



Universidade de Brasília

Instituto de Física

Programa de Pós-Graduação em Física

**Análise da relação entre os expoentes de
Lyapunov e os modos de Goldstone em um
sistema autogravitante bidimensional**

Autor: Lucas Demetrius Lima de Freitas

Orientador: Dr. Tarcísio Marciano da Rocha Filho

Brasília, DF

2025

Lucas Demetrius Lima de Freitas

**Análise da relação entre os expoentes de Lyapunov e os
modos de Goldstone em um sistema autogravitante
bidimensional**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade de Brasília (PPGFIS-UnB) como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Universidade de Brasília

Orientador: Dr. Tarcísio Marciano da Rocha Filho

Brasília, DF

2025

Lucas Demetrius Lima de Freitas

Análise da relação entre os expoentes de Lyapunov e os modos de Goldstone em um sistema autogravitante bidimensional

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade de Brasília (PPGFIS-UnB) como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Trabalho aprovado. Brasília, DF, 14 de Março de 2025:

Dr. Tarcísio Marciano da Rocha Filho
Orientador

Dr. Fernando Albuquerque de Oliveira
Convidado 1

Dr. Marcelo Albano Moret Simões Gonçalves
Convidado 2

Brasília, DF
2025

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família (Claudinéia, Gilmar e Luana) que sempre me apoiou em todos os momentos da minha vida, e em mais esta etapa não foi diferente.

Ao CNPq pelo apoio financeiro fornecido no início deste trabalho.

Aos meus colegas de curso que me auxiliaram com grande companheirismo nessa jornada.

Agradeço imensamente ao professor Tarcísio que nunca desacreditou e sempre me incentivou a concluir o curso e a todo corpo técnico e docente do PPGFIS-UnB.

E, por último e não menos importante, a Deusdedy grande amiga para toda vida que conheci no DF e me deu grande apoio moral para completar mais esta etapa.

RESUMO

No âmbito do estudo de sistemas de longo alcance, duas das propriedades que mais são estudadas para entender a complexidade de um sistema desse tipo são os expoentes de Lyapunov, que quantificam a caoticidade, e modos de Goldstone que indicam quebras de simetrias espontâneas. Sendo assim, neste trabalho investiga-se a dinâmica de um sistema autogravitante bidimensional, que é reconhecidamente caótico, composto inicialmente por um anel de partículas. O objetivo principal é encontrar uma relação entre a periodicidade dos modos de Goldstone formados e estabelecer uma relação matemática entre esses modos e os expoentes de Lyapunov. Para alcançar esse propósito, utilizamos uma rotina computacional eficiente criada pelo grupo de física computacional da Universidade de Brasília, desenvolvida em CUDA, permitindo a simulação de um grande número de partículas com alto desempenho computacional. A evolução temporal do sistema foi conduzida através de um método simplético, garantindo a conservação das propriedades hamiltonianas. Para o cálculo dos expoentes de Lyapunov, empregamos o método do mapa tangente, que possibilita a análise da sensibilidade a condições iniciais e a quantificação do caos no sistema. Os resultados obtidos revelaram que a evolução dos expoentes de Lyapunov em relação ao número de partículas desvia-se do comportamento observado em outros sistemas de longo alcance. Diferentemente da tendência típica de redução do caos com o aumento de partículas, observamos um comportamento anômalo, sugerindo que a dinâmica caótica persiste ou até mesmo se intensifica. Além disso, identificamos que os modos de Goldstone permanecem presentes no sistema por períodos extremamente longos, indicando uma persistência dessas excitações de baixa energia e uma possível relação com a estabilidade estrutural do sistema. Na conclusão, discutimos possíveis causas para o comportamento anômalo dos expoentes de Lyapunov, considerando a influência da dimensionalidade bidimensional e das simetrias contínuas presentes no sistema autogravitante. Propusemos uma relação matemática inicial que conecta o período de oscilação dos modos de Goldstone com a evolução dos expoentes de Lyapunov em função do número de partículas. Esses achados contribuem para uma compreensão mais profunda da interação entre caos e modos coletivos em sistemas com interações gravitacionais de longo alcance, abrindo caminho para futuras investigações teóricas e computacionais nessa área.

Palavras-chaves: Caos. Interação de longo alcance. Autogravitação. Expoentes de Lyapunov.

ABSTRACT

Within the scope of the study of long-range systems, two of the properties that are most studied to understand the complexity of a system of this type are the Lyapunov exponents, which quantify chaos, and Goldstone modes, which indicate spontaneous symmetry breaking. Therefore, this work investigates the dynamics of a two-dimensional self-gravitating system, which is recognized as chaotic, initially composed of a ring of particles. The main objective is to find a relationship between the periodicity of the formed Goldstone modes and establish a mathematical relationship between these modes and the Lyapunov exponents. To achieve this purpose, we use an efficient computational routine created by the computational physics group at the University of Brasília developed in CUDA, allowing the simulation of a large number of particles with high computational performance. The temporal evolution of the system was conducted using a symplectic method, ensuring the conservation of Hamiltonian properties. To calculate the Lyapunov exponents, we used the tangent map method, which allows the analysis of sensitivity to initial conditions and the quantification of chaos in the system. The results obtained revealed that the evolution of the Lyapunov exponents in relation to the number of particles deviates from the behavior observed in other long-range systems. Unlike the typical trend of chaos reduction with increasing particles, we observed anomalous behavior, suggesting that chaotic dynamics persist or even intensify. Furthermore, we identified that Goldstone modes remain present in the system for extremely long periods, indicating a persistence of these low-energy excitations and a possible relationship with the structural stability of the system. In the conclusion, we discuss possible causes for the anomalous behavior of the Lyapunov exponents, considering the influence of two-dimensional dimensionality and continuous symmetries present in the self-gravitating system. We proposed an initial mathematical relationship that connects the oscillation period of the Goldstone modes with the evolution of the Lyapunov exponents as a function of the number of particles. These findings contribute to a deeper understanding of the interaction between chaos and collective modes in systems with long-range gravitational interactions, paving the way for future theoretical and computational investigations in this area.

Key-words: Chaos. Long-range interactions. Self-gravitation. Lyapunov exponents.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 – Para uma mesma condição inicial $x_0 = 0.3$ a mudança do parâmetro independente r começa a bifurcar infinitas soluções para o mapa, a partir de $r \approx 2.5$. A figura a esquerda contém todo intervalo de r indo de 0 até 4 e a da direita dá foco às bifurcações infinitas a partir de $r = 3.6$. Ambas as figuras foram feitas tomando 500 interações para cada valor de r	21
Figura 1.2 – Apenas após cerca de 20 iterações do mapa, condições iniciais separadas por 10^{-6} começam a divergir consideravelmente em seus resultados.	22
Figura 1.3 – Em cristais quântico-temporais, a quebra de simetria faz surgir um campo escalar ϕ_0 com comportamento oscilatório sem custo energético para o sistema, que gera um condensado próximo ao centro de massa do sistema, desta forma a variável dinâmica relevante ao estudo dos modos de Goldstone para este sistema é a evolução temporal do próprio campo ϕ_0 . Fonte: (HAYATA; HIDAKA, 2018)	29
Figura 1.4 – Em superfluidos de Fermi, a quebra de simetria do sistema faz surgir um variação oscilatória na parte imaginária do coeficiente de difusividade (D) do fluido e consequentemente nas forças de interação das partículas, este comportamento leva ao surgimento de fônons no fluido (conhecidos como fônons de Bogoliubov-Anderson) que ao alcançar estabilidade tornam-se condensados de Bose-Einstein. Fonte: (HOINKA et al., 2017)	29
Figura 1.5 – Em um sistema auto gravitante unidimensional regido por uma hamiltoniana de campo médio (HMF) após algum tempo os componentes de magnetização das partículas começam a oscilar periodicamente gerando um superaquecimento do sistema e o levando a um estado de superdifusividade do centro de massa. Fonte: (ROCHAFILHO; MARCOS, 2020)	30
Figura 4.7 – Formato da distribuição inicial das partículas auto gravitantes.	39
Figura 4.8 – Na figura (4.8a) vemos a evolução do maior expoente de Lyapunov para sistemas com $N = 2048, 4096, 8192, 16384$ e 32768 no tempo com $p_0 = 0$. Nas figuras (4.8b), (4.8c) e (4.8d) o mesmo porém com $p_0 = 1.0, 2.0$ e 3.0 respectivamente.	40
Figura 4.9 – Evolução dos expoentes de Lyapunov em relação ao número de partículas do sistema para diferentes valores de p_0	41
Figura 4.10–Ajuste de curva para a correlação entre os expoentes de Lyapunov e o número de partículas em diferentes valores de p_0	41
Figura 4.11–Ajuste de curvas para a relação LLE x N em funções do tipo N^3 (vermelho) e $N^{-\frac{1}{3}}$ (azul) para $p_0 = 0.0, 1.0, 2.0, 3.0$	42

Figura 4.12–Função cúbica genérica, seguindo o formato da equação (4.12). Levando em conta que $N > 0$ o comportamento da relação LLE x N segue apenas o 1º quadrante do gráfico.	43
Figura 4.13–Relação entre os expoentes de Lyapunov médios com p_0 variando de 0.0 a 3.0 em um sistema com $N = 2048, 4096, 8192, 16384$ partículas.	43
Figura 4.14–Correlação entre os expoentes de Lyapunov médios com p_0 variando de 0.0 a 3.0 em um sistema com $N = 32768$ partículas.	44
Figura 4.15–Comportamento do LLE em relação a energia média por partícula em um modelo HMF com $N = 1000000$. Fonte: (ROCHAFILHO; MARCOS, 2020).	44
Figura 4.16–Evolução temporal da posição das partículas de um sistema auto gravitante bidimensional com momento angular nulo para 32768 partículas. Fonte: (ROCHAFILHO; MARCOS, 2020)	45
Figura 4.17–Desvios padrão da posição nas coordenadas x e y e médio (σ_x , σ_y e $\sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$ respectivamente) no tempo com diferentes valores de N para $p_0 = 0$	46
Figura 4.18–Desvios padrão da posição nas coordenadas x e y e médio (σ_x , σ_y e $\sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$ respectivamente) no tempo com diferentes valores de N para $p_0 = 0$	47
Figura 4.19–Ajustes de curvas para a relação entre o período de oscilação T dos momentos de inércia e o número de partículas N	48
Figura 4.20–Ajustes de curvas para a relação entre o período de oscilação T dos momentos de inércia e o número de partículas N	49
Figura 4.21–Ajustes de curvas para a relação entre o período de oscilação T dos momentos de inércia e o número de partículas N	50
Figura C.23–	66
Figura C.24–	67
Figura C.25–	68
Figura C.26–	69
Figura C.27–	70
Figura C.28–	71
Figura C.29–	72
Figura C.30–	73
Figura C.31–	74
Figura C.32–	75
Figura C.33–	76
Figura C.34–	77
Figura C.35–	78

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tabela relacionando o número de partículas N do sistema, o período médio T dos momentos de inércia e a distância mínima d_{min} entre picos utilizada para filtrar os ruídos gerados pelas simulações computacionais (NPPD = Não Possui uma Periodicidade bem Definida).	48
---	----

SUMÁRIO

	Introdução	15
I	REFERENCIAL TEÓRICO	19
1	CAOS E OS EXPOENTES DE LYAPUNOV	21
1.1	Expoentes de Lyapunov	22
1.1.1	Cálculo dos expoentes de Lyapunov em sistemas contínuos	23
1.1.1.1	Método do Mapa Tangente	24
1.2	Sistemas Hamiltonianos	25
2	MODOS DE GOLDSTONE	27
2.1	Formação dos Modos	27
2.1.1	Modos de Goldstone na Mecânica Clássica	27
2.2	Propriedades dos Modos	28
3	INTERAÇÕES DE LONGO ALCANCE	31
3.1	Sistemas Autogravitantes	33
3.1.1	Sistemas Autogravitantes em Duas Dimensões	33
II	RESULTADOS	35
4	MÉTODOS E RESULTADOS	37
4.1	Implementação Computacional	39
4.2	Resultados numéricos	39
4.2.1	Expoentes de Lyapunov	39
4.2.1.1	Relação com o Número de Partículas	40
4.2.1.2	Relação com p_0	43
4.2.2	Modos de Goldstone	45
4.2.2.1	Periodicidade	47
4.2.3	Relação entre os Modos de Goldstone e os Expoente de Lyapunov	49
III	CONCLUSÃO	51
	Conclusão	53

REFERÊNCIAS	55
 APÊNDICES	 59
APÊNDICE A – ORTONORMALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT .	61
APÊNDICE B – SISTEMAS SIMPLÉTICOS	63
APÊNDICE C – ROTINAS COMPUTACIONAIS	65

INTRODUÇÃO

Em 2020 Tarcísio Marciano da Rocha Filho e Bruno Marcos (ROCHAFILHO; MARCOS, 2020) publicaram um estudo de caso sobre a formação de modos de Goldstone em sistemas clássicos caóticos, estudando inicialmente um modelo hamiltoniano de campo médio (HMF) unidimensional, no qual analisaram suas características ao adentrar num estado de superdifusividade do seu centro de massa, mesmo com um momento total nulo, o que pode ser interpretado como um modo de Goldstone, até tender a uma difusão normal ao longo do tempo. Foi igualmente demonstrado que este fenômeno é genérico para qualquer sistema clássico que obedeça às condições estabelecidas por (STROCCHI, 2000) tendo como alguns exemplos o laser de elétrons livres e **sistemas auto gravitantes bidimensionais**. Dando continuidade a alguns dos estudos iniciados em 2020, este trabalho visa caracterizar algumas das propriedades da quebra de simetria em sistemas auto gravitantes 2-D, em especial analisar a variação do maior expoente de Lyapunov (LLE) e a periodicidade dos modos de Goldstone neste tipo de sistema.

Para entendermos a importância da análise de sistemas caóticos, podemos verificar que, após o estrondoso sucesso da lei da gravitação universal de Isaac Newton (1642 - 1727) em seu *Principia* (NEWTON, 1822) e suas previsões bem-sucedidas para o problema de dois corpos, começou-se uma corrida para a solução do problema de três ou mais corpos que acabou se vendo infrutífera com o passar dos anos, à exceção de algumas condições bem específicas. Reconhecidamente, o primeiro a mostrar que tal problema não possui solução analítica prática ¹ foi o matemático e físico francês Henri Poincaré (1854 - 1912) que indicou a possibilidade de órbitas não periódicas que não divergem no tempo tendendo ao infinito, mas que também não se aproximam de um ponto fixo (POINCARÉ, 2009).

A partir deste momento houve um grande avanço nos estudos da teoria de sistemas de grande complexidade e as pesquisas começaram a estabelecer o conceito de teoria do caos como o estudo de variáveis dinâmicas que possuem equações de movimento bem definidas (LORENZ, 1960; CVITANOVIĆ et al., 2022; GINELLI et al., 2011), porém que são altamente sensíveis às suas condições iniciais, tornando sua evolução temporal totalmente imprevisível em termos de análises numéricas e teoria perturbativa. Neste contexto o físico-matemático Aleksandr Lyapunov (1857-1918) preconizou que, em sistemas caóticos, as distâncias entre soluções muito próximas poderiam seguir um aumento exponencial entre suas distâncias iniciais (LYAPUNOV, 1992), estabelecendo assim os celebrados **expoentes de Lyapunov**, que se tornaram uma das primeiras formas de quantificar sistemas caóticos.

Já no início da década de 1960, o físico britânico Jeffrey Goldstone (1933-), inspirado

¹ em 1912 o finlandês K.F. Sundman provou uma solução do tipo série de potências (SUNDMAN, 1913), porém que se mostrou pouco eficiente em estudos computacionais

pelos estudos de Yoichiro Nambu (1921-2015), ao pesquisar sobre a solução de algumas equações diferenciais para supercondutores, lançou dois artigos (GOLDSTONE, 1961; GOLDSTONE; SALAM; WEINBERG, 1962) que revolucionaram o pensamento corrente sobre as simetrias na teoria quântica de campos, na teoria de transições de fase e superfluidez, no estudo da matéria condensada e que firmou umas bases para o modelo padrão (HIGGS, 1964; BLUME, 1966; KIBBLE, 1967; WEINBERG, 1967). Em seus trabalhos, ele definiu o que contemporaneamente conhecemos como **teorema de Goldstone**, o qual afirma que para qualquer quebra de simetria espontânea num sistema quântico dinâmico é formado um estado de excitação com custo nulo (ou muito próximo disso) para o sistema em questão. Numerosos exemplos foram descobertos ou revisados como sendo formados pelos modos de Goldstone; entre eles estão o bóson de Nambu-Goldstone (GOLDSTONE; SALAM; WEINBERG, 1962), o bóson de Higgs (HIGGS, 1964), a formação de fônons (LEUTWYLER, 1997), a formação de fótons (BJORKEN, 2001), etc.

Em geral, sistemas com transições de fase, em especial os de transição de 2ª fase, estão ligados a equações diferenciais cujas soluções tendem à caoticidade (CAMPA et al., 2014) e assim os modos de Goldstone estão em grande parte atrelados a sistemas caóticos e surge a necessidade de um estudo detalhado da relação entre sistemas hamiltonianos caóticos e suas quebras de simetria. Muitos são os estudos nesta área de pesquisa, principalmente para sistemas quânticos, porém, como já dito acima, os sistemas clássicos também podem ter quebras de simetrias espontâneas ao atingirem condições específicas e esta é uma área que não é tão explorada.

Neste sentido, foram idealizados os objetivos acima expostos para este trabalho, para obter resultados relevantes utilizamos um poderoso algoritmo computacional desenvolvido pelo núcleo de física computacional da Universidade de Brasília (UnB) em linguagem CUDA que consegue resolver uma grande quantidade de equações diferenciais simultaneamente utilizando processamento em paralelo. Desta forma conseguimos realizar simulações de avanço temporal em sistemas autogravitantes bidimensionais por longos períodos, avaliando a quebra de simetria deles, quais variáveis dinâmicas são relevantes ao processo e calculando seus expoentes de Lyapunov. Para analisar os resultados obtidos nas simulações, separamos o trabalho conforme exposto abaixo.

Na primeira parte, revisamos alguns conceitos que serão necessários para o entendimento da teoria do caos pelos expoentes de Lyapunov, apresentando sua definição e como podemos calculá-los de modo analítico e numérico. Em seguida, apresentamos em mais detalhes a teoria dos modos de Goldstone e como podemos analisar o comportamento de sistemas com quebras de simetria a suas variáveis dinâmicas relevantes e, por fim, apresentamos um pouco sobre as interações de longo alcance, suas particularidades e, em especial, vemos que os sistemas autogravitantes são de longo alcance e caracterizamos a gravitação em duas dimensões.

