riemann, Liouville, Abel e Caputo, durante muito tempo essa área permaneceu restrita ao domínio teórico, frequentemente percebida como um ramo esotérico da matemática pura, desprovido de aplicação direta.

Atualmente, o cálculo fracionário desempenha um papel central na modelagem de sistemas complexos e em diversas áreas como viscoelasticidade, controle de sistemas dinâmicos, transporte inteligente, dinâmica anômala e física de partículas, evidenciando sua versatilidade como ferramenta de descrição matemática precisa. No próximo capítulo, o potencial de Cornell é analisado incorporando a representação fracionária no domínio da mecânica quântica simplética.

## Capítulo 6

# Representação Fracionária da Interação Quark-Antiquark Efetiva na Estrutura da Mecânica Quântica Simplética

Neste capítulo, um sistema de interação forte descrito por um estado ligado de um quark-antiquark na estrutura simplética da mecânica quântica é considerado. A versão simplética não relativística da equação de Schrödinger com o termo linear do potencial fenomenológico de Cornell é derivada neste formalismo. Nesse cenário, o estudo é desenvolvido com base na abordagem das derivadas fracionárias generalizadas (ou derivadas fracionárias de Abu-Shady-Kaabar) inserida no contexto da mecânica quântica simplética. Então, a função de Wigner associada ao méson  $c\bar{c}$  é calculada.

O objetivo fundamental do presente capítulo é investigar a aplicabilidade da abordagem fracionária ao estudo da dinâmica de quarks na representação do espaço de fase.

Então, o comportamento da função de Wigner para o estado fundamental do méson  $c\bar{c}$  é analisado sob a perspectiva do cálculo fracionário. Para este propósito, a equação de Schrödinger simplética é reescrita na estrutura fracionária com o termo linear do potencial de Cornell para o méson pesado  $c\bar{c}$ . Além dos aspectos físicos, a análise oferece um procedimento mais simples para estudar esse tipo de sistema.

O presente capítulo está disposto da seguinte forma. Na Seção 6.1, o conceito de derivada fracionária generalizada é implementada na equação de Schrödinger simplética para a parte linear do modelo fenomenológico do potencial de Cornell. Nesse propósito objetivando investigar o efeito dos parâmetros fracionários no comportamento do méson  $c\bar{c}$ . A Seção 6.2 é dedicada à análise dos resultados.

Os resultados apresentados nesta seção foram oriundos do trabalho:

- R. R. Luz, M. Abu-Shady, G. X. A. Petronilo, A. E. Santana, and R. G. G. Amorim, Adv. in High Energy Phys. **2023**, 7 (2023). <https://doi.org/10.1155/2023/8366154> [8].

## 6.1 Equação de Schrödinger simplética fracionária para o potencial de confinamento

Uma vez obtida as soluções para a equação simplética de Schrödinger, seguiremos realizando a generalização para uma equação de Schrödinger de espaço fracionário que descreve duas partículas interagindo entre si pela parte linear do potencial de Cornell. Utilizando os resultados do capítulo anterior, a equação simplética de Schrödinger assume a forma [5]

$$\frac{(p^\star)^2}{2m}\psi(q, p) + \lambda(q^\star)\psi(q, p) = E\psi(q, p). \quad (6.1)$$

Usando as equações (3.10) e (3.11) em (6.1), leva a

$$\frac{1}{2m}\left(p^2 - ip\partial_q - \frac{1}{4}\partial_q^2\right)\psi + \lambda\left(q + \frac{i}{2}\partial_p\right)\psi = E\psi, \quad (6.2)$$

onde são empregadas as unidades naturais, tal que  $\hbar = 1$ . Aplicando a transformação  $\omega = \frac{p^2}{2m} + \lambda q$ , esta equação é lida

$$\frac{\partial^2\psi(\omega)}{\partial\omega^2} - \frac{\omega - E}{\eta}\psi(\omega) = 0. \quad (6.3)$$

sendo  $\eta = \frac{\lambda^2}{8m}$ . Escrevendo a equação (6.3) na forma fracionária a partir de [67], segue que

$$\frac{1}{\zeta^{2(1-\alpha)}}D^\alpha D^\alpha\psi(\omega) - \frac{\omega - E}{\eta}\psi(\omega) = 0, \quad (6.4)$$

no qual

$$D^\alpha\psi(\omega) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)}\omega^{1-\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial\omega}, \quad (6.5)$$

e  $\zeta$  é um parâmetro de escala,  $0 < \alpha \leq 1$  e  $0 < \beta \leq 1$ . Por isso,

$$D^\alpha D^\alpha\psi(\omega) = \left(\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)}\right)^2\left[\omega^{2-2\alpha}\frac{d^2\psi}{d\omega^2} + (1 - \alpha)\omega^{1-2\alpha}\frac{d\psi}{d\omega}\right], \quad (6.6)$$

logo, a equação (6.3) na forma fracionária é escrita como

$$\frac{d^2\psi}{d\omega^2} + \frac{(1 - \alpha)}{\omega}\frac{d\psi}{d\omega} - \left(\frac{\omega - E}{A\eta}\right)\omega^{2\alpha-2}\psi = 0, \quad (6.7)$$

em que

$$A = \frac{1}{\zeta^{2(1-\alpha)}} \left( \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} \right)^2, \quad (6.8)$$

sendo  $\zeta$  um fator de escala. Vale notar que se  $\alpha = \beta = 1$  obtém-se a equação (6.3) original.

## 6.2 Análise dos Resultados

Nesta seção, para obter uma função analítica da equação (6.7), o parâmetro fracionário é tomado como  $\alpha = 0.5$  (Para outros valores, métodos perturbativos podem ser usados. Isso não será abordado no presente trabalho). Dessa forma, tem-se que

$$\frac{d^2\psi}{d\omega^2} + \frac{1}{2\omega} \frac{d\psi}{d\omega} - \left( \frac{\omega - E}{A\eta\omega} \right) \psi = 0. \quad (6.9)$$

E, a solução desta equação é dada por

$$\psi = C_1 \sqrt{\omega} e^{-\frac{\omega}{\kappa}} M \left( -\frac{-3\sqrt{A\eta} + 2E}{4\sqrt{A\eta}}, 3/2, \frac{2\omega}{\sqrt{A\eta}} \right) + C_2 \sqrt{\omega} e^{-\frac{\omega}{\kappa}} U \left( -\frac{-3\sqrt{A\eta} + 2E}{4\sqrt{A\eta}}, 3/2, \frac{2\omega}{\sqrt{A\eta}} \right). \quad (6.10)$$

onde  $C_1, C_2$  são constantes e  $M(a, b, z), U(a, b, z)$  são as funções de Kummer. Pode-se considerar  $U(a, b, z)$  como uma solução física, pois é a única que é quadrado integrável. Como resultado, pode-se impor que  $C_1 = 0$ . Adicionalmente, se  $a = -n$ , a série  $U(a, b, z)$  torna-se um polinômio em  $\omega$  de grau não superior a  $n$ , onde  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Esta circunstância nos permite escrever

$$\psi_n(\omega) = C_n \sqrt{\omega} e^{-\frac{\omega}{\kappa}} U \left( -n, 3/2, \frac{2\omega}{\kappa} \right). \quad (6.11)$$

onde  $\kappa = \sqrt{A\eta}$ , e

$$E_n = \kappa \left( 2n + \frac{3}{2} \right). \quad (6.12)$$

Observe que a energia não depende explicitamente da energia cinética, portanto a condição inicial deve ser  $q = p = 0$ .

Para o estado fundamental, fazendo a substituição em  $q$  e  $p$  novamente, tem-se

$$\psi_0(q, p) = C_0 \sqrt{\frac{p^2}{2m} + \lambda q} \exp \left( -\frac{\frac{p^2}{2m} + \lambda q}{\kappa} \right), \quad (6.13)$$

e

$$E_0 = \kappa \left( \frac{3}{2} \right). \quad (6.14)$$

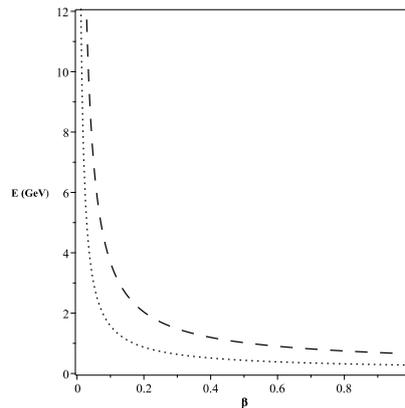
Usando o fato de que  $\psi(q, p)$  é real, a função de Wigner normalizada do estado fundamental é dada por

$$f_{W_0} = \psi_0 \star \psi_0 = C_0^2(\kappa) \sqrt{\frac{p^2}{2m} + \lambda q} \exp\left(-\frac{\frac{p^2}{2m} + \lambda q}{\kappa}\right), \quad (6.15)$$

onde a constante  $C_0(\kappa)$  depende do valor de  $\kappa$ .

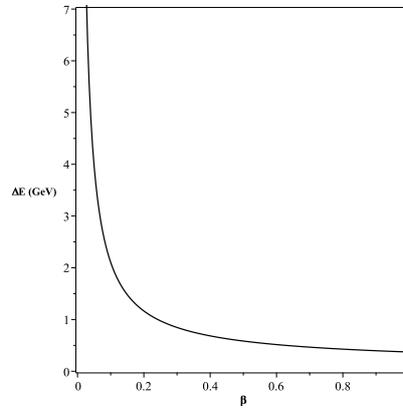
Na figura 6.1, o comportamento do  $E_0 = E_0(\beta)$  e  $E_1 = E_1(\beta)$  é descrito. Na figura 6.2, a diferença  $\Delta E = E_1 - E_0$  é grafada em função do parâmetro  $\beta$ , considerando  $\zeta = 1$ . Esta diferença para  $\beta \approx 0.3$  atingiu a ordem de valor das medições experimentais [21]. Vale ressaltar aqui que apenas a parte linear do potencial de Cornell não fornece um espectro de acordo com a medição experimental [21, 23]. Aqui como temos os parâmetros das derivadas fracionárias, esses resultados podem ser melhorados para valores de  $\zeta$  e  $\beta$ . O próximo ponto é explorar o comportamento da função de Wigner a fim de detalhar o comportamento do confinamento de quark-antiquark. Além disso, é tratado o caso geral do potencial de Cornell no próximo capítulo.

**Figura 6.1:** A linha pontilhada (.....) representa o nível fundamental de energia,  $E_0$ , e a linha tracejada (- - - -) representa o primeiro nível de energia excitado,  $E_1$ ; ambos em função do parâmetro  $\beta$ , com  $\zeta = 1$ . As massas dos quarks são tomadas como  $m = 0,336 \text{ MeV}$  e  $\lambda = 0,22 \text{ MeV}^2$  [21, 23].



Fonte: [8]

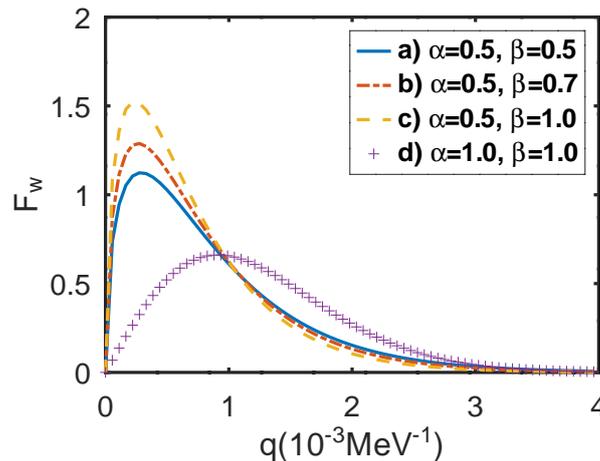
**Figura 6.2:** A diferença dos níveis de energia  $\Delta E = E_1 - E_0$  em função do parâmetro  $\beta$ , com  $\varsigma = 1$ .



Fonte: [8]

A função de Wigner para o parâmetro fracionário  $\alpha = 0.5$ , e diferentes valores de  $\beta$  é apresentada na figura 6.3. A figura compara as funções fracionárias de Wigner com a original, que é  $\alpha = \beta = 1$ . Observamos que os picos diminuem diminuindo  $\beta$ .

**Figura 6.3:** Comparação das funções fracionárias de Wigner e não fracionárias no corte de  $\frac{p^2}{2m} = 0$  na equação (6.15). Aumentando o valor de  $\frac{p^2}{2m}$  no corte da função Wigner mostrará um deslocamento para a esquerda, dando assim um valor máximo de  $p$  para a existência da função. A função Wigner original é fornecida quando  $\alpha = \beta = 1$ .

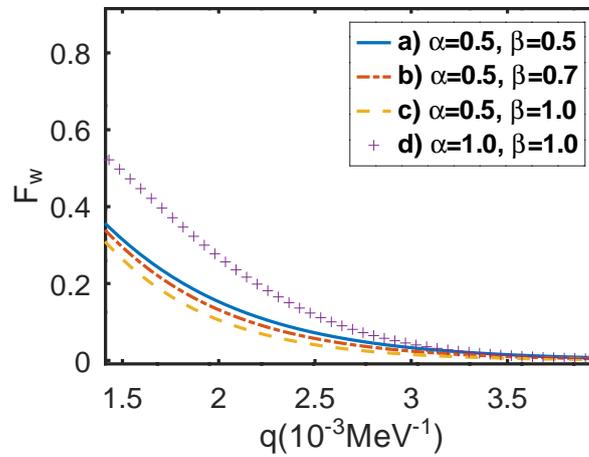


Fonte: [8]

As curvas a) a c) da figura 6.3 mostram que aumentando  $\beta$  aumentam os picos das

funções de Wigner. Além disso, vemos que os picos diminuem para zero quando  $\beta$  vai para zero.  $\beta$  funciona como parâmetro de ajuste para a função Wigner fracionária do méson  $c\bar{c}$ . A curva d) é a função de Wigner original sem os parâmetros fracionários para o méson  $c\bar{c}$  [5]. Na figura 6.4 mostra que aumentando  $\beta$  a distância  $q$  diminui. O valor máximo de  $\beta$  é o mais adequado para o caso de  $\alpha = 0,5$ . Quando comparado com a evidência experimental; para comparação, o valor experimental para a distância máxima é  $q_0 = 4.077 \cdot 10^{-3} MeV^{-1}$  [4].

**Figura 6.4:** É apresentada apenas uma pequena parte da figura 6.3. Observa-se que a distância máxima de existência diminui com a diminuição de  $\beta$ .



Fonte: [8]

Para o caso do potencial geral de Cornell, equação (1.1), pode-se linearizar para obter uma forma de aproximação. Na primeira aproximação

$$V(q) = -\frac{2\sigma}{q_0} + \left(\lambda + \frac{\sigma}{q_0^2}\right)q, \quad (6.16)$$

de modo que  $a, b$  e  $q_0$  são constantes. Então o hamiltoniano é

$$(H\star)\psi = \frac{(p\star)^2}{2m}\psi + \left(\lambda + \frac{\sigma}{q_0^2}\right)(q\star)\psi = \left(E + \frac{2\sigma}{q_0}\right)\psi. \quad (6.17)$$

Esta equação leva a

$$(H\star)\psi = \frac{(p\star)^2}{2m}\psi + \lambda'(q\star)\psi = E'\psi, \quad (6.18)$$

Vale notar que a equação (6.18) é igual à equação (6.1) com  $\lambda' = \lambda + \frac{\sigma}{q_0^2}$  e  $E' = E + \frac{2\sigma}{q_0}$ .

