



Universidade de Brasília
Instituto de Física

**Ondas gravitacionais como sonda
cosmológica**

Henrique Yukio Lourenço Tutida

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO
FÍSICA

Brasília
2025

Universidade de Brasília
Instituto de Física

Ondas gravitacionais como sonda cosmológica

Henrique Yukio Lourenço Tutida

Trabalho de Conclusão de Curso submetido
como requisito parcial para obtenção do grau
de Mestre em Física.

Orientadora: Profa. Dra. Mariana Penna Lima Vitenti

Brasília
2025

Universidade de Brasília
Instituto de Física

Ondas gravitacionais como sonda cosmológica

Henrique Yukio Lourenço Tutida

Trabalho de Conclusão de Curso submetido
como requisito parcial para obtenção do grau
de Mestre em Física.

Trabalho aprovado. Brasília, 7 de agosto de 2025:

Prof. Dra. Mariana Penna Lima Vitenti
UnB/IF
Orientadora

Prof. Dra. Raissa Fernandes Pessoa Mendes
UFF/IF
Examinador externo

Prof. Dr. Jonas Pedro Pereira
UnB/IF
Examinador interno

Agradecimentos

Agradeço aos meus colegas e companheiros do curso de Física que me acompanharam nessa árdua jornada que é a formação do físico. Agradeço também à Profa. Dra. Mariana Penna Lima Vitenti, que me orientou desde a iniciação científica, passando pelo trabalho de conclusão de curso, até esta dissertação de mestrado. Expresso ainda minha gratidão ao Instituto de Física da Universidade de Brasília pelo apoio financeiro concedido, que possibilitou o desenvolvimento deste trabalho e a participação em eventos e congressos científicos.

Resumo

As ondas gravitacionais, previstas há mais de um século pela Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein, foram detectadas pela primeira vez em 2015 pela colaboração LIGO-Virgo. Essa descoberta representa o início de uma nova era para a astronomia multimessageira, trazendo novas possibilidades para a exploração e compreensão do Universo e de seus constituintes. Neste trabalho, investigamos o papel das ondas gravitacionais na Cosmologia, com ênfase em seu potencial como sondas cosmológicas complementares às já existentes, como as supernovas do tipo Ia, a distribuição de galáxias e a radiação cósmica de fundo, na investigação da evolução do Universo. Apresentamos inicialmente a teoria fundamental das ondas gravitacionais em espaços-tempos curvos, discutindo sua propagação e produção, seguida de sua aplicação ao universo homogêneo e isotrópico em expansão, descrito pela métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Discutimos também possíveis fontes de ondas gravitacionais, os detectores atualmente em operação (como, e.g., LIGO, Virgo e KAGRA), bem como projetos futuros (e.g., Einstein Telescope e LISA). Finalizamos com um estudo de caso, utilizando o sinal da onda gravitacional proveniente da fusão de duas estrelas de nêutrons, o evento GW170817, para inferir a constante de Hubble.

Palavras-chave: ondas gravitacionais; relatividade geral; cosmologia; sonda cosmológica.

Abstract

Gravitational waves, predicted over a century ago by Albert Einstein's General Theory of Relativity, were first detected in 2015 by the LIGO-Virgo collaboration. This discovery marks the beginning of a new era for multi-messenger astronomy, bringing new possibilities for exploring and understanding the Universe and its constituents. In this work, we investigate the role of gravitational waves in Cosmology, emphasizing their potential as cosmological probes complementary to those already existing, such as type Ia supernovae, galaxy distribution, and the cosmic microwave background, in the study of the Universe's evolution. We initially present the fundamental theory of gravitational waves in curved spacetimes, discussing their propagation and generation, followed by its application to the homogeneous and isotropic expanding universe described by the Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker metric. We also discuss possible sources of gravitational waves, detectors currently in operation (such as LIGO, Virgo, and KAGRA), as well as future projects (e.g., Einstein Telescope and LISA). We conclude with a case study using the gravitational wave signal from the merger of two neutron stars, the GW170817 event, to infer the Hubble constant.

Keywords: gravitational waves; general relativity; cosmology; cosmological probe.

Lista de figuras

Figura 2.1	Ilustração do sistema binário considerado.	42
Figura 2.2	Esquema da configuração considerada para a onda gravitacional radiada em uma direção $\vec{n}$	46
Figura 2.3	Imagem ilustrativa de h_+ em função do tempo. Escolhemos para fazer o gráfico $m_1 = 42M_\odot$ e $m_2 = 31.4M_\odot$, $D_L = 150\text{Mpc}$ e $z = 0.03$	52
Figura 2.4	Gráfico da frequência das ondas gravitacionais de uma binária em função do tempo.	52
Figura 2.5	O gráfico superior mostra a amplitude h_+ (chamada em inglês de <i>strain</i>) em função do tempo criada por dois buracos negros usando relatividade numérica. O gráfico inferior mostra a evolução da separação orbital e da velocidade dos buracos negros. A imagem é de (Abbott <i>et al.</i> , 2016) e possui permissão para uso público.	53
Figura 3.1	Efeito de uma onda gravitacional com polarização h_+ passando por um conjunto de massas teste organizados em formato de anel.	56
Figura 3.2	Efeito de uma onda gravitacional com polarização $h_\times$ passando por um conjunto de massas teste organizadas em formato de anel.	56
Figura 3.3	Ilustração do referencial do detector na Terra observando uma binária distante com vetor normal $\vec{N}$ ao plano orbital.	59
Figura 3.4	Curvas de sensibilidade para diferentes detectores e fontes de ondas gravitacionais. O detector é sensível à fontes que possuem a área colorida acima da curva preta. A imagem foi produzida através do site http://gwplotter.com/ . Detalhes técnicos podem ser encontrados em (Moore; Cole; Berry, 2014).	61
Figura 3.5	Distribuição de probabilidade posterior do evento GW170817 para a distância luminosidade.	68
Figura 3.6	Função <i>likelihood</i> da distância luminosidade do evento GW170817.	69
Figura 3.7	Distribuição posterior de H_0 para o evento GW170817. O valor encontrado para a maior probabilidade foi de $67.3^{+14.5}_{-4.9} \text{ km/s/Mpc}$	70

Sumário

Introdução	8
1 Teoria básica de Ondas Gravitacionais	10
1.1 Expansão do tensor de Ricci	10
1.2 Transformação de calibre	15
1.3 Equações de Campo Linearizadas	18
1.4 Tensor energia-momento das ondas gravitacionais	19
2 Ondas Gravitacionais na Cosmologia	22
2.1 Uma Breve Revisão de Cosmologia	22
2.2 Decomposição SVT	27
2.3 Ondas Gravitacionais em FLRW	32
2.3.1 Solução de onda	33
2.3.2 Produção de Ondas Gravitacionais e Fórmula de Quadrupolo	36
2.4 Sistema binário	42
3 Usando Ondas Gravitacionais	54
3.1 Efeitos das Ondas Gravitacionais	54
3.2 Fontes e experimentos	56
3.3 Breve descrição do sinal das ondas gravitacionais	58
3.4 Noções de Estatística Bayesiana e Inferência de Parâmetros	63
3.5 Inferindo a constante de Hubble	66
Referências	72
Apêndices	81
Apêndice A Símbolo de Christoffel	82
Apêndice B Processo de média de Isaacson	84
Apêndice C Equações para a cauda da onda gravitacional	87