Na segunda parte apresentamos os resultados obtidos nas simulações, indicando quais

dados foram relevantes para realizá-las e algumas das dificuldades encontradas. Em relação aos expoentes de Lyapunov, vemos que seu comportamento está atrelado principalmente ao tamanho do sistema analisado, aqui investigado pelo número de partículas autogravitantes, e à energia média inicial por partícula do sistema, estudada por uma variável inicial p_0 (que pode ser entendida como o momento linear inicial), associada ao estado inicial de confinamento do modelo de anel gravitacional, pois a variação da energia potencial se mostrou problemática em termos computacionais. Após, verificamos que a formação dos modos de Goldstone está ligada a formação de um aglomerado de partículas em um formato compactado que gira em torno de um eixo de simetria, mesmo com momento angular médio nulo para o sistema e estudamos a periodicidade e o tempo de vida deste objeto.

Por fim, verificamos as relações matemáticas estabelecidas para os expoentes de Lyapunov e para os modos de Goldstone, a fim de iniciar uma forma de relacionarmos os dois fenômenos por meio de variáveis intermediárias.

Parte I

Referencial Teórico

1 CAOS E OS EXPOENTES DE LYAPUNOV

Dizemos como sendo caóticos aqueles sistemas que são altamente sensíveis as suas condições iniciais (C.I.) ou a parâmetros independentes, por exemplo, para um sistema dinâmico caótico se tomamos duas C.I. muito próximas após algum tempo decorrido teremos duas trajetórias completamente distintas (figura 1.1) ou se tomamos uma mesma condição inicial e mudamos algum parâmetro independente do sistema (figura 1.2) podemos observar comportamentos completamente distintos. Abaixo exemplificamos o que foi dito através de dois gráficos obtidos do **mapa logístico**

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) , \quad (1.1)$$

que é um famoso modelo para a estimativa de populações de espécies animais (LORENZ, 1960; MAY, 1976). Onde n é um certo número de iterações na população de uma determinada espécie, x_n é a população atual da espécie com x_0 sendo o valor inicial e r é um parâmetro independente que depende de fatores ambientais (OTT, 2008). Na figura 1.2 é apresentado o fenômeno conhecido como *bifurcação* onde, para uma mesma solução, ao modificarmos o coeficiente r , os valores para evolução de x começam a ser divergentes após algumas iterações, resultando em um mapa que se bifurca em inúmeros pontos; e é possível observar na figura 1.1 que ao simularmos a evolução da equação (1.1) para duas condições iniciais muito próximas, a separação entre os próximos valores dos mapas começa a ser significativa após poucas iterações¹.

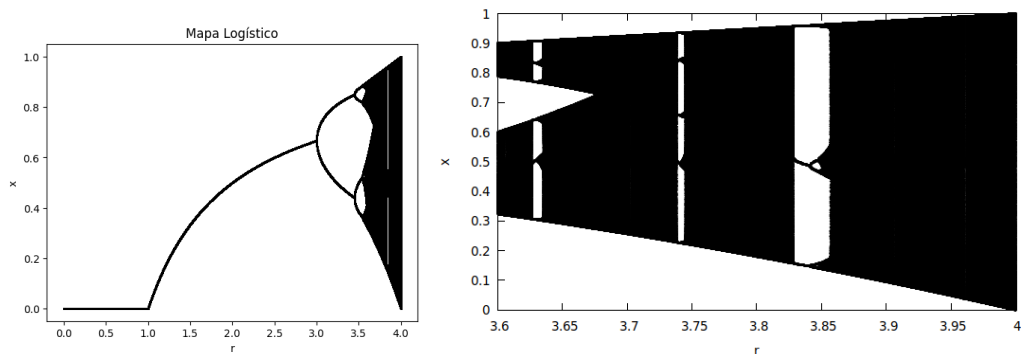


Figura 1.1 – Para uma mesma condição inicial $x_0 = 0.3$ a mudança do parâmetro independente r começa a bifurcar infinitas soluções para o mapa, a partir de $r \approx 2.5$. A figura a esquerda contém todo intervalo de r indo de 0 até 4 e a da direita dá foco às bifurcações infinitas a partir de $r = 3.6$. Ambas as figuras foram feitas tomando 500 iterações para cada valor de r .

Precisamos então de formas quantitativas para tratarmos esta sensibilidade a mudanças. De maneira geral, há muitos estudos para encontrar números universais, como as seções de

¹ Em 1996, foi mostrado que o mapa logístico desenhado pela máquina depende da precisão de cálculo da mesma, em um fenômeno de coalescência (LONGA; CURADO; OLIVEIRA, 1996)

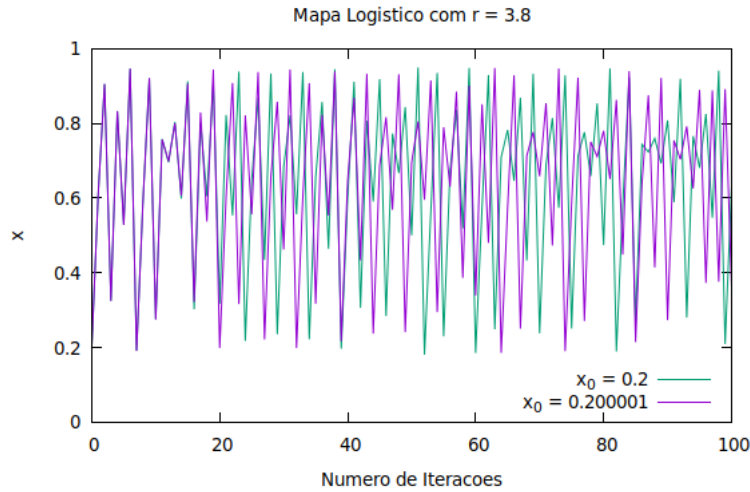


Figura 1.2 – Apenas após cerca de 20 iterações do mapa, condições iniciais separadas por 10^{-6} começam a divergir consideravelmente em seus resultados.

Poincaré e as constantes de Feigenbaum (HILBORN, 2000; OTT, 2008), que retratem esta característica, porém até hoje a principal caracterização de sistemas caóticos se dá pelos **expoentes de Lyapunov**.

1.1 EXPOENTES DE LYAPUNOV

Os expoentes de Lyapunov são uma das formas de mensurarmos a sensibilidade do sistema a perturbações e, portanto, as elongações e contrações no entorno de soluções estáveis para o sistema estudado. Eles indicam uma estimativa da divergência exponencial entre duas órbitas muito próximas no mapa ou, em caso de sistemas dinâmicos, no espaço de fase. Vejamos como ele é definido matematicamente.

Seja um mapa unidimensional $\mathbf{M}$ tal que

$$x_{n+1} = \mathbf{M}(x_n) , \quad (1.2)$$

é uma relação de mapeamento arbitrária. Tomando duas condições iniciais infinitesimalmente próximas, x_0 e $x_0 + dx_0$, supomos que a separação dx_n entre as duas órbitas após n aplicações do mapa será do tipo exponencial $dx_n \sim e^{\lambda n} dx_0$ e assim definimos (OTT, 2008; HILBORN, 2000) o expoente de Lyapunov λ deste mapa como:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left| \frac{dx_n}{dx_0} \right| ,$$

onde vemos que λ é, portanto, um parâmetro adimensional que estima o aumento, encurtamento ou estabilidade da separação entre as soluções estudadas. Porém

$$\frac{dx_n}{dx_0} = \frac{dx_n}{dx_{n-1}} \frac{dx_{n-1}}{dx_{n-2}} \dots \frac{dx_1}{dx_0}$$

$$\frac{dx_n}{dx_0} = \frac{dM(x_{n-1})}{dx_{n-1}} \frac{dM(x_{n-2})}{dx_{n-2}} \dots \frac{dM(x_0)}{dx_0}$$

$$\frac{dx_n}{dx_0} = M'(x_{n-1}) M'(x_{n-2}) \dots M'(x_0) .$$

Escrevemos então

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |M'(x_i)| , \quad (1.3)$$

e vemos desta definição que para $\lambda \leq 0$ o sistema tende a orbitar condição inicial x_0 e dizemos que o sistema é *estável*, se $\lambda > 0$ então as órbitas vizinhas tendem a se afastar umas das outras e o sistema é, portanto, *caótico*.

É fácil verificar que para um sistema N -dimensional podemos extrapolar este conceito para cada dimensão de forma independente (OTT, 2008) e assim teremos N expoentes de Lyapunov, os quais seu conjunto forma o *espectro de Lyapunov* do sistema que de forma padrão é organizado em ordem decrescente:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N , \quad (1.4)$$

sendo que a existência de um ou mais expoentes de Lyapunov positivos neste espectro é suficiente para caracterizar o sistema como *caótico*, tornando apenas a análise de λ_1 relevante em boa parte dos casos.

1.1.1 Cálculo dos expoentes de Lyapunov em sistemas contínuos

Seja um sistema de N equações diferenciais de 1ª ordem qualquer, e.g. as equações canônicas de um sistema hamiltoniano, da forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) , \quad (1.5)$$

onde

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{x}) \\ F_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ F_N(\mathbf{x}) \end{pmatrix} ,$$

com uma condição inicial $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$. Podemos analisar o comportamento do conjunto de soluções na vizinhança de $\mathbf{x}^*$, tomando

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}(t) , \quad (1.6)$$

com $\delta\mathbf{x}(t)$ seguindo a mesma notação de $\mathbf{x}$ e expandindo o mapa $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t))$ linearmente em $\mathbf{x}^*$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}(t)) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^*) \delta\mathbf{x}(t) + \mathcal{O}(\delta\mathbf{x}^2) , \quad (1.7)$$

com

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^*) \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_N}{\partial x_1} & \frac{\partial F_N}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_N}{\partial x_N} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*},$$

sendo o operador Jacobiano do sistema na condição inicial $\mathbf{x}^*$. Substituindo a equação (1.7) em (1.5) e desprezando os termos acima de primeira ordem obtemos,

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{J}(\mathbf{x}^*) \delta \mathbf{x}(t). \quad (1.8)$$

Existem algumas maneiras de calcularmos a divergência $|\delta \mathbf{x}|$ entre as trajetórias, i.e. os expoentes de Lyapunov, resolvendo a equação (1.8), porém no escopo deste trabalho, utilizaremos o método do **mapa tangente** que é explicado abaixo.

1.1.1.1 Método do Mapa Tangente

Neste método o sistema regido pela equação (1.5) é mapeado através do espaço tangente à sua condição inicial pela base de N vetores

$$\mathbf{w}_i \equiv \begin{pmatrix} \delta x_{i1} \\ \delta x_{i2} \\ \vdots \\ \delta x_{iN} \end{pmatrix} \quad 1 \leq i \leq N, \quad (1.9)$$

que são ortonormais entre si e ao próprio vetor de C.I. $\mathbf{x}^*$, além de regidos pela equação (1.8)

$$\dot{\mathbf{w}}_i = \mathbf{J}(\mathbf{x}^*) \mathbf{w}_i, \quad (1.10)$$

sendo $\dot{\mathbf{w}}_i \equiv \frac{d}{dt} \mathbf{w}_i(t)$. Assim o desvio das trajetórias em cada direção do espaço está definido por um desvio tangente similar a definição (1.3) e podemos escrever os N expoentes de Lyapunov deste espaço como sendo

$$\lambda_i \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |\mathbf{w}_i(t)|, \quad (1.11)$$

com a ordem de λ_i seguindo (1.4). Assim, dada uma condição inicial $\mathbf{x}^*$ e a base inicial $\{\mathbf{w}_1^{(0)}, \mathbf{w}_2^{(0)}, \dots, \mathbf{w}_N^{(0)}\}$ ao resolvermos numericamente as equações (1.5) e (1.10) vemos que alguns problemas computacionais surgem (FIRPO; ELSKENS, 1998; FILHO; AMATO; FIGUEIREDO, 2009; MANOS; RUFFO, 2011; GINELLI et al., 2011) como o fato de que os desvios $|\mathbf{w}_i(t)|$ passam a ser tão grandes que geram problemas de memória e que não podem mais ser considerados infinitesimais ou vizinhos à C.I., bem como o fato de a base $\{\mathbf{w}_i\}$ mudar constantemente no tempo de modo que seus vetores não sejam mais ortogonais, mesmo que continuem linearmente independentes entre si.

Tais problemas podem ser evitados ao realizarmos um processo ortonormalização de Gram-Schmidt (apêndice A) a cada intervalo de tempo T transformando os vetores não ortogonalizados $\mathbf{w}_i$ para um conjunto ortogonal de vetores $\mathbf{v}_i$ e em seguida normalizando este para uma base $\mathbf{u}_i$. Então recomeçamos o processo de solucionar as equações (1.5) e (1.10), porém com a base inicial sendo $\{\mathbf{u}_i\}$ e repetindo o processo após cada intervalo de tempo T um certo K número vezes (FILHO; AMATO; ROCHAFILHO, 2018; FILHO et al., 2019; SILVA; FILHO; ELSKENS, 2020).

Assim quando tivermos um tempo total KT suficientemente grande para a convergência dos expoentes de Lyapunov podemos escrever:

$$\lambda_i = \frac{1}{KT} \sum_{j=1}^K \log |\mathbf{v}_i^{(j)}(t)| \quad (1.12)$$

onde j indexa a qual parte dos K processos de ortogonalização a base $\mathbf{v}_i$ pertence e fica claro ver que $|\mathbf{w}_i(t)| = \prod_{j=1}^K |\mathbf{v}_i^{(j)}(t)|$.

1.2 SISTEMAS HAMILTONIANOS

Qualquer sistema $2N$ dimensional, evoluindo no tempo, que possa ser totalmente caracterizado por uma função $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ (dita função Hamiltoniana), com os vetores $\mathbf{q}$ (posição) e $\mathbf{p}$ (momento conjugado) sendo funções do tempo (t), tendo N dimensões cada e formando o chamado *espaço de fase*, é dito um **Sistema Hamiltoniano** (THORNTON; MARION, 2014; RUELLE, 1974; OTT, 2008; CAMPA et al., 2014). Os estados de um sistema deste tipo podem ser completamente especificados pelas conhecidas equações de movimento de Hamilton:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) , \\ \frac{d\mathbf{q}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) . \end{aligned} \quad (1.13)$$

Onde vemos que, se a hamiltoniana não depende explicitamente do tempo, $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, então esta se torna uma constante no tempo, $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = E$, e o sistema é dito *conservativo*.

Mapas formados por sistemas deste tipo são amplamente estudados desde meados do século XIX (DOROSHKEVICH et al., 1980; BOGOLIUBOV, 1981; ANTONI; RUFFO, 1995; BOUCHET; DAUXOIS, 2005; YAMAGUCHI, 2003; FILHO; AMATO; FIGUEIREDO, 2009) e portanto possuem uma série de propriedades conhecidas, porém no escopo deste trabalho vamos apenas enunciar algumas destas:

- Obedecem o **teorema de Liouville** em seu espaço de fase (HILBORN, 2000).
- Podem ser escritos em um formato *simplético* (apêndice B), de tal forma que obedecem o **teorema integral de Poincaré-Cartan** (OTT, 2008).

- Devido sua estrutura simplética, mapas de sistemas hamiltonianos caóticos possuem *ocorrência de expoentes de Lyapunov em pares simétricos* (OTT, 2008) $\lambda_{2N} = -\lambda_1, \lambda_{2N-1} = -\lambda_2$, etc.
- Ainda devido a sua estrutura simplética, sistemas hamiltonianos podem ser simulados computacionalmente, de modo que preservem suas variáveis conservadas, através dos chamados integradores simpléticos (YOSHIDA, 1990; GENG, 1995; MANNSETH; KLEPPE; SKAUG, 2016; TU; MURUA; TANG, 2019).

2 MODOS DE GOLDSTONE

Como dito na introdução, os modos de Goldstone são estados de baixo custo energético para sistemas dinâmicos, que surgem a partir de quebras na simetria do sistema. Neste capítulo explicamos em mais detalhes como essas quebras de simetria podem surgir e averiguamos que, apesar de este fenômeno ter uma descoberta no estudo da mecânica quântica, ele também está presente em diversos sistemas clássicos.

2.1 FORMAÇÃO DOS MODOS

Em seu artigo seminal de 1961, Goldstone (GOLDSTONE, 1961) analisou a teoria dos supercondutores com base em modelos covariantes e não-covariantes em campos escalares, que conduzem à supercondutividade, ao analisar as propriedades de simetria em um modelo φ^4 (CAMPA et al., 2014)

$$L = \frac{1}{2} (\square\varphi - \mu_0^2\varphi^2) - \frac{\lambda_0}{24}\varphi^4, \quad (2.1)$$

onde L é a lagrangiana do sistema com dependência de 4ª ordem do campo escalar φ , do tipo $\varphi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k q_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, gerado por sistema com massa efetiva μ_0 , $\square$ é o operador d'Alembertiano e λ_0 é uma constante de acoplamento. Goldstone verificou, mesmo não havendo segunda quantização direta para $\mu_0^2 < 0$, que diante de uma mudança de variáveis ($\varphi = \varphi' + \chi$), equivalente a uma leve perturbação no sistema, poderia ser capaz de estudar soluções de mínimos locais através da teoria clássica de segunda quantização com uma lagrangiana não mais simétrica

$$L = \frac{1}{2} (\square\varphi' - 2\mu_0^2\varphi'^2) - \frac{\lambda_0}{24}\varphi'^4 - \frac{\lambda_0\chi}{6}\varphi'^3 + \frac{3}{2}\frac{\mu_0^2}{\lambda_0}, \quad (2.2)$$

porém, ao resolver (2.2) para um campo de bósons complexo, descobriu que as soluções geravam modos complexos com valor esperado do vácuo diferentes de zero ($\langle 0 \rangle \neq 0$), sem massa que tinham custo zero de energia para o sistema como um todo. Em 1962, com a colaboração de Steven Weinberg (1933-2021) e Abdus Salam (1926-96) (GOLDSTONE; SALAM; WEINBERG, 1962), transformou suas conjecturas do ano anterior em um teorema que estabelecia que: *Sempre que um grupo de simetria contínua é quebrada com respeito a lagrangiana original, mas não o invariante do vácuo, será gerado um valor esperado de vácuo não nulo.* Este valor não nulo do vácuo foi interpretado como sendo uma partícula bosônica com massa e spin iguais a zero, que justificava a regra de Salam-Ward.