Portanto, a mesma análise se aplica aqui. A energia é dada por

$$E_n = \kappa \left( 2n + \frac{3}{2} \right) - \frac{2\sigma}{q_0}, \quad (6.19)$$

onde  $\kappa = \sqrt{A\eta}$  e  $\eta = \frac{\lambda'^2}{8m}$ . Vale ressaltar que, quando  $q \rightarrow 0$ , no potencial geral de Cornell tem-se o  $q^{-1}$  que é responsável pela interação em distâncias curtas e correspondendo a uma troca de glúon. Além disso, na tabela 6.1 são apresentados os resultados teóricos do modelo fracionário para  $\alpha = 0,5$ ,  $\beta = 1,0$ , calculado a partir da equação (6.12), e os respectivos valores experimentais. As comparações foram estabelecidas apenas para os estados 1S, pois nosso modelo teórico é aplicável apenas a esses estados. Não incluímos o spin em nosso modelo teórico. Notamos que há uma boa precisão entre os resultados teóricos e experimentais <sup>[118]</sup>, melhor do que os obtidos por outros modelos teóricos <sup>[21]</sup>.

**Tabela 6.1:** *Massas Experimentais e Teóricas (em MeV) dos mésons charmônio.*

Méson	Potencial Cornell Fracionário	Dados Experimentais <sup>[118]</sup>
$J/\Psi(1S)$	3,1003	3,0969
$\Upsilon(1S)$	9,4818	9,4603
$\eta(1S)$	2,7992	2,9796

Fonte: <sup>[8]</sup>



## Capítulo 7

# Sobre o Confinamento de Quark-Antiquark Fracionário e Mecânica Quântica Simplética

Este capítulo apresenta os resultados obtidos em nosso estudo sobre o confinamento de pares quark-antiquark fracionários e sua aplicação na descrição de mésons pesados. A investigação se concentrou especificamente nos sistemas charm-anticharm ( $c\bar{c}$ ), bottom-antibottom ( $b\bar{b}$ ) e o méson ( $b\bar{c}$ ), que representam importantes laboratórios para a compreensão de setores da Cromodinâmica Quântica (QCD) em regimes de baixas energias.

O estudo explorou os sistemas de estados ligados bidimensionais caracterizados pelos respectivos mésons charm-anticharm, bottom-antibottom e bottom-anticharm na perspectiva das derivadas fracionárias generalizada, incorporando o arcabouço teórico da mecânica quântica simplética e empregando o método Nikiforov-Uvarov fracionário estendido. Investigamos o comportamento da função de Wigner, definida na representação do espaço de fase, para o estado fundamental dos sistemas de mésons pesados, observando os efeitos dos parâmetros fracionários. Além do mais, o espectro dos quarkônios pesados (mésons  $c\bar{c}$ ,  $b\bar{b}$  e  $b\bar{c}$ ) é determinado. Através da análise comparativa com dados experimentais e outras previsões teóricas, buscamos validar o modelo proposto (potencial de Cornell modificado) e contribuir para uma compreensão mais aprofundada.

A motivação para usar a função de Wigner é que, em tempos recentes, ela tem sido estudada para sistemas fortemente ligados em diversos modelos. Ao mesmo tempo em que ela oferece características alternativas para analisar a natureza de um estado quântico do sistema tais como não-classicalidade e caoticidade, conceitos esses importantes em linhas de pesquisa como computação quântica e informação quântica, mas também para a Cromodinâmica Quântica, em particular no estudo das distribuições de quarks.

Este capítulo é organizado nas seções subsequentes da seguinte forma. Na Seção [7.1](#),

alguns aspectos da equação de Schrödinger representada no espaço de fase e o método Nikiforov-Uvarov fracionário generalizado são brevemente revisados para fixar a notação. A Seção 7.2 introduz a estrutura fracionária do quark-antiquark para a equação de Schrödinger simplética. A Seção 7.3 é dedicada à análise dos resultados.

Os resultados desta seção foram retirados do trabalho:

- M. Abu-Shady, R.R. Luz, G.X.A. Petronilo, A.E. Santana, & R.G.G. Amorim, *Int. J. Mod. Phys. A*, **39** (02n03), 2450011 (2024).  
<https://doi.org/10.1142/S0217751X24500118>

## 7.1 O Método Nikiforov-Uvarov Generalizado Fracionário

O método Nikiforov-Uvarov-(NU) generalizado representa uma expansão do método Nikiforov-Uvarov-(NU) padrão, com ambas as técnicas sendo implementadas principalmente no âmbito da mecânica quântica. Essa abordagem reside na determinação de autovalores e autofunções para uma gama de equações, incluindo as equações de Schrödinger e Dirac, assim como equações suscetíveis à transformação para a forma hipergeométrica, ou seja [71, 74, 77, 120, 121, 122, 123, 124],

$$D^\alpha [D^\alpha \psi(s)] + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} D^\alpha \psi(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \psi(s) = 0. \quad (7.1)$$

Aqui,  $\sigma(s)$  e  $\tilde{\sigma}(s)$  são polinômios de segundo grau máximo de  $\alpha$  e  $2\alpha$ , respectivamente, e  $\tilde{\tau}(s)$  tem um grau máximo de  $\alpha$ , de modo que

$$D^\alpha \psi(s) = I s^{1-\alpha} \psi'(s), \quad (7.2)$$

$$D^\alpha [D^\alpha \psi(s)] = I^2 [(1-\alpha)s^{1-2\alpha} \psi'(s) + s^{2-2\alpha} \psi''(s)]. \quad (7.3)$$

Onde  $I = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}$  e os parâmetros fracionários satisfazem a condição,  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $0 < \beta \leq 1$ . Ao substituir as Eqs. (7.2) e (7.3) na Eq. (7.1), segue-se que

$$\psi''(s) + \frac{\tilde{\tau}_f(s)}{\sigma_f(s)} \psi'(s) + \frac{\tilde{\sigma}_f(s)}{\tilde{\sigma}_f^2(s)} \psi(s) = 0, \quad (7.4)$$

onde o subscrito  $f$  indica fracionário e

$$\tilde{\tau}_f(s) = (1 - \alpha)s^{-\alpha}\sigma(s) + I^{-2}\tilde{\tau}(s), \quad (7.5)$$

$$\sigma_f(s) = s^{1-\alpha}\sigma(s), \quad (7.6)$$

$$\tilde{\sigma}_f(s) = I^{-2}\tilde{\sigma}(s). \quad (7.7)$$

Escrevendo

$$\psi(s) = \phi(s)y(s), \quad (7.8)$$

então, a Eq. (7.4) leva à seguinte equação hipergeométrica:

$$\sigma_f(s)y''(s) + \tau_f(s)y'(s) + \lambda y(s) = 0, \quad (7.9)$$

onde  $\phi(s)$  é representada como a derivada logarítmica, isto é,

$$\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} = \frac{\pi_f(s)}{\sigma_f(s)}, \quad (7.10)$$

$$(7.11)$$

e

$$\tau_f(s) = \tilde{\tau}_f(s) + 2\pi_f(s). \quad (7.12)$$

Para soluções de estados ligado, é necessário que

$$\tau'(s) < 0. \quad (7.13)$$

A equação de autovalores é dada por

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau'_f(s) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''_f(s), \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.14)$$

e  $y(s)$  é uma função do tipo hipergeométrica, cujas soluções polinomiais são obtidas a partir da relação de Rodrigues

$$y(s) = y_n(s) = \frac{B_n}{\rho(s)} \frac{d^n}{ds^n} [\sigma_f^n(s)\rho(s)], \quad (7.15)$$

onde  $B_n$  é uma constante de normalização e  $\rho(s)$  é uma função peso que satisfaz a seguinte

equação

$$\frac{d\omega(s)}{ds} = \frac{\tau(s)}{\sigma_f(s)}\omega(s), \quad (7.16)$$

tal que  $\omega(s) = \sigma_f(s)\rho(s)$ . A função  $\pi_f(s)$  é definida como

$$\pi_f(s) = \frac{\sigma'_f(s) - \tilde{\tau}_f(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'_f(s) - \tilde{\tau}_f(s)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}_f(s) + K\sigma_f(s)}, \quad (7.17)$$

e

$$\lambda = K + \pi'_f(s), \quad (7.18)$$

onde  $\pi_f(s)$  é um polinômio de primeiro grau. Se as expressões sob a raiz quadrada forem quadrados de expressões, os valores de  $K$  na Eq. (7.17) podem ser determinados. Isso é possível se o seu discriminante for zero [77, 78, 79, 121]. A seguir, esta metodologia é implementada para resolver a equação de Schrödinger simplética no domínio das derivadas fracionárias generalizadas para o potencial de Cornell.

## 7.2 Sistema Quark-Antiquark Fracionário e Equação de Schrödinger Simplética

Considere um estado ligado de quark-antiquark pesados, como os mésons  $c\bar{c}$ ,  $b\bar{b}$  de massa  $m$ . Essas duas partículas interagem entre si por meio do potencial fenomenológico de Cornell, dado na Eq. (1.1). A série de Taylor em torno de um ponto  $q_0$  pode ser usada para derivar o potencial de Cornell, que é escrito, até a aproximação de segunda ordem, como:

$$V(q) = -\frac{3b}{q_0} + \left(a + \frac{3b}{q_0^2}\right)q - \frac{b}{q_0^3}q^2, \quad (7.19)$$

onde  $a, b$  são constantes puramente fenomenológicas do modelo, e  $q_0$  é uma coordenada espacial relativa específica entre os dois quarks. A equação de Schrödinger simplética estacionária é obtida a partir da Eq. (5.8), levando explicitamente a

$$H \star \psi = \frac{p^2}{2m} \star \psi + \left(a + \frac{3b}{q_0^2}\right)q \star \psi - \frac{b}{q_0^3}q^2 \star \psi = \left(E + \frac{3b}{q_0}\right)\psi. \quad (7.20)$$

Aqui,  $E$  é o autovalor de  $\widehat{H} = H \star$  e  $m = \frac{m_q m_{\bar{q}}}{m_q + m_{\bar{q}}}$  representa a massa reduzida para a partícula de quarkônio ( $c\bar{c}$ ,  $b\bar{b}$  e  $b\bar{c}$ ). A Eq. (7.20) é reescrita como

$$H \star \psi = \frac{p^2}{2m} \star \psi + \lambda q \star \psi - \sigma q^2 \star \psi = E' \psi, \quad (7.21)$$

onde  $\lambda = \left(a + \frac{3b}{q_o^3}\right)$ ,  $\sigma = \frac{b}{q_o^3}$  e  $E' = E + \frac{3b}{q_o}$ .

Utilizando as Eq. (5.1), e Eq. (5.2) na Eq. (7.21), a equação de Schrödinger simplética de estado estacionário se lê

$$\frac{1}{2m} \left( p^2 - ip\partial_q - \frac{1}{4}\partial_q^2 \right) \psi + \lambda \left( q + \frac{i}{2}\partial_p \right) \psi - \sigma \left( q^2 - iq\partial_p - \frac{1}{4}\partial_p^2 \right) \psi = E' \psi. \quad (7.22)$$

(Estamos usando  $\hbar = 1$ ). Utilizando a transformação  $z = \frac{p^2}{2m} + \lambda q - \sigma q^2$ , obtém-se <sup>[5]</sup>

$$\left( z - \frac{\lambda^2}{4\sigma} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{2m}{\sigma} \left( z - E' \right) \psi = 0 \quad (7.23)$$

ou

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \omega^2} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \psi}{\partial \omega} + \frac{2m}{\omega \sigma} \left( \omega + \frac{\lambda^2}{4\sigma} - E' \right) \psi = 0, \quad (7.24)$$

onde  $\omega = z - \frac{\lambda^2}{4\sigma}$ .

Considerando o ansatz

$$\psi = \omega^{-\frac{1}{2}} R(\omega), \quad (7.25)$$

as expressões para as derivadas são dadas por

$$\frac{\partial \psi}{\partial \omega} = \omega^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{2} \omega^{-\frac{3}{2}} R(\omega), \quad (7.26)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \omega^2} = \omega^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 R}{\partial \omega^2} - \omega^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{3}{4} \omega^{-\frac{5}{2}} R(\omega). \quad (7.27)$$

Ao substituir as Eqs. (7.25), (7.26) e (7.27) na Eq. (7.24), após alguns cálculos, obtém-se

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \omega^2} + \frac{1}{4\sigma\omega^2} \left( \sigma + 8m\omega \left( \omega + \frac{\lambda^2}{4\sigma} - E' \right) \right) R(\omega) = 0. \quad (7.28)$$

Utilizando a estrutura da derivada fracionária generalizada <sup>[67]</sup>, a Eq. (7.28) leva a

$$D^\alpha D^\alpha R(\omega) + \frac{1}{4\sigma\omega^2} \left( \sigma + 8m\omega \left( \omega + \frac{\lambda^2}{4\sigma} - E' \right) \right) R(\omega) = 0. \quad (7.29)$$

Da Eq. (7.3), temos

$$D^\alpha D^\alpha R(\omega) = \left( \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} \right)^2 \left[ \omega^{2-2\alpha} \frac{\partial^2 R}{\partial \omega^2} + (1 - \alpha) \omega^{1-2\alpha} \frac{\partial R}{\partial \omega} \right]. \quad (7.30)$$

Considerando esta equação, a Eq. (7.29) se lê

$$\frac{d^2 R}{d\omega^2} + \frac{(1 - \alpha)}{\omega'} \frac{dR}{d\omega} + \frac{1}{4\sigma A^2 \omega'^2} \left[ \sigma + 8m\omega'^{2\alpha} + \frac{\lambda'^2 8m\omega'^\alpha}{4\sigma} - 8m\omega'^\alpha E \right] R(\omega) = 0, \quad (7.31)$$

onde

$$A = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} \quad ; 0 < \alpha \leq 1 \quad ; 0 < \beta \leq 1. \quad (7.32)$$

Comparando a Eq. (7.4) e a Eq. (7.31), definimos as seguintes equações a fim de usar o método de Nikiforov-Uvarov (NU) [74]:

$$\tilde{\tau}_f(\omega) = 1 - \alpha \quad ; \quad \sigma_f = \omega \quad (7.33)$$

e

$$\tilde{\sigma}_f = \frac{1}{4\sigma A^2} \left[ \sigma + 8m' \omega'^{2\alpha} + \frac{8m\omega'^\alpha \lambda'^2}{4\sigma} - 8m\omega'^\alpha E \right]. \quad (7.34)$$

A abordagem Nikiforov-Uvarov-(NU) é realizada considerando a Eq. (7.17) para escrever  $\pi_f$  como

$$\pi_f = \frac{\sigma'_f(\omega') - \pi_f(\omega')}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_f(\omega') - \pi_f(\omega')}{2} \right)^2 - \tilde{\sigma}_f(\omega') + K\sigma_f(\omega)}. \quad (7.35)$$

Ao substituir as Eqs. (7.33) e (7.34) na Eq. (7.35),  $\pi_f$  se lê

$$\pi_f = \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - A_1 - A_2 \omega'^\alpha - A_3 \omega'^{2\alpha} + \omega K}. \quad (7.36)$$