Introdução

As ondas gravitacionais (OG), descritas pela Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein (Einstein, 1916; Einstein, 1918), são ondulações que acontecem no espaço-tempo e se propagam na velocidade da luz. O fenômeno é obtido no contexto da Relatividade Geral (RG) ao considerar que a métrica $g_{\mu\nu}$ que descreve o espaço-tempo é composta da métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, a qual é chamada por *métrica de fundo*, adicionada de pequenas perturbações $h_{\mu\nu}$. Como exemplo visual, uma boa analogia às OG são as pequenas ondas que percorrem o vasto mar. Escrevendo então $g_{\mu\nu}$ como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (0.1)$$

e aplicando as equações de campo de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (0.2)$$

obtém-se a equação¹ que descreve a radiação gravitacional

$$\square h_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (0.3)$$

Em seu artigo de 1918 (Einstein, 1918), Einstein publicou a famosa fórmula de quadrupolo que relaciona a produção da OG com a derivada segunda do momento de massa da fonte, que nos mostrou como os eventos que geram as ondas detectáveis são causados pela interação de objetos muito densos, como estrelas de nêutrons e buracos negros. Quase 100 anos depois da publicação do artigo de 1916, no dia 14 de setembro de 2015 foram detectadas as primeiras ondas gravitacionais (nomeada GW150914), oriundas da fusão de dois buracos negros de massas $36^{+5}_{-4}M_{\odot}$ e $29^{+4}_{-4}M_{\odot}$, pela colaboração LIGO-Virgo (Abbott *et al.*, 2016) e abriu-se uma nova janela na Física para a exploração e estudo do Universo e de fenômenos astrofísicos através de novas lentes. A descoberta das ondas representa o início de uma nova era para a astronomia multimessageira, trazendo novas possibilidades para a exploração e compreensão do Universo e de seus constituintes.

Neste trabalho, investigamos o papel das ondas gravitacionais na Cosmologia, com ênfase em seu potencial como sondas cosmológicas complementares às já existentes, como as supernovas do tipo Ia (Leibundgut, 2001), a distribuição de galáxias (Yoo; Fitzpatrick; Zaldarriaga, 2009) e a radiação cósmica de fundo (Durrer, 2020), na investigação da evolução do Universo. No primeiro capítulo apresentamos a teoria fundamental das ondas gravitacionais em espaços-tempos curvos e derivamos a equação que descreve a dinâmica das

¹ Essa equação é válida apenas no calibre transversal e de traço nulo, como veremos mais adiante no capítulo 1.

perturbações. No capítulo 2 fazemos uma breve revisão de Cosmologia e aplicamos a teoria desenvolvida no capítulo ao universo homogêneo e isotrópico em expansão, descrito pela métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, vendo como a propagação e produção das ondas funciona. No final do capítulo 2 aplicamos a teoria desenvolvida para uma binária de massas pontuais e vemos como é o comportamento da onda gravitacional produzida. Por último, no terceiro capítulo, vemos os efeitos da passagem de uma onda através de massas teste, discutimos também possíveis fontes das ondas gravitacionais, os detectores atualmente em operação (como, e.g., LIGO, Virgo e KAGRA), bem como projetos futuros (e.g., Einstein Telescope e LISA). Em seguida fazemos uma breve descrição dos sinais detectados e vemos os conceitos básicos de estatística Bayesiana. Finalizamos com um estudo de caso simples, utilizando o sinal da onda gravitacional proveniente da fusão de duas estrelas de nêutrons, o evento GW170817 ([Abbott *et al.*, 2017](#)), para inferir a constante de Hubble.

1 Teoria básica de Ondas Gravitacionais

Neste primeiro capítulo nos dedicamos à revisão da teoria necessária para o estudo das ondas gravitacionais (OGs) em espaços-tempos curvos. Na primeira seção seguimos o procedimento padrão de linearização das equações de campo de Einstein para obter as ondas gravitacionais. Na seção seguinte exploramos as perturbações sob as transformações infinitesimais de coordenadas. Na terceira seção montamos as equações de campo linearizadas que governam a dinâmica das perturbações. Por último, na quarta seção obtemos o tensor energia-momento efetivo das ondas gravitacionais.

1.1 Expansão do tensor de Ricci

Em geral, nos livros textos, as equações de ondas gravitacionais são obtidas a partir da linearização as equações de campo em torno da métrica de Minkowski. Contudo, no contexto cosmológico, vivemos em um universo que está expandindo e, portanto, é importante entendermos como e estudarmos as equações de ondas gravitacionais em uma métrica arbitrária, descrita como uma métrica de fundo qualquer mais perturbações.

Realizar uma expansão como (0.1) de forma que temos clara distinção entre o que é a perturbação e o que é o espaço-tempo de fundo, requer que haja uma diferença entre as escalas nas quais as duas quantidades variam. Neste sentido, seguimos as mesmas definições de (Brill; Hartle, 1964) e (Isaacson, 1968a), e consideramos ondas gravitacionais de pequena amplitude e alta frequência que acontecem em um espaço-tempo de fundo curvo e que varia de forma lenta. Começamos escrevendo a métrica total como

$$g_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

onde índices gregos $\mu, \nu, \dots$, variam de 0 a 3 e índices latinos $i, j, \dots$, de 1 a 3, $\tilde{g}_{\mu\nu}$ possui assinatura $(-, +, +, +)$ e $\gamma_{\mu\nu}$ são as pequenas perturbações, sob a condição $|\gamma_{\mu\nu}| \ll |\tilde{g}_{\mu\nu}|$. Denotamos as escalas nas quais $\tilde{g}_{\mu\nu}$ e $\gamma_{\mu\nu}$ variam por L e $\lambda = \lambda/2\pi$, respectivamente. Denotamos a amplitude das perturbações por $\varepsilon \equiv \mathcal{O}(|\gamma_{\mu\nu}|)$ e trabalhamos no regime em que $\lambda/L \ll 1$ e $\varepsilon \ll 1$, conhecido como regime de onda curta (“*shortwave regime*”) (Brill; Hartle, 1964; Misner; Wheeler, 1973; Maggiore, 2007). Usamos a métrica de fundo para movimentar os índices da perturbação e de tensores relacionados ao espaço-tempo de fundo. As quantidades que possuem o símbolo “ $\sim$ ” dizem respeito à $\tilde{g}_{\mu\nu}$.

Nestas condições, como em (Isaacson, 1968a), expandimos o tensor de Ricci em potências de $\gamma_{\mu\nu}$: $R_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)}$, onde $R_{\mu\nu}^{(1)}$ e $R_{\mu\nu}^{(2)}$ são linear e quadrático na perturbação, respectivamente, e descartamos termos de ordem $\mathcal{O}(|\gamma_{\mu\nu}|^3)$ e maiores. A inversa $g^{\mu\nu}$ da

métrica é da forma (Isaacson, 1968a)

$$g^{\mu\nu} = \tilde{g}^{\mu\nu} - \gamma^{\mu\nu} + \gamma^\mu_\alpha \gamma^{\alpha\nu}, \quad (1.2)$$

onde define-se $\gamma^{\mu\nu} \equiv \tilde{g}^{\mu\sigma} \tilde{g}^{\nu\rho} \gamma_{\sigma\rho}$, e temos que

$$\begin{aligned} g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} &= (\tilde{g}_{\mu\alpha} + \gamma_{\mu\alpha})(\tilde{g}^{\alpha\nu} - \gamma^{\alpha\nu} + \gamma^\alpha_\beta \gamma^{\beta\nu}) \\ &= \tilde{g}_{\mu\alpha} \tilde{g}^{\alpha\nu} - \tilde{g}_{\mu\alpha} \gamma^{\alpha\nu} + \tilde{g}_{\mu\alpha} \gamma^\alpha_\beta \gamma^{\beta\nu} + \gamma_{\mu\alpha} \tilde{g}^{\alpha\nu} - \gamma_{\mu\alpha} \gamma^{\alpha\nu} + \mathcal{O}(|\gamma_{\mu\nu}|^3) \\ &= \delta_\mu^\nu. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Calculamos primeiro as conexões