2.1.1 Modos de Goldstone na Mecânica Clássica

A teoria de Goldstone surgiu dentro da mecânica quântica e da teoria de campos, porém se mostrou altamente genérica, atraindo a atenção de estudiosos da mecânica estatística clássica,

afim de saberem se alguns dos fenômenos que ocorrem em transições de fase e em meta estados poderiam ser interpretados como modos suaves surgidos de quebras de simetria. Algumas tentativas de generalizar o teorema de Goldstone para sistemas clássicos foram feitas, até que, em 2000, Franco Strocchi (STROCCHI, 2000; STROCCHI, 2021) demonstrou que, satisfeitas algumas condições, é possível o surgimento de modos de Goldstone em sistemas clássicos; abaixo enunciamos o teorema proposto por Strocchi e em seguida fazemos uma interpretação mais física do mesmo

Teorema 1. *Teorema de Goldstone em sua contraparte clássica* Seja G um grupo (de Lie) de simetrias internas de uma equação linear do tipo

$$\square\varphi + U'(\varphi) = 0 ,$$

onde U é um potencial invariante sobre as transformações de simetria G ; e $\mathcal{H}_{\bar{\varphi}}$ um setor do espaço de Hilbert, definido pelo mínimo absoluto $\bar{\varphi}$ do potencial U , onde G é espontaneamente quebrado para $G_{\bar{\varphi}}$, o grupo de estabilidade de $\bar{\varphi}$. Seja o gerador T^α tal que

$$\delta^\alpha U(\varphi) = U'_j(\varphi) T^\alpha_{jk} \varphi_k = 0 , \quad \forall \varphi$$

Então para qualquer gerador T^α , tal que $T^\alpha \bar{\varphi} \neq 0$,

- i) Existem configurações de espalhamento, associadas às soluções pertencentes ao setor $\mathcal{H}_{\bar{\varphi}}$, que são soluções da equação de onda livre (**modos de Goldstone**).
- ii) Para qualquer esfera Ω_R de raio R e qualquer tempo T , existem soluções $\varphi_G^\alpha(x, t) \neq \bar{\varphi}$, $\varphi_G^\alpha \in \mathcal{H}_{\bar{\varphi}}$, cuja propagação está em Ω_R no intervalo de tempo $t \in [0, T]$ que são do tipo onda livre (**soluções do tipo Goldstone**)

Em termos dinâmicos as condições impostas no teorema podem ser interpretadas como:

- O sistema deve possuir um grau de liberdade infinito ($2N \rightarrow \infty$);
- O espaço de fase dos estados físicos deve ser dividido em "ilhas desconexas" estáveis sob evolução temporal.

Tais condições permitem que a quebra de simetria seja contínua e possível de ser observada através de estados *quasi*-estacionários (*QSS's*) muito longos.

2.2 PROPRIEDADES DOS MODOS

Para cada equação diferencial do tipo dado no teorema (1) temos um tipo de quebra de simetria diferente e assim a tarefa de encontrar os modos de Goldstone dos sistemas consiste

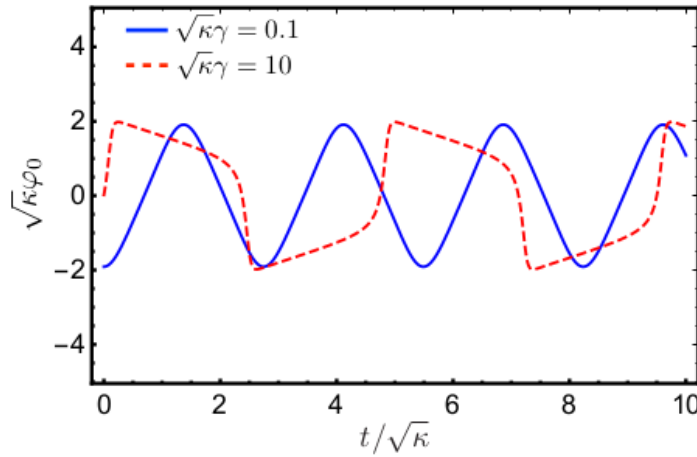


Figura 1.3 – Em cristais quântico-temporais, a quebra de simetria faz surgir um campo escalar φ_0 com comportamento oscilatório sem custo energético para o sistema, que gera um condensado próximo ao centro de massa do sistema, desta forma a variável dinâmica relevante ao estudo dos modos de Goldstone para este sistema é a evolução temporal do próprio campo φ_0 . Fonte: (HAYATA; HIDAKA, 2018)

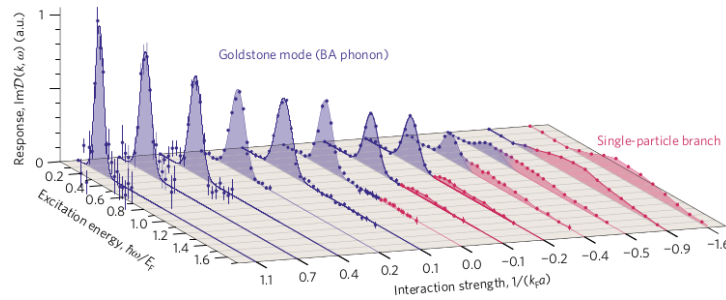


Figura 1.4 – Em superfluidos de Fermi, a quebra de simetria do sistema faz surgir uma variação oscilatória na parte imaginária do coeficiente de difusividade (D) do fluido e consequentemente nas forças de interação das partículas, este comportamento leva ao surgimento de fônons no fluido (conhecidos como fônons de Bogoliubov-Anderson) que ao alcançar estabilidade tornam-se condensados de Bose-Einstein. Fonte: (HOINKA et al., 2017)

em buscar variáveis dinâmicas que se comportem como uma onda livre no tempo. Dependendo da simetria do sistema, essa tarefa pode ser relativamente trabalhosa, nas figuras 1.3, 1.4 e 1.5 exemplificamos o comportamento do tipo onda livre em alguns sistemas quânticos e clássicos.

Podemos observar que para cada sistema dinâmico analisado devemos estabelecer as variáveis relevantes baseadas na observação do estado físico da partícula e na oscilação temporal. Assim uma das poucas propriedades herdadas por todos os sistemas com modos suaves é a **periodicidade** de suas oscilações, assim faz-se relevante um estudo das mesmas e a verificação de propriedades do sistema condicionam o seu comportamento.

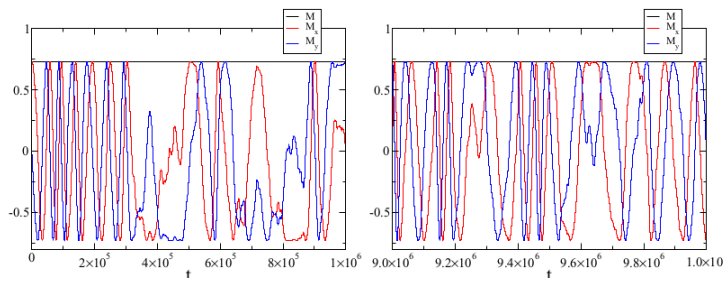


Figura 1.5 – Em um sistema auto gravitante unidimensional regido por uma hamiltoniana de campo médio (HMF) após algum tempo os componentes de magnetização das partículas começam a oscilar periodicamente gerando um superaquecimento do sistema e o levando a um estado de superdifusividade do centro de massa. Fonte: (ROCHAFILHO; MARCOS, 2020)

3 INTERAÇÕES DE LONGO ALCANCE

São ditos sistemas com interações de longo alcance aqueles cujo o potencial entre partículas evolui de tal forma que a energia total do sistema cresça superlinearmente com o volume. Esta definição é geralmente apresentada considerando um potencial de interação $\mathcal{V}(r)$ entre dois corpos separados por r em d -dimensões do tipo:

$$\mathcal{V}(r) \propto \frac{1}{r^\alpha} . \quad (3.1)$$

Então quando calculamos a densidade de energia potencial do sistema por meio de

$$\varepsilon = \int d^d r \, \rho \mathcal{V}(r) ,$$

onde ρ é a distribuição de partículas do sistema e vemos que por consequência a energia ε dependerá $V^{1-\frac{\alpha}{d}}$, onde V é o volume. Se $\alpha \leq d$ temos que a energia total $E = \int dV \varepsilon$ cresce superlinearmente com o volume.

Assim paradigmaticamente definimos interações de longo alcance aquelas cujo potencial seguem a lei de potência (3.1) com $\alpha \leq d$. Sistemas com tais interações possuem uma dinâmica característica que pode ser dividida em três fases: **relaxação violenta**, que é quando o sistema inicialmente fora do equilíbrio termodinâmico é conduzido de maneira rápida para um estado mais estável; **relaxação lenta**, que é quando o sistema permanece em estados estáveis (por vezes ditos *estados quasi-estacionários*, *QSS*), que obedecem a equação de Vlasov, por um longo período de tempo até alcançar o último estágio que é o **equilíbrio termodinâmico** onde as partículas obedecerão a distribuição estatística de Gibbs-Boltzmann.

Abaixo colocamos algumas características não usuais destes sistemas, em relação aos de curto alcance que são amplamente estudados nos cursos de graduação.

EXTENSIVIDADE

Em geral sistemas com interações de longo alcance são não extensíveis, ou seja, seus potenciais termodinâmicos não obedecem uma proporcionalidade com sua quantidade de matéria e suas grandezas extensivas (como massa). Portanto seus potenciais por partícula (por exemplo energia por partícula $\varepsilon = E/N$, entropia por partícula $s = S/N$, etc) não variam linearmente com o número de partículas, ou alguma grandeza associada a esta.

É possível ver um exemplo claro com a energia por partícula da definição destes sistemas em que a mesma cresce superlinearmente com o volume (uma grandeza que é associada ao número de partículas), porém este é um problema contornável ao propormos uma constante de

acoplamento $\mathcal{F}$ à definição dada pela eq. (3.1)

$$\mathcal{V}(r) \propto \frac{\mathcal{F}}{r^\alpha}, \quad (3.2)$$

de tal modo que possamos modificá-la para $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}V^{\frac{\alpha}{d}-1}$ e assim $E = \int dV \varepsilon = \varepsilon V$. Tal transformação (ou reescala) foi proposta para um modelo de sistema com $\alpha = 0$ ($\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/V$) pelo físico-matemático polonês Mark Kac e ficou conhecida como reescala (ou fator, ou prescrição) de Kac (KAC, 1959; CAMPA et al., 2014; LEVIN et al., 2014).

Apesar da prescrição de Kac recuperar a extensividade do sistema e levar a um limite termodinâmico não-trivial, ela "anula" as colisões (correlações) existentes no sistema fazendo com que a evolução dinâmica do sistema não se dê como de maneira usual pela equação de Boltzmann e pela hierarquia BBGKY, mas sim pela aproximação da equação de Vlasov (ou eq. de Boltzmann não-colisional). Tal aproximação faz com que o sistema leve um tempo infinito para alcançar o equilíbrio termodinâmico, o que nos leva a trabalhar com aproximações de estados quase-estacionários (estados que o sistema permanece por longos períodos até ir para um próximo).

ADITIVIDADE

Assim como não extensíveis os sistemas de longo alcance também são não aditivos, ou seja não obedecem a lei de composição aditiva entre potenciais termodinâmicos

$$\mu_t = \sum_{i=1}^M \mu_i,$$

onde μ_t é o potencial termodinâmico total de um sistema formado por M subsistemas independentes com μ_i sendo o potencial do i -ésimo subsistema. Um bom exemplo sobre as propriedades de extensividade e aditividade em sistemas de longo alcance pode ser observado na Hamiltoniana de Curie-Weiss (WEISS, 1907; CAMPA et al., 2014).

Porém diferentemente da extensividade não há um método de renormalização eficiente para recuperarmos a aditividade. O que pode acarretar numa não equivalência dos ensembles estatísticos.

INEQUIVALÊNCIA ENTRE ENSEMBLES

A teoria dos ensembles é basilar na mecânica estatística e a equivalência entre os ensembles microcanônico, canônico e grão-canônico formam uma vasta camada de possibilidades em sistemas de curto alcance que tornam possível trabalhar de forma flexível com vários potenciais termodinâmicos e voltarmos para os potenciais desejados através de transformadas de Legendre. Porém no cerne das demonstrações de equivalência estão as aproximações de

extensividade e aditividade do sistema, que acabamos de ver, que em geral, não são verdadeiras para as interações de longo alcance.

Portanto não há uma equivalência entre os ensembles para sistemas de longo alcance, com exceção de alguns casos, e deste modo não temos flexibilidade para trabalharmos com os potenciais termodinâmicos, de tal modo que não podemos evitar complicações matemáticas grandes, bem como fenômenos exóticos, por exemplo a possibilidade de calor específico negativo ou a possibilidade de num ensemble o sistema estar em uma fase bem determinada e em outro estar em transição de fase.

Estas características peculiares muitas vezes levam os sistemas de longo alcance a possuírem descontinuidades em suas derivadas temporais superiores no potenciais termodinâmicos, em espacial nas de segunda ordem, o que os leva a transições de fase de segunda ordem com alto grau de caoticidade no sistema.

3.1 SISTEMAS AUTO GRAVITANTES

São ditos sistemas autogravitantes aqueles que obedecem a lei de gravitação de Newton, ou seja, aqueles cujo o potencial satisfaz a equação de Poisson:

$$\nabla^2 \mathcal{V}(r, t) = 4\pi G \rho(r, t) , \quad (3.3)$$

onde G é a constante de gravitação universal, ∇^2 é o operador laplaciano em d dimensões e $\rho(r, t)$ é a densidade de distribuição da massa do sistema que pode ser obtida através da função de distribuição de uma partícula $f(r, \mathbf{v}; t)$:

$$\rho(r, t) = \int_{V_v} d\mathbf{v} f(r, \mathbf{v}; t) , \quad (3.4)$$

com $\mathbf{v}$ sendo o vetor velocidade.

Vamos aqui nos focar nos sistemas bidimensionais, caso o leitor queira explorar outras dimensões de sistemas deste tipo há uma vasta bibliografia (DESER; JACKIW; HOOFT, 1984; VERLINDE, 1990; PINTO; CASAS, 1996; ŠUMANOVAC; RITSEMA; BRIL, 1996; MILLER; YAWN; YOUNGKINS, 1998; BENETTI et al., 2014), etc.

3.1.1 Sistemas Autogravitantes em Duas Dimensões

Sistemas gravitacionais bidimensionais são relevantes em inúmeras áreas de estudo, principalmente no estudo dos anéis de acreção de buracos negros (DOROSHKEVICH et al., 1980; ZHENG; DU, 2015; SILVESTRE; ROCHAFILHO, 2016; MARCOS, 2013; CHAVANIS, 2009), desta forma mostra-se relevante o estudo de caso para suas mais variadas configurações e variáveis.

Para trabalharmos com interações de longo alcance é conveniente definirmos uma escala de tempo dinâmica τ_D em relação a um parâmetro arbitrário (BENETTI et al., 2014), no caso do sistema autogravitante 2-D podemos escolher um comprimento arbitrário L_0 :

$$\tau_D = \frac{L_0}{\sqrt{2GM}} \quad (3.5)$$

com M sendo a massa total do sistema. Deste modo é possível reescrever a eq. (3.3) como

$$\nabla^2 \mathcal{V}(r, t) = 2\pi\rho(r, t) . \quad (3.6)$$

Sabendo que neste sistema a distribuição de densidade para uma partícula é do tipo delta de Dirac, $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ podemos resolver a eq. (3.6) para sistemas com simetria azimutal encontrando, para um sistema 2-D,

$$\mathcal{V}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = m m' \log |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| , \quad (3.7)$$

com m e m' sendo as massas de duas partículas situadas nas posições $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$, respectivamente, em relação a um referencial qualquer adotado.

Assim podemos definir a hamiltoniana de sistemas autogravitantes 2-D com N partículas de massa m como:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \frac{m^2}{2} \sum_{i,j=1}^N \log |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| . \quad (3.8)$$

Com a eq. (3.8) podemos observar que o sistema possui uma transição de fase de 1ª ordem que não é a mesma para todos os ensembles termodinâmicos, porém que pode ser encontrada analiticamente em cada um destes. No ensemble canônico, por exemplo, a temperatura crítica é dada (EMDEN, 1908; ABDALLA; TABAR, 1998) por:

$$T_c = \frac{1}{4k_B} N G m^2 , \quad (3.9)$$

em que o sistema é levado de um estado de partículas aglomeradas para um gás expandido. Esta transição de fase leva o sistema a um comportamento caótico de longa duração, devido a criação de estruturas compactas com a maior parte das partículas do sistema as orbitando (MARCOS, 2013), estas estruturas podem ser entendidas como modos de Goldstone (ROCHAFILHO; MARCOS, 2020) com tempo de vida muito grandes.

Parte II

Resultados

4 MÉTODOS E RESULTADOS

Como visto na introdução nosso objetivo é estabelecer a relação entre os coeficientes de Lyapunov e a formação dos modos de Goldstone em um sistema bidimensional, para isso inicialmente devemos descobrir as equações de Hamilton que regem o sistema e igualmente as equações que regem o entorno de soluções próximas a soluções estáveis. Como caracterizado acima na equação (3.8) a hamiltoniana a ser trabalhada será dada por:

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2N} \sum_{i<j=1}^N \log |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, \quad (4.1)$$

onde foi escolhido um sistema de unidades naturais com $m = 1$ e o N na parte espacial da hamiltoniana é um fator de Kac introduzido.