O parâmetro constante  $K$  é determinado utilizando a condição de que a expressão sob a raiz quadrada tenha um zero duplo, ou seja, seu discriminante seja igual a zero. Consequentemente, segue-se que  $K = C_1 \omega^{\alpha-1}$ . Como resultado,  $\pi_f$  é dado por

$$\pi_f = \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - A_1 + (C_1 - A_2) \omega^\alpha - A_3 \omega'^{2\alpha}}, \quad (7.37)$$

onde

$$C_1 = A_2 \pm \sqrt{4A_3 \left( A_1 - \frac{\alpha^2}{4} \right)}, \quad (7.38)$$

com

$$A_1 = -\frac{1}{4A^2}, \quad (7.39)$$

$$A_2 = \frac{1}{4\sigma A^2} \left( \frac{8m\lambda'^2}{4\sigma} - 8mE \right), \quad (7.40)$$

$$A_3 = \frac{8m'}{4\sigma A^2}. \quad (7.41)$$

Das Eqs. (7.37) e (7.38), existem quatro formas possíveis de  $\pi_f$ , que são as seguintes:

$$\pi_f = \frac{\alpha}{2} \pm \begin{cases} \sqrt{A_3}\omega'^\alpha + \sqrt{A_1 - \frac{\alpha^2}{4}} & \text{for } k_1 = A_2 + \sqrt{4A_3 \left( A_1 - \frac{\alpha^2}{4} \right)}, \\ \sqrt{A_3}\omega'^\alpha - \sqrt{A_1 - \frac{\alpha^2}{4}} & \text{for } k_1 = A_2 - \sqrt{4A_3 \left( A_1 - \frac{\alpha^2}{4} \right)}. \end{cases} \quad (7.42)$$

Selecionamos  $\pi_f$  como <sup>[74]</sup>,

$$\pi_f = \frac{\alpha}{2} - \sqrt{A_3}\omega'^\alpha + \sqrt{A_1 - \frac{\alpha^2}{4}}. \quad (7.43)$$

Definindo <sup>[74]</sup>

$$\pi_f(\omega) = \frac{1}{2} (\tau_f(\omega) - \tilde{\tau}_f(z)), \quad (7.44)$$

e utilizando as Eqs. (7.43) e (7.33), obtemos

$$\tau_f(\omega) = -2\sqrt{A_3}\omega'^\alpha + 2\sqrt{A_1 - \frac{\alpha^2}{4}} + 1. \quad (7.45)$$

Da Eq. (7.18), definimos

$$\begin{aligned} \lambda(\omega) &= K(\omega') + \pi'_f(\omega'), \\ \lambda(\omega) &= \left[ A_2 - \sqrt{4A_3 \left( A_1 - \frac{\alpha^2}{4} \right)} \right] \omega^{\alpha-1}. \end{aligned} \quad (7.46)$$

e também

$$\begin{aligned}\lambda_n(\omega') &= -\frac{n}{2}\pi'_f(\omega') - \frac{n(n-1)}{\sigma^2}\sigma_f(\omega), \\ \lambda_n(\omega) &= n\alpha\sqrt{A_3}\omega^{\alpha-1}.\end{aligned}\tag{7.47}$$

Dos lados direitos das Eqs. (7.46) e (7.47), temos

$$A_2 - \sqrt{4A_3\left(A_1 - \frac{\alpha^2}{4}\right)} = n\alpha\sqrt{A_3}.\tag{7.48}$$

Com as Eq. (7.41), Eq. (7.48) fornece os autovalores de energia no espaço fracionário, ou seja,

$$E' = \frac{\lambda^2}{4\sigma} - \frac{\sigma A^2}{2m} \left[ n\alpha\sqrt{\frac{m}{4\sigma m^2}} + \sqrt{\frac{m}{\sigma A^2} \left( \frac{1}{A^2} - \alpha^2 \right)} \right],\tag{7.49}$$

onde  $A = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $0 < \beta \leq 1$ . Como  $E'$  é um valor real na Eq. (7.49), então a seguinte condição é derivada:

$$\frac{1}{A^2} - \alpha^2 \geq 0.\tag{7.50}$$

Uma vez que  $A$  é definido pela Eq. (7.32), a escolha de  $\alpha$  e  $\beta$  é arbitrária, ou seja, deve satisfazer a condição

$$\left( \frac{\Gamma(\beta - \alpha + 1)}{\Gamma(\beta)} \right)^2 - \alpha^2 \geq 0.\tag{7.51}$$

Tomando  $R(\omega) = \varphi(\omega)y(\omega)$ , então da Eq. (7.10),  $\phi(\omega)$  é uma solução da equação

$$\frac{\varphi'(\omega)}{\varphi(\omega)} = \frac{\pi_f(\omega)}{\sigma_f(\omega)}.\tag{7.52}$$

Substituindo  $\pi_f(\omega)$  e  $\sigma_f(\omega)$  na Eq (7.52), o resultado é

$$\varphi = \omega^{\frac{\alpha}{2} + \sqrt{A_1 - \frac{\alpha^2}{4}}} e^{-\frac{\sqrt{A_3}\omega^\alpha}{\alpha}}.\tag{7.53}$$

Além disso, a outra parte do campo, dada pela quase-amplitude de probabilidade  $y(\omega)$ , é a função do tipo hipergeométrica obtida da Eq. (7.16) como segue

$$\frac{d}{d\omega} (\sigma_f(\omega)\rho(\omega)) = \tau(\omega)\rho(\omega).\tag{7.54}$$

De modo que

$$\sigma_f \frac{d\rho}{d\omega} + \rho(\omega) \frac{d\sigma_f}{d\omega} = \tau(\omega)\rho(\omega). \quad (7.55)$$

Ao considerar  $\sigma_f(\omega) = \omega$ , temos

$$\omega \frac{d\rho}{d\omega} + \left( -\sqrt{A_3}\omega^\alpha + 2\sqrt{A_1 - \frac{\alpha^2}{4}} + 1 \right) \rho. \quad (7.56)$$

Resolvendo a equação acima, obtém-se

$$\rho = \omega^{2\sqrt{A_1 - \alpha^2/4}} \exp\left[-\frac{A_2}{\alpha}\omega^\alpha\right]. \quad (7.57)$$

Então  $y_n(\omega)$  é dada por

$$y_n(\omega) = \frac{B_n}{\rho(\omega)} \frac{d^n}{d\omega^n} [\sigma_f^n(\omega)\rho(z)]. \quad (7.58)$$

Com a Eq. (7.57), Eq. (7.58) resulta em

$$y_n(\omega) = B_n \omega^{-2\sqrt{A_1 - \frac{\alpha^2}{4}}} e^{2\frac{A_3}{\alpha}\omega^\alpha} \frac{d^n}{d\omega^n} \left[ \omega^{n+1\sqrt{A_1 - \frac{\alpha^2}{4}}} e^{-2\frac{\sqrt{A_3}}{\alpha}\omega^\alpha} \right]. \quad (7.59)$$

Das Eqs. (7.53) e (7.59), escrevemos

$$R(\omega) = C_n \omega^{\frac{\alpha}{2} - \sqrt{A_1 - \frac{\alpha^2}{4}}} e^{\frac{\sqrt{A_3}}{\alpha}\omega^\alpha} \frac{d^n}{d\omega^n} \left[ \omega^{n+2\sqrt{A_1 - \frac{\alpha^2}{4}}} e^{-2\frac{\sqrt{A_3}}{\alpha}\omega^\alpha} \right]. \quad (7.60)$$

Usando a Eq. (7.25), temos

$$\psi_n(\omega) = C_n \omega^{\frac{1+\alpha}{2} - \sqrt{A_1 - \frac{\alpha^2}{4}}} \frac{d^n}{d\omega^n} \left[ \omega^{n+2\sqrt{A_1 - \frac{\alpha^2}{4}}} e^{-2\frac{\sqrt{A_3}}{\alpha}\omega^\alpha} \right]. \quad (7.61)$$

Dessa forma, a função de Wigner de  $n$ -ésima ordem é dada por

$$f_W^{(n)}(q, p) = \psi_n(\omega) \star \psi_n^*(\omega).$$

Então, o cálculo da função de Wigner de  $n = 0$  até a segunda ordem em  $\hbar$  no produto

estrela, leva a

$$f_W^{(0)}(q, p) = N\omega^{(1+\alpha)}e^{-2\frac{\sqrt{A_3}}{\alpha}\omega^\alpha} - N\sqrt{\frac{1}{A^2} + \alpha^2\omega^{(1+\alpha)}}e^{-2\frac{\sqrt{A_3}}{\alpha}}(\lambda - 2\sigma q)\frac{p}{m}, \quad (7.62)$$

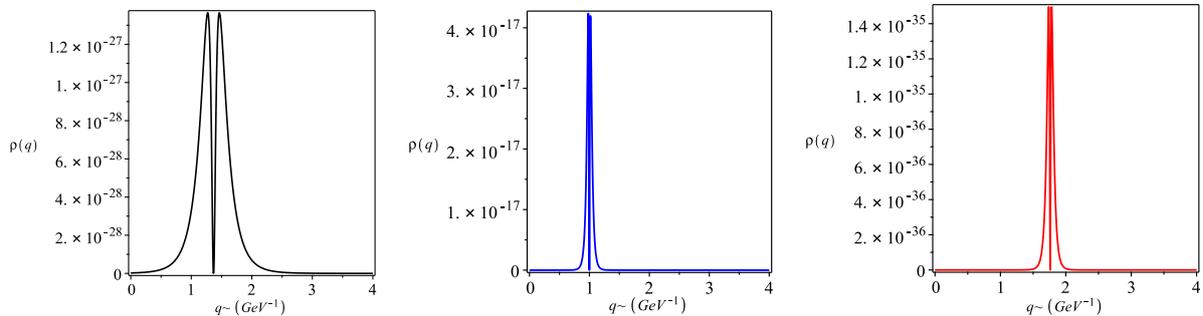
onde  $N$  é uma constante de normalização, a qual é calculada por  $\int f_W^{(0)}(q, p)dqdp = 1$ . Esses resultados são discutidos em detalhe na seção seguinte.

### 7.3 Análise dos Resultados

Nesta seção, analisamos o comportamento da função de Wigner fracionária para o nível de energia fundamental dos mésons ( $c\bar{c}$ ,  $b\bar{b}$  e  $b\bar{c}$ ). Os resultados subsequentes foram obtidos aqui [4, 5]. Para  $c\bar{c}$ :  $\hbar = 1$ , momento  $p = 1 \text{ GeV}$ , massa reduzida  $m_{c\bar{c}} = 0.73 \text{ GeV}^{-1}$ , parâmetros de confinamento  $\lambda = 0.3093 \text{ GeV}^2$ ,  $\sigma = 0.1130 \text{ GeV}^3$ . Para  $b\bar{b}$ : massa reduzida  $m_{b\bar{b}} = 2.34 \text{ GeV}$ , parâmetros de confinamento  $\lambda = 0.2370 \text{ GeV}^2$ ,  $\sigma = 0.1185 \text{ GeV}^3$ . Para  $b\bar{c}$ : massa reduzida  $m_{b\bar{c}} = 1.11 \text{ GeV}$ ,  $\lambda = 0.1721 \text{ GeV}^2$ ,  $\sigma = 0.0488 \text{ GeV}^3$ . As Figuras 7.1 mostram o comportamento das soluções dadas na Eq. (7.62), para a ordem fracionária  $\alpha$ .

Na Fig. 7.1, para o nível de energia fundamental dos sistemas de mésons ( $c\bar{c}$ ,  $b\bar{b}$ , e  $b\bar{c}$ ), a densidade de probabilidade calculada a partir da função de Wigner fracionária definida como  $\int dp f_W = |\psi(q)|^2$ , respectivamente, na ordem fracionária  $\alpha$ . Nesses sistemas, quando comparado à evidência experimental, o valor para a distância relativa máxima onde um quark-antiquark interage é de aproximadamente  $4.077 \text{ GeV}^{-1}$ , para  $c\bar{c}$ ;  $2.58 \text{ GeV}^{-1}$ , para  $b\bar{b}$  e  $2.15 \text{ GeV}^{-1}$ , para  $b\bar{c}$  [4, 8, 125].

**Figura 7.1:** A densidade de probabilidade obtida a partir da função de Wigner fracionária com ordem fracionária  $\alpha = 0.155$  (linha sólida preta) (méson  $c\bar{c}$ ),  $\alpha = 0.155$  (linha sólida azul) (méson  $b\bar{b}$ ),  $\alpha = 0.155$  (linha sólida vermelha) e  $\beta = 0.5$  para o estado  $1S$ .



Fonte: [100]

O espectro de massa dos mésons pesados  $c\bar{c}$ ,  $b\bar{b}$  e  $b\bar{c}$  foi calculado. Esse espectro de massa é dado pela seguinte equação <sup>[4]</sup>.

$$M = m_q + m_{\bar{q}} + E'. \quad (7.63)$$

Então a Eq. (7.49) é usada na Eq. (7.63), resultando em

$$M = m_q + m_{\bar{q}} + \frac{\lambda^2}{4\sigma} - \frac{\sigma A^2}{2m} \left[ n\alpha \sqrt{\frac{m}{4\sigma m^2}} + \sqrt{\frac{m}{\sigma A^2} \left( \frac{1}{A^2} - \alpha^2 \right)} \right]. \quad (7.64)$$

Onde  $m_q$ ,  $m_{\bar{q}}$  são as massas do quark-antiquark e  $m$  é a massa reduzida. Vale ressaltar que estamos usando apenas os autovalores de energia reais. Neste caso, de acordo com a condição dada na Eq. (7.50), adotamos  $\alpha = 0.155$  e  $\beta = 0.5$  que parece ser mais satisfatório para se ajustar aos dados experimentais. Em nossos cálculos, utilizamos os parâmetros  $m_c = 1.4619 \text{ GeV}$ ,  $m_b = 4.68 \text{ GeV}$  <sup>[6, 17]</sup>. Na Tabela 7.1, o erro total é calculado pela média dos erros relativos em relação aos dados experimentais <sup>[125]</sup>. Considerando esses valores de  $\alpha$  e  $\beta$ , a energia do nível fundamental e o espectro de massa dos mésons  $c\bar{c}$ ,  $b\bar{b}$  e  $b\bar{c}$  no estado 1S são calculados e apresentados na Tabela 7.1. Assim, o espectro de massa dos mésons  $c\bar{c}$ ,  $b\bar{b}$ ,  $b\bar{c}$  para o estado 1S foi comparado com o estado 1S dos dados experimentais e outras pesquisas teóricas realizadas na literatura <sup>[8, 17, 39, 41, 79, 121, 125, 126, 127]</sup>.

Na Ref <sup>[126]</sup> são apresentadas previsões para os estados de energias 1S dos sistemas  $c\bar{c}$ ,  $b\bar{b}$  por meio de uma combinação de métodos, incluindo o método de Nikiforov-Uvarov estendido, a derivada fracionária generalizada e o potencial de Cornell estendido. Essas previsões para o estado 1S do méson  $c\bar{c}$  são de 3.074-GeV, e para o estado 1S do méson  $b\bar{b}$ , 9.465-GeV com parâmetros fracionários  $\alpha = 0.84$ ,  $\beta = 1$ . As previsões derivadas aqui para o méson  $c\bar{c}$  de estado 1S são as mais próximas do resultado experimental <sup>[125]</sup>. Ou seja, para os estados 1S dos mésons  $b\bar{b}$  e  $b\bar{c}$  há discrepâncias de aproximadamente 0.003-GeV, 0.004-GeV em relação ao experimento. Enquanto os achados da Ref. <sup>[126]</sup> divergem em 0.023-GeV e 0.004-GeV. Note-se que a Ref. <sup>[126]</sup> não fornece dados para o méson  $b\bar{c}$  de estado 1S. Nossos resultados são comparados com os da Ref. <sup>[17]</sup>, que utilizou o potencial de Cornell modificado, o método de iteração assintótica juntamente com a equação de Schrödinger radial N-dimensional, e com os da Ref. <sup>[39]</sup> que abordam uma versão estendida do potencial de Cornell, o método de iteração analítica exata no arcabouço do espaço N-dimensional. Observamos que para os estados 1S dos mésons  $c\bar{c}$ ,  $b\bar{b}$ , nossas previsões são mais acuradas do que os modelos apresentados nas Refs. <sup>[17]</sup> e <sup>[39]</sup> e exibem uma concordância satisfatória

quando comparadas com as evidências experimentais [125]. As diferenças entre as previsões para o estado 1S do sistema  $c\bar{c}$  e o experimento [125] para esta pesquisa e as estudadas por [17], e [39] são de 0.0004-GeV, 0.019-GeV e 0.0016-GeV, respectivamente.