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}). \quad (1.4)$$

Usando (1.1) e (1.2) em (1.4),

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\rho &= \frac{1}{2} (\tilde{g}^{\rho\lambda} - \gamma^{\rho\lambda} + \gamma^\rho_\alpha \gamma^{\alpha\lambda}) [\partial_\mu (\tilde{g}_{\nu\lambda} + \gamma_{\nu\lambda}) + \partial_\nu (\tilde{g}_{\mu\lambda} + \gamma_{\mu\lambda}) - \partial_\lambda (\tilde{g}_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu})] \\ &= \frac{1}{2} \tilde{g}^{\rho\lambda} (\partial_\mu \tilde{g}_{\nu\lambda} + \partial_\nu \tilde{g}_{\mu\lambda} - \partial_\lambda \tilde{g}_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} \tilde{g}^{\rho\lambda} (\partial_\mu \gamma_{\nu\lambda} + \partial_\nu \gamma_{\mu\lambda} - \partial_\lambda \gamma_{\mu\nu}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \gamma^{\rho\lambda} (\partial_\mu \tilde{g}_{\nu\lambda} + \partial_\nu \tilde{g}_{\mu\lambda} - \partial_\lambda \tilde{g}_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} \gamma^{\rho\lambda} (\partial_\mu \gamma_{\nu\lambda} + \partial_\nu \gamma_{\mu\lambda} - \partial_\lambda \gamma_{\mu\nu}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \gamma^\rho_\alpha \gamma^{\alpha\lambda} (\partial_\mu \tilde{g}_{\nu\lambda} + \partial_\nu \tilde{g}_{\mu\lambda} - \partial_\lambda \tilde{g}_{\mu\nu}) + \mathcal{O}(|\gamma_{\mu\nu}|^3). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Note que o primeiro termo de (1.5) nada mais é que a conexão da métrica de fundo, a qual denotamos por $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho$. Agora usamos $\tilde{\nabla}_\sigma \tilde{g}_{\mu\nu}$ e $\tilde{\nabla}_\sigma \gamma_{\mu\nu}$ para substituir as derivadas parciais, obtendo

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho + \frac{1}{2} \tilde{g}^{\rho\lambda} (\tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\nu\lambda} + \tilde{\nabla}_\nu \gamma_{\mu\lambda} - \tilde{\nabla}_\lambda \gamma_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} \gamma^{\rho\lambda} (\tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\nu\lambda} + \tilde{\nabla}_\nu \gamma_{\mu\lambda} - \tilde{\nabla}_\lambda \gamma_{\mu\nu}). \quad (1.6)$$

O tensor de curvatura é

$$R^\rho_{\mu\sigma\nu} = \partial_\sigma \Gamma_{\nu\mu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\sigma\mu}^\rho + \Gamma_{\sigma\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda. \quad (1.7)$$

Contraindo as derivadas com $\tilde{g}^{\rho\lambda}$ no segundo termo de (1.6) para facilitar a conta, temos que o primeiro termo de (1.7) é

$$\begin{aligned} \partial_\sigma \Gamma_{\nu\mu}^\rho &= \partial_\sigma \tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^\rho + \frac{1}{2} \left[\partial_\sigma (\tilde{\nabla}_\nu \gamma_{\mu}^\rho) + \partial_\sigma (\tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\nu}^\rho) - \partial_\sigma (\tilde{\nabla}^\rho \gamma_{\mu\nu}) - \partial_\sigma \gamma^{\rho\lambda} (\tilde{\nabla}_\nu \gamma_{\mu\lambda} + \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\nu\lambda} - \tilde{\nabla}_\lambda \gamma_{\mu\nu}) \right. \\ &\quad \left. - \gamma^{\rho\lambda} (\partial_\sigma (\tilde{\nabla}_\nu \gamma_{\mu\lambda}) + \partial_\sigma (\tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\nu\lambda}) - \partial_\sigma (\tilde{\nabla}_\lambda \gamma_{\mu\nu})) \right] \\ &= \partial_\sigma \tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^\rho + \frac{1}{2} \left[\tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\nu \gamma_{\mu}^\rho + \tilde{\Gamma}_{\sigma\nu}^\beta \tilde{\nabla}_\beta \gamma_{\mu}^\rho + \tilde{\Gamma}_{\sigma\mu}^\beta \tilde{\nabla}_\nu \gamma_{\beta}^\rho - \tilde{\Gamma}_{\sigma\beta}^\rho \tilde{\nabla}_\nu \gamma_{\mu}^\beta + \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\nu}^\rho + \tilde{\Gamma}_{\sigma\mu}^\beta \tilde{\nabla}_\beta \gamma_{\nu}^\rho \right. \\ &\quad + \tilde{\Gamma}_{\sigma\nu}^\beta \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\beta}^\rho - \tilde{\Gamma}_{\sigma\beta}^\rho \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\nu}^\beta - \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}^\rho \gamma_{\mu\nu} + \tilde{\Gamma}_{\sigma\beta}^\rho \tilde{\nabla}^\beta \gamma_{\mu\nu} - \tilde{\Gamma}_{\sigma\nu}^\beta \tilde{\nabla}^\rho \gamma_{\beta\mu} - \tilde{\Gamma}_{\sigma\mu}^\beta \tilde{\nabla}^\rho \gamma_{\nu\beta} \\ &\quad - (\tilde{\nabla}_\sigma \gamma^{\rho\lambda} - \tilde{\Gamma}_{\sigma\beta}^\rho \gamma^{\beta\lambda} - \tilde{\Gamma}_{\sigma\beta}^\lambda \gamma^{\rho\beta}) (\tilde{\nabla}_\nu \gamma_{\mu\lambda} + \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\nu\lambda} - \tilde{\nabla}_\lambda \gamma_{\mu\nu}) - \gamma^{\rho\lambda} (\tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\nu \gamma_{\mu\lambda} + \tilde{\Gamma}_{\sigma\nu}^\beta \tilde{\nabla}_\beta \gamma_{\mu\lambda} \\ &\quad + \tilde{\Gamma}_{\sigma\mu}^\beta \tilde{\nabla}_\nu \gamma_{\beta\lambda} + \tilde{\Gamma}_{\sigma\lambda}^\beta \tilde{\nabla}_\nu \gamma_{\mu\beta} + \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\nu\lambda} + \tilde{\Gamma}_{\sigma\mu}^\beta \tilde{\nabla}_\beta \gamma_{\nu\lambda} + \tilde{\Gamma}_{\sigma\nu}^\beta \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\beta\lambda} + \tilde{\Gamma}_{\sigma\lambda}^\beta \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\nu\beta} \\ &\quad \left. - \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\lambda \gamma_{\mu\nu} - \tilde{\Gamma}_{\sigma\lambda}^\beta \tilde{\nabla}_\beta \gamma_{\mu\nu} - \tilde{\Gamma}_{\sigma\mu}^\beta \tilde{\nabla}_\lambda \gamma_{\beta\nu} - \tilde{\Gamma}_{\sigma\nu}^\beta \tilde{\nabla}_\lambda \gamma_{\mu\beta} \right]. \end{aligned} \quad (1.8)$$