Tomando que $\mathbf{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j}$ seja o vetor posição de uma partícula i qualquer no espaço, temos que $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} + \epsilon$, com $\epsilon \ll 1$ sendo um termo inserido para não haver divergências computacionais posteriores, e $\mathbf{p}_i$ é o momento conjugado da mesma com $p_i^2 = p_{xi}^2 + p_{yi}^2$. Temos então, após alguns algebrismos, que as equações de Hamilton do sistema serão dadas por:

$$\dot{x}_i = p_{xi} \quad (4.2)$$

$$\dot{y}_i = p_{yi} \quad (4.3)$$

$$\dot{p}_{xi} = -\frac{1}{N} \sum_{i<j=1}^N \frac{x_i - x_j}{\left[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \right] \left(1 + \frac{\epsilon}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}} \right)} \quad (4.4)$$

$$\dot{p}_{yi} = -\frac{1}{N} \sum_{i<j=1}^N \frac{y_i - y_j}{\left[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \right] \left(1 + \frac{\epsilon}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}} \right)}. \quad (4.5)$$

Tomando uma solução estável $(x_i^*, y_i^*, p_{xi}^*, p_{yi}^*)$ do sistema e seguindo uma solução vizinha do tipo de (1.6), após algumas manipulações, teremos que as equações diferenciais para

as separações $\delta \mathbf{x}$ no entorno da vizinhança serão:

$$\delta \dot{x}_i = \delta p_{xi} \quad (4.6)$$

$$\delta \dot{y}_i = \delta p_{yi} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{p}_{xi} = & -\frac{1}{N} \sum_{i < j=1}^N \frac{\delta x_i - \delta x_j}{\left[(x_i^* - x_j^*)^2 + (y_i^* - y_j^*)^2 \right] \left(1 + \frac{\epsilon}{\sqrt{(x_i^* - x_j^*)^2 + (y_i^* - y_j^*)^2}} \right)} \\ & + \frac{2}{N} \sum_{i < j=1}^N \frac{(x_i^* - x_j^*) \Delta}{\left[(x_i^* - x_j^*)^2 + (y_i^* - y_j^*)^2 \right]^2 \left(1 + \frac{\epsilon}{\sqrt{(x_i^* - x_j^*)^2 + (y_i^* - y_j^*)^2}} \right)} \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{p}_{yi} = & -\frac{1}{N} \sum_{i < j=1}^N \frac{\delta y_i - \delta y_j}{\left[(x_i^* - x_j^*)^2 + (y_i^* - y_j^*)^2 \right] \left(1 + \frac{\epsilon}{\sqrt{(x_i^* - x_j^*)^2 + (y_i^* - y_j^*)^2}} \right)} \\ & + \frac{2}{N} \sum_{i < j=1}^N \frac{(y_i^* - y_j^*) \Delta}{\left[(x_i^* - x_j^*)^2 + (y_i^* - y_j^*)^2 \right]^2 \left(1 + \frac{\epsilon}{\sqrt{(x_i^* - x_j^*)^2 + (y_i^* - y_j^*)^2}} \right)}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde $\Delta = (x_i^* - x_j^*) (\delta x_i - \delta x_j) + (y_i^* - y_j^*) (\delta y_i - \delta y_j)$.

Tendo de posse estas equações é possível aplicar o método do Mapa Tangente e determinar os LLE para o sistema através de (1.10) e (1.11).

A outra parte do problema a ser resolvida é encontrar as variáveis responsáveis pela quebra de simetria do sistema e consequentemente ter uma forma de medir a evolução dos modos de Goldstone no tempo. Esta resposta poder ser encontrada em (MARCOS, 2013; ROCHAFILHO; MARCOS, 2020) onde vemos que as variáveis de simetria que são mais facilmente quebradas são os momentos de inércia ¹ de cada partícula

$$\sigma_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2, \quad (4.10)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^2. \quad (4.11)$$

Vale ponderar que, tanto os momentos de inércia em coordenadas cartesianas, como os em coordenadas polares podem ser utilizados para caracterizar os modos suaves que surgem a partir da quebra de simetria, porém computacionalmente é mais prático utilizarmos coordenadas cartesianas devido ao tempo de processamento, enquanto analiticamente a utilização das coordenadas polares nos dá uma maior evidência das quebras de simetria ao longo do tempo.

¹ para sistemas que utilizam unidades naturais é possível ver que os momentos de inércia são equivalentes à variância da posição das partículas no tempo

4.1 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Na implementação computacional foi utilizada programação em Compute Unified Device Architecture (CUDA) com uma placa NVIDIA GTX 1060 para otimizar as demandas computacionais exigidas para a solução conjunta de (4.2) e (4.6), com a programação em paralelo oferecida pela grande quantidade de micro-processadores nas placas de vídeo modernas. Como condição inicial as partículas foram confinadas em um anel autogravitante, ver figura 4.7, de raio menor r_1 e raio maior r_2 fixos (sem variar a energia potencial inicial da partículas), porém com diferentes fatores p_0 (diferentes energias iniciais) e número de partículas N . As rotinas computacionais completas utilizadas podem ser observadas no apêndice C, para as quais cada iteração computacional corresponde a uma evolução temporal $dt = 0.005$ com um tempo total inicial $tf = 50000$, onde a cada $ts = 1$ os resultados foram salvos e com $r_1 = 40$ e $r_2 = 50$ no anel auto-gravitante em $t = 0$ com todas as variáveis em unidades naturais. A seguir analisamos alguns dos principais resultados obtidos.

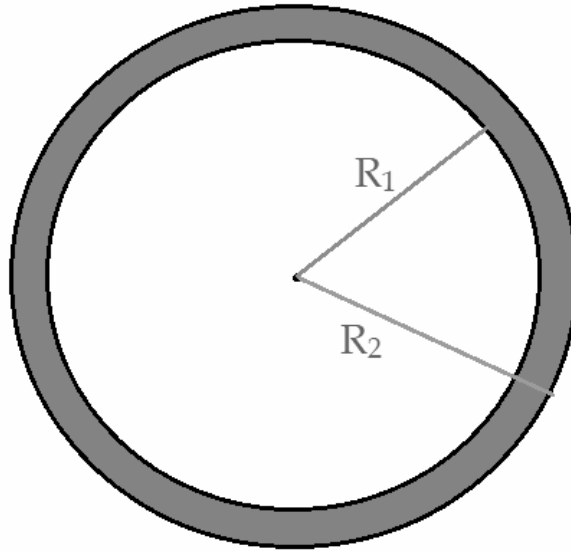


Figura 4.7 – Formato da distribuição inicial das partículas auto gravitantes.

4.2 RESULTADOS NUMÉRICOS

4.2.1 Expoentes de Lyapunov

Para calcular os maiores expoentes de Lyapunov utilizamos $nlyap = 3000$, consultar apêndice C, desta forma o estudo da sua variação com o número de partículas N e com a energia inicial através de p_0 ajuda a compreendermos a evolução do sistema auto gravitante em sua evolução para o limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$).

4.2.1.1 Relação com o Número de Partículas

A figura 4.8 nos mostra a evolução dos LLE's do sistema no tempo, em diferentes números de partículas e momentos, e vemos que o LLE começa a se estabilizar nas proximidades de $t = 1000$, esse foi o tempo de relaxação violenta ² utilizado para tomarmos a média dos expoentes de Lyapunov utilizados na figura 4.9 que mostra a correlação entre os LLE e o aumento do número de partículas do sistema.

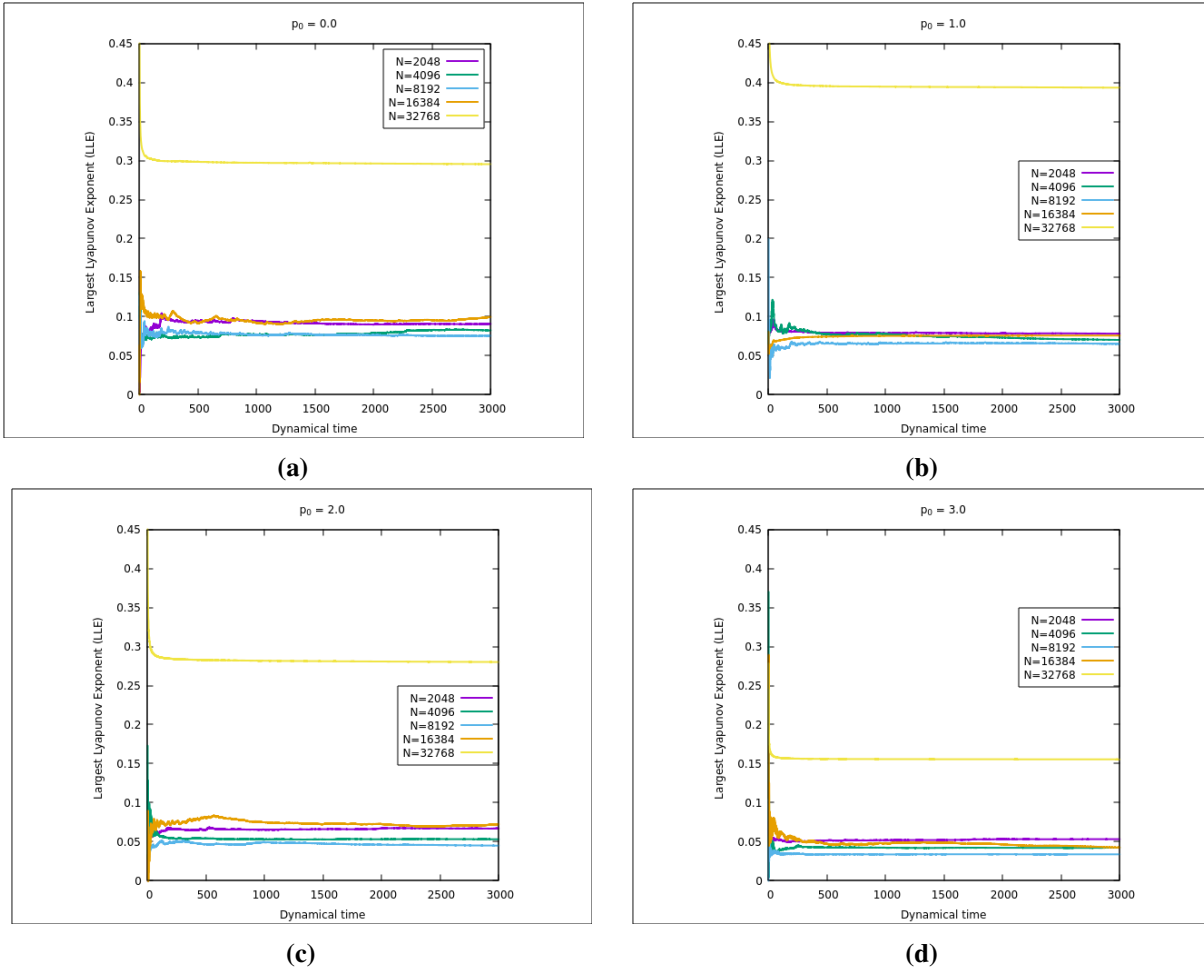


Figura 4.8 – Na figura (4.8a) vemos a evolução do maior expoente de Lyapunov para sistemas com $N = 2048, 4096, 8192, 16384$ e 32768 no tempo com $p_0 = 0$. Nas figuras (4.8b), (4.8c) e (4.8d) o mesmo porém com $p_0 = 1.0, 2.0$ e 3.0 respectivamente.

Ao relacionarmos os LLE's médios do sistema com o seu número de partículas é possível obter as curvas expostas na figura (4.9), que apesar de um leve desvio na linha verde ($p_0 = 1.0$) possui uma tendência bem definida em diferentes momentos lineares iniciais. Ao tomarmos o ajuste de curvas para os pontos estudados ³ vemos que o padrão que melhor se adapta a eles são funções polinomiais de 3º grau do formato

² É possível ver uma pequena variação entre os tempos de relaxação para diferentes valores de p_0 , porém pegamos o maior deles.

³ Para avaliar o melhor ajuste possível utilizamos um modelo simples de Coeficiente de Determinação R^2 , que indica a porcentagem de ajuste da variância entre a curva elaborada pela máquina e os dados estudados, quanto mais próximo de 1, melhor é o ajuste (DEVORE; CORDEIRO, 2014)

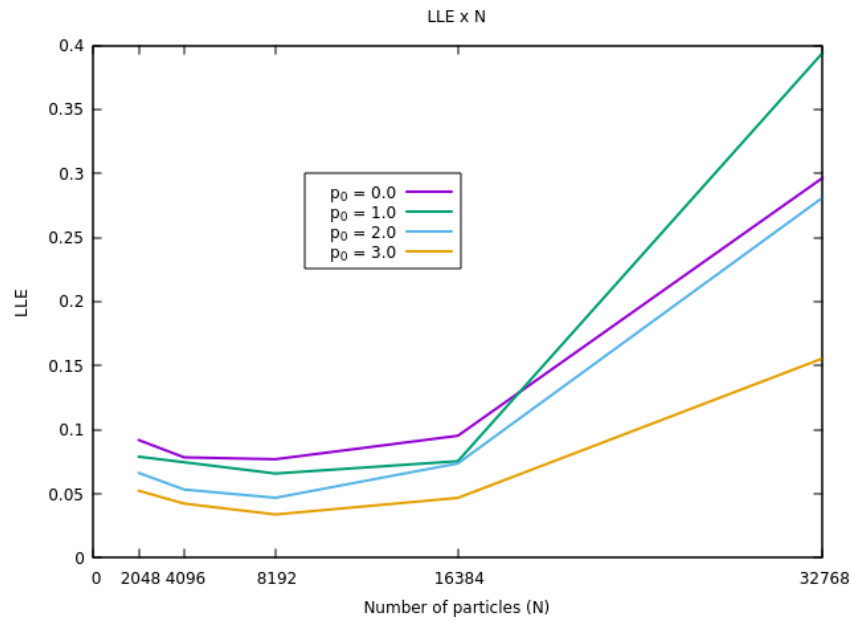


Figura 4.9 – Evolução dos expoentes de Lyapunov em relação ao número de partículas do sistema para diferentes valores de p_0 .

$$LLE(N) = a \cdot 10^{-15} \cdot N^3 + b \cdot 10^{-10} \cdot N^2 + c \cdot 10^{-6} \cdot N + d \cdot 10^{-2}, \quad (4.12)$$

com a , b , c e d sendo números reais com módulo menor que 10. Isso pode ser visto na figura 4.10.

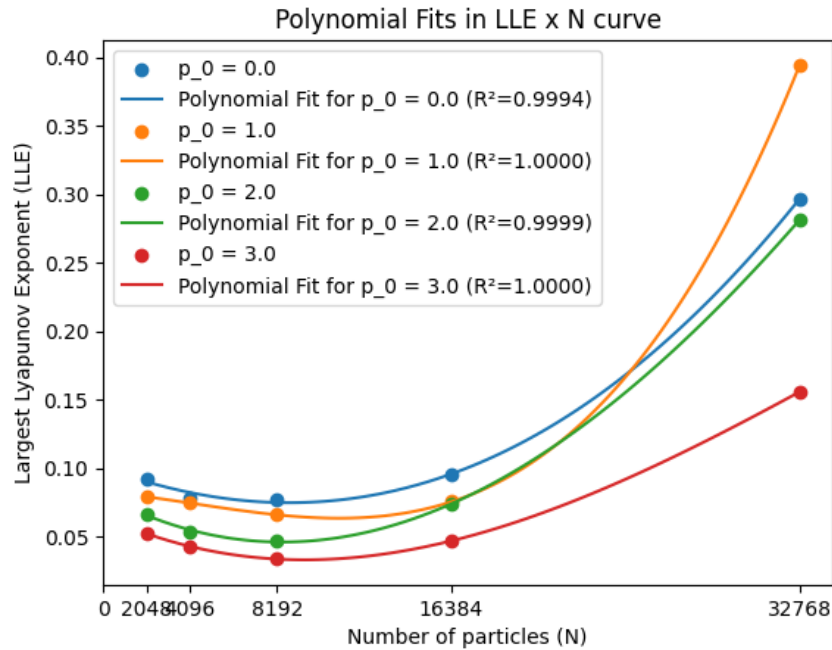


Figura 4.10 – Ajuste de curva para a correlação entre os expoentes de Lyapunov e o número de partículas em diferentes valores de p_0 .

Este resultado, com a caoticidade do sistema tendendo a aumentar com o número de partículas do sistema em dependência com N^3 , é anômalo em vários sentidos: Se pensarmos

que ao aumentar o número de partículas do sistema estamos nos aproximando do limite termodinâmico a tendência do sistema deveria ser a de estabilidade e decréscimo do expoente de Lyapunov, e se compararmos com a biografia usual (MANOS; RUFFO, 2011; ROCHAFILHO et al., 2014; ROCHAFILHO; MARCOS, 2020; ANTENEODO; VALLEJOS, 2001) que cita uma dependência padrão com $N^{-\frac{1}{3}}$ (Na figura 4.11 vemos uma comparação entre os pontos plotados e as duas curvas) em outros sistemas dinâmicos de longo alcance⁴. Este comportamento divergente pode vir do fato de que o sistema autogravitante bidimensional com muitas partículas estar em um estado de confinamento que é completamente de seus análogos uni e tridimensionais, que divergem devido a uma fuga contínua de partículas de seu centro de equilíbrio para simetrias esféricas (BENETTI et al., 2014; CAMPA et al., 2014), ou que possui características muito próprias que exigem uma verificação mais aprofundada.

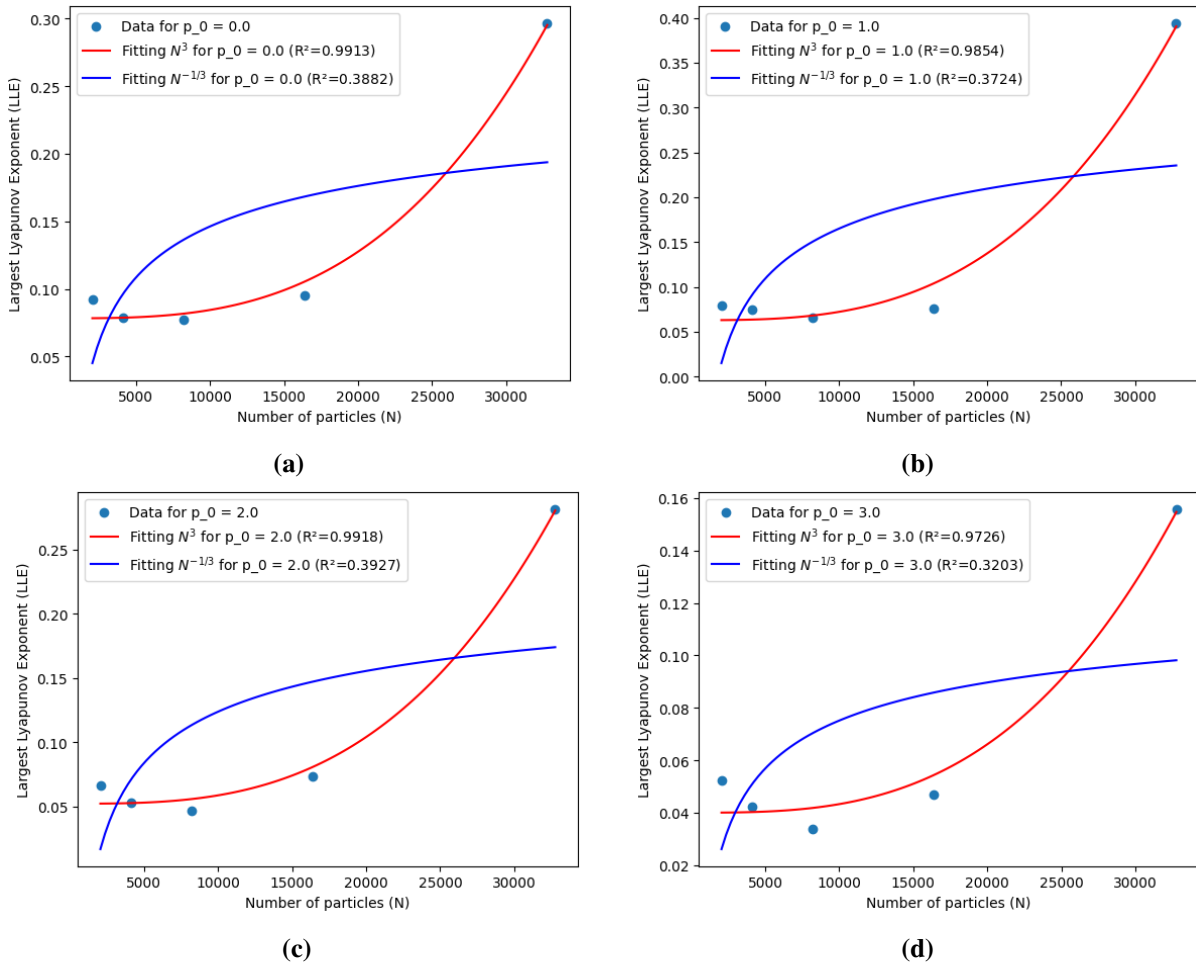


Figura 4.11 – Ajuste de curvas para a relação LLE x N em funções do tipo N^3 (vermelho) e $N^{-\frac{1}{3}}$ (azul) para $p_0 = 0.0, 1.0, 2.0, 3.0$.