No caso do estado 1S do sistema  $b\bar{b}$ , a margem de diferença em relação aos resultados experimentais obtida neste trabalho e nos trabalhos [17, 39] é de 0.0039-GeV, 0.049-GeV e 0.284-GeV, respectivamente. Para o sistema  $b\bar{c}$  no estado 1S, a Ref. [17] não fornece resultados, enquanto este artigo e a Ref. [39] apresentam diferenças de 0.004-GeV, 0.0004-GeV. Na Ref. [79], os espectros de mésons pesados e suas propriedades termodinâmicas foram obtidos no contexto da equação de Schrödinger radial N-dimensional usando o potencial de Cornell estendido. Nossas previsões para o méson  $c\bar{c}$  no estado 1S melhoraram os resultados apresentados na Ref. [79] e estão próximos dos experimentais. No entanto, o valor obtido na Ref. [79] para o méson  $b\bar{b}$  no estado 1S é exato em relação ao experimento, enquanto as diferenças entre os presentes resultados e a Ref. [79] com os dados experimentais são de 0.0004-GeV, 0.002-GeV, respectivamente, para o estado 1S do méson  $b\bar{b}$ . Observa-se que a Ref. [79] não fornece resultados para o sistema  $b\bar{c}$  no estado 1S. Em Ref. [121], são considerados métodos como a iteração exata analítica, a equação de Schrödinger radial em N dimensões e o potencial de Cornell estendido. O valor calculado para o sistema  $c\bar{c}$  no estado 1S neste trabalho está consistentemente em boa concordância com o resultado da Ref. [121]. No entanto, para os mésons  $b\bar{b}$  e  $b\bar{c}$  no estado 1S, as previsões da Ref. [121] mostram melhorias em relação aos dados experimentais. Nossos espectros de massa medidos para os mésons no estado 1S ( $c\bar{c}$ ,  $b\bar{b}$  e  $b\bar{c}$ ) diferem dos valores experimentais em 0.0004-GeV, 0.003-GeV, e 0.004-GeV, respectivamente, enquanto os resultados do trabalho [121] diferem dos experimentais em 0.001-GeV, respectivamente.

Nossos resultados apresentaram uma melhoria para o sistema  $b\bar{b}$  no estado 1S em comparação com os da Ref. [127], na qual os autores obtiveram os espectros de massa de mésons pesados utilizando a equação de Salpeter sem spin, implementada com o modelo de potencial de Cornell e a formulação da aproximação semiclássica-WKB. Além disso, nossas previsões para os sistemas  $c\bar{c}$  e  $b\bar{b}$  no estado 1S são mais precisas quando comparadas ao da Ref. [8]. Em um trabalho anterior [8] foi utilizado o formalismo da mecânica quântica simplética, derivadas fracionárias generalizadas e a parte linear confinante do modelo de potencial de Cornell. Esses resultados sugerem a validade do modelo apresentado neste trabalho, o que reforça as considerações formuladas na Seção 6.1. De fato, trata-se de uma melhoria quando comparado a resultados teóricos anteriores [8, 17, 39, 79, 126, 127] e exibe uma concordância satisfatória quando comparado com as evidências experimentais [125].

**Tabela 7.1:** *Nível fundamental de energia e espectro de massa dos mésons ( $c\bar{c}$ ,  $b\bar{b}$ ,  $b\bar{c}$ ) em (GeV) com ( $\alpha = 0.155$  e  $\beta = 0.5$ ), ( $\lambda = 0.3093 \text{ GeV}^2$ ,  $\sigma = 0.1130 \text{ GeV}^3$ ,  $m_{c\bar{c}} = 0.73 \text{ GeV}$ ), ( $m_{b\bar{b}} = 2.34 \text{ GeV}$ ,  $\lambda = 0.2370 \text{ GeV}^2$ ,  $\sigma = 0.1185 \text{ GeV}^3$ ), ( $m_{b\bar{c}} = 1.11 \text{ GeV}$ ,  $\lambda = 0.1721 \text{ GeV}^2$ ,  $\sigma = 0.0488 \text{ GeV}^3$ ) [17, 6, 125].*

Mesons	State	$E'$	Present Work	Ref. [126]	Ref. [17]	Ref. [39]	Ref. [79]	Ref. [41]	Ref. [127]	Ref. [8]	Exp. [125]
$c\bar{c}$	$n = 0$	0.1713	3.0966	3.074	3.078	3.0954	3.095	3.096	3.098	3.1003	3.097
$b\bar{b}$	$n = 0$	0.0964	9.4564	9.465	9.510	9.7447	9.460	9.460	9.681	9.4818	9.4603
$b\bar{c}$	$n = 0$	0.1311	6.2730	---	---	6.2774	---	6.277	---	---	6.277
Total Relative Error			0.03%	0.39%	0.56%	1.02%	0.11%	0.01%	11.08%	0.16%	---

Fonte: [100]

**Tabela 7.2:** *Espectros de massa do estado 1S (em GeV) para o sistema  $c\bar{c}$  em diferentes valores dos parâmetros fracionários generalizados  $\alpha$  e  $\beta$ . Os parâmetros ( $\lambda$ ,  $\sigma$ ,  $m_{c\bar{c}}$ ) são os mesmos utilizados na Tabela 7.1.*

$c\bar{c}$ system	State	$E'$	Present Work	Exp. [125]
$(\alpha = 0.15), (\beta = 0.5)$	$n = 0$	0.1713	3.0947	3.097
$(\alpha = 0.13), (\beta = 0.5)$	$n = 0$	0.1638	3.0872	---
$(\alpha = 0.2), (\beta = 0.5)$	$n = 0$	0.1896	3.1130	---
$(\alpha = 0.5), (\beta = 0.5)$	$n = 0$	0.2749	3.1983	---
$(\alpha = 0.15), (\beta = 0.15)$	$n = 0$	0.3635	3.2869	---
$(\alpha = 0.5), (\beta = 0.15)$	$n = 0$	0.5723	3.4957	---

Fonte: [100]

Nossos resultados para o sistema  $c\bar{c}$  no estado 1S são apresentados na Tabela 7.2 em diferentes ordens fracionárias  $\alpha$ ,  $\beta$  e comparados com os resultados experimentais do Particle Data Group [125]. É importante observar que, para certos valores dos parâmetros fracionários generalizados  $\alpha$  e  $\beta$  há um aumento no espectro de massa previsto em comparação com o experimento. A escolha dos parâmetros fracionários torna-se favorável para  $\alpha = 0.15$  e  $\beta = 0.5$ . Enquanto isso, os parâmetros fracionários generalizados que proporcionam um melhor ajuste aos dados experimentais são aqueles listados na Tabela 7.1.



## Capítulo 8

# Interação de Cornell no Escopo da Equação do Tipo Pauli-Schrödinger para Dois Corpos: O Formalismo da Mecânica Quântica Simplética

No presente capítulo investigamos o comportamento quântico de um sistema de estado ligado composto por um charme-anticharme (méson  $c\bar{c}$ ) movendo-se no potencial de Cornell, utilizando as representações da mecânica quântica simplética e da função de Wigner, incluindo o efeito de spin. O sistema é caracterizado pelo modelo prototípico de potencial de Cornell que descreve a interação entre dois quarks pesados, sendo uma quantidade importante em teorias de calibre. Dessa forma, inicialmente derivamos a representação simplética da equação do tipo Pauli-Schrödinger. Nessa perspectiva, analisamos três aspectos básicos: (i) o confinamento do sistema, (ii) o espectro e (iii) a emergência da não-classicidade para os estados de quarkônio. Para resolver a equação de Pauli-Schrödinger simplética, são utilizados o método do mapa de Levi-Civita e a teoria de perturbação padrão até a primeira ordem. Em seguida, determinamos a função de Wigner para o estado ligado quark-antiquark com um potencial de Cornell e um campo magnético.

Um dos objetivos primordiais da cromodinâmica quântica (QCD) consiste em entender a estrutura tridimensional dos hádrons por meio de seus graus de liberdade intrínsecos de quarks e glúons. Dentre as ferramentas mais completas para a tomografia hadrônica, destaca-se a função de Wigner, a qual codifica a informação simultânea dos pártons nos espaços de posição e momento, semelhante as amplitudes do espaço de fase em mecânica quântica. A função de Wigner representa uma função de quase-probabilidade extensivamente empregada em ótica quântica, processamento de sinais e teoria quântica de campos para investigar a estrutura e a dinâmica do espaço de fase de sistemas quânticos.

O restante do capítulo está organizado da seguinte forma. A Seção 8.1 descreve o sistema

quark-antiquark utilizando a equação do tipo Pauli-Schrödinger Simplética no contexto da mecânica quântica simplética, com um potencial de Cornell sob a influência de um campo magnético externo. A Seção 8.2 oferece uma discussão sobre os nossos resultados e os possíveis desdobramentos.

Os resultados reportados neste capítulo foram retirados do trabalho:

- R.R. Luz, G.X.A. Petronilo, R.A.S. Paiva, A.E. Santana, T.M. Rocha Filho, & R.G.G. Amorim, (<https://doi.org/10.48550/arXiv.2507.20045>) (2025).

## 8.1 Estados Ligados de Quark-Antiquark

Aqui, determinamos os estados ligados do sistema quark-antiquark a partir da formulação simplética. Consideramos o Hamiltoniano não-relativístico para um sistema de estado ligado de um quark carregado e massivo e seu antiquark:

$$H = \frac{1}{2m} \left[ P'^2 - \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \right] + V(r), \quad (8.1)$$

onde  $\vec{\sigma}$  são as matrizes de Pauli,  $\vec{P}' = \vec{P} - (e/c)\vec{A}$  é o momento cinético para acoplamento mínimo,  $\vec{P}$  o momento canônico,  $m$  a massa reduzida do sistema quark-antiquark,  $\vec{A}$  o potencial vetor magnético e  $V(r)$  o potencial de interação. Para um campo magnético espacialmente uniforme, em coordenadas cartesianas, temos  $\vec{A} = -\frac{1}{2}(B_y\hat{x} - B_x\hat{y})$  para o campo na direção  $z$ . Fazendo a substituição do potencial na Eq. (8.1), o termo cinético assume a forma

$$\frac{1}{2m} \left( \vec{P} - e\vec{A} \right)^2 = \frac{1}{2m} \left[ \left( P_x + \frac{eB_z y}{2} \right)^2 + \left( P_y - \frac{eB_z x}{2} \right)^2 \right], \quad (8.2)$$

que, ao ser expandido, fornece

$$\frac{P_x^2 + P_y^2}{2m} + \frac{e^2 B_z^2 (x^2 + y^2)}{8m} - \frac{eB_z}{2m} (xP_y - yP_x). \quad (8.3)$$

O último termo pode ser identificado como o acoplamento magnético orbital, proporcional ao momento angular  $L_z = xP_y - yP_x$ . O Hamiltoniano pode então ser escrito como

$$H = \left[ \frac{P_x^2 + P_y^2}{2m} + \frac{B_z^2 e^2 (x^2 + y^2)}{8m} - \frac{eBL_z}{2m} - e\hbar\sigma_z B_z \right] + eV(r). \quad (8.4)$$

Assume-se, entretanto, que o momento angular orbital  $L_z$  é muito pequeno, uma vez que o movimento considerado é essencialmente planar e simétrico em torno do eixo  $z$ , não havendo rotação significativa em torno deste eixo. Dessa forma, o termo proporcional a  $L_z$  apenas deslocaria a energia por uma constante e pode ser omitido sem perda de generalidade. Em seguida, usamos o Mapeamento de Bohlin (ou transformação de Levi-Civita) para transformar o Hamiltoniano na Eq. (8.4) no de um oscilador harmônico bidimensional [5, 66, 119, 128]:

$$\begin{aligned} x &= q_1^2 - q_2^2, & y &= 2q_1q_2, \\ P_x &= \frac{p_1q_1 + p_2q_2}{2(q_1^2 + q_2^2)}, & P_y &= \frac{p_2q_1 - p_1q_2}{2(q_1^2 + q_2^2)}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

O Hamiltoniano resultante é, portanto,

$$H = \left[ \frac{p_1^2 + p_2^2}{8m(q_1^2 + q_2^2)} + \frac{B_z^2(q_1^2 + q_2^2)^2}{8m} - \frac{\sigma_z B_z}{2m} \right] - \frac{\alpha}{(q_1^2 + q_2^2)} - \beta(q_1^2 + q_2^2)^2, \quad (8.6)$$

onde usamos explicitamente a expressão para o potencial de Cornell na Eq. (1.1),  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = q_1^2 + q_2^2$  e  $\sigma_z = \pm 1$ .

A equação de Schrödinger independente do tempo é então:

$$\hat{H} \star \Psi(q_1, p_1, q_2, p_2) = E\Psi(q_1, p_1, q_2, p_2), \quad (8.7)$$

onde  $E$  é a energia do estado estacionário e o operador Hamiltoniano  $\hat{H}$  é obtido da função Hamiltoniana  $H(q_1, q_1, p_1, p_2)$  na Eq. (8.6) substituindo as variáveis  $(q_1, q_1, p_1, p_2)$  pelos respectivos operadores chapéu (hat operators) seguindo a prescrição na Sec. 5.1. Obtemos então:

$$\begin{aligned} \left( \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} \right) \star \Psi + \frac{B_z^2(q_1^2 + q_2^2)^3}{2m} - \frac{B_z}{2m}(q_1^2 + q_2^2)\sigma_z \star \Psi - 4\alpha \star \Psi - 4\beta(q_1^2 + q_2^2)^3 \star \Psi \\ - 4E(q_1^2 + q_2^2) \star \Psi = 0, \end{aligned} \quad (8.8)$$

onde

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

são, respectivamente, o spinor de Pauli (não-relativístico) de duas componentes e a matriz

de Pauli  $z$ . Esta equação pode ser reescrita como

$$\left(\frac{p_1^2 + p_2^2}{8m}\right) \star \psi_{\pm} + \left(\frac{\pm B_z}{2m} - E\right) (q_1^2 + q_2^2) \star \psi_{\pm} - \left(\frac{B_z^2}{8m} - \beta\right) (q_1^2 - q_2^2)^3 \star \psi_{\pm} = \alpha \psi_{\pm}. \quad (8.9)$$

com  $\psi_+ = \psi_1$ ,  $\psi_- = \psi_2$ , ou, equivalentemente, como

$$\widehat{H}_{\pm} \psi_{\pm} = \kappa \psi_{\pm}, \quad (8.10)$$

onde

$$\widehat{H}_{\pm} = \widehat{H}_{0,\pm} + \widehat{H}_1, \quad (8.11)$$

com  $\widehat{H}_0$  e  $\widehat{H}_1$  sendo os Hamiltonianos não-perturbado e perturbado, respectivamente:

$$\begin{aligned} \widehat{H}_{0,\pm} &= \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2) \star - \left(\frac{\pm B_z}{2} - E\right) (q_1^2 + q_2^2) \star, \\ \widehat{H}_1 &= \left(\frac{B_z^2}{8m} - \beta\right) (q_1^2 + q_2^2)^3 \star. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Onde definimos

$$-\frac{m\omega^2}{2} = \left(\frac{\pm B_z^2}{2} - E\right) \quad (8.13)$$

e obtemos então

$$\omega = \sqrt{(1/m)[E \mp B_z/2]}.$$

Onde  $\omega$  representa a frequência.