O terceiro termo é

$$\begin{aligned}\Gamma_{\sigma\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\mu}^\lambda &= \tilde{\Gamma}_{\sigma\lambda}^\rho \tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^\lambda + \frac{1}{2} \tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^\lambda \left[\tilde{\nabla}_\sigma \gamma_{\lambda}^\rho + \tilde{\nabla}_\lambda \gamma_{\sigma}^\rho - \tilde{\nabla}^\rho \gamma_{\sigma\lambda} - \gamma^{\rho\delta} (\tilde{\nabla}_\sigma \gamma_{\lambda\delta} + \tilde{\nabla}_\lambda \gamma_{\sigma\delta} - \tilde{\nabla}_\delta \gamma_{\sigma\lambda}) \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} (\tilde{\nabla}_\sigma \gamma_{\lambda}^\rho + \tilde{\nabla}_\lambda \gamma_{\sigma}^\rho - \tilde{\nabla}^\rho \gamma_{\nu\lambda}) (\tilde{\nabla}_\nu \gamma_{\mu}^\lambda + \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\nu}^\lambda - \tilde{\nabla}^\lambda \gamma_{\nu\mu}) + \mathcal{O}(|\gamma_{\mu\nu}|^3) + \mathcal{O}(|\gamma_{\mu\nu}|^4).\end{aligned}\tag{1.9}$$

O Princípio da Equivalência nos permite fazer com que os termos que estão sendo multiplicados por conexões em (1.8) e (1.9) desapareçam, i.e. escolhemos em um ponto $\mathcal{P}$ coordenadas x^μ tal que a métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$ se reduza à métrica de Minkowski, resultando em $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho(\mathcal{P}) = 0$ (Carroll, 2004; Wald, 1984; Misner; Wheeler, 1973). Isso nos leva a ter¹

$$\begin{aligned}\partial_\sigma \Gamma_{\nu\mu}^\rho &= \partial_\sigma \tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^\rho + \frac{1}{2} \left[\tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\nu \gamma_{\mu}^\rho + \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\nu}^\rho - \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}^\rho \gamma_{\mu\nu} - \tilde{\nabla}_\sigma \gamma^{\rho\lambda} (\tilde{\nabla}_\nu \gamma_{\mu\lambda} + \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\nu\lambda} - \tilde{\nabla}_\lambda \gamma_{\mu\nu}) \right. \\ &\quad \left. - \gamma^{\rho\lambda} (\tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\nu \gamma_{\mu\lambda} + \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\nu\lambda} - \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\lambda \gamma_{\mu\nu}) \right]\end{aligned}\tag{1.10}$$

e

$$\Gamma_{\sigma\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\mu}^\lambda = \frac{1}{4} (\tilde{\nabla}_\sigma \gamma_{\lambda}^\rho + \tilde{\nabla}_\lambda \gamma_{\sigma}^\rho - \tilde{\nabla}^\rho \gamma_{\nu\lambda}) (\tilde{\nabla}_\nu \gamma_{\mu}^\lambda + \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\nu}^\lambda - \tilde{\nabla}^\lambda \gamma_{\nu\mu}).\tag{1.11}$$

Substituindo todos os termos de (1.7) por (1.10) e (1.11) com seus respectivos índices, obtemos

$$\begin{aligned}R_{\mu\sigma\nu}^\rho &= \partial_\sigma \tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^\rho + \frac{1}{2} \left[\tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\nu \gamma_{\mu}^\rho + \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\nu}^\rho - \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}^\rho \gamma_{\mu\nu} - \tilde{\nabla}_\sigma \gamma^{\rho\lambda} (\tilde{\nabla}_\nu \gamma_{\mu\lambda} + \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\nu\lambda} - \tilde{\nabla}_\lambda \gamma_{\mu\nu}) \right. \\ &\quad \left. - \gamma^{\rho\lambda} (\tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\nu \gamma_{\mu\lambda} + \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\nu\lambda} - \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\lambda \gamma_{\mu\nu}) \right] - \partial_\nu \tilde{\Gamma}_{\sigma\mu}^\rho - \frac{1}{2} \left[(\tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\sigma \gamma_{\mu}^\rho + \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\sigma}^\rho \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}^\rho \gamma_{\sigma\mu}) + \tilde{\nabla}_\nu \gamma^{\rho\lambda} (\tilde{\nabla}_\sigma \gamma_{\mu\lambda} + \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\sigma\lambda} - \tilde{\nabla}_\lambda \gamma_{\sigma\mu}) + \gamma^{\rho\lambda} (\tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\sigma \gamma_{\mu\lambda} + \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\sigma\lambda} \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\lambda \gamma_{\sigma\mu}) \right] + \frac{1}{4} \left[(\tilde{\nabla}_\sigma \gamma_{\lambda}^\rho + \tilde{\nabla}_\lambda \gamma_{\sigma}^\rho - \tilde{\nabla}^\rho \gamma_{\sigma\lambda}) (\tilde{\nabla}_\nu \gamma_{\mu}^\lambda + \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\nu}^\lambda - \tilde{\nabla}^\lambda \gamma_{\mu\nu}) \right. \\ &\quad \left. - (\tilde{\nabla}_\nu \gamma_{\lambda}^\rho + \tilde{\nabla}_\lambda \gamma_{\nu}^\rho - \tilde{\nabla}^\rho \gamma_{\nu\lambda}) (\tilde{\nabla}_\sigma \gamma_{\mu}^\lambda + \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\sigma}^\lambda - \tilde{\nabla}^\lambda \gamma_{\sigma\mu}) \right] \\ &= \tilde{R}_{\mu\sigma\nu}^\rho + \frac{1}{2} \left[\tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\nu \gamma_{\mu}^\rho - \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\sigma \gamma_{\mu}^\rho + \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\nu}^\rho - \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}^\rho \gamma_{\mu\nu} - \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\sigma}^\rho + \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}^\rho \gamma_{\sigma\mu} \right] \\ &\quad + \left[-\frac{1}{4} (\tilde{\nabla}_\sigma \gamma_{\lambda}^\rho - \tilde{\nabla}_\lambda \gamma_{\sigma}^\rho + \tilde{\nabla}^\rho \gamma_{\sigma\lambda}) (\tilde{\nabla}_\nu \gamma_{\mu}^\lambda + \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\nu}^\lambda - \tilde{\nabla}^\lambda \gamma_{\mu\nu}) + \frac{1}{4} \tilde{\nabla}_\nu \gamma^{\rho\lambda} \right. \\ &\quad \times (\tilde{\nabla}_\sigma \gamma_{\mu\lambda} + \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\sigma\lambda} - \tilde{\nabla}_\lambda \gamma_{\sigma\mu}) - \frac{1}{4} (\tilde{\nabla}_\lambda \gamma_{\nu}^\rho - \tilde{\nabla}^\rho \gamma_{\nu\lambda}) (\tilde{\nabla}_\sigma \gamma_{\mu}^\lambda + \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\sigma}^\lambda - \tilde{\nabla}^\lambda \gamma_{\sigma\mu}) \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \gamma^{\rho\lambda} (\tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\nu \gamma_{\mu\lambda} - \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\sigma \gamma_{\mu\lambda} + \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\nu\lambda} - \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\lambda \gamma_{\mu\nu} - \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\sigma\lambda} + \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\lambda \gamma_{\sigma\mu}) \right] \\ &\equiv \tilde{R}_{\mu\sigma\nu}^\rho + R_{\mu\sigma\nu}^{(1)\rho} + R_{\mu\sigma\nu}^{(2)\rho},\end{aligned}\tag{1.12}$$

¹ Apesar de estarmos escolhendo um sistema de coordenadas que faz as conexões se tornarem nulas, as expressões finais que obtemos são todas covariantes e, portanto, são válidas em qualquer sistema de coordenadas.

onde alguns termos foram colocados em evidência para construir $R^{(2)\rho}_{\mu\sigma\nu}$ na forma apresentada e identificamos $\tilde{R}^\rho_{\mu\sigma\nu} \equiv \partial_\sigma \tilde{\Gamma}^\rho_{\nu\mu} - \partial_\nu \tilde{\Gamma}^\rho_{\sigma\mu}$.