Na figura 4.12 é possível ver que a tendência natural da função de relação encontrada é apenas de aumento do LLE em relação ao aumento de partículas no sistema, não existe um ponto de estabilização como na relação com $N^{-\frac{1}{3}}$.

⁴ Apesar de ser um padrão comum de surgir em análises computacionais, a dependência $N^{-\frac{1}{3}}$ não é de caráter universal ou provada analiticamente.

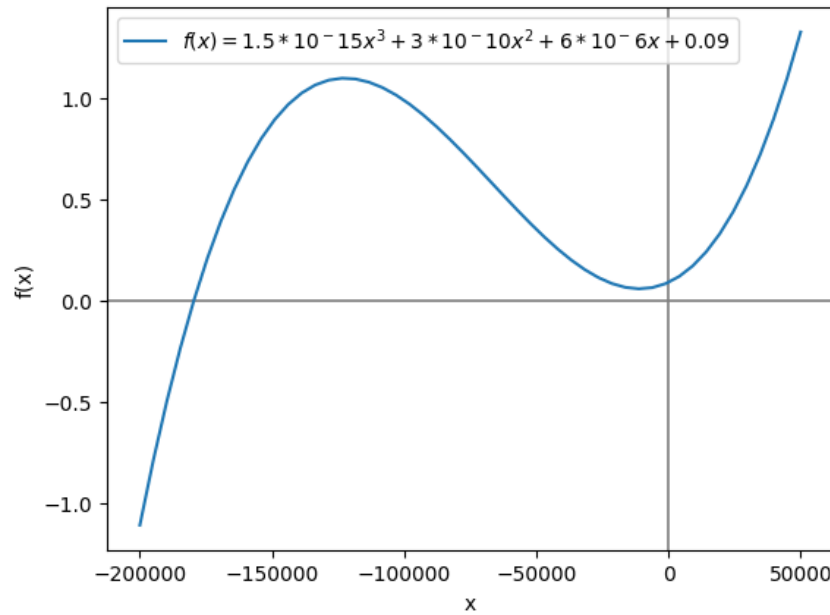
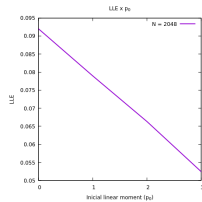


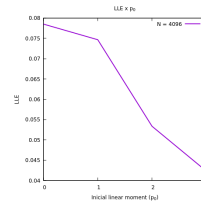
Figura 4.12 – Função cúbica genérica, seguindo o formato da equação (4.12). Levando em conta que $N > 0$ o comportamento da relação LLE $\times N$ segue apenas o 1º quadrante do gráfico.

4.2.1.2 Relação com p_0

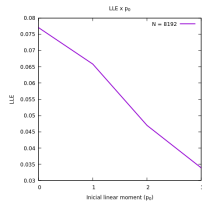
Levando em consideração que a energia potencial inicial não foi alterada em nenhum dos experimentos, podemos tomar p_0 como uma variável adequada para analisar o comportamento do sistema com relação à variação de energia inicial por partícula.



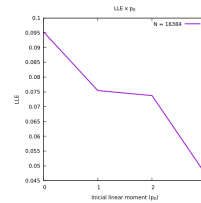
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.13 – Relação entre os expoentes de Lyapunov médios com p_0 variando de 0.0 a 3.0 em um sistema com $N = 2048, 4096, 8192, 16384$ partículas.

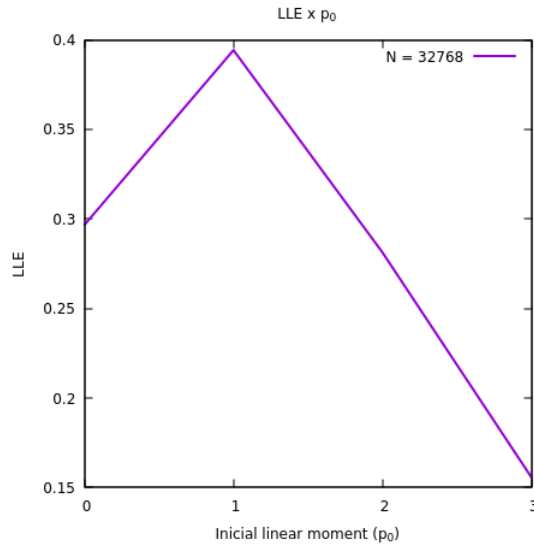


Figura 4.14 – Correlação entre os expoentes de Lyapunov médios com p_0 variando de 0.0 a 3.0 em um sistema com $N = 32768$ partículas.

Vemos das figuras (4.13) que os expoentes de Lyapunov tendem a começar com uma queda aproximadamente linear do tipo

$$LLE(p_0) = -0.01p_0 + 0.09, \quad (4.13)$$

porém conforme o número de partículas aumenta a curva tende a uma estabilidade e depois uma leve subida. Este comportamento é o esperado para sistemas com transição de fase (OTT, 2008; CAMPA et al., 2014; ROCHAFILHO; MARCOS, 2020), ver a figura (4.15), já que o sistema começa com uma condição inicial bem definida, evolui para um comportamento caótico na transição de fase e depois retorna à estabilidade. Isto indica que para poucas partículas ($N < 10000$) o anel não possui uma transição de fase bem definida.

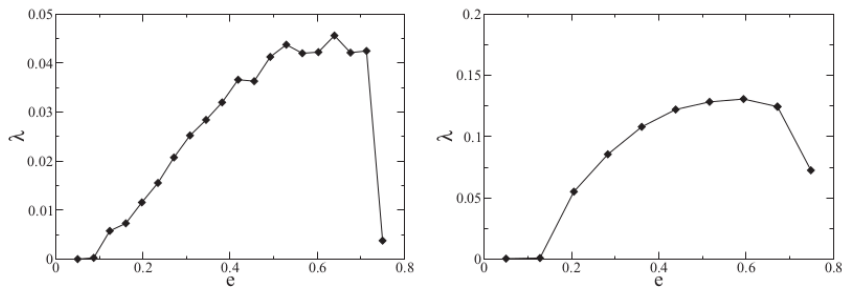


Figura 4.15 – Comportamento do LLE em relação a energia média por partícula em um modelo HMF com $N = 1000000$. Fonte: (ROCHAFILHO; MARCOS, 2020).

Ao analisarmos o comportamento dos expoentes de Lyapunov em relação a energia inicial do sistema vemos que, apesar do comportamento anômalo em relação ao número de partículas, ele segue uma tendência normal, em relação à sua energia de transição, ao ir para limite termodinâmico.

4.2.2 Modos de Goldstone

Conforme apontado no início do capítulo, ao termos um número relevante de partículas no anel auto gravitante a simetria polar (MARCOS, 2013) é quebrada, e uma estrutura em formato de barra, ver a figura (4.16), começa a ser formada pelas partículas do sistema orbitando seu centro gravitacional em um *QSS*, mesmo com um momento angular total nulo. Esta estrutura com custo zero de energia, é certamente um modo de Goldstone.

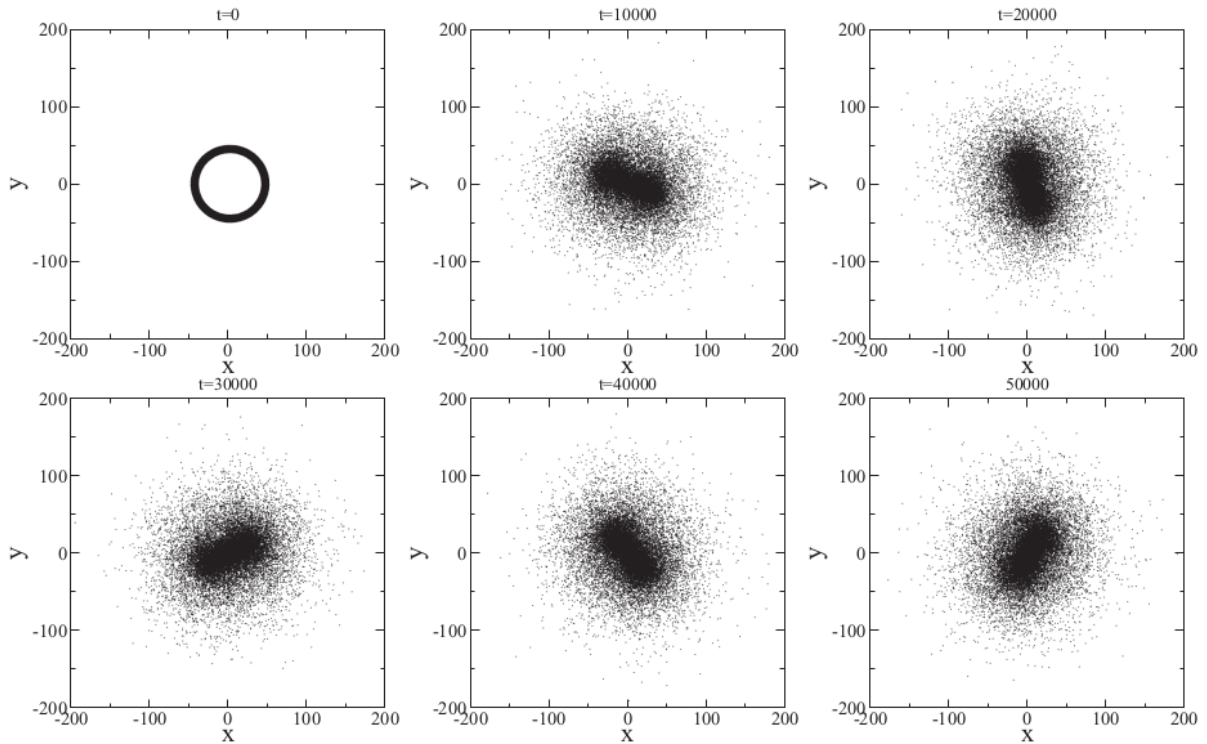


Figura 4.16 – Evolução temporal da posição das partículas de um sistema auto gravitante bidimensional com momento angular nulo para 32768 partículas. Fonte: (ROCHAFILHO; MARCOS, 2020)

Como a principal característica deste modo suave é sua rotação, é possível concluir que seu momento de inércia é uma boa medida de sua periodicidade, tendo em vista que seu momento angular é nulo. Desta forma visamos estudar comportamento dos momentos de inércia das partículas no tempo, ver as equações (4.11), e entender como ele muda com o aumento de partículas do sistema.

Das figuras (4.17) e (4.18) podemos observar que o intervalo de vida da estrutura na figura (4.16) é bem estável e permanece até onde nossas análises computacionais foram capazes de chegar. Esse estado quase estacionário tão duradouro mostra que a contínua quebra de simetria tende ao infinito.

Também podemos ver que o aumento do número de partículas do sistema faz com que o formato de onda livre fique cada vez mais caracterizado nos seus momentos de inércia, bem como reduz o período de revolução da estrutura formada. Este é um fator importante, uma vez que os expoentes de Lyapunov tendem a aumentar indefinidamente com o número de partículas,

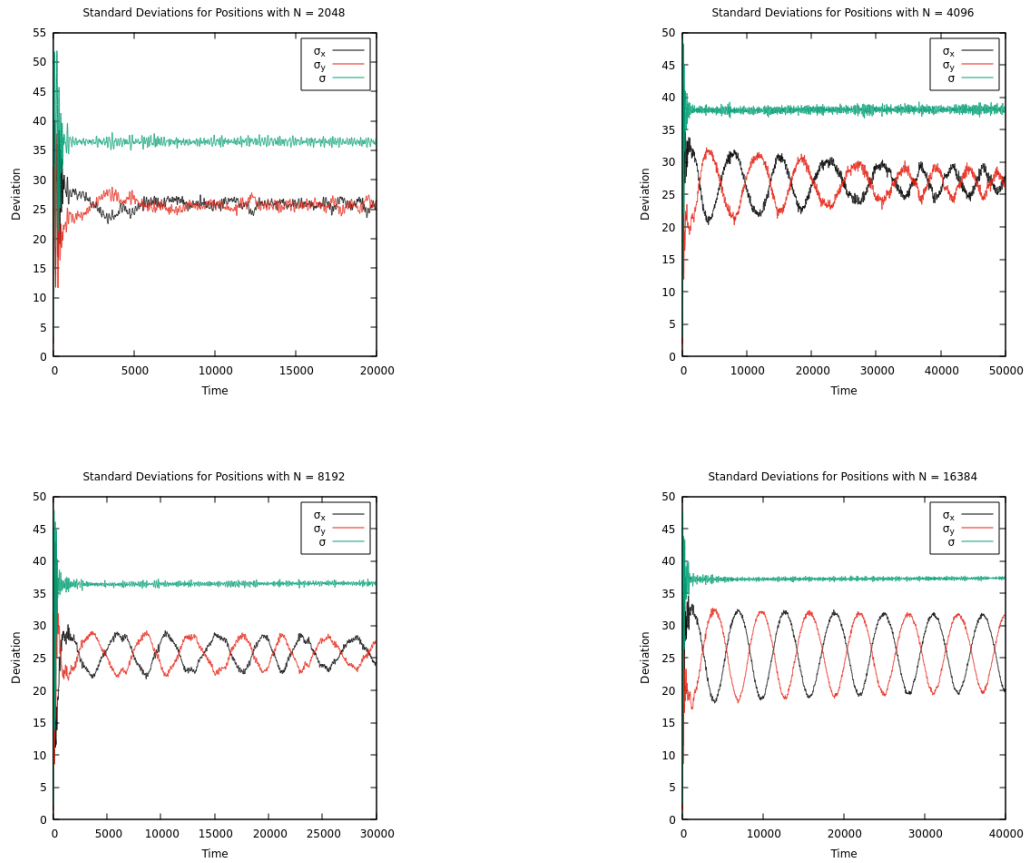


Figura 4.17 – Desvios padrão da posição nas coordenadas x e y e médio (σ_x , σ_y e $\sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$ respectivamente) no tempo com diferentes valores de N para $p_0 = 0$.

conforme visto na equação (4.12) e na figura (4.10), este comportamento pode ser um indicativo de uma relação mais íntima entre a caoticidade do sistema e suas transições de fase através dos modos de Goldstone.

A seguir buscamos uma relação algébrica entre os períodos dos momentos de inércia e o número de partículas do sistema.

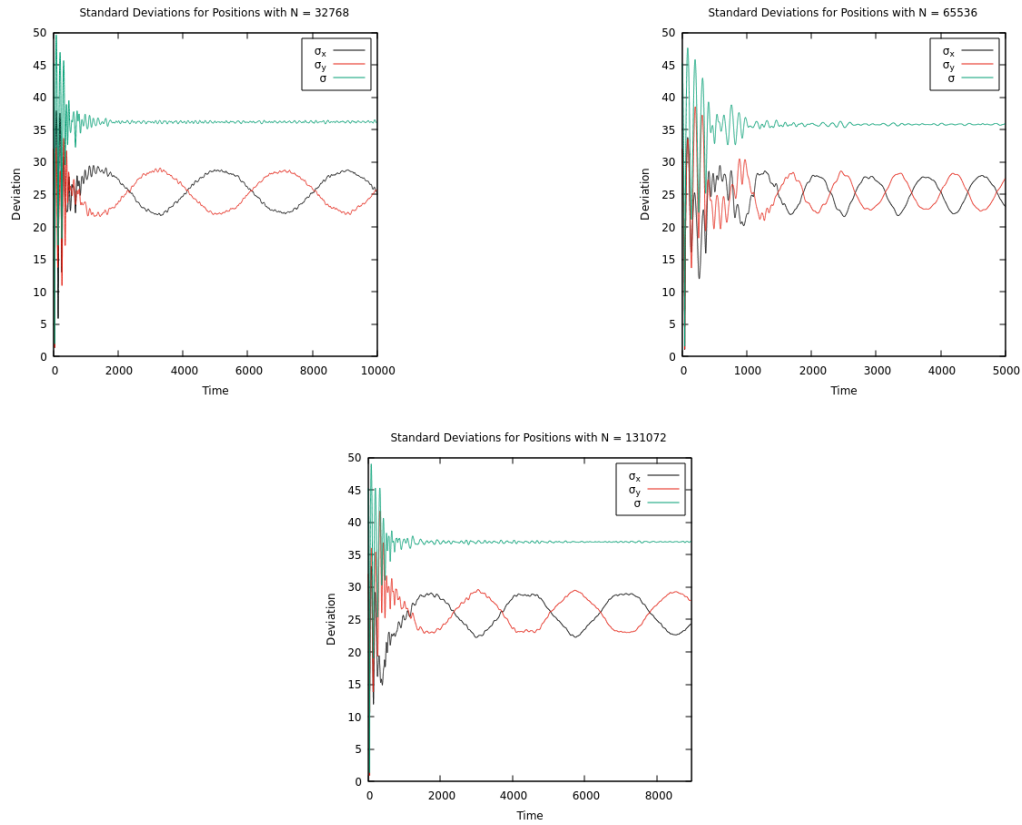


Figura 4.18 – Desvios padrão da posição nas coordenadas x e y e médio (σ_x , σ_y e $\sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$ respectivamente) no tempo com diferentes valores de N para $p_0 = 0$.