### 8.1.1 Solução de ordem zero

Para simplificar a notação, a partir de agora removeremos o sinal  $\pm$  de nossas expressões, pois resolveremos separadamente cada caso da Eq. (8.8), e consideraremos a definição apropriada em cada caso. Usando o fato de que o Hamiltoniano  $\widehat{H}_{0,\pm}$  é o de um oscilador harmônico isotrópico bidimensional, resolvemos a equação de ordem zero  $\widehat{H}_{0,\pm} \psi_{\pm}^{(0)} = \kappa^{(0)} \psi_{\pm}^{(0)}$  como:

$$\psi(q_1, p_1, q_2, p_2) = \phi_{n_1}(q_1, p_1) \phi_{n_2}(q_2, p_2), \quad (8.14)$$

onde  $\phi_n(q, p)$  é o estado estacionário do oscilador harmônico unidimensional com número quântico  $n$ .

Agora definimos os operadores estrela de criação e aniquilação:

$$\begin{aligned}
 \hat{a} &= \left( \sqrt{\frac{\omega}{2}} q_1 \star + i \sqrt{\frac{1}{2\omega}} p_1 \star \right), \\
 \hat{a}^\dagger &= \left( \sqrt{\frac{\omega}{2}} q_1 \star - i \sqrt{\frac{1}{2\omega}} p_1 \star \right), \\
 \hat{b} &= \left( \sqrt{\frac{\omega}{2}} q_2 \star + i \sqrt{\frac{1}{2\omega}} p_2 \star \right), \\
 \hat{b}^\dagger &= \left( \sqrt{\frac{\omega}{2}} q_2 \star - i \sqrt{\frac{1}{2\omega}} p_2 \star \right),
 \end{aligned} \tag{8.15}$$

Os operadores na Eq. (8.15) satisfazem as relações:

$$\begin{aligned}
 [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] &= [\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1, \\
 \hat{a} \phi_{n_1}(q_1, p_1) &= \sqrt{n_1} \phi_{n_1-1}(q_1, p_1), \\
 \hat{a}^\dagger \phi_{n_1}(q_1, p_1) &= \sqrt{n_1 + 1} \phi_{n_1+1}(q_1, p_1), \\
 \hat{b} \phi_{n_2}(q_2, p_2) &= \sqrt{n_2} \phi_{n_2-1}(q_2, p_2), \\
 \hat{b}^\dagger \phi_{n_2}(q_2, p_2) &= \sqrt{n_2 + 1} \phi_{n_2+1}(q_2, p_2),
 \end{aligned} \tag{8.16}$$

e

$$\begin{aligned}
 q_{k\star} &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \\
 p_{k\star} &= -i \sqrt{\frac{\omega}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger),
 \end{aligned} \tag{8.17}$$

$k = 1, 2$ , e

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} \psi_{n_1, n_2}^{(0)} = n_1 \psi_{n_1, n_2}^{(0)}, \quad \hat{b}^\dagger \hat{b} \psi_{n_1, n_2}^{(0)} = n_2 \psi_{n_1, n_2}^{(0)}. \tag{8.18}$$

Podemos, portanto, reescrever os termos do Hamiltoniano como

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_0 &= \omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b} + 1), \\
 \hat{H}_1 &= \frac{1}{8\omega^3} \left( \frac{B_z^2}{8m} - \beta \right) [(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 + (\hat{b} + \hat{b}^\dagger)^2]^3.
 \end{aligned} \tag{8.19}$$

O autovalor do estado  $\phi_{n_1, n_2}$  é então

$$\kappa_{n_1, n_2}^{(0)} = (n_1 + n_2 + 1)\omega. \quad (8.20)$$

Usando as definições de  $\omega$  e a Eq. (8.20), finalmente obtemos o espectro de energia de ordem zero:

$$E_{n_1, n_2}^{(0)} = -\frac{1}{2} \frac{m\alpha^2}{(n_1 + n_2 + 1)^2} - \frac{B_z}{2}. \quad (8.21)$$

Notamos que no limite  $B_z \rightarrow 0$  nosso resultado concorda com os resultados de campo nulo nas Refs. [97, 129].

As funções de quase-amplitude de probabilidade são obtidas usando as propriedades:

$$\hat{a} \phi_0 = 0, \quad \hat{b} \phi_0 = 0, \quad (8.22)$$

ou da Eq. (8.15):

$$\left( \sqrt{\frac{\omega}{2}} q_1 \star + i \sqrt{\frac{1}{2\omega}} p_1 \star \right) \phi_0 = 0, \quad (8.23)$$

que pode ser resolvida como:

$$\psi_{0,0}^{(0)}(q_1, p_1, q_2, p_2) = N e^{-(\omega q_1^2 + p_1^2)} L_{n_1}(\omega q_1^2 + p_1^2) e^{-(\omega q_2^2 + p_2^2)} L_{n_2}(\omega q_2^2 + p_2^2), \quad (8.24)$$

onde  $L_n$  são polinômios de Laguerre de ordem  $n$  e  $N$  é uma constante de normalização. Os estados excitados podem ser obtidos diretamente usando os operadores de criação ou de levantamento (raising operators)  $\hat{a}^\dagger$  e  $\hat{b}^\dagger$ :

### 8.1.2 Correção de primeira ordem

A correção de primeira ordem para as autofunções na teoria de perturbação usual é dada por

$$\psi_{n_1, n_2}^{(1)}(q_1, p_1, q_2, p_2) = \psi_{n_1, n_2}^{(0)}(q_1, p_1, q_2, p_2) + \sum_{m_1 \neq n_1; m_2 \neq n_2} \frac{\mathcal{I}}{\kappa_{n_1, n_2}^{(0)} - \kappa_{m_1, m_2}^{(0)}}, \quad (8.25)$$

onde

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I} &= \int \psi_{m_1, m_2}^{*(0)}(q_1, p_1, q_2, p_2) \left( \frac{B_z^2}{8m} - \beta \right) \widehat{H}^{(1)} \psi_{n_1, n_2}^{(0)}(q_1, p_1, q_2, p_2) dq_1 dp_1 dq_2 dp_2 \\
 &= \int \psi_{m_1, m_2}^{*(0)}(q_1, p_1, q_2, p_2) \left( \frac{B_z^2}{8m} - \beta \right) \times \\
 &\quad \left[ \frac{1}{2\omega} \left( (\widehat{a} + \widehat{a}^\dagger)^2 + (\widehat{b} + \widehat{b}^\dagger)^2 \right) \right]^3 \psi_{n_1, n_2}^{(0)}(q_1, p_1, q_2, p_2) dq_1 dp_1 dq_2 dp_2. \tag{8.26}
 \end{aligned}$$

Este integral pode ser calculado em forma fechada usando as propriedades dos operadores de criação e destruição na Eq. (8.16) e a ortonormalidade das autofunções. Além disso, o cálculo da Eq. (8.26) é apresentado no apêndice, o qual, juntamente com a Eq. (8.25) fornece os estados perturbados do sistema de quark-antiquark. O estado fundamental do méson  $c\bar{c}$  é então

$$\begin{aligned}
 \psi_{0,0}^{(1)}(q_1, p_1, q_2, p_2) &= \psi_{0,0}^{(0)}(q_1, p_1, q_2, p_2) + \left( \frac{\beta}{\omega} - \frac{B_z^2}{8m\omega} \right) \left[ (21\sqrt{2} + 18 + 25\sqrt{10}) \psi_{2,0}^{(0)} \right. \\
 &\quad \left. + \left( 3\frac{\sqrt{2}}{2} + 3 \right) \psi_{2,2}^{(0)} + (30\sqrt{21} + 3\sqrt{6}) \psi_{4,0}^{(0)} - 4\sqrt{3} \psi_{4,2}^{(0)} + 8\sqrt{1155} \psi_{6,0}^{(0)} \right].
 \end{aligned}$$

Para os primeiros estados excitados obtemos:

$$\begin{aligned}
 \psi_{1,0}^{(1)} &= \psi_{1,0}^{(0)} - \left( \frac{B_z^2}{8m\omega} - \frac{\beta}{\omega} \right) \left[ 89.30\psi_{1,2}^{(0)} + 13.47\psi_{1,4}^{(0)} + 6.32\psi_{1,6}^{(0)} - 89.43\psi_{3,0}^{(0)} \right. \\
 &\quad \left. - 19.33\psi_{3,2}^{(0)} - 23.51\psi_{5,0}^{(0)} - 10.31\psi_{5,4}^{(0)} - 11.83\psi_{7,0}^{(0)} \right], \tag{8.27}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \psi_{0,1}^{(1)} &= \psi_{0,1}^{(0)} + \left( \frac{B_z^2}{8m\omega} - \frac{\beta}{\omega} \right) \left[ -89.30\psi_{2,1}^{(0)} - 13.47\psi_{4,1}^{(0)} - 6.32\psi_{6,1}^{(0)} + 89.43\psi_{0,3}^{(0)} \right. \\
 &\quad \left. + 19.33\psi_{2,3}^{(0)} + 23.51\psi_{0,5}^{(0)} + 10.31\psi_{4,5}^{(0)} + 11.83\psi_{0,7}^{(0)} \right]. \tag{8.28}
 \end{aligned}$$

A função de Wigner para o estado ligado quark-antiquark é então obtida a partir desses autoestados usando o produto estrela  $\star$  como:

$$f_W(q_1, p_1, q_2, p_2) = \psi_{n_1, n_2}^{(1)}(q_1, p_1, q_2, p_2) \star \psi_{n_1, n_2}^{\dagger(1)}(q_1, p_1, q_2, p_2). \tag{8.29}$$

A correção de primeira ordem para os autovalores é obtida de

$$\Delta\kappa_{n_1, n_2}^{(1)} = \int \psi_{n_1, n_2}^{(0)} \widehat{H}_1 \psi_{n_1, n_2}^{*(0)} dq_1 dp_1 dq_2 dp_2, \quad (8.30)$$

o que resulta em

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)} = & (n_1 + 1)(n_1 + 2)(n_1 + 3) + (n_1 + 1)(n_1 + 2)^2 + (n_1 - 1)n_1(n_1 + 1)^2 \\ & + (n_1 + 1)n_1(n_1 + 1) + \sqrt{n_1^3(n_1 + 1)^3} + (n_1 + 1)n_1^2 + (n_1 + 1)n_1(n_1 - 1) \\ & + n_1(n_1 - 1)^2 + n_1(n_1 - 1)(n_1 - 2) + 3(n_1 + 1)n_1(n_2 + 1) + 3(n_1 + 1)n_1n_2 \\ & + 3n_1^2(n_2 + 1) + 3n_1^2n_2 + 3(n_1 - 1)n_1(n_2 + 1) + 3(n_1 - 1)n_1n_2 + 3(n_2 + 1)n_2(n_1 + 1) \\ & + 3(n_2 + 1)n_2n_1 + 3n_2^2(n_1 + 1) + 3n_2^2n_1 + 3(n_2 - 1)n_2(n_1 + 1) + 3(n_2 - 1)n_2n_1 \\ & + (n_2 + 1)(n_2 + 2)(n_2 + 3) + (n_2 + 1)(n_2 + 2)^2 + (n_2 - 1)n_2(n_2 + 1)^2 + \sqrt{n_2^3(n_2 + 1)^3} \\ & + \sqrt{(n_2 + 1)^2n_2^4} + (n_2 + 1)n_2(n_2 - 1) + n_2(n_2 - 1)^2 + n_2(n_2 - 1)(n_2 - 2), \end{aligned} \quad (8.31)$$

e da Eq. (8.19) o autovalor  $\omega_{n_1, n_2}^{(1)}$  corrigido até primeira ordem é dado por

$$\kappa_{n_1, n_2}^{(1)} = (n_1 + n_2 + 1)\omega + \frac{1}{8\omega} \left( \frac{B_z^2}{8m} - \beta \right) \Delta^{(1)}. \quad (8.32)$$

Que agora é escrita como

$$\omega_{n_1, n_2}^{(1)} = \frac{\alpha \pm \sqrt{(\alpha)^2 - 4(n_1 + n_2 + 1) \cdot \frac{\Delta^{(1)}}{8} \left( \frac{B_z^2}{8m} - \beta \right)}}{2(n_1 + n_2 + 1)}, \quad (8.33)$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro constante do modelo de potencial de Cornell.

O espectro de energia corrigido em primeira ordem é então

$$E_{n_1, n_2}^{(1)} = -\frac{1}{2(n_1 + n_2 + 1)^2} \left[ \alpha - \frac{1}{8\omega} \left( \frac{B_z^2}{8m} - \beta \right) \Delta^{(1)} \right]^2. \quad (8.34)$$

Esta equação fornece os autovalores de energia para a partícula quarkônio na presença de um potencial de Cornell. Na próxima seção discutiremos nossos resultados.

## 8.2 Funções de Wigner dos estados estacionários

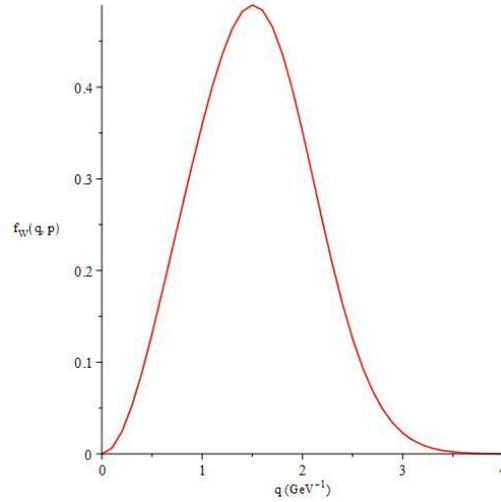
Nesta seção, analisamos a função de Wigner dos estados estacionários do sistema quark-antiquark, até a aproximação de primeira ordem, para o méson  $c\bar{c}$ , obtida por meio do for-

malismo da mecânica quântica simplética. O estado ligado mais baixo de um quark charm e um antiquark charm, denominado  $J/\psi$ , possui uma massa aproximadamente 3.5 vezes maior do que a massa do próton, sendo um sistema ideal para testar as hipóteses da QCD (Cromodinâmica Quântica) [1, 4, 5, 100]. Obtivemos aqui o estado fundamental com a respectiva quase-amplitude de probabilidade. Para as estimativas numéricas, utilizamos os valores dos parâmetros fornecidos na Ref. [130]: o parâmetro de confinamento  $\beta = 0.191 \text{ GeV}^2$ , a constante de acoplamento forte  $\alpha = 0.472$ , a massa do quark charm  $m_c = 1.3205 \text{ GeV}$ , a massa reduzida  $m_{c\bar{c}} = 0.6602 \text{ GeV}$  e a frequência  $\omega = 0.959 \text{ GeV}$  obtida da Eq. (8.33). Além disso, também consideramos os parâmetros  $q_1 = q$  e  $p_1 = p$  com  $q_2, p_2$  fixados na representação gráfica.

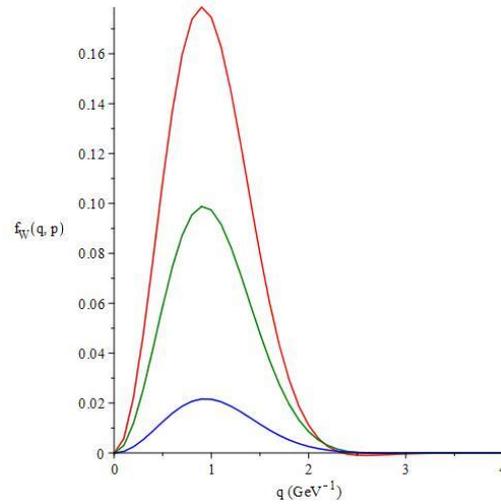
Os gráficos da Fig. (8.1) e Fig. (8.2) exibem o comportamento da função de Wigner corrigida em primeira ordem para o estado fundamental ( $n_1 = 0, n_2 = 0$ ) de um méson, composto por um par quark-antiquark ( $c\bar{c}$ ), com momento fixo  $p = 0 \text{ GeV}$  e sem campo magnético externo ( $B = 0$ ). Esta representação gráfica da função de Wigner que descreve o quark-antiquark charm é dada em função da distância de interação entre o quark charm e seu antiquark  $q$  ( $\text{GeV}^{-1}$ ).