Contraindo o primeiro e terceiro índices do tensor de curvatura obtemos o tensor de Ricci

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= g^{\sigma\alpha} g_{\alpha\rho} R^\rho_{\mu\sigma\nu} = \delta^\sigma_\rho R^\rho_{\mu\sigma\nu} = R^\sigma_{\mu\sigma\nu} \\
&= \tilde{R}^\sigma_{\mu\sigma\nu} + \frac{1}{2} (\tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\nu \gamma_\mu^\sigma - \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\sigma \gamma_\mu^\sigma + \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\mu \gamma_\nu^\sigma - \tilde{\nabla}^\sigma \tilde{\nabla}_\sigma \gamma_{\mu\nu} - \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\mu \gamma + \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}^\sigma \gamma_{\sigma\mu}) \\
&\quad - \frac{1}{4} (\tilde{\nabla}_\sigma \gamma_\lambda^\sigma - \tilde{\nabla}_\lambda \gamma + \tilde{\nabla}^\sigma \gamma_{\sigma\lambda}) (\tilde{\nabla}_\nu \gamma_\mu^\lambda + \tilde{\nabla}_\mu \gamma_\nu^\lambda - \tilde{\nabla}^\lambda \gamma_{\mu\nu}) + \frac{1}{4} \tilde{\nabla}_\nu \gamma^{\sigma\lambda} (\tilde{\nabla}_\sigma \gamma_{\mu\lambda} \\
&\quad + \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\sigma\lambda} - \tilde{\nabla}^\lambda \gamma_{\sigma\mu}) - \frac{1}{4} (\tilde{\nabla}_\lambda \gamma_\nu^\sigma - \tilde{\nabla}^\sigma \gamma_{\nu\lambda}) (\tilde{\nabla}_\sigma \gamma_\mu^\lambda + \tilde{\nabla}_\mu \gamma_\sigma^\lambda - \tilde{\nabla}^\lambda \gamma_{\sigma\mu}) - \frac{1}{2} \gamma^{\sigma\lambda} \\
&\quad \times (\tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\nu \gamma_{\mu\lambda} - \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\sigma \gamma_{\mu\lambda} + \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\nu\lambda} - \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\lambda \gamma_{\mu\nu} - \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\sigma\lambda} + \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\lambda \gamma_{\sigma\mu}) \\
&= \tilde{R}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\mu \gamma_\nu^\sigma + \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\nu \gamma_\mu^\sigma - \tilde{\nabla}^\sigma \tilde{\nabla}_\sigma \gamma_{\mu\nu} - \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\mu \gamma) + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\sigma\lambda} \tilde{\nabla}_\nu \gamma^{\sigma\lambda} \right. \\
&\quad + \tilde{\nabla}_\lambda \gamma_\nu^\sigma (\tilde{\nabla}^\lambda \gamma_{\mu\sigma} - \tilde{\nabla}_\sigma \gamma_\mu^\lambda) + \gamma^{\sigma\lambda} (\tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\sigma\lambda} + \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\lambda \gamma_{\mu\nu} - \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\nu\lambda} - \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\nu \gamma_{\mu\lambda}) \\
&\quad \left. + (\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_\lambda \gamma - \tilde{\nabla}^\sigma \gamma_{\sigma\lambda}) (\tilde{\nabla}_\mu \gamma_\nu^\lambda + \tilde{\nabla}_\nu \gamma_\mu^\lambda - \tilde{\nabla}^\lambda \gamma_{\mu\nu}) \right], \tag{1.13}
\end{aligned}$$

e então definimos

$$R_{\mu\nu}^{(1)} \equiv \frac{1}{2} (\tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\mu \gamma_\nu^\sigma + \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\nu \gamma_\mu^\sigma - \tilde{\nabla}^\sigma \tilde{\nabla}_\sigma \gamma_{\mu\nu} - \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\mu \gamma), \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu}^{(2)} &\equiv \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\sigma\lambda} \tilde{\nabla}_\nu \gamma^{\sigma\lambda} + \tilde{\nabla}_\lambda \gamma_\nu^\sigma (\tilde{\nabla}^\lambda \gamma_{\mu\sigma} - \tilde{\nabla}_\sigma \gamma_\mu^\lambda) + \gamma^{\sigma\lambda} (\tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\sigma\lambda} + \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\lambda \gamma_{\mu\nu} \right. \\
&\quad \left. - \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\nu\lambda} - \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\nu \gamma_{\mu\lambda}) + (\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_\lambda \gamma - \tilde{\nabla}^\sigma \gamma_{\sigma\lambda}) (\tilde{\nabla}_\mu \gamma_\nu^\lambda + \tilde{\nabla}_\nu \gamma_\mu^\lambda - \tilde{\nabla}^\lambda \gamma_{\mu\nu}) \right], \tag{1.15}
\end{aligned}$$

no qual $\gamma \equiv \gamma^\sigma_\sigma$ é o traço de $\gamma_{\mu\nu}$.

Isaacson, em (Isaacson, 1968a), introduz estimativas da ordem de magnitude com que as variações de $\tilde{g}_{\mu\nu}$ e $\gamma_{\mu\nu}$ acontecem²

$$\begin{aligned}
\partial \tilde{g}_{\mu\nu} &\sim \frac{\tilde{g}}{L} \sim \frac{1}{L}, \\
\partial \gamma_{\mu\nu} &\sim \frac{\varepsilon}{\lambda}, \tag{1.16}
\end{aligned}$$

onde adotamos que $\tilde{g}_{\mu\nu}$ é da ordem de unidade, $\tilde{g}_{\mu\nu} = \mathcal{O}(1)$. Vemos de (1.13) que

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{\mu\nu} &\sim \partial^2 \tilde{g}_{\mu\nu} \sim \frac{1}{L^2}, \\
R_{\mu\nu}^{(1)} &\sim \partial^2 \gamma_{\mu\nu} \sim \frac{\varepsilon}{\lambda^2}, \\
R_{\mu\nu}^{(2)} &\sim (\partial \gamma_{\mu\nu})^2 + \gamma_\mu^\alpha \partial^2 \gamma_{\alpha\nu} \sim \frac{\varepsilon^2}{\lambda^2}. \tag{1.17}
\end{aligned}$$

² Como a métrica de fundo e as perturbações variam em escalas diferentes, i.e., $\tilde{g}$ varia lentamente e em uma escala L e γ varia rapidamente e em uma escala λ , com $\lambda \ll L$, a ordem de magnitude com que suas taxas variam são tomadas com respeito às suas respectivas escalas. Para mais detalhes ver, e.g., (Isaacson, 1968a), (Misner; Wheeler, 1973), (Brill; Hartle, 1964), (Landau; Lifshitz, 1975).