4.2.2.1 Periodicidade

Obter o período de oscilação médio para os momentos de inércia é um processo trabalhoso devido ao grande número de ruídos na evolução temporal, como podemos ver na figura (4.17). Para obter um valor satisfatório ao que podemos verificar a olho nu, utilizamos uma rotina em *python*, também exposta no apêndice C, com os pacotes da biblioteca *scipy*:

- *find_peaks*: utiliza uma miscelânea de métodos, como transformadas de Fourier rápidas (FFT) e maximização de vetores, para obter máximos e mínimos locais dentro de um intervalo especificado.
- *savgol_filter*: produz um filtro de Savitzky-Golay que suaviza curvas com muitos picos sem distorcer a tendência original dos dados, utilizando uma convolução pelo método dos mínimos quadrados.

Ao aplicarmos a rotina nos dados estudados, obtemos a tabela 1

Ao fazer um ajuste de curvas para a queda do período, obtemos a figura (4.19)

Onde os pontos representam o dados originais para o momento de inércia no eixo x σ_x , a

N	T	d_{min}
-	σ_x, σ_y	-
2048	NPPD	-
4096	7466.0, 6583.57	5000
8192	6458.2, 6770.2	5000
16384	5956.5, 6025.33	5000 e 4000
32768	3760.5, 3806.0	3000
65536	1473.17, 1169.65	1000
131072	2346.06, 2226.59	1000

Tabela 1 – Tabela relacionando o número de partículas N do sistema, o período médio T dos momentos de inércia e a distância mínima d_{min} entre picos utilizada para filtrar os ruídos gerados pelas simulações computacionais (NPPD = Não Possui uma Periodicidade bem Definida).

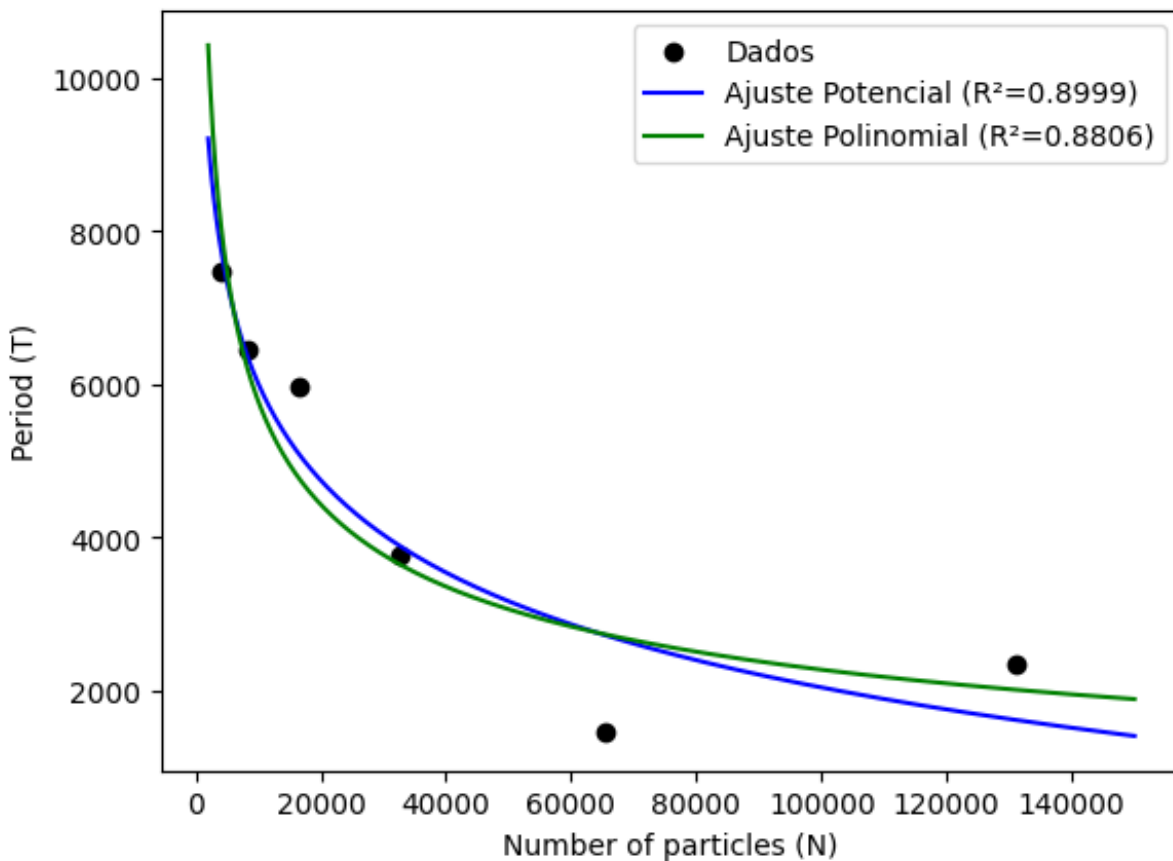


Figura 4.19 – Ajustes de curvas para a relação entre o período de oscilação T dos momentos de inércia e o número de partículas N .

curva azul representa um ajuste em formato de potência genérico do tipo

$$T(N) = 50240N^{-0.07} - 19714, \quad (4.14)$$

a curva verde representa um ajuste em potência $-\frac{1}{3}$ do tipo

$$T(N) = 140756N^{-\frac{1}{3}} - 753, \quad (4.15)$$

e também houve uma tentativa de ajuste com uma função exponencial em que o programa não obteve êxito e foi excluída da figura.

Vemos que ambos os ajustes potenciais possuem uma trajetória bem alinhada a dos dados originais, porém a curva verde é mais bem ajustada. Desta forma estamos capacitados a estabelecer a relação entre os expoentes de Lyapunov e a periodicidade dos modos de Goldstone.

4.2.3 Relação entre os Modos de Goldstone e os Expoente de Lyapunov

Nossa abordagem aqui será a mais direta possível: tomamos as equações (4.15), colocamos N "em função" de T e substituímos em (4.12). Para isso fizemos uma rotina em *python*, exposta no apêndice C, calculando a expressão algébrica nos dois sentidos ($T(LLE)$ e $LLE(T)$) desta forma temos:

$$T(LLE) = 1.8 \cdot 10^{13} \cdot LLE^3 - 3.1 \cdot 10^{11} \cdot LLE^2 + 1.8 \cdot 10^9 \cdot LLE - 3.4 \cdot 10^6, \quad (4.16)$$

e

$$LLE(T) = -23T^3 + 6 \cdot 10^3 \cdot T^2 + 2 \cdot 10^6 \cdot T - 2 \cdot 10^8. \quad (4.17)$$

Mostrando que o caos do sistema tende ao crescimento conforme a frequência de oscilação da barra começa a aumentar. Isso mostra um caráter único dessa estrutura, uma vez que próximo a $T = 0$ o LLE tende ao infinito (para o desenho de (4.21) tivemos que cortar a descontinuidade de sistema) em um estado de energia finita, mais sobre os por menores desse fenômeno podem ser estudados em trabalhos posteriores.

Graficamente teremos

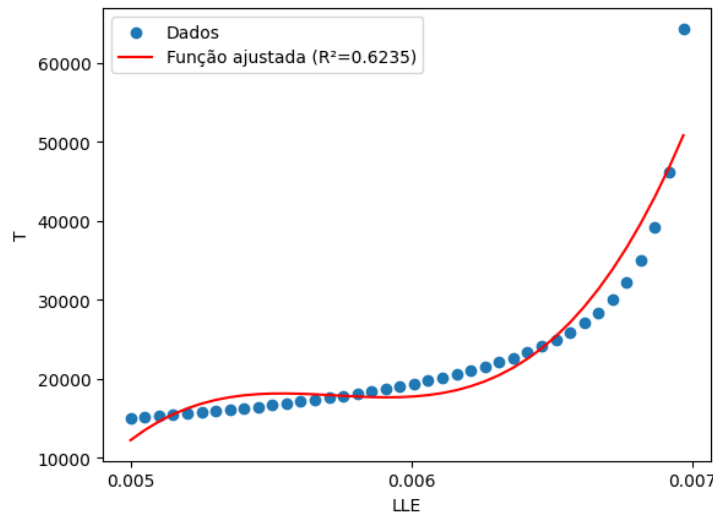


Figura 4.20 – Ajustes de curvas para a relação entre o período de oscilação T dos momentos de inércia e o número de partículas N .

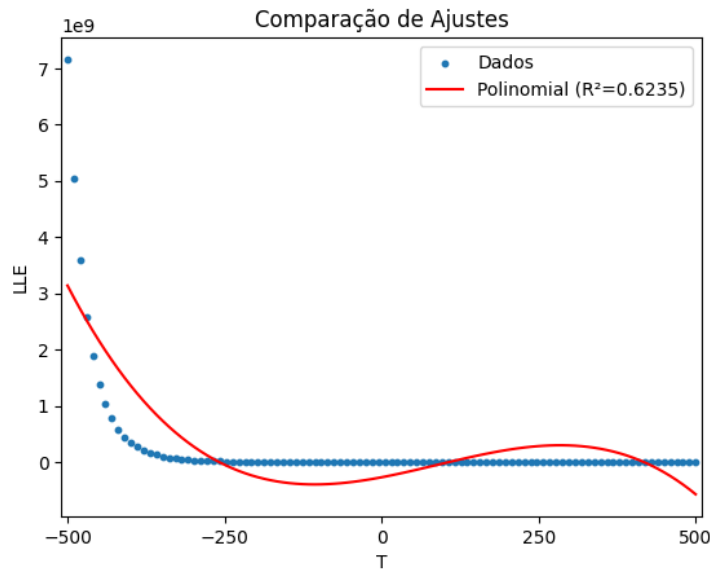


Figura 4.21 – Ajustes de curvas para a relação entre o período de oscilação T dos momentos de inércia e o número de partículas N .

Vemos em ambas as figuras 4.20 e 4.21 que o ajuste não é perfeito, porém foram tentados ajustes exponenciais e logarítmicos e em ambos a máquina não conseguiu, sequer, achar uma curva de ajuste. Para testar melhor a confiabilidade do ajuste, calculamos o coeficiente de correlação da curva com os dados e encontramos 0.7896 para o mesmo, tal resultado mostra que a curva encontrada possui um forte grau de relação com os dados apresentados.

Essa não adequação as curvas mais conhecidas também pode ser algo a ser averiguado em trabalhos futuros.

Parte III

Conclusão

CONCLUSÃO

Como abordado inicialmente, o objeto deste trabalho foi verificar alguns dos parâmetros relacionados ao caos em sistemas autogravitantes bidimensionais, tentando associá-los a formação dos modos de Goldstone para este tipo de sistema. Deste modo, vimos que o estudo dos sistemas autogravitantes deste ponto de vista tem muitos fenômenos que ainda estão por ser descobertos e sua relação intrínseca com o caos é um objeto de estudo viável com a evolução computacional. Nossa principal observação foi a de que a caoticidade do sistema bidimensional tende a aumentar com o número de partículas, o que é um comportamento totalmente incomum a sistemas que tendem ao limite termodinâmico, porém que todas as suas outras características correspondem ao estudo usual das interações de longo alcance, em relação aos expoentes de Lyapunov.

Observamos igualmente que a formação dos modos de Goldstone está associada a formação de uma barra autogravitante pelas partículas do sistema, independentemente do número de partículas (para $N \geq 2048$, que foi onde começamos a estudar o fenômeno). Com a variável associada ao modo sendo o momento de inércia do sistema que tem comportamento senoidal, lembrando a solução da onda livre. Sendo que o período de rotação da barra está ligado a um período completo de variação do momento de inércia e o mesmo tende a diminuir com o aumento do número de partículas do sistema (aumentando, assim, a frequência de rotação da barra).

Por último, ao relacionarmos o período de oscilação dos modos de Goldstone e os expoentes de Lyapunov vemos que o caos do sistema é extremamente elevado com o aumento da frequência de rotação dos modos de Goldstone no limite termodinâmico (quando $N \rightarrow \infty$ temos que o período $T \rightarrow 0$) e este fenômeno merece ser estudado mais profundamente no futuro.

REFERÊNCIAS

- ABDALLA, E.; TABAR, M. R. Phase transition in a self-gravitating planar gas. *Physics Letters B*, Elsevier BV, v. 440, n. 3–4, p. 339–344, nov. 1998. ISSN 0370-2693. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/S0370-2693\(98\)01101-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0370-2693(98)01101-0)>. Citado na página 34.
- ANTENEODO, C.; VALLEJOS, R. O. Scaling laws for the largest lyapunov exponent in long-range systems: A random matrix approach. *Physical Review E*, v. 65, n. 1, p. 016210.1 – 016210.5, 2001. Citado na página 42.
- ANTONI, M.; RUFFO, S. Clustering and relaxation in hamiltonian long-range dynamics. *Physical Review E*, v. 52, n. 3, p. 2361–2374, 1995. Citado na página 25.
- BENETTI, F. P. et al. Nonequilibrium stationary states of 3d self-gravitating systems. *Physical Review Letters*, v. 113, n. 10, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 33, 34 e 42.
- BJORKEN, J. Emergent gauge bosons. In: *4th Workshop on What Comes Beyond the Standard Model?* [S.l.: s.n.], 2001. Citado na página 16.
- BLUME, M. Theory of the first-order magnetic phase change in UO_2 . *Physical Review*, v. 141, p. 517–24, 1966. Citado na página 16.
- LÄMMERT, E. (Ed.). *ON SOME PROBLEMS ASSOCIATED WITH THE FOUNDATION OF STATISTICAL MECHANICS*. Berlin: [s.n.], 1981. Citado na página 25.
- BOUCHET, F.; DAUXOIS, T. Prediction of anomalous diffusion and algebraic relaxations for long-range interacting systems, using classical statistical mechanics. *Physical Review E*, v. 72, n. 4, 2005. Citado na página 25.
- CAMPA, A. et al. *Physics of long-range interacting systems*. [S.l.]: Oxford University Press, 2014. Citado 6 vezes nas páginas 16, 25, 27, 32, 42 e 44.
- CHAVANIS, P. H. Statistics of the gravitational force in various dimensions of space: From gaussian to lévy laws. *The European Physical Journal B*, v. 70, n. 3, p. 413–433, 2009. Citado na página 33.
- CVITANOVIĆ, P. et al. *Chaos: Classical and Quantum*. 17.6.3. ed. [S.l.]: ChaosBook.org, 2022. Citado na página 15.
- DESER, S.; JACKIW, R.; HOOFT, G. 't. Three-dimensional einstein gravity: Dynamics of flat space. *Annals of Physics*, v. 152, n. 1, p. 220–235, 1984. Citado na página 33.
- DEVORE, J. L.; CORDEIRO, M. T. A. *Probabilidade e estatística: Para engenharia E ciencias*. [S.l.]: Cengage Learning Edicoes Ltda, 2014. Citado na página 40.
- DOROSHKEVICH, A. G. et al. Two-dimensional simulation of the gravitational system dynamics and formation of the large-scale structure of the universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 192, p. 321–37, 1980. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 33.
- EMDEN, R. Gaskugeln: Anwendungen der mechanischen wärmetheorie auf kosmologische und meteorologische probleme. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, v. 19, 1908. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01736734>>. Citado na página 34.

- FILHO, L. H. M.; AMATO, M. A.; ROCHAFILHO, T. M. Lyapunov exponent and criticality in the hamiltonian mean field model. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, v. 2018, n. 3, p. 033204, 2018. Citado na página 25.
- FILHO, L. M. et al. Contribution of individual degrees of freedom to lyapunov vectors in many-body systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 74, p. 236–247, 2019. Citado na página 25.
- FILHO, T. M.; AMATO, M. A.; FIGUEIREDO, A. A novel approach to the determination of equilibrium properties of classical hamiltonian systems with long-range interactions. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 42, n. 16, p. 165001/1–165001/11, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.
- FIRPO, M.-C.; ELSKENS, Y. Kinetic limit of n-body description of wave–particle self-consistent interaction. *Journal of Statistical Physics*, v. 93, n. 1/2, p. 193–209, 1998. Citado na página 24.
- GENG, S. Construction of high order symplectic prk methods. *Journal of Computational Mathematics*, Institute of Computational Mathematics and Scientific/Engineering Computing, v. 13, n. 1, p. 40–50, 1995. ISSN 02549409, 19917139. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/43692601>>. Citado na página 26.
- GINELLI, F. et al. Chaos in the hamiltonian mean-field model. *Physical Review E*, v. 84, n. 6, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 24.
- GOLDSTONE, J. Field theories with superconductor solutions. *IL NUOVO CIMENTO*, v. 19, p. 154–64, 1961. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 27.
- GOLDSTONE, J.; SALAM, A.; WEINBERG, S. Broken symmetries. *Physical Review*, v. 127, p. 965–70, 1962. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 27.
- HAYATA, T.; HIDAKA, Y. *Diffusive Nambu-Goldstone modes in quantum time-crystals*. 2018. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1808.07636>>. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 29.
- HIGGS, P. W. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 13, p. 508–509, Oct 1964. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.13.508>>. Citado na página 16.
- HILBORN, R. C. *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*. 2nd. ed. Oxford: Oxford University Press, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 25.
- HOINKA, S. et al. Goldstone mode and pair-breaking excitations in atomic fermi superfluids. *Nature Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 13, n. 10, p. 943–946, jun. 2017. ISSN 1745-2481. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/nphys4187>>. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 29.
- KAC, M. On the partition function of a one-dimensional gas. *Physics of Fluids*, v. 2, n. 1, p. 8, 1959. Citado na página 32.
- KIBBLE, T. W. B. Symmetry breaking in nonAbelian gauge theories. *Phys. Rev.*, v. 155, p. 1554–1561, 1967. Citado na página 16.
- LEUTWYLER, H. Phonons as goldstone bosons. *Helv. Phys. Acta*, v. 70, p. 275–286, 1997. Citado na página 16.

LEVIN, Y. et al. Nonequilibrium statistical mechanics of systems with long-range interactions. *Physics Reports*, v. 535, n. 1, p. 1–60, 2014. Citado na página 32.

LONGA, L.; CURADO, E. M. F.; OLIVEIRA, F. A. Roundoff-induced coalescence of chaotic trajectories. *Physical Review E*, American Physical Society (APS), v. 54, n. 3, p. R2201–R2204, set. 1996. ISSN 1095-3787. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.54.R2201>>. Citado na página 21.