No gráfico da Fig. (8.1), observamos que para o momento  $p = 0 \text{ GeV}$ , e quando consideramos  $B = 0 \text{ GeV}^2$ , a função de Wigner reproduz o comportamento gráfico de resultados anteriores obtidos em [5]. Ou seja,  $p = 0 \text{ GeV}$ , representa uma condição limite para a existência do sistema do méson  $c\bar{c}$  que varia de  $q = 0$  a  $q \approx 4 \text{ GeV}^{-1}$ . Isso significa que o sistema está ficando confinado naquela região. No gráfico da Fig. (8.2), observamos claramente que, à medida que variamos o momento  $p = 2.3 \text{ GeV}$  (vermelho),  $p = 2.5 \text{ GeV}$  (verde), e  $p = 2.9 \text{ GeV}$  (azul), com  $B = 0 \text{ GeV}^2$ , a função de Wigner se desloca para a esquerda e os picos da curva diminuem dentro da região de  $q = 0$  a  $q \approx 4 \text{ GeV}^{-1}$ . Para valores maiores de momento, a função de Wigner desaparece, ou seja, o sistema de méson não existe. Assim, há um limite superior para a existência do méson  $c\bar{c}$  que é dado pelos perfis das curvas da função de Wigner, conforme mostrado nos gráficos das Figs. (8.1)-(8.2). Esse comportamento é uma característica do confinamento de quarks, uma propriedade não trivial da cromodinâmica quântica (QCD), onde os quarks permanecem permanentemente ligados no interior dos hádrons. É importante ressaltar que é na representação da mecânica quântica simplética que o mecanismo de confinamento é revelado e matematicamente articulado por meio das propriedades de localização da função de Wigner. Essencialmente, a formulação simplética permite que esse comportamento de confinamento surja naturalmente através da geometria do espaço de fase, em vez de depender unicamente de meca-

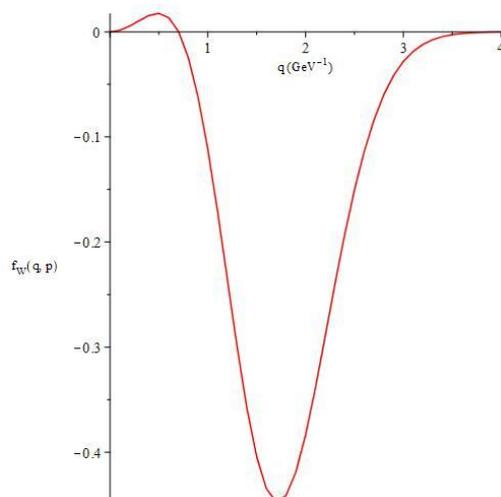
nismos baseados em potenciais, típicos da abordagem quântica padrão. Nossos resultados estão em concordância com trabalhos publicados anteriormente [5, 8].



**Figura 8.1:** Função de Wigner com correção de primeira ordem para o estado ( $n_1 = 0, n_2 = 0$ ) (estado fundamental) do méson  $c\bar{c}$ , grafada em função da distância interquark  $q$  na região  $0 \leq q \lesssim 4 \text{ GeV}^{-1}$ , com momento  $p = 0 \text{ GeV}$  e campo magnético  $B = 0 \text{ GeV}^2$ .



**Figura 8.2:** Função de Wigner com correção de primeira ordem para o mesmo estado ( $n_1 = 0, n_2 = 0$ ) do méson  $c\bar{c}$ , grafada em função da distância interquark  $q$  na região  $0 \leq q \lesssim 4 \text{ GeV}^{-1}$ , para os momentos  $p = 2.3 \text{ GeV}$  (vermelho),  $p = 2.5 \text{ GeV}$  (verde), e  $p = 2.9 \text{ GeV}$  (azul), com  $B = 0 \text{ GeV}^2$ .



**Figura 8.3:** Comportamento gráfico da função de Wigner com correção de primeira ordem para o estado  $(n_1 = 0, n_2 = 0)$  (estado fundamental) do méson  $c\bar{c}$  para o valor do campo magnético  $B = 0.38 \text{ GeV}^2$  e momento fixo ( $p = 0 \text{ GeV}$ ).

Em contraste, o gráfico da Fig. (8.3) ilustra a função de Wigner com correção de primeira ordem para o mesmo autoestado  $(n_1 = 0, n_2 = 0)$ , porém, agora submetido a um campo magnético externo fraco de intensidade  $B = 0.38 \text{ GeV}^2$ . A introdução desse campo magnético perturbativo induz uma mudança qualitativa significativa no comportamento da função de Wigner: o surgimento de regiões negativas.

A presença de tal negatividade é um indicador da não-classicidade do sistema. Dentro da estrutura da mecânica quântica simplética, a negatividade na função de Wigner sinaliza coerência quântica e fenômenos de interferência que não possuem qualquer contraparte clássica. Esses efeitos destacam a sensibilidade dos sistemas de quarks confinados a perturbações externas, mesmo que de magnitude fraca, revelando correlações quânticas profundas embutidas na estrutura do espaço de fase.

Essa caracterização dual de confinamento e coerência quântica reforça a formulação simplética da mecânica quântica como uma estrutura poderosa e indispensável para a análise de sistemas quânticos complexos, governados por interações fortes e sujeitos a perturbações externas.

### 8.2.1 Espectro de Massa do Méson $c\bar{c}$

A tabela 8.1 apresenta o espectro de massa do estado fundamental do méson  $c\bar{c}$  calculado usando o módulo da correção de energia de primeira ordem, em comparação com dados experimentais e várias previsões teóricas da literatura.

Os espectros de massa são descritos pela equação a seguir <sup>[4]</sup>:

$$M = m_q + m_{\bar{q}} + E_{0,0}^{(1)} \quad (8.35)$$

Substituindo a Eq. (8.34) na Eq. (8.35), obtemos

$$M = m_q + m_{\bar{q}} + \frac{1}{2} \left[ \alpha - \frac{1}{8\omega} \left( \frac{B_z^2}{8m} - \beta \right) \Delta^{(1)} \right]^2. \quad (8.36)$$

**Tabela 8.1:** *Nível fundamental de energia e espectro de massa do méson  $c\bar{c}$  (em GeV), calculado usando o modelo atual e comparado com o dado experimental e diversos trabalhos teóricos. Os parâmetros utilizados foram:  $\alpha = 0.472$ ,  $\beta = 0.191 \text{ GeV}^2$ ,  $m_c = 1.3205 \text{ GeV}$ ,  $m = 0.6602 \text{ GeV}$ ,  $B = 0.15 \text{ GeV}^2$ ,  $\omega = 0.959 \text{ GeV}$ ,  $\Delta^{(1)} = 20$  <sup>[130]</sup>.*

Méson	Estado	$E_{0,0}^{(1)}$	Present	Ref. <sup>[126]</sup>	Ref. <sup>[17]</sup>	Ref. <sup>[127]</sup>	Ref. <sup>[8]</sup>	Ref. <sup>[100]</sup>	Ref. <sup>[39]</sup>	Ref. <sup>[79]</sup>	Exp. <sup>[125]</sup>
$c\bar{c}$	$n_1 = 0, n_2 = 0$	0.4596	3.1006	3.074	3.078	3.098	3.1003	3.0966	3.0954	3.095	3.0969
Erro total	–	–	0.11%	0.73%	0.61%	0.03%	0.10%	0.009%	0.04%	0.06%	–

Fonte: <sup>[101]</sup>

O modelo atual produz um valor de massa de 3.1006 GeV, que está em excelente concordância com o resultado experimental de 3.0969 GeV <sup>[125]</sup>. O desvio relativo em relação à massa experimental é de apenas 0.11%, demonstrando a alta precisão do método.

As outras previsões teóricas, incluindo modelos de potencial não-relativísticos, relativizados e de Cornell, apresentam graus variados de concordância:

Os modelos não-relativísticos, que utilizam derivadas fracionárias generalizadas e abordagens do potencial de Cornell modificado (Refs. <sup>[126, 17]</sup>), tendem a subestimar ligeiramente a massa, produzindo valores na faixa de 3.074–3.078 GeV. Os desvios desses modelos em relação ao resultado experimental são de aproximadamente 0.73–0.71%.

Modelos de potencial de Cornell estendidos, o método de Nikiforov-Uvarov, efeitos de temperatura, o método de iteração analítica exata (AEIM) e a equação de Salpeter sem spin (modelos de quarks relativizados), e a abordagem da aproximação semiclássica WKB (Refs. <sup>[39, 79, 127]</sup>) fornecem resultados mais precisos, tipicamente dentro de 0.04–0.03% do valor experimental. A abordagem da mecânica quântica simplética, modelos de potencial de Cornell e as derivadas fracionárias generalizadas (Refs. <sup>[8, 100]</sup>) alcançam uma precisão muito alta, com erros abaixo de 0.10%, comparáveis ao trabalho presente.

Neste contexto, o presente modelo se destaca por incorporar correções perturbativas

que envolvem um campo magnético de fundo ( $B_z$ ) e a abordagem simplética da mecânica quântica, ao mesmo tempo que preserva a simplicidade em sua estrutura analítica. Embora não inclua explicitamente uma estrutura relativística, ele alcança um desempenho preditivo comparável ao de modelos mais sofisticados.

Portanto, a abordagem da mecânica quântica simplética proposta não é apenas analiticamente eficiente, mas também fenomenologicamente confiável para descrever a massa do estado fundamental de hádron pesados, como o  $J/\psi$ .



## Capítulo 9

# Considerações Finais e Perspectivas Futuras

Neste trabalho desenvolvemos uma investigação detalhada acerca de um sistema não-relativístico bidimensional de interação forte descrito por quarks-antiquarks pesados via o formalismo da função de Wigner no arcabouço teórico da mecânica quântica simplética e das derivadas fracionárias generalizadas. Esse setor é caracterizado de forma específica por um potencial linear responsável pelo confinamento de quarks incorporada por uma parte do tipo potencial de Coulomb, proveniente da troca de um glúon entre os quarks. Este é o tão chamado modelo de potencial de Cornell, caracterizando experimentalmente este setor da Cromodinâmica Quântica QCD. Esse potencial de interação entre dois quarks pesados desempenha um papel importante em teorias de calibre. Também tem grande relevância fenomenológica na conexão com os experimentos de colisões de íons pesados (Relativistic Heavy Ion Collider-RHIC) e (Large Hadron Collider-LHC).

Em sequência, uma revisão aprofundada da função de Wigner foi conduzida, com ênfase em sua formulação no espaço de fase. A partir disso, exploramos detalhadamente as propriedades do produto estrela de Weyl, uma ferramenta fundamental para conectar a mecânica quântica com a mecânica clássica no formalismo do espaço de fase. A análise demonstrou a associação direta entre os operadores quânticos convencionais, que atuam no espaço de Hilbert, e seus correspondentes no espaço de fase, que operam através do produto estrela. Essa abordagem permite uma representação alternativa da dinâmica quântica, onde a evolução temporal de uma função de Wigner é governada por uma equação análoga à equação de Liouville, mas com o produto estrela substituindo a multiplicação ordinária. Desse modo, o formalismo do espaço de fase e a função de Wigner se estabelecem como um elo entre a mecânica quântica e a clássica, oferecendo uma descrição intuitiva da distribuição de quase-amplitude de probabilidade de posição e momento de um sistema quântico.

Posteriormente, uma teoria de representação no cenário do espaço de fase é construída

onde definimos uma classe de operadores estrela que foi peça chave para desenvolver a representação unitária do grupo de Galilei-Lie estendido no espaço de Hilbert. Em decorrência disso, escrevemos a equação de Schrödinger na estrutura do espaço de fase de forma que é estabelecida a conexão entre a representação de Galilei e o formalismo de Wigner.

Em seguida, uma revisão bibliográfica baseada na Cromodinâmica Quântica foi feita buscando apresentar aspectos da matéria hadrônica formada por quarks e léptons denominados de campos de matéria. Neste contexto, abordamos os campos de calibre ingrediente fundamental ao lado do grupo de simetria  $SU(3)$  que representa a interação forte.

Em consequência, foi estudado o sistema de interação quarks-antiquarks pesados em que foram analisados três diferentes mésons com base na equação de Schrödinger não-relativística no espaço de fase. Primeiramente, foi resolvida a equação de Schrödinger com potencial linear considerado o caso mais simples onde observamos o comportamento da função de Wigner associada ao estado fundamental dos quark-antiquark charme, quark-antiquark bottom e quark bottom mais antiquark charme no espaço de fase. Observamos que a análise no espaço de fase, permite mesmo para esse modelo simples observar o confinamento de mésons, sendo não visto nos casos usuais. E, ainda, verificamos através da análise no espaço de fase que esta mostrou por meio da variação de energia cinética, que tem-se um limite máximo de existência do méson que se dar através dos gráficos obtidos. Na sequência, resolvemos a equação de Schrödinger com o potencial Cornell no formalismo da mecânica quântica simplética para o méson charme-anticharme utilizando o método da transformação de Bohlin, tal que recorremos a teoria de perturbação independente do tempo para esse sistema. Por fim, a função de Wigner associada ao estado fundamental e o primeiro estado excitado do quark-antiquark charme foi encontrada e determinamos o parâmetro de negatividade. Através do parâmetro de negatividade observamos que a medida que aumentamos a ordem de energia do méson para o primeiro estado excitado, o volume da parte negativa da função de Wigner aumenta, o que evidenciou um aumento do caráter quântico do sistema.

Procedemos com o estudo do sistema de estado ligado de quarks-antiquarks pesados implementando o formalismo das derivadas fracionárias generalizadas, e introduzindo o método Nikiforov-Uvarov fracionário generalizado para encontrar a solução de quasi-amplitude para os mésons formados por quarks e antiquarks pesados: (mesons) charm

( $c$ )-anticharm ( $\bar{c}$ ), bottom ( $b$ )-antibottom ( $\bar{b}$ ), e  $b - \bar{c}$ . Isso foi realizado no formalismo da mecânica quântica simplética com o potencial de Cornell expandido no termo do tipo Coulomb (contribuições de glúons) até o termo quadrático na distância de separação entre os quarks no méson. O efeito dos parâmetros fracionários,  $\alpha$  e  $\beta$  é abordado, considerando a função de Wigner no contexto do formalismo da mecânica quântica simplética, um aspecto não explorado anteriormente. Os parâmetros fracionários têm relação com a existência da função de Wigner, que descreve os campos mesônicos. Adicionalmente, notamos que os espectros de massa dos mésons pesados são aprimorados em comparação com outros trabalhos na literatura.

Avançamos na abordagem simplética da Mecânica Quântica para obter, através de uma abordagem perturbativa, os estados fundamental e primeiro estado excitado do sistema charme-anticharme. Este sistema está sujeito a um campo magnético e interage através do potencial fenomenológico de Cornell, que inclui termos de confinamento e não-confinamento. Resolvemos a equação de Pauli-Schrödinger simplética, independente do tempo, após um mapeamento de Bohlin no referencial do espaço de fase. Posteriormente, a função de Wigner foi determinada. O foco principal foi o efeito do spin (do campo magnético) nas propriedades do estado do quarkônio pesado, representadas pela função de Wigner. A representação simplética do espaço de fase, operacionalizada pela função de Wigner, oferece insights profundos sobre o comportamento de sistemas de quarks que interagem fortemente. Os resultados apresentados revelam como o confinamento de quarks se manifesta intrinsecamente na geometria do espaço de fase, e como a aplicação de um campo magnético fraco induz assinaturas claras de não-classicidade quântica. Além disso, observamos que o espectro de massa do méson pesado  $c\bar{c}$  foi melhorado em comparação com outros estudos teóricos da literatura.