$\tilde{R}_{\mu\nu}$ é uma quantidade da métrica de fundo e possui apenas componentes de baixas frequências (ou longos comprimentos de onda). $R_{\mu\nu}^{(1)}$ é linear em $\gamma_{\mu\nu}$ e, por definição, possui apenas componentes de alta frequência (ou curtos comprimentos de onda). Por ser quadrático em $\gamma_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}^{(2)}$ pode ser separado em uma parte que contém apenas baixas frequências e outra com altas frequências. Isso é possível de ser feito considerando uma média de $R_{\mu\nu}^{(2)}$ sobre vários comprimentos de onda da perturbação (Brill; Hartle, 1964; Isaacson, 1968a; Maggiore, 2007). As equações de campo no vácuo, $R_{\mu\nu} = 0$, separam-se então como

$$R_{\mu\nu}^{(1)} + [\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle]^{(A)} = 0, \quad (1.18)$$

$$\tilde{R}_{\mu\nu} + [\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle]^{(B)} = 0, \quad (1.19)$$

onde $\langle \dots \rangle$ denota uma média e os sobrescritos (A) e (B) é para *altas frequências* e *baixas frequências*, respectivamente. A densidade de energia efetiva contida nas ondas gravitacionais é de ordem $(c^4/G)(\varepsilon^2/\lambda^2)$ e a curvatura da geometria de fundo é de ordem $1/L^2$, de forma que, a partir das equações de Einstein (1.19), temos (Isaacson, 1968a)

$$\frac{1}{L^2} \gtrsim \frac{G}{c^4} \cdot \frac{c^4}{G} \frac{\varepsilon^2}{\lambda^2} = \frac{\varepsilon^2}{\lambda^2}. \quad (1.20)$$

Por simplicidade escolhemos $L = \mathcal{O}(1)$ de forma que $\mathcal{O}(\varepsilon) = \mathcal{O}(\lambda)$ e, conseqüentemente, $1/L^2 \sim \varepsilon^2/\lambda^2 \sim 1$. Vemos então que o segundo termo de (1.18) possui magnitude de $\mathcal{O}(1)$, sendo desprezível em relação ao primeiro, de ordem $\mathcal{O}(\gamma^{-1})$, o que nos dá a equação de propagação da perturbação,

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = 0. \quad (1.21)$$

A equação (1.19) nos diz que a região por onde as ondas estão passando possui curvatura devido ao próprio tensor energia-momento efetivo $t_{\mu\nu}$ das ondas (Isaacson, 1968b),

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = -\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle \equiv -\frac{8\pi G}{c^4} t_{\mu\nu} \quad (\text{no vácuo}). \quad (1.22)$$

Antes de concluirmos esta seção, vamos também calcular o escalar de Ricci e o tensor de Einstein perturbados até segunda ordem, pois iremos usá-los mais a frente. Temos que

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = (\tilde{g}^{\mu\nu} - \gamma^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\alpha} \gamma_{\alpha}^{\nu})(\tilde{R}_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)}) \\ &= \tilde{R} + (\tilde{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(1)} - \gamma^{\mu\nu} \tilde{R}_{\mu\nu}) + (\tilde{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(2)} - \gamma^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(1)} + \gamma^{\mu\alpha} \gamma_{\alpha}^{\nu} \tilde{R}_{\mu\nu}) \\ &\equiv \tilde{R} + R^{(1)} + R^{(2)}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

e

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \tilde{R}_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2} (\tilde{g}_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}) (\tilde{R} + R^{(1)} + R^{(2)}) \\ &= \left(\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{R} \right) + \left(R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} R^{(1)} - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \tilde{R} \right) + \left(R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} R^{(2)} - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} R^{(1)} \right) \\ &\equiv \tilde{G}_{\mu\nu} + G_{\mu\nu}^{(1)} + G_{\mu\nu}^{(2)}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

1.2 Transformação de calibre

Nesta seção veremos como que transformações de calibre afetam as equações de campo. Se considerarmos em um mesmo ponto $\mathcal{P}$ uma transformação infinitesimal de coordenadas x^μ

$$x^\mu(\mathcal{P}) \rightarrow x'^\mu(\mathcal{P}) = x^\mu(\mathcal{P}) + \xi^\mu(\mathcal{P}), \quad (1.25)$$

onde ξ^μ é um vetor arbitrário e $|\xi^\mu| \ll 1$, teremos a possibilidade de reduzir o número de graus de liberdade de $\gamma_{\mu\nu}$ e simplificar as equações de campo. Da lei de transformação dos tensores sabemos que

$$g'_{\mu\nu}(x'(\mathcal{P})) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x(\mathcal{P})). \quad (1.26)$$

Usando (1.25) em (1.26),

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu}(x') &= \frac{\partial(x'^\alpha - \xi^\alpha)}{\partial x'^\mu} \frac{\partial(x'^\beta - \xi^\beta)}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x) \\ &= \left(\delta^\alpha_\mu - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x'^\mu} \right) \left(\delta^\beta_\nu - \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x'^\nu} \right) g_{\alpha\beta} \\ &= \left(\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu - \delta^\alpha_\mu \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} - \delta^\beta_\nu \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} + \mathcal{O}(\xi^2) \right) g_{\alpha\beta} \\ &\approx g_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\beta} \partial_\nu \xi^\beta - g_{\alpha\nu} \partial_\mu \xi^\alpha, \end{aligned} \quad (1.27)$$

em que fizemos uso da regra da cadeia da segunda para a terceira linha para substituir $\partial \xi^\alpha / \partial x'^\mu$ por $\partial \xi^\alpha / \partial x^\mu$. Realizando uma expansão linear em $g'_{\mu\nu}(x')$ para que possamos obter uma relação dependente apenas de x ,

$$g'_{\mu\nu}(x') = g'_{\mu\nu}(x + \xi) \approx g'_{\mu\nu}(x) + \xi^\sigma \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}. \quad (1.28)$$

Substituindo o lado esquerdo de (1.27) por (1.28),

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu}(x) + \xi^\sigma \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} &= g_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\sigma} \partial_\nu \xi^\sigma - g_{\sigma\nu} \partial_\mu \xi^\sigma \\ \Rightarrow g'_{\mu\nu}(x) &= g_{\mu\nu}(x) - \xi^\sigma \partial_\sigma g'_{\mu\nu} - g_{\mu\sigma} \partial_\nu \xi^\sigma - g_{\sigma\nu} \partial_\mu \xi^\sigma. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Da relação acima encontrada, note que $g'(x)$ e $g(x)$ são diferentes por um fator de $\mathcal{O}(\xi)$ e, portanto, $\xi^\sigma \partial g'_{\mu\nu} / \partial x^\sigma$ difere de $\xi^\sigma \partial g_{\mu\nu} / \partial x^\sigma$ por um termo de $\mathcal{O}(\xi^2)$. Dito isso, podemos trocar $\xi^\sigma \partial g'_{\mu\nu} / \partial x^\sigma$ por $\xi^\sigma \partial g_{\mu\nu} / \partial x^\sigma$ em (1.29) (Landau; Lifshitz, 1975),

$$g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) - \xi^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu} - g_{\mu\sigma} \partial_\nu \xi^\sigma - g_{\sigma\nu} \partial_\mu \xi^\sigma. \quad (1.30)$$