LORENZ, E. N. Maximum simplification of the dynamic equations. *Tellus*, v. 12, n. 3, p. 243–254, 1960. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.2153-3490.1960.tb01307.x>>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 21.

LYAPUNOV, A. M. The general problem of the stability of motion. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 55, n. 3, p. 531–534, 1992. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00207179208934253>>. Citado na página 15.

MANNSETH, J.; KLEPPE, T. S.; SKAUG, H. J. *On the application of higher order symplectic integrators in Hamiltonian Monte Carlo*. 2016. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1608.07048>>. Citado na página 26.

MANOS, T.; RUFFO, S. Scaling with system size of the lyapunov exponents for the hamiltonian mean field model. *Transport Theory and Statistical Physics*, v. 40, n. 6-7, p. 360–381, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 42.

MARCOS, B. Collisional relaxation of two-dimensional self-gravitating systems. *Physical Review E*, v. 88, n. 3, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 33, 34, 38 e 45.

MAY, R. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, v. 26, p. 457, 07 1976. Citado na página 21.

MILLER, B. N.; YAWN, K.; YOUNGKINS, P. Recent progress in the study of one-dimensional gravitating systems. *Annals of the New York Academy of Sciences*, v. 867, n. 1 NONLINEAR DYN, p. 268–282, 1998. Citado na página 33.

NEWTON, I. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica: Perpetuis Commentariis Illustrata communi studio thomae le seur et Francisci Jacquier*. [S.l.]: A. et J.M. Duncon, 1822. Citado na página 15.

OTT, E. *Chaos in dynamical systems*. 2nd. ed. [S.l.]: Cambridge Univ. Press, 2008. Citado 6 vezes nas páginas 21, 22, 23, 25, 26 e 44.

PINTO, V.; CASAS, A. An interactive 2d and 3d gravity modeling program for ibm-compatible personal computers. *Computers & Geosciences*, v. 22, n. 5, p. 535–546, 1996. Citado na página 33.

POINCARÉ, H. Analyse mathématique. – second mémoire sur les fonctions dont plusieurs valeurs sont liées entre elles par une équation linéaire. *Oeuvres complètes*, p. 50–55, Jul 2009. Citado na página 15.

ROCHAFILHO, T. M.; MARCOS, B. Classical goldstone modes in long-range interacting systems. *Physical Review E*, v. 102, n. 3, 2020. Citado 9 vezes nas páginas 9, 10, 15, 30, 34, 38, 42, 44 e 45.

- ROCHAFILHO, T. M. et al. Scaling of the dynamics of homogeneous states of one-dimensional long-range interacting systems. *Physical Review E*, v. 90, n. 3, 2014. Citado na página 42.
- RUELLE, D. *Statistical Mechanics: Rigorous Results*. 2nd. ed. Reading: W. A. Benjamin, Inc, 1974. Citado na página 25.
- SILVA, M. F.; FILHO, T. M.; ELSKENS, Y. Critical exponent for the lyapunov exponent and phase transitions—the generalized hamiltonian mean-field model. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 53, n. 21, p. 215001, 2020. Citado na página 25.
- SILVESTRE, C.; ROCHAFILHO, T. Ergodicity in a two-dimensional self-gravitating many-body system. *Physics Letters A*, v. 380, n. 3, p. 337–348, 2016. Citado na página 33.
- STROCCHI, F. The classical counterpart of the goldstone theorem. *Physics Letters A*, v. 267, n. 1, p. 40–44, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 28.
- STROCCHI, F. *Symmetry breaking*. [S.l.]: Springer, 2021. Citado na página 28.
- SUNDMAN, K. F. Mémoire sur le problème des trois corps. *Acta Mathematica*, Institut Mittag-Leffler, v. 36, n. none, p. 105 – 179, 1913. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02422379>>. Citado na página 15.
- THORNTON, S. T.; MARION, J. B. *Classical dynamics of particles and systems*. Andover: Cengage Learning, 2014. ISBN 8131518477 9788131518472. Citado na página 25.
- TU, X.; MURUA, A.; TANG, Y. New high order symplectic integrators via generating functions with its application in many-body problem. *BIT Numerical Mathematics*, v. 60, 11 2019. Citado na página 26.
- VERLINDE, H. Conformal field theory, two-dimensional quantum gravity and quantization of teichmüller space. *Nuclear Physics B*, v. 337, n. 3, p. 652–680, 1990. Citado na página 33.
- WEINBERG, S. A model of leptons. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 19, p. 1264–1266, Nov 1967. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.19.1264>>. Citado na página 16.
- WEISS, P. L'hypothèse du champ moléculaire et la propriété ferromagnétique. *J. Phys. Theor. Appl.*, v. 6, n. 1, p. 661–690, 1907. Disponível em: <<https://hal.science/jpa-00241247>>. Citado na página 32.
- YAMAGUCHI, Y. Y. Relaxation and diffusion in a globally coupled hamiltonian system. *Physical Review E*, v. 68, n. 6, 2003. Citado na página 25.
- YOSHIDA, H. Construction of higher order symplectic integrators. *Physics Letters A*, v. 150, n. 5, p. 262–268, 1990. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960190900923>>. Citado na página 26.
- ZHENG, Y.; DU, J. The stationary state and gravitational temperature in a pure self-gravitating system. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 420, p. 41–48, 2015. Citado na página 33.
- ŠUMANOVAC, F.; RITSEMA, I. L.; BRIL, B. H. System architecture for 3d gravity modelling. *Geologia Croatica*, v. 49, p. 145–153, 10 1996. Citado na página 33.

Apêndices

APÊNDICE A – ORTONORMALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT

Seja dado um conjunto de k vetores linearmente independentes $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k\}$ em um espaço N -dimensional com $k \leq N$. Queremos definir uma base de vetores ortonormais $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$ tais que estes estendam todo sub-espaço em que residem os vetores $\{\vec{w}_i\}$ e que sejam uma combinação linear dos mesmos.

Para isto definimos o operador projeção como:

$$\mathbf{P}_{\vec{u}}(\vec{w}) = \frac{\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \vec{u}, \quad (\text{A.1})$$

que projeta o vetor $\vec{w}$ em relação ao vetor $\vec{u}$, com $\mathbf{P}_{\vec{0}}(\vec{w}) := \vec{0}$ (com $\vec{0}$ representando o vetor nulo), e onde $\langle, \rangle$ representa o produto interno entre vetores do espaço.

Definindo $\vec{v}_i^{(j)} \equiv \mathbf{P}_{\vec{u}_j}(\vec{w}_i)$ e $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 = \frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|}$ podemos escrever para $i > 1$:

$$\vec{u}_i = \frac{\vec{w}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \vec{v}_j^{(j)}}{\|\vec{w}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \vec{v}_j^{(j)}\|}, \quad (\text{A.2})$$

onde $\|\vec{w}\|$ é a norma do vetor no espaço.

APÊNDICE B – SISTEMAS SIMPLÉTICOS

Seja um sistema $2N$ dimensional governado por equações do tipo

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}, t) , \quad (\text{B.1})$$

com

$$\vec{F}(\vec{x}, t) = \mathbf{S}_N \frac{\partial H}{\partial \vec{x}} , \quad (\text{B.2})$$

sendo $H = H(\vec{x}, t)$ uma função escalar capaz de descrever completamente o sistema e $\mathbf{S}_N$ é nomeada matriz simplética definida por:

$$\mathbf{S}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_N & -\mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_N & \mathbf{O}_N \end{bmatrix} , \quad (\text{B.3})$$

onde $\mathbf{O}_N$ é a matriz nula $N \times N$ e $\mathbf{I}_N$ é a matriz identidade também de ordem N . Dizemos então que este sistema é **simplético**.

Tomando

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{q} \end{pmatrix}$$

e sendo $H(\vec{x}, t)$ a hamiltoniana, vemos então que todos os sistemas hamiltonianos obedecem a estrutura simplética.

APÊNDICE C – ROTINAS COMPUTACIONAIS

Abaixo segue a rotina computacional montada para a resolução numérica das equações (4.2) de modo que podemos visualizar a posição das partículas do sistema no espaço ao longo de tempo e simular o seu comportamento no espaço após as quebras de simetria com o estudo de seus momentos de inércia. Para as condições iniciais dt representa o passo para a derivada temporal, tf é o tempo final, ts representa o intervalo de tempo para salvar as variáveis a serem estudadas, $p0$ é o momento linear inicial total por partícula, $r1$ e $r2$ são, respectivamente, os raios menor e maior do anel inicial e n é o número de partículas no sistema.

File: /home/familia/Downloads/programa/simp.cu

Page 1 of 5

```

/* Simplectic integrator using Yoshida algorithm
   By T.M.Rocha Filho ICCMP-IF/UnB - marciano@fis.unb.br - November 2010 */

#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <stdio.h>

#include "precision.inc"

/* Function prototypes */

void condini(long, long *, double, double, double, double [], double[]);
float ran2(long *);
void kinetic(double *, long, long, long, double *, double *, double *);
void potential(double *, long, long, long, long, long, double, double *, double *, double
*);
void timestep(long, long, long, long, long, double, double, double *, double *, double *);
__global__ void force(long, long, double, double *, double *);
void standard_dev(long, long, long, double *, double *, double *, double *, double *,
double *, double *, double *);
void save_particles(long, int *, double *, double *, double *, double *);
void correlations(long, long, long, double *, double *, double *, double *, double *,
double *, double *, double *);
__global__ void get_seq(double *, double *, double *, double *);
void sigmapos(double *, long, int, long, long, double *, double *, double *);
void moments(double *, long, long, long, long, double *, double *, double *, double *);

int main()
{
    int file_count;
    long
n, seed, idum, numtile, tilesize, nblock, nthread, ifsave, ifdifusion, ifcorrelation, ifsigma, device_num, i;
    double
dt, tf, ts, energ, energ0, p0, r1, r2, kin, pot, time, tcount, err, eps, tsave, tsave_count, sr, sp, cf,
    sigmax, sigmay, cp, x[NSEQ], px[NSEQ], mom4, mom6;
    FILE *arq1, *enrg, *difus, *correl, *seq, *errf, *sigpos, *fmoms;
    double
*f_gpu, *r_gpu, *p_gpu, *f0_gpu, *r0_gpu, *p0_gpu, *potpart_gpu, *kinp_gpu, *x_gpu, *px_gpu;

/* Reads input parameters */

    arq1 = fopen("data.in", "r");
    fscanf(arq1, "%lf", &dt);
    fscanf(arq1, "%lf", &tf);
    fscanf(arq1, "%lf", &ts);
    fscanf(arq1, "%lf", &tsave);
    fscanf(arq1, "%lf", &p0);
    fscanf(arq1, "%lf", &r1);
    fscanf(arq1, "%lf", &r2);
    fscanf(arq1, "%li", &n);
    fscanf(arq1, "%li", &seed);
    fscanf(arq1, "%lf", &eps);
    fscanf(arq1, "%li", &ifsave);
    fscanf(arq1, "%li", &ifdifusion);
    fscanf(arq1, "%li", &ifcorrelation);
    fscanf(arq1, "%li", &ifsigma);
    fscanf(arq1, "%li", &nblock);
    fscanf(arq1, "%li", &nthread);
    fscanf(arq1, "%li", &tsizsize);
    fscanf(arq1, "%li", &device_num);

    fclose(arq1);

    cudaSetDevice(device_num);

```

Figura C.23

```

numtile=n/tilesize;
n=numtile*tilesize;

printf("=====\n");
printf(" dt,tf,ts= %lf %lf %lf\n",dt,tf,ts);
printf(" p0,r1,r2,eps= %lf %lf %lf %lf\n",p0,r1,r2,eps);
printf(" n= %li\n",n);
printf(" numtile, tilesize= %li %li\n",numtile,tilesize);
printf(" ifsave,ifdifusion,ifcorrelation= %li %li %li\n",
        ifsave,ifdifusion,ifcorrelation);
printf("=====\n\n");

idum=-seed;
energ0=(double) ran2(&idum);

/* Allocating memory on the CPU */

double *r=(double*)malloc(2*n*sizeof(double));
double *p=(double*)malloc(2*n*sizeof(double));
double *f=(double*)malloc(2*n*sizeof(double));
double *potpart=(double*)malloc(numtile*sizeof(double));
double *kinp=(double*)malloc(nblock*sizeof(double));

/* Allocating memory on the GPU */

cudaMalloc( (void**) &f_gpu, 2*n*sizeof(double) );
cudaMalloc( (void**) &r_gpu, 2*n*sizeof(double) );
cudaMalloc( (void**) &p_gpu, 2*n*sizeof(double) );
cudaMalloc( (void**) &potpart_gpu, numtile*sizeof(double) );
cudaMalloc( (void**) &kinp_gpu, nblock*sizeof(double) );
cudaMalloc( (void**) &f0_gpu, 2*n*sizeof(double) );
cudaMalloc( (void**) &r0_gpu, 2*n*sizeof(double) );
cudaMalloc( (void**) &p0_gpu, 2*n*sizeof(double) );
cudaMalloc( (void**) &x_gpu, NSEQ*sizeof(double) );
cudaMalloc( (void**) &px_gpu, NSEQ*sizeof(double) );

/* Prepares initial conditions */

condini(n,&idum,p0,r1,r2,r,p);

cudaMemcpy(p_gpu, p, 2*n*sizeof(double), cudaMemcpyHostToDevice);
cudaMemcpy(r_gpu, r, 2*n*sizeof(double), cudaMemcpyHostToDevice);
cudaMemcpy(r0_gpu, r, 2*n*sizeof(double), cudaMemcpyHostToDevice);

/* Compute initial kinetic and potential energies */

kinetic(&kin,n,nblock,nthread,p_gpu,kinp_gpu,kinp);
kin=kin/((double) n);

potential( &pot, n, nblock, nthread, tilesize, numtile, eps, r_gpu, potpart_gpu,
potpart);
pot=pot/((double) n);

printf("Initial kinetic and potential energies per particle:\n\n");
printf("K= %lf V= %lf\n\n",kin,pot);

cudaMemcpy(p0_gpu, p, 2*n*sizeof(double), cudaMemcpyHostToDevice);

energ0=kin+pot;

enrg=fopen("energy.dat","w");

```

Figura C.24

File: /home/familia/Downloads/programa/simp.cu

Page 3 of 5

```

difus=fopen("difusion.dat","w");
correl=fopen("correlations.dat","w");
seq=fopen("seq.dat","w");
errf=fopen("error.dat","w");
sigpos=fopen("sigpos.dat","w");
fmoms=fopen("moments.dat","w");

time=0.0;
fprintf(enrg,"%le %le %le\n",time,kin,pot);
tcount=0.0;
file_count=0;
tsave_count=0.0;

force<<<numtile,tilesize>>>(tilesize,numtile,eps,f_gpu,r_gpu);

cudaMemcpy(f0_gpu, f_gpu, 2*n*sizeof(double), cudaMemcpyDeviceToDevice);

if (ifcorrelation==1)
{
    correlations(n,nblock,nthread,f_gpu,p_gpu,f0_gpu,p0_gpu,&cf,&cp,kinp,kinp_gpu);
    fprintf(correl,"%le %le %le\n",time,cf,cp);
};

if (ifsave==1)
{
    save_particles(n,&file_count,r,p,r_gpu,p_gpu);
};

if (ifsigma==1)
{
    sigmapos(&sigmax,n,0,nblock,nthread,r_gpu,kinp_gpu,kinp);
    sigmapos(&sigmay,n,1,nblock,nthread,r_gpu,kinp_gpu,kinp);
    fprintf(sigpos,"%le %le %le %le\n",time,sqrt(sigmax),sqrt(sigmay),sqrt(sigmax+sigmay));
};

fprintf(seq,"%le",time);
for (i=0;i<NSEQ;i++) fprintf(seq," %lf %lf",r[i],p[i]);
fprintf(seq,"\n");

moments(&mom4,n,4,nblock,nthread,p_gpu,kinp_gpu,kinp);
moments(&mom6,n,6,nblock,nthread,p_gpu,kinp_gpu,kinp);
mom4/=4.0*kin*kin;
mom6/=6.0*kin*kin;
fprintf(fmoms,"%lf %lf %lf\n",time,mom4,mom6);

/* time loop */

while(time<tf)
{
    timestep(n,nblock,nthread,tilesize,numtile,dt,eps,r_gpu,p_gpu,f_gpu);

    time+=dt;
    tcount+=dt;
    tsave_count+=dt;

    if (tcount>=ts)
    {
        kinetic(&kin,n,nblock,nthread,p_gpu,kinp_gpu,kinp);
        kin=kin/(double) n;

        potential(&pot, n, nblock, nthread, tilesize, numtile, eps, r_gpu, potpart_gpu,
potpart);
    }
}

```

Figura C.25

File: /home/familia/Downloads/programa/simp.cu

Page 4 of 5

```

    pot=pot/(double) n;
    energ=kin+pot;
    err=(energ-energ0)/energ0;
    err=fabs(err);

    if (ifdifusion==1)
    {
standard_dev(n,nblock,nthread,r_gpu,p_gpu,r0_gpu,p0_gpu,&sr,&sp,kinp,kinp_gpu);
        fprintf(difus,"%le %le %le\n",time,sr,sp);
    };

    if (ifcorrelation==1)
    {
correlations(n,nblock,nthread,f_gpu,p_gpu,f0_gpu,p0_gpu,&cf,&cp,kinp,kinp_gpu);
        fprintf(correl,"%le %le %le\n",time,Cf,cp);
    };

    if (ifsigma==1)
    {
        sigmapos(&sigmax,n,0,nblock,nthread,r_gpu,kinp_gpu,kinp);
        sigmapos(&sigmay,n,1,nblock,nthread,r_gpu,kinp_gpu,kinp);
        fprintf(sigpos,"%le %le %le
%le\n",time,sqrt(sigmax),sqrt(sigmay),sqrt(sigmax+sigmay));
    };

    printf(" %lf %le\n",time,err);
    fprintf(errf,"%lf %le\n",time,err);

    tcount=0.0;
    fprintf(enrg,"%le %le %le\n",time,kin,pot);

    get_seq<<<1,1>>>(p_gpu,r_gpu,x_gpu,px_gpu);
    cudaMemcpy(x, x_gpu, NSEQ*sizeof(double), cudaMemcpyDeviceToHost);
    cudaMemcpy(px, px_gpu, NSEQ*sizeof(double), cudaMemcpyDeviceToHost);

    fprintf(seq,"%le",time);
    for (i=0;i<NSEQ;i++) fprintf(seq," %lf %lf",x[i],px[i]);
    fprintf(seq,"\n");

    moments(&mom4,n,4,nblock,nthread,p_gpu,kinp_gpu,kinp);
    moments(&mom6,n,6,nblock,nthread,p_gpu,kinp_gpu,kinp);
    mom4/=4.0*kin*kin;
    mom6/=6.0*kin*kin;
    fprintf(fmoms,"%lf %lf %lf\n",time,mom4,mom6);
};

if (tsave_count>=tsave && ifsave==1)
{
    tsave_count=0.0;
    save_particles(n,&file_count,r,p,r_gpu,p_gpu);
};

};

printf("\n End of simulation.\n");

if (ifsave==1)
{
    save_particles(n,&file_count,r,p,r_gpu,p_gpu);
};

// Closing files

```

Figura C.26

File: /home/familia/Downloads/programa/simp.cu

Page 5 of 5

```
fclose(enrg);
fclose(difus);
fclose(correl);
fclose(seq);
fclose(errf);
fclose(sigpos);
fclose(fmoms);

// freeing memory.
// free(r);
// free(p);
// free(f);
free(potpart);
free(kinp);

cudaFree(r_gpu);
cudaFree(p_gpu);
cudaFree(f_gpu);
cudaFree(r0_gpu);
cudaFree(p0_gpu);
cudaFree(f0_gpu);
cudaFree(potpart_gpu);
cudaFree(kinp_gpu);

cudaDeviceReset();

return 0;
}
```

Figura C.27

Já no algoritmo a seguir resolvemos (4.2), (4.6) e (1.12) simultaneamente e calculamos o maior expoente de Lyapunov do sistema ao longo do tempo. Seguindo os mesmos padrões do algoritmo, apenas com $nlyap$ sendo um limite de vezes em que o expoente será calculado.