Por fim, como perspectivas para futuros desenvolvimentos, iremos utilizar a equação de Pauli-Schrödinger no formalismo da mecânica quântica simplética incorporando a formulação das derivadas fracionárias generalizadas. O efeito da temperatura finita e do potencial químico bariônico serão abordados em trabalhos futuros. O estudo do potencial fenomenológico de Cornell usando a abordagem das simetrias de Lie merecem certamente ser explorados.



## Apêndice A

# Sistema de Interação Efetiva Quark-Antiquark

Neste apêndice iremos mostrar parte dos cálculos feitos no cap. 5 para o sistema de interação efetiva, modelada por um quark-antiquark pesado no referencial do espaço de fase. Neste cenário, usando as relações de ortogonalidade e equações de autovalores conhecidas,

escrevemos

$$\begin{aligned}
 I_1 = & \frac{a}{W^2} \left[ \sqrt{(n_1 + 1)(n_1 + 2)(n_1 + 3)(n_1 + 4)} \delta_{m_1, n_1 + 4} \delta_{m_2, n_2} \right. & (A.1) \\
 & + (n_1^2 + n_1) \delta_{m_1, n_1 + 2} \delta_{m_2, n_2} \\
 & + (n_1 + 1) \sqrt{(n_1 + 1)(n_1 + 2)} \delta_{m_1, n_1 + 2} \delta_{m_2, n_2} \\
 & + (n_1^2 - n_1) \delta_{m_1, n_1} \delta_{m_2, n_2} \\
 & + \sqrt{(n_1^3 + 2)(n_1 + 1)} \delta_{m_1, n_1 + 2} \delta_{m_2, n_2} \\
 & + (n_1^2) \delta_{m_1, n_1} \delta_{m_2, n_2} \\
 & + (n_1^2 + n_1) \delta_{m_1, n_1} \delta_{m_2, n_2} \\
 & + (n_1 - 2) \sqrt{n_1(n_1 - 1)} \delta_{m_1, n_1 - 2} \delta_{m_2, n_2} \\
 & + (n_1 + 3) \sqrt{(n_1 + 1)(n_1 + 2)} \delta_{m_1, n_1 + 2} \delta_{m_2, n_2} \\
 & + (n_1)(n_1 + 1) \delta_{m_1, n_1} \delta_{m_2, n_2} \\
 & + (n_1 + 1)^2 \delta_{m_1, n_1} \delta_{m_2, n_2} \\
 & + (n_1 - 1) \sqrt{(n_1^2 - n_1)} \delta_{m_1, n_1} \delta_{m_2, n_2} \\
 & + (n_1 + 1)(n_1 + 2) \delta_{m_1, n_1} \delta_{m_2, n_2} \\
 & + (n_1) \sqrt{(n_1^2 - n_1)} \delta_{m_1, n_1 - 2} \delta_{m_2, n_2} \\
 & + (n_1 + 1) \sqrt{(n_1^2 - n_1)} \delta_{m_1, n_1 - 2} \delta_{m_2, n_2} \\
 & \left. + \sqrt{n_1(n_1 - 1)(n_1 - 2)(n_1 - 3)} \delta_{m_1, n_1 - 4} \delta_{m_2, n_2} \right].
 \end{aligned}$$

Tendo em conta os mesmos argumentos, escrevemos o segundo termo

$$\begin{aligned}
I_2 = & \frac{a}{W^2} 2 \left[ \sqrt{(n_1+1)(n_1+2)(n_1+1)(n_1+2)} \delta_{m_1, n_1+2} \delta_{m_2, n_2+2} \right. & (A.2) \\
& + n_2 \sqrt{(n_1+1)(n_1+2)} \delta_{m_1, n_1+2} \delta_{m_2, n_2} \\
& + (n_2+1) \sqrt{(n_1+1)(n_1+2)} \delta_{m_1, n_1+2} \delta_{m_2, n_2} \\
& + \sqrt{(n_1+1)(n_1+2)(n_2^2-n_2)} \delta_{m_1, n_1+2} \delta_{m_2, n_2-2} \\
& + n_1 \sqrt{(n_1+1)(n_1+2)} \delta_{m_1, n_1} \delta_{m_2, n_2+2} \\
& + (n_1)(n_2) \delta_{m_1, n_1} \delta_{m_2, n_2} \\
& + (n_1)(n_2+1) \delta_{m_1, n_1} \delta_{m_2, n_2} \\
& + n_1 \sqrt{(n_2^2-n_2)} \delta_{m_1, n_1} \delta_{m_2, n_2-2} \\
& + (n_1+1) \sqrt{(n_2+1)(n_2+2)} \delta_{m_1, n_1} \delta_{m_2, n_2+2} \\
& + (n_2)(n_1+1) \delta_{m_1, n_1} \delta_{m_2, n_2} \\
& + (n_1+1)(n_2+1) \delta_{m_1, n_1} \delta_{m_2, n_2} \\
& + (n_1+1) \sqrt{(n_2^2-n_2)} (\delta_{m_1, n_1} \delta_{m_2, n_2-2} \\
& + \sqrt{n_1(n_1-1)(n_2+1)(n_2+2)} \delta_{m_1, n_1-2} \delta_{m_2, n_2-2} \\
& + n_2 \sqrt{n_1(n_1-1)} \delta_{m_1, n_1-2} \delta_{m_2, n_2} \\
& + (n_2+1) \sqrt{n_1(n_1-1)} \delta_{m_1, n_1-2} \delta_{m_2, n_2} \\
& \left. + \sqrt{n_1(n_1-1)n_2(n_2-1)} \delta_{m_1, n_1-2} \delta_{m_2, n_2-2} \right]
\end{aligned}$$

e também, para o terceiro termo

$$\begin{aligned}
 I_3 = & \frac{a}{W^2} \left[ \sqrt{(n_2 + 1)(n_2 + 2)(n_2 + 3)(n_2 + 4)} \delta_{m_2, n_2 + 4} \delta_{m_1, n_1} \right. & (A.3) \\
 & + (n_2^2 + n_2) \delta_{m_2, n_2 + 2} \delta_{m_1, n_1} \\
 & + (n_2 + 1) \sqrt{n_2(n_2 + 1)n_2(n_2 + 2)} \delta_{m_2, n_2 + 2} \delta_{m_1, n_1} \\
 & + (n_2^2 - n_2) \delta_{m_2, n_2} \delta_{m_1, n_1} \\
 & + \sqrt{(n_2 + 1)^3(n_2 + 1)} \delta_{m_2, n_2 + 2} \delta_{m_1, n_1} \\
 & + (n_2^2) \delta_{m_2, n_2} \delta_{m_1, n_1} \\
 & + (n_2^2 + n_2) \delta_{m_2, n_2} \delta_{m_1, n_1} \\
 & + (n_2 - 2) \sqrt{(n_2^2 - 2)} \delta_{m_2, n_2 - 2} \delta_{m_1, n_1} \\
 & + (n_2 + 3) \sqrt{(n_2 + 1)(n_2 + 2)} \delta_{m_2, n_2 + 2} \delta_{m_1, n_1} \\
 & + (n_2^2 + n_2) \delta_{m_2, n_2} \delta_{m_1, n_1} \\
 & + (n_2 + 1)^2 \delta_{m_2, n_2} \delta_{m_1, n_1} \\
 & + (n_2 - 1) \sqrt{(n_2^2 - n_2)} \delta_{m_2, n_2} \delta_{m_1, n_1} \\
 & + (n_2 + 1)(n_2 + 2) \delta_{m_2, n_2} \delta_{m_1, n_1} \\
 & + (n_2) \sqrt{(n_2^2 - n_2)} \delta_{m_2, n_2 - 2} \delta_{m_1, n_1} \\
 & + (n_2 + 1) \sqrt{(n_2^2 - n_2)} \delta_{m_2, n_2 - 2} \delta_{m_1, n_1} \\
 & \left. + \sqrt{(n_2^2 - n_2)(n_2 - 2)(n_2 - 3)} \delta_{m_2, n_2 - 4} \delta_{m_1, n_1} \right]
 \end{aligned}$$

## Referências Bibliográficas

- 1 S. Godfrey and N. Isgur, Phys. Rev. D **32**, 189 (1985). [1](#), [2](#), [93](#)
- 2 H. Grosse and A. J. Martin, *Particle Physics and the Schrödinger Equation*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1997). [1](#), [2](#)
- 3 A. Mirjalili and M. Taki, Theor. Math. Phys. **186**, 280 (2016). [1](#)
- 4 H. Mansour and A. Gamal, Adv. High Energy Phys. **2018**, 7 (2018). [xvii](#), [1](#), [2](#), [56](#), [68](#), [80](#), [81](#), [93](#), [96](#)
- 5 R. R. Luz, G. X. A. Petronilo, A. E. Santana, C. S. R. Costa, R. G. G. Amorim, and R. A. S. Paiva, Adv. High Energy Phys. **2022**, 10 (2022). [1](#), [3](#), [52](#), [55](#), [56](#), [61](#), [64](#), [68](#), [75](#), [80](#), [87](#), [93](#), [94](#)
- 6 T. A. Nahool, A. M. Yasser, M. Anwar, and G. A. Yahya, East Eur. J. Phys. **3**, 31 (2020). [xvii](#), [1](#), [81](#), [83](#)
- 7 H. Mutuk, Adv. High Energy Phys. **2018**, 1 (2018). [1](#)
- 8 R. R. Luz, M. Abu-Shady, G. X. A. Petronilo, A. E. Santana, and R. G. G. Amorim, Adv. in High Energy Phys. **2023**, 7 (2023). [1](#), [2](#), [3](#), [64](#), [66](#), [67](#), [68](#), [69](#), [80](#), [81](#), [82](#), [83](#), [94](#), [96](#)
- 9 H. S. Chung, J. Lee, and D. Kang, J. Korean Phys. Soc. **52**, 1151 (2008). [1](#)
- 10 R. Mann, *An introduction to particle physics and the standard model*, (CRC press, New York, 2009). [1](#), [2](#), [3](#), [47](#)
- 11 S. Gasiorowicz, *Elementary particle physics*, (Wiley, New York, 1966). [1](#)
- 12 D. Griffiths, *Introduction to elementary particles*, (John Wiley & Sons, New York, 2008). [1](#), [47](#)

- 13 I. J. R. Aitchison, and A. J. G. Hey, *Gauge Theories in Particle Physics: A Practical Introduction: From Relativistic Quantum Mechanics to QED*, (IOP Publishing, Bristol, 2012). [1](#), [3](#), [47](#), [49](#), [50](#)
- 14 M. Thomson, *Modern Particle Physics*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2013). [1](#), [2](#), [47](#), [48](#), [49](#)
- 15 E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, J. B. Kogut, K. D. Lane, T. M. Yan, Phys. Rev. Lett. **34**, 369 (1975). [1](#)
- 16 E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane, T. M. Yan, Phys. Rev. D. **17**, 3090 (1978). [1](#)
- 17 R. Kumar and F. Chand, Commun. Theor. Phys. **59**, 528 (2013). [xvii](#), [2](#), [81](#), [82](#), [83](#), [96](#)
- 18 A. I. Ahmadov et al., J. Phys.: Conf. Ser. **1194**, 012001 (2019). [2](#)
- 19 M. Hamzavi and A. A. Rajabi, Chinese Phys. C **37**, 103102 (2013). [2](#)
- 20 S. Habib Mazharimousavi, Phys. Lett. B **841**, 137948 (2023). [2](#)
- 21 W. Lucha, F. F. Schöbel, *Phenomenological Aspects of Nonrelativistic Potential Models*, HEPHY/PUB-527, UWTh-1989-71 (1989). [xv](#), [1](#), [2](#), [66](#), [69](#)
- 22 W. Lucha, F. Shöbel and D. Gromes, Phys. Rep. **200**, 127 (1991). [1](#)
- 23 C. Mena, L. F. Palhares, arXiv:1804.09564v2 [hep-ph] 25 (2018). [xv](#), [66](#)
- 24 J. Sebastian, M. Y. Jamal, and N. Haque, Phys. Rev. D **107**, 054040 (2023). [2](#)
- 25 N. Brambilla, A. Vairo, Proc., 13th Annual Hampton University Graduate Studies, HUGS, **98**, 151, (1998). [2](#)
- 26 W. J. Marciano, *Elementary Particle Theory*, In AIP Conf. Proc., **127**, 731 (1985). [2](#), [3](#)
- 27 R. C. L. Bruni, E. F. Capossoli, and H. Boshi-Filho, Adv. High Energy Phys. **2019**, 6 (2019). [2](#), [3](#)
- 28 E. V. B. Leite, H. Belich, and R. L. L. Vitória, Adv. High Energy Phys. **2019**, 7 (2019). [2](#)

- 
- 29 G. X. A. Petronilo, R. G. G. Amorim, S. C. Ulhoa, A. F. Santos, A. E. Santana, and F. C. Khanna, *Int. J. Mod. Phys. A* **36**, 2150121 (2021). [2](#), [3](#)
- 30 N. R. Soni, B. R. Joshi, R. P. Shah, H. R. Chauhan, and J. N. Pandya, *Eur. Phys. J. C* **78**, 1 (2018). [2](#)
- 31 A. Deur, S. J. Brodsky, G. F. de Teramond, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **90**, 1 (2016). [2](#)
- 32 G. S. Bali, *Phys. Rep.* **343**, 1, (2001). [2](#)
- 33 M. Abu-Shady and E. M. Khokha, *Adv. high energy Phys.* **2018**, 7032041 (2018). [3](#)
- 34 P. Gupta and I. Mehrotra, *J. Mod. Phys.* **3**, 1530 (2012). [3](#)
- 35 E. P. Inyang, E. P. Inyang, E. S. William, and E. E. Ibekwe, *Jordan J. Phys.* **14**, 337 (2021). [3](#)
- 36 F. Ahmed, *Eur. Phys. Lett.* **133**, 50002 (2021). [3](#)
- 37 A. Vega and J. Flores, *Pramana - J. Phys.* **87**, 73 (2016). [3](#)
- 38 E. Omugbe, *Can. J. Phys.* **98**, 1125 (2020). [3](#)
- 39 E. M. Khoka, M. Abu-Shady, and T. A. Abdel-Karim, *Int. J. Theor. Appl. Math.* **2**, 86 (2016). [3](#), [81](#), [82](#), [83](#), [96](#)
- 40 I. O. Akpan, E. P. Inyang, E. P. Inyang, and E. S. William, *Rev. Mex. Fís.* **67**, 482 (2021). [3](#)
- 41 M. Abu-Shady, *Int. J. App. Math. Theor. Phys.* **2**, 16 (2016). [3](#), [81](#), [83](#)
- 42 E. P. Inyang, J. Karniliyus, J. E. Ntibi, and E. S. William, *Eur. J. Appl. Phys.* **3**, 48 (2021). [3](#)
- 43 E. P. Wigner, *Phys. Rev.* **40**, 749 (1932). [4](#), [7](#)
- 44 M. Hillery, R. F. O'Connell, M. O. Scully, and E. P. Wigner, *Phys. Rep.* **106**, 121 (1984). [4](#), [9](#)
- 45 W. B. Case, *Am. J. Phys.* **76**, 937 (2008). [4](#), [9](#)
- 46 T. Tilma, M. J. Everitt, J. H. Samson, W. J. Munro, and K. Nemoto, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 180401 (2016). [4](#)