O resultado (1.30) é a transformação de calibre da métrica dada a transformação de coordenadas (1.25). É fácil verificar que o resultado acima pode ser escrito na forma

$$g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) - \nabla_\mu \xi_\nu - \nabla_\nu \xi_\mu. \quad (1.31)$$

Se (1.25) for uma isometria, então $\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0$ é a equação de Killing e, portanto, determina os vetores que deixam a métrica invariante (Wald, 1984; Carroll, 2004). Usando (1.1) em (1.30),

$$\begin{aligned} \tilde{g}'_{\mu\nu} + \gamma'_{\mu\nu} &= \tilde{g}_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} - \xi^\sigma \partial_\sigma (\tilde{g}_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}) - (\tilde{g}_{\mu\sigma} + \gamma_{\mu\sigma}) \partial_\nu \xi^\sigma \\ &\quad - (\tilde{g}_{\sigma\nu} + \gamma_{\sigma\nu}) \partial_\mu \xi^\sigma \\ \gamma'_{\mu\nu}(x) &= \gamma_{\mu\nu}(x) - \xi^\sigma \partial_\sigma \tilde{g}_{\mu\nu} - \tilde{g}_{\mu\sigma} \partial_\nu \xi^\sigma - \tilde{g}_{\sigma\nu} \partial_\mu \xi^\sigma, \end{aligned} \quad (1.32)$$

onde usamos que $\tilde{g}'_{\mu\nu}(x) = \tilde{g}_{\mu\nu}(x)$. Outra forma de escrever o resultado acima é utilizando derivadas covariantes:

$$\begin{aligned} \gamma'_{\mu\nu} &= \gamma_{\mu\nu} - \xi^\sigma (\tilde{\Gamma}_{\sigma\mu}^\lambda \tilde{g}_{\lambda\nu} + \tilde{\Gamma}_{\sigma\nu}^\lambda \tilde{g}_{\mu\lambda}) - \tilde{g}_{\mu\beta} (\tilde{\nabla}_\nu \xi^\beta - \tilde{\Gamma}_{\nu\lambda}^\beta \xi^\lambda) \\ &\quad - \tilde{g}_{\alpha\nu} (\tilde{\nabla}_\mu \xi^\alpha - \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\alpha \xi^\lambda). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Com isso, obtemos que $\gamma_{\mu\nu}$ se transforma como

$$\gamma_{\mu\nu} \rightarrow \gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \tilde{\nabla}_\mu \xi_\nu - \tilde{\nabla}_\nu \xi_\mu. \quad (1.34)$$

Multiplicando por $\tilde{g}^{\mu\nu}$ dos dois lados, temos que a transformação do traço γ é

$$\gamma \rightarrow \gamma' = \gamma - 2\tilde{\nabla}_\alpha \xi^\alpha. \quad (1.35)$$

Vamos checar como $R_{\mu\nu}^{(1)}$ se comporta com (1.34). Sua transformação é

$$R_{\mu\nu}^{(1)} \rightarrow R_{\mu\nu}'^{(1)} = \frac{1}{2} \left[\tilde{\nabla}^\sigma \tilde{\nabla}_\mu \gamma'_{\nu\sigma} + \tilde{\nabla}^\sigma \tilde{\nabla}_\nu \gamma'_{\mu\sigma} - \tilde{\nabla}^\sigma \tilde{\nabla}_\sigma \gamma'_{\mu\nu} - \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\mu \gamma' \right]. \quad (1.36)$$

Após substituir (1.34) e (1.35) na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}'^{(1)} &= R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2} \left[\tilde{\nabla}^\sigma \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu \xi_\sigma + \tilde{\nabla}^\sigma \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\mu \xi_\sigma + \tilde{\nabla}^\sigma \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\sigma \xi_\nu - \tilde{\nabla}^\sigma \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\mu \xi_\nu \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\nabla}^\sigma \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\sigma \xi_\mu - \tilde{\nabla}^\sigma \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\nu \xi_\mu - 2\tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\sigma \xi^\sigma \right] \\ &= R_{\mu\nu}^{(1)} + \xi^\lambda \tilde{\nabla}^\sigma \tilde{R}_{\lambda\mu\nu\sigma} - \xi^\lambda \tilde{\nabla}_\mu \tilde{R}_{\nu\lambda} - \tilde{R}_{\lambda\mu} \tilde{\nabla}_\nu \xi^\lambda - \tilde{R}_{\lambda\nu} \tilde{\nabla}_\mu \xi^\lambda, \end{aligned} \quad (1.37)$$

onde fizemos uso da propriedade $\tilde{R}_{\lambda[\sigma\mu\nu]} = 0$ e dos comutadores novamente. Contraindo a identidade de Bianchi

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{R}_{\rho\lambda\mu\nu} + \tilde{\nabla}_\nu \tilde{R}_{\rho\lambda\sigma\mu} + \tilde{\nabla}_\mu \tilde{R}_{\rho\lambda\nu\sigma} &= 0 \\ \tilde{g}^{\rho\sigma} (\tilde{\nabla}_\sigma \tilde{R}_{\rho\lambda\mu\nu} + \tilde{\nabla}_\nu \tilde{R}_{\rho\lambda\sigma\mu} + \tilde{\nabla}_\mu \tilde{R}_{\rho\lambda\nu\sigma}) &= 0 \\ \tilde{\nabla}_{[\mu} \tilde{R}_{\nu]\lambda} &= \frac{1}{2} \tilde{\nabla}^\sigma \tilde{R}_{\sigma\lambda\mu\nu}, \end{aligned} \quad (1.38)$$

podemos escrever a equação (1.37) como

$$R_{\mu\nu}'^{(1)} = R_{\mu\nu}^{(1)} - \xi^\lambda \tilde{\nabla}_\lambda \tilde{R}_{\mu\nu} - \tilde{R}_{\mu\lambda} \tilde{\nabla}_\nu \xi^\lambda - \tilde{R}_{\nu\lambda} \tilde{\nabla}_\mu \xi^\lambda = R_{\mu\nu}^{(1)} - \mathcal{L}_\xi \tilde{R}_{\mu\nu}, \quad (1.39)$$

onde $\mathcal{L}_\xi$ denota a derivada de Lie na direção de ξ^μ (Wald, 1984). Como temos que $|\xi_\mu| \ll 1$ e $|\gamma_{\mu\nu}| \ll 1$, nos restringimos à condição $|\tilde{\nabla}_\mu \xi_\nu| \lesssim |\gamma_{\mu\nu}|$. Temos que $\tilde{\nabla}_\mu \xi_\nu = \partial_\mu \xi_\nu - \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \xi_\lambda \sim$

$\partial\xi + \xi$, onde definimos $\xi \equiv \mathcal{O}(|\xi_\mu|)$ e usamos que $\Gamma \sim \partial\tilde{g} \equiv \mathcal{O}(1)$. Disso, a condição $|\tilde{\nabla}_\mu \xi_\nu| \lesssim |\gamma_{\mu\nu}|$ nos dá que $\partial\xi \lesssim \varepsilon$ e $\xi \lesssim \varepsilon$, lembrando que $\varepsilon \equiv \mathcal{O}(|\gamma_{\mu\nu}|)$. Portanto, se o espaço-tempo de fundo for curvo, $R_{\mu\nu}^{(1)}$ é invariante por transformação de calibre a menos de um erro pequeno de ordem $|\mathcal{L}_\xi \tilde{R}_{\mu\nu}| \equiv \mathcal{O}(\xi)$ (Isaacson, 1968a; Maggiore, 2007).