File: /home/familia/Downloads/lyapunov/simp.cu

Page 1 of 5

```
/* Symplectic integrator using Yoshida algorithm
   By T.M.Rocha Filho ICCMP-IF/UnB - marciano@fis.unb.br - November 2010 */

#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <stdio.h>

#include "precision.inc"

/* Function prototypes */

void condini(long n, long *idum, double p0, double r1, double r2, double *r, double *p,
double *norm0);
float ran2(long *);
void kinetic(double *, long, long, long, double *, double *, double *);
void potential(double *, long, long, long, long, double, double *, double *, double
*);
void timestep(long, long, long, long, long, double, double, double *, double *, double *);
__global__ void force(long, long, double, double *, double *);
__global__ void get_seq(double *f, double *p, double *r, double *x, double *px, double
*fx, long n);
void moments(double *, long, long, long, long, double *, double *, double *);
__global__ void renorm(long n, double norm, double norm0, double *r_gpu, double *p_gpu);
void compute_norm(double *norm, long n, long nblock, long nthread, double *x_gpu, double
*p_gpu, double *kinp_gpu, double *kinp);

int main()
{
    long n, seed, idum, numtile, tilesize, nblock, nthread, device_num, i, nlyap, cl;
    double
dt, tf, ts, energ, energ0, p0, r1, r2, kin, pot, time, tcount, err, eps, norm0, norm, tlyap, twait, tcl, mom4, mom6, lambda, el
FILE *arq1, *enrg, *seq, *errf, *fmoms, *flyap;
    double *f_gpu, *r_gpu, *p_gpu, *potpart_gpu, *kinp_gpu, *x_gpu, *px_gpu, *fx_gpu;
    int fl;

/* Reads input parameters */

    arq1 = fopen("data.in", "r");
    fscanf(arq1, "%lf", &dt);
    fscanf(arq1, "%lf", &ts);
    fscanf(arq1, "%lf", &twait);
    fscanf(arq1, "%lf", &tlyap);
    fscanf(arq1, "%li", &nlyap);
    fscanf(arq1, "%lf", &p0);
    fscanf(arq1, "%lf", &r1);
    fscanf(arq1, "%lf", &r2);
    fscanf(arq1, "%li", &n);
    fscanf(arq1, "%li", &seed);
    fscanf(arq1, "%lf", &eps);
    fscanf(arq1, "%li", &nblock);
    fscanf(arq1, "%li", &nthread);
    fscanf(arq1, "%li", &tilesize);
    fscanf(arq1, "%li", &device_num);

    fclose(arq1);

    cudaSetDevice(device_num);

    numtile=n/tilesize;
    n=numtile*tilesize;

    tf=twait+tlyap*(double) nlyap;

    printf("=====\n");
    printf(" dt,tf,ts,tlyap,twait= %lf %lf %lf %lf %lf\n", dt,tf,ts,tlyap,twait);
```

Figura C.28

File: /home/familia/Downloads/lyapunov/simp.cu

Page 2 of 5

```

printf("  p0,r1,r2,eps=  %lf %lf %lf %le\n",p0,r1,r2,eps);
printf("  n,nlyap= %li %li\n",n,nlyap);
printf("  numtile, tilesizes= %li %li\n",numtile,tilesizes);
printf("=====\\n\\n");

idum=-seed;
energ0=(double) ran2(&idum);

/* Allocating memory on the CPU */

double *r=(double*)malloc(4*n*sizeof(double));
double *p=(double*)malloc(4*n*sizeof(double));
double *f=(double*)malloc(4*n*sizeof(double));
double *potpart=(double*)malloc(numtile*sizeof(double));
double *kinp=(double*)malloc(nblock*sizeof(double));
double *x2=(double*)malloc(NSEQ*sizeof(double));
double *px2=(double*)malloc(NSEQ*sizeof(double));
double *fx2=(double*)malloc(NSEQ*sizeof(double));

/* Allocating memory on the GPU */

cudaMalloc( (void**) &f_gpu, 4*n*sizeof(double) );
cudaMalloc( (void**) &r_gpu, 4*n*sizeof(double) );
cudaMalloc( (void**) &p_gpu, 4*n*sizeof(double) );
cudaMalloc( (void**) &potpart_gpu, numtile*sizeof(double) );
cudaMalloc( (void**) &kinp_gpu, nblock*sizeof(double) );
cudaMalloc( (void**) &x_gpu, NSEQ*sizeof(double) );
cudaMalloc( (void**) &px_gpu, NSEQ*sizeof(double) );
cudaMalloc( (void**) &fx_gpu, NSEQ*sizeof(double) );

/* Prepares initial conditions */

condini(n,&idum,p0,r1,r2,r,p,&norm0);

cudaMemcpy(p_gpu, p, 4*n*sizeof(double), cudaMemcpyHostToDevice);
cudaMemcpy(r_gpu, r, 4*n*sizeof(double), cudaMemcpyHostToDevice);

compute_norm(&norm,n,nblock,nthread,r_gpu,p_gpu,kinp_gpu,kinp);
printf("Normas %lf %lf\n",norm0,norm);

/* Compute initial kinetic and potential energies */

kinetic(&kin,n,nblock,nthread,p_gpu,kinp_gpu,kinp);
kin=kin/((double) n);

potential( &pot, n, nblock, nthread, tilesizes, numtile, eps, r_gpu, potpart_gpu,
potpart);
pot=pot/((double) n);

printf("Initial kinetic and potential energies per particle:\\n\\n");
printf("K= %lf  V= %lf\\n\\n",kin,pot);

energ0=kin+pot;

enrg=fopen("energy.dat", "w");
seq=fopen("seq.dat", "w");
errf=fopen("error.dat", "w");
fmoms=fopen("moments.dat", "w");
flyap=fopen("lyapunov.dat", "w");

```

Figura C.29

```

time=0.0;
fprintf(enrg, "%le %le %le\n", time, kin, pot);
tcount=0.0;
tcl=0.0;
lambda=0.0;
cl=0;
fl=1;

force<<<numtile, tilesize>>>(tilesize, numtile, eps, f_gpu, r_gpu);

get_seq<<<1, 1>>>(f_gpu, p_gpu, r_gpu, x_gpu, px_gpu, fx_gpu, n);
cudaMemcpy(x2, x_gpu, NSEQ*sizeof(double), cudaMemcpyDeviceToHost);
cudaMemcpy(px2, px_gpu, NSEQ*sizeof(double), cudaMemcpyDeviceToHost);
cudaMemcpy(fx2, fx_gpu, NSEQ*sizeof(double), cudaMemcpyDeviceToHost);

fprintf(seq, "%le", time);
for (i=0; i<NSEQ; i++) fprintf(seq, " %le %le %le", x2[i], px2[i], fx2[i]);
fprintf(seq, "\n");

moments(&mom4, n, 4, nblock, nthread, p_gpu, kinp_gpu, kinp);
moments(&mom6, n, 6, nblock, nthread, p_gpu, kinp_gpu, kinp);
mom4/=4.0*kin*kin;
mom6/=6.0*kin*kin;
fprintf(fmoms, "%lf %lf %lf\n", time, mom4, mom6);

/* time loop */
while(time<tf)
{
    timestep(n, nblock, nthread, tilesize, numtile, dt, eps, r_gpu, p_gpu, f_gpu);

    time+=dt;
    tcount+=dt;
    tcl+=dt;

    if (tcount>=ts)
    {
        kinetic(&kin, n, nblock, nthread, p_gpu, kinp_gpu, kinp);
        kin=kin/(double) n;

        potential(&pot, n, nblock, nthread, tilesize, numtile, eps, r_gpu, potpart_gpu,
potpart);

        pot=pot/(double) n;
        energ=kin+pot;
        err=(energ-energ0)/energ0;
        err=fabs(err);

        printf(" %lf %le\n", time, err);
        fprintf(errf, "%lf %le\n", time, err);

        tcount=0.0;
        fprintf(enrg, "%le %le %le\n", time, kin, pot);

        get_seq<<<1, 1>>>(f_gpu, p_gpu, r_gpu, x_gpu, px_gpu, fx_gpu, n);
        cudaMemcpy(x2, x_gpu, NSEQ*sizeof(double), cudaMemcpyDeviceToHost);
        cudaMemcpy(px2, px_gpu, NSEQ*sizeof(double), cudaMemcpyDeviceToHost);
        cudaMemcpy(fx2, fx_gpu, NSEQ*sizeof(double), cudaMemcpyDeviceToHost);

        fprintf(seq, "%le", time);
        for (i=0; i<NSEQ; i++) fprintf(seq, " %le %le %le", x2[i], px2[i], fx2[i]);
        fprintf(seq, "\n");

```

Figura C.30

File: /home/familia/Downloads/lyapunov/simp.cu

Page 4 of 5

```

moments(&mom4,n,4,nblock,nthread,p_gpu,kinp_gpu,kinp);
moments(&mom6,n,6,nblock,nthread,p_gpu,kinp_gpu,kinp);
mom4/=4.0*kin*kin;
mom6/=6.0*kin*kin;
fprintf(fmoms,"%lf %lf %lf\n",time,mom4,mom6);

if (time<twait)
{
    compute_norm(&norm,n,nblock,nthread,r_gpu,p_gpu,kinp_gpu,kinp);
    renorm<<<nblock,nthread>>>(n,norm,norm0,r_gpu,p_gpu);
    compute_norm(&norm,n,nblock,nthread,r_gpu,p_gpu,kinp_gpu,kinp);
};

if (tcl>=tlyap && time>=twait)
{
    tcl=0.0;

    if (fl==1)
    {
        fl=0;
        renorm<<<nblock,nthread>>>(n,norm,norm0,r_gpu,p_gpu);
    }
    else
    {
        cl+=1;
        compute_norm(&norm,n,nblock,nthread,r_gpu,p_gpu,kinp_gpu,kinp);

        lambda+=log(norm/norm0);
        el=lambda/((double) cl*tlyap);

        renorm<<<nblock,nthread>>>(n,norm,norm0,r_gpu,p_gpu);

        printf("                                %li    lambda=
%lf\n",cl,el);
        fprintf(flyap,"%lf %lf\n",time-twait+1.0,el);
    };
};

printf("\n End of simulation.\n");

// Closing files
fclose(engr);
fclose(seq);
fclose(errf);
fclose(fmoms);
fclose(flyap);

// freeing memory.
free(r);
free(p);
free(f);
free(potpart);
free(kinp);
free(x2);
free(px2);

cudaFree(r_gpu);

```

Figura C.31

File: /home/familia/Downloads/lyapunov/simp.cu

Page 5 of 5

```
    cudaFree(p_gpu);
    cudaFree(f_gpu);
    cudaFree(potpart_gpu);
    cudaFree(kinp_gpu);
    cudaFree(x_gpu);
    cudaFree(px_gpu);

    cudaDeviceReset();

    return 0;
}
```

Figura C.32

Por último colocamos as rotinas em *python*, criadas com auxílio de inteligência artificial, para a filtragem dos períodos do momento de inércia e para a obtenção da relação entre o LLE e a periodicidade dos modos de Goldstone.

File: /home/familia/Documents/rotina-filtro.txt Page 1 of 1

```
# Filtro Savitzki-Golay

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.signal import find_peaks, savgol_filter

# Carregar os dados do arquivo (substitua 'seu_arquivo.csv' pelo nome do seu arquivo)
data = np.loadtxt('/content/sample_data/sigpos.dat')

# Separar os dados
tempo = data[:, 0]
amplitude_verde = data[:, 1]
amplitude_vermelha = data[:, 2]

# Suavização dos dados (Filtro de Savitzky-Golay)
amplitude_verde_smooth = savgol_filter(amplitude_verde, window_length=51, polyorder=3)
amplitude_vermelha_smooth = savgol_filter(amplitude_vermelha, window_length=51,
polyorder=3)

# Identificação dos picos
peaks_verde, _ = find_peaks(amplitude_verde_smooth)
peaks_vermelha, _ = find_peaks(amplitude_vermelha_smooth)

# Cálculo do período
período_verde = np.diff(peaks_verde).mean()
período_vermelha = np.diff(peaks_vermelha).mean()

print(f'Período da função verde: {período_verde:.2f}')
print(f'Período da função vermelha: {período_vermelha:.2f}')

# Ajustando os eixos para plotar corretamente
tempo_smooth = tempo[:len(amplitude_verde_smooth)]

# Plot dos dados suavizados e picos
plt.plot(tempo_smooth, amplitude_verde_smooth, label='Função Verde Suavizada')
plt.plot(tempo_smooth, amplitude_vermelha_smooth, label='Função Vermelha Suavizada')
#plt.plot(tempo[peaks_verde], amplitude_verde_smooth[peaks_verde], 'x', label='Picos Verde')
#plt.plot(tempo[peaks_vermelha], amplitude_vermelha_smooth[peaks_vermelha], 'x',
label='Picos Vermelha')
plt.legend()
plt.xlabel('Tempo')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.show()
```

Figura C.33

File: /home/familia/Documents/rotina-tx1le.py

Page 1 of 1

```

import numpy as np
from scipy.optimize import fsolve, curve_fit
import matplotlib.pyplot as plt

# Definição das funções
def y_func(x):
    return 1.4e-15 * x**3 + 3e-10 * x**2 - 3e-6 * x + 0.007

def z_func(x):
    return 140756 * x**(-1/3) - 753

def find_x(y_target):
    # Função a ser zerada para encontrar x
    def equation(x):
        return y_func(x) - y_target

    # Chute inicial para x
    x_initial_guess = 1.0

    # Resolvendo a equação para x
    x_solution = fsolve(equation, x_initial_guess)[0]

    return x_solution

# Gerar dados para ajustar a função z(y)
y_values = np.linspace(0.005, 0.01, 100) # Valores de y na faixa de interesse
z_values = []

for y in y_values:
    x = find_x(y)
    z = z_func(x)
    if not np.isinf(z) and not np.isnan(z): # Filtrar valores inf e NaN
        z_values.append(z)

# Converter para arrays numpy
y_values = np.array(y_values[:len(z_values)])
z_values = np.array(z_values)

# Definir o modelo de função a ser ajustado (polinomial, por exemplo)
def model_func(y, a, b, c, d):
    return a * y**3 + b * y**2 + c * y + d

# Ajustar a função usando curve_fit
params, params_covariance = curve_fit(model_func, y_values, z_values)

# Exibir os parâmetros ajustados
a, b, c, d = params
print(f"Parâmetros ajustados: a={a}, b={b}, c={c}, d={d}")

# Plotar os dados e a função ajustada
plt.scatter(y_values, z_values, label='Dados')
plt.plot(y_values, model_func(y_values, *params), color='red', label='Função ajustada')
plt.xlabel('LLE')
plt.ylabel('T')
plt.legend()
plt.show()

```

Figura C.34

File: /home/familia/Documents/rotina-llext.py

Page 1 of 1

```

import numpy as np
from scipy.optimize import fsolve, curve_fit
import matplotlib.pyplot as plt

# Definição das funções
def y_func(x):
    return 1.4e-15 * x**3 + 3e-10 * x**2 - 3e-6 * x + 0.007

def z_func(x):
    return 140756 * x**(-1/3) - 753

def find_x(z_target):
    # Função a ser zerada para encontrar x
    def equation(x):
        return z_func(x) - z_target

    # Chute inicial para x
    x_initial_guess = 1.0

    # Resolvendo a equação para x
    x_solution = fsolve(equation, x_initial_guess)[0]

    return x_solution

# Gerar dados para ajustar a função y(z)
z_values = np.linspace(-500, 500, 100) # Valores de z na faixa de interesse
y_values = []

for z in z_values:
    x = find_x(z)
    y = y_func(x)
    if not np.isinf(y) and not np.isnan(y): # Filtrar valores inf e NaN
        y_values.append(y)

# Converter para arrays numpy
z_values = np.array(z_values[:len(y_values)])
y_values = np.array(y_values)

# Definir o modelo de função a ser ajustado (polinomial, por exemplo)
def model_func(z, a, b, c, d):
    return a * z**3 + b * z**2 + c * z + d

# Ajustar a função usando curve_fit
params, params_covariance = curve_fit(model_func, z_values, y_values)

# Exibir os parâmetros ajustados
a, b, c, d = params
print(f"Parâmetros ajustados: a={a}, b={b}, c={c}, d={d}")

# Plotar os dados e a função ajustada
plt.scatter(z_values, y_values, label='Dados')
plt.plot(z_values, model_func(z_values, *params), color='red', label='Função ajustada')
plt.xlabel('T')
plt.ylabel('LLE')
plt.legend()
plt.show()

```

Figura C.35

Observação: Alguns dos algoritmos finais foram alterados e podem ser encontrados no *google colab*: <https://colab.research.google.com/drive/1Kvwvp5Mt_cVYrrXwXPear9VUXNE5Np0X?usp=sharing>