- 47 D. Chruściński and K. Młodawski, Phys. Rev. A **71**, 052104 (2005). [4](#)
- 48 H. Dessano, R. A. S. Paiva, R. G. G. Amorim, S. C. Ulhoa, and A. E. Santana, Braz. J. Phys. **49**, 715 (2019). [4](#), [19](#), [24](#), [29](#), [30](#), [32](#), [33](#)
- 49 R. G. G. Amorim, R. A. S. Paiva, Advan. Theor. Comp. Phys. **1**, 1 (2018). [4](#), [29](#), [37](#), [38](#), [39](#), [40](#), [41](#), [42](#)
- 50 R. A. S. Paiva, *Mecânica Quântica Simplética e Não-classicalidade* (Tese de doutorado, IF-UnB, Brasília, 2019). [7](#), [21](#), [36](#), [37](#), [38](#), [39](#), [41](#), [42](#)
- 51 E. E. Perepelkin et al., Phys. Scr. **98**, 015221 (2023). [4](#)
- 52 T. L. Curtright, D. B. Fairlie, and C. K. Zachos, Phys. Rev. D **58**, 025002 (1998). [4](#)
- 53 T. L. Curtright, D. B. Fairlie, and C. K. Zachos, *A Concise Treatise on Quantum Mechanics in Phase Space*, (World Scientific Publishing Company, 2013). [4](#)
- 54 R. G. G. Amorim, F. C. Khanna, A. E. Santana, and J. D. M. Vianna, Phys. A: Stat. Mech. Appl. **388**, 3771 (2009). [4](#)
- 55 A. X. Martins, R. A. S. Paiva, G. X. A. Petronilo, R. R. Luz, R. G. G. Amorim, S. C. Ulhoa, and T. M. R. Filho, Adv. High Energy Phys. **2020**, 6 (2020). [4](#), [11](#)
- 56 R. R. Luz, *Interação de Quarks-Antiquarks Pesados Não-Relativísticos na Mecânica Quântica Simplética*, (Dissertação de mestrado, IF-UnB, Brasília, 2021). [4](#), [7](#), [29](#), [47](#), [48](#), [49](#)
- 57 R. G. G. Amorim, *Geometria Nao-Comutativa e Teoria de Campos Simplética*, (Tese de doutorado, IF-UnB, Brasília, 2009). [4](#), [7](#), [9](#), [11](#), [12](#), [13](#), [16](#), [17](#), [19](#), [21](#), [23](#), [24](#)
- 58 R. G. G. Amorim, *Formulação de Teorias de Campos via Estruturas Simpléticas e o Produto de Weyl*, (Dissertação de mestrado, IF-UnB, Brasília, 2006). [4](#), [7](#), [9](#), [11](#), [12](#), [13](#), [19](#), [23](#), [24](#), [32](#)
- 59 R. G. G. Amorim, M. C. B. Fernandes, A. R. Queiroz, A. E. Santana, and J. D. M. Viana, Rev. Bras. Ens. Fís. **35**, 1 (2013). [19](#), [21](#), [24](#)
- 60 C. Costa, M. R. Tenser, R. G. G. Amorim, M. C. B. Fernandes, A. E. Santana, and J. D. M. Vianna, Adv. Appl. Clifford Algebras **28**, 1 (2018). [37](#)

- 61 J. S. da Cruz Filho, R. G. G. Amorim, S. C. Ulhoa, F. C. Khanna, A. E. Santana, and J. D. M. Vianna, *Int. J. Mod. Phys. A* **31**, 1650046 (2016). [4](#), [19](#)
- 62 F. C. Khanna, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson and A. E. Santana, *Thermal quantum field theory: algebraic aspects and applications* (World Scientific, 2009). [19](#)
- 63 M. D. Oliveira, *Mecânica Quântica no Espaço de Fase via Representações do Grupo de Galilei*, (Dissertação de mestrado, IF-UFBA, Bahia, 2004). [4](#), [7](#), [22](#), [23](#), [24](#), [29](#), [30](#), [32](#), [35](#), [37](#), [39](#), [42](#), [45](#)
- 64 R. G. G. Amorim, M. C. B. Fernandes, F. C. Khanna, A. E. Santana, and J. D. M. Vianna, *Phys. Lett. A* **361**, 464 (2007). [4](#), [19](#), [29](#), [42](#)
- 65 R. G. G. Amorim, F. C. Khanna, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson, and A. E. Santana, *Int. J. Mod. Phys. A* **30**, 1550135 (2015). [4](#)
- ..
- 66 R. A. S. Paiva, R. G. G. Amorim, S. C. Ulhoa, A. E. Santana, and F. C. Khanna, *Adv. High Energy Phys.* **2020**, 9 (2020). [4](#), [11](#), [37](#), [45](#), [57](#), [87](#)
- 67 M. Abu-Shady, and M. K. Kaabar, *Math. Probl. Eng.* **2021**, 9444803, 9 (2021). [5](#), [64](#), [75](#)
- 68 M. Abu-Shady, S. Y. Ezz-Alarab, *Few-Body Syst.* **62**, 13 (2021). [5](#)
- 69 M. Abu-Shady, *Int. J. Mod. Phys. A* **343**, 1950201 (2019). [5](#)
- 70 K. B. Oldham, J. Spanier, *The Fractional Calculus* (Academic Press, New York, 1974). [5](#)
- 71 A. Al-Jamel, *J. Int. Mod. Phys. A* **34**, 1950054 (2019). [5](#), [72](#)
- 72 M. Abu-shady, A. I. Ahmadov, H. M. Fath-Allah, V. H. Badalov, *J. Theor. App. Phys.* **3**, 16 (2022). [5](#)
- 73 M. Abu-Shady, and M. K. A. Kaabar, *Comp. Math. Meth. in Med.*, **2022**, 2138775, 5 (2022). [5](#)
- 74 H. Karayer et al, *Commun. Theor. Phys.* **66**, 12 (2016). [5](#), [72](#), [76](#), [77](#)

- 75 M. Abu-Shady et al., *Adv. High Energy Phys.* **2022**, 9 (2022). [5](#)
- 76 M. Abu-Shady, Etido P. Inyang, *East Eur. J. Phys.* **4**, 80 (2022). [5](#)
- 77 M. Abu-Shady, Etido P. Inyang, *East Eur. J. Phys.* **1**, 63 (2023). [5](#), [72](#), [74](#)
- 78 M. Abu-Shady, *B. J. Mod. Phys.* **1**, 16 (2015). [74](#)
- 79 M. Abu-Shady, et al., *J. Egypt. Math. Soc.* **27**, 14 (2019). [74](#), [81](#), [82](#), [83](#), [96](#)
- 80 G. X. A. Pretronilo, *Covariância Galileana e Representações de Spin 1/2* (Dissertação de mestrado, IF-UnB, Brasília, 2019). [7](#), [13](#), [30](#)
- 81 H. Dessano, *Função de Wigner, Quasi-amplitudes de Probabilidades e Sistemas Dissipativos* (Dissertação de mestrado, IF-UnB, Brasília, 2014). [7](#), [9](#), [12](#), [30](#), [32](#), [33](#), [34](#), [36](#)
- 82 J. S. da Cruz Filho, *Teoria Quântica no Espaço de Fase: Modelo de Hénon-heiles e Simetrias de Calibre* (Tese de doutorado, IF-UnB, Brasília, 2016). [7](#), [9](#), [12](#), [24](#)
- 83 L. E. Ballentine, *Quantum Mechanics: A Modern Development*, (World Scientific Publishing Company, 1998). [7](#), [8](#)
- 84 L. D. Landau, and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-relativistic Theory*, (Elsevier, 2013). [7](#), [8](#)
- 85 M. A. Marchioli, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **24**, 421 (2002). [7](#)
- 86 R. Wezeman, *Weyl quantization and Wigner distributions on phase space*, (Doctoral dissertation, Faculty of Science and Engineering, 2014). [7](#)
- 87 P. S. C. Filho, *Mecânica Quântica Simplética e o Potencial De Coulomb*, (Tese de doutorado, IF-UFBA, Bahia, 2018). [7](#), [42](#), [44](#), [45](#)
- 88 R. G. G. Amorim, *eB. Fís.* **8**, 1 (2019). [7](#), [9](#), [11](#), [17](#), [19](#), [21](#), [22](#), [23](#), [24](#)
- 89 E. Wigner, *Phys. Rev.* **40**, 749 (1932). [9](#)
- 90 M. D. Oliveira, M. C. B. Fernandes, F. C. Khanna, A. E. Santana, and J. D. M. Vianna, *Ann. Phys. (N.Y.)* **312**, 492 (2004). [9](#), [22](#), [23](#), [24](#), [29](#), [30](#), [32](#), [35](#), [37](#), [44](#), [45](#), [53](#)
- 91 G. Torres-Vega, *J. Chem. Phys.* **93**, 8862 (1990). [9](#)

- 92 A. Kenfack, and K. Życzkowski, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **6**, 396 (2004). [61](#)
- 93 H. Dessano, *Mecânica Quântica Simplética e Sistemas Dissipativos*, (Tese de doutorado, IF-UnB, Brasília, 2019). [22](#), [23](#), [24](#), [29](#), [30](#), [32](#), [33](#), [34](#), [36](#)
- 94 M. A. De Gosson, *Symplectic Geometry and Quantum Mechanics*, (Springer Science & Business Media, 2006). [31](#)
- 95 M. A. De Gosson, *Symplectic Methods in Harmonic Analysis and in Mathematical Physics*, (Springer Science & Business Media, 2011). [31](#), [32](#)
- 96 R. G. G. Amorim, F. C. Khanna, A. E. Santana, and J. D. M. Vianna, *Phys. A: Stat. Mech. and its Appl.* **388**, 3771 (2009). [42](#)
- 97 P. Campos, M. G. R. Martins, M. C. B. Fernandes, and J. D. M. Vianna, *Ann. Phys. (N.Y.)* **390**, 60 (2018). [42](#), [44](#), [45](#), [57](#), [90](#)
- 98 R. R. Luz, Gabriella V. Ambrósio, C. N. da Costa, R. P. M. Moreira, R. A. S. Paiva, and G. X. A. Petronilo, *eB. Fís.* **10**, 1 (2021). [47](#)
- 99 R. P. M. Moreira, R. R. Luz, and L. R. Silva, *eB. Fís.* **10**, 1 (2021). [47](#)
- 100 M. Abu-Shady, R.R. Luz, G.X.A. Petronilo, A.E. Santana, and R.G.G. Amorim, *Int. J. Mod. Phys. A* **39**, 2450011 (2024). [80](#), [83](#), [93](#), [96](#)
- 101 R.R. Luz, G.X.A. Petronilo, R.A.S. Paiva, A.E. Santana, T.M. Rocha Filho, & R.G.G. Amorim, <https://doi.org/10.48550/arXiv.2507.20045> (2025). (submissão para **IJMPA-** International Journal of Modern Physics A) [96](#)
- 102 C. Lim, T. Morii, and S. N. Mukherjee, *The Physics of the Standard Model and Beyond*, (World Scientific, 2004). [47](#)
- 103 A. Bettini, *Introduction to Elementary Particle Physics*, (Cambridge University Press, 2014). [47](#)
- 104 A. J. Larkoski, *Elementary Particle Physics: An Intuitive Introduction*, (Cambridge University Press, 2019). [47](#)
- 105 L. D. Landau, *The Classical Theory of Fields*, **2**, 4th ed., (Elsevier, 2013). [47](#)

- 106 T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics: An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories*, **57**, 2nd ed., (World scientific, 1998). [47](#), [49](#)
- 107 A. Bettini, *Introduction to Elementary Particle Physics*, 2nd ed., (Cambridge University Press, 2014). [47](#)
- 108 L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, 2nd ed., (Cambridge University Press, UK, 1996). [47](#), [50](#)
- 109 F. Mandl, G. Shaw, *Quantum Field Theory*, 2nd ed., (John Wiley & Sons, UK, 2010). [47](#)
- 110 P. Ramond, *Field theory: a modern primer*, 2nd ed., (New York, 1997). [47](#)
- 111 L. D. Faddeev, and A. A. Slavnov, and G. B. Pontecorvo, *Gauge fields: Introduction to Quantum Theory*, 2nd ed., (CRC Press, 2018). [47](#)
- 112 E. Leader and E. Predazzi, *An introduction to gauge theories and modern particle physics*, **1**, (Cambridge University Press, 1996). [47](#)
- 113 J. J. Sakurai, *Invariance Principles and Elementary Particles*, (Princeton University Press, 2015). [47](#)
- 114 J. L. Lopes, *Gauge Field Theories: An Introduction*, (Elsevier, 2013). [47](#), [50](#)
- 115 H. Mansour and A. Gamal, *Results Phys.* **33**, 105203 (2022). [50](#)
- 116 W. Greiner and J. A. Maruhn, *Nuclear Models*, (Springer, 1996). [47](#)
- 117 W. Greiner and B. Müller, *Quantum Mechanics: Symmetries*, (Springer Science & Business Media, 2012). [47](#)
- 118 M. Tanabashi et al., *Review of Particle Physics: Particle Data Groups*. *Phys. Rev. D* **98**, 1 2018. [xvii](#), [56](#), [69](#)
- 119 P. Campos, M. G. R. Martins, and J. D. M. Vianna, *Phys. Lett. A* **381**, 1129 (2017). [44](#), [57](#), [87](#)
- 120 M. Abu-shady and M. Soleiman, *Phys. Part. Nucl. Lett.* **10**, 683 (2013). [72](#)
- 121 M. Abu-Shady, *Int. J. Appl. Math. and Theor. Phys.* **2**, 2, 16 (2016). doi: 10.11648/j.ijamtp.20160202.11 [72](#), [74](#), [81](#), [82](#)

- 
- 122 M. Abu-shady, A. I. Ahmadov, H. M. Fath-Allah, V. H. Badalov, J. Theor. App. Phys. **16**, 3 (2022) 10.30495/jtap.162225. [72](#)
- 123 A. F. Nikiforov and V. B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics*, (Birkhauser, Basel, 1988). [72](#)
- 124 M. Abu-Shady, and M. K. Kaabar, Int. J. Mod. Phys. A, (2023). [72](#)
- 125 R.L. Workman et al. (Particle Data Group), Prog. Theor. Exp. Phys. 2022, 083C01 (2022). [xvii](#), [80](#), [81](#), [82](#), [83](#), [96](#)
- 126 M. Abu-shady and H. M. Fath-Allah, arXiv:2309.14310 [hep-ph], (2023). [81](#), [82](#), [83](#), [96](#)
- 127 E. Omugbe, E. S. William, O. E. Osafire, I. B. Okon, E. P. Inyang and A. Jaha, Few-Body Syst. **63**, 6 (2022). [81](#), [82](#), [83](#), [96](#)
- 128 A. Celletti, *Basics of regularization theory.*, In: Chaotic Worlds: From Order to Disorder in Gravitational N-Body Dynamical Systems. Lect. Notes Phys., **227**. (Springer, Dordrecht. 2006) ([https://doi.org/10.1007/978-1-4020-4706-0\\_7](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-4706-0_7)) [87](#)
- 129 X.L. Yang, S.H. Guo, F.T. Chan, K.W. Wong, and W.Y. Ching, Phys. Rev. A **43**, 1186 (1991). [90](#)
- 130 H. Mutuk, Adv. High Energy Phys. **2019**, 9 (2019). [xvii](#), [93](#), [96](#)
- 131 A.E. Santana, F.C. Khanna, R.G.G. Amorim, S.C. Ulhoa, A.F. Santos, J.D.M. Vianna, Symplectic Quantum Field Theory (Cambridge Scholars Publishing, Newcastle - UK, 2024). [4](#), [29](#), [45](#)