Introduzimos agora a perturbação de traço-reverso ("*trace-reversed perturbation*") $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$, definida por

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} \equiv \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\gamma, \quad (1.40)$$

onde $\gamma = \tilde{g}^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu}$. É fácil ver que $\bar{\gamma} = -\gamma$, então temos que $\gamma_{\mu\nu}$ em termos de $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ é

$$\gamma_{\mu\nu} = \bar{\gamma}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\bar{\gamma}. \quad (1.41)$$

Usando que $\bar{\gamma} = -\gamma$ em (1.35), obtemos

$$\bar{\gamma}' = \bar{\gamma} + 2\tilde{\nabla}_\alpha \xi^\alpha. \quad (1.42)$$

Substituindo (1.41) e (1.42) em (1.34), obtemos a transformação de calibre de $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}'_{\mu\nu}\bar{\gamma}' &= \bar{\gamma}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\bar{\gamma} - \tilde{\nabla}_\mu \xi_\nu - \tilde{\nabla}_\nu \xi_\mu \\ \Rightarrow \bar{\gamma}'_{\mu\nu} &= \bar{\gamma}_{\mu\nu} + \tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{\nabla}_\alpha \xi^\alpha - \tilde{\nabla}_\mu \xi_\nu - \tilde{\nabla}_\nu \xi_\mu. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Aplicando $\tilde{\nabla}^\nu$ dos dois lados,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}^\nu \bar{\gamma}'_{\mu\nu} &= \tilde{\nabla}^\nu \bar{\gamma}_{\mu\nu} + \tilde{\nabla}^\nu (\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{\nabla}_\alpha \xi^\alpha) - \tilde{\nabla}^\nu \tilde{\nabla}_\mu \xi_\nu - \tilde{\nabla}^\nu \tilde{\nabla}_\nu \xi_\mu \\ &= \tilde{\nabla}^\nu \bar{\gamma}_{\mu\nu} + \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\alpha \xi^\alpha - \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\mu \xi^\nu - \tilde{\nabla}^\nu \tilde{\nabla}_\nu \xi_\mu \\ &= \tilde{\nabla}^\nu \bar{\gamma}_{\mu\nu} - [\tilde{\nabla}_\alpha, \tilde{\nabla}_\mu] \xi^\alpha - \tilde{\nabla}^\nu \tilde{\nabla}_\nu \xi_\mu \\ &= \tilde{\nabla}^\nu \bar{\gamma}_{\mu\nu} - \tilde{R}_{\alpha\mu} \xi^\alpha - \tilde{\nabla}^\nu \tilde{\nabla}_\nu \xi_\mu, \end{aligned} \quad (1.44)$$

onde usamos a relação dos comutadores (Carroll, 2004)

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]T^\rho = R^\rho_{\lambda\mu\nu}T^\lambda. \quad (1.45)$$

Escolhendo ξ^μ para satisfazer³

$$\tilde{R}_{\alpha\mu} \xi^\alpha + \tilde{\nabla}^\alpha \tilde{\nabla}_\alpha \xi_\mu = \tilde{\nabla}^\nu \bar{\gamma}_{\mu\nu}, \quad (1.46)$$

obtemos o calibre de Lorenz $\tilde{\nabla}^\nu \bar{\gamma}'_{\mu\nu} = 0$ (Wald, 1984) ou, descartando a linha “ $'$ ”,

$$\tilde{\nabla}^\nu \bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0. \quad (1.47)$$

³ Para ser mais específico, a equação (1.46) é um sistema hiperbólico linear e diagonal de segunda ordem e possui solução única dadas condições iniciais em uma hipersuperfície $\Sigma \in (M, g_{\mu\nu})$, onde $(M, g_{\mu\nu})$ é um espaço-tempo globalmente hiperbólico. Como não queremos entrar em mais detalhes sobre isto, pois fugiria demais do escopo deste trabalho, para o leitor que quiser saber de mais informações, veja o teorema 10.1.2 de (Wald, 1984) e referências lá citadas.

O calibre de Lorenz não fixa completamente a escolha de sistema de coordenadas já que podemos fazer outra transformação $x^\mu \rightarrow x^\mu + \zeta^\mu$ que continua a satisfazer $\tilde{\nabla}^\nu \gamma_{\mu\nu} = 0$ (Wald, 1984). Da nova transformação obtém-se de novo a relação

$$\tilde{\nabla}^\nu \bar{\gamma}_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{\nabla}^\nu \bar{\gamma}_{\mu\nu} - \tilde{R}_{\alpha\mu} \zeta^\alpha - \tilde{\nabla}^\nu \tilde{\nabla}_\nu \zeta_\mu, \quad (1.48)$$

com ζ^μ sendo solução de

$$\tilde{R}_{\alpha\mu} \zeta^\alpha + \tilde{\nabla}^\nu \tilde{\nabla}_\nu \zeta_\mu = 0. \quad (1.49)$$

Portanto, a nova transformação de coordenadas satisfaz $\tilde{\nabla}^\nu \gamma_{\mu\nu} = 0$.

Escrevendo $R_{\mu\nu}^{(1)}$ em função de $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\mu (\bar{\gamma}_\nu{}^\sigma - \frac{1}{2} \delta_\nu{}^\sigma \bar{\gamma}) + \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\nu (\bar{\gamma}_\mu{}^\sigma - \frac{1}{2} \delta_\mu{}^\sigma \bar{\gamma}) - \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}^\sigma (\bar{\gamma}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \bar{\gamma}) - \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\mu (-\bar{\gamma}) &= 0 \\ \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\mu \bar{\gamma}_\nu{}^\sigma + \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\nu \bar{\gamma}_\mu{}^\sigma - \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}^\sigma \bar{\gamma}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{\nabla}^\sigma \tilde{\nabla}_\sigma \bar{\gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Multiplicando pela inversa da métrica de fundo,

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{\mu\nu} (\tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\mu \bar{\gamma}_\nu{}^\sigma + \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\nu \bar{\gamma}_\mu{}^\sigma - \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}^\sigma \bar{\gamma}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{\nabla}^\sigma \tilde{\nabla}_\sigma \bar{\gamma}) &= 0 \\ \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\mu \bar{\gamma}^{\mu\sigma} + \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\nu \bar{\gamma}^{\nu\sigma} + 2 \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}^\sigma \bar{\gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Aplicando o calibre de Lorenz, obtemos a equação de propagação,

$$\tilde{\nabla}^\sigma \tilde{\nabla}_\sigma \bar{\gamma} = 0, \quad (1.52)$$

Temos que a transformação de calibre do traço $\bar{\gamma}$ é,

$$\bar{\gamma} \rightarrow \bar{\gamma} + 2 \tilde{\nabla}_\alpha \zeta^\alpha. \quad (1.53)$$

Podemos fazer $\bar{\gamma} = 0$ escolhendo

$$\bar{\gamma} = -2 \tilde{\nabla}_\alpha \zeta^\alpha, \quad (1.54)$$

e com a equação (1.52) propagamos a solução $\bar{\gamma} = 0$ para todo o espaço-tempo (Wald, 1984). Portanto, para concluir, no vácuo conseguimos o conjunto de condições

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}^\nu \gamma_{\mu\nu} &= 0, \\ \gamma &= 0, \end{aligned} \quad (1.55)$$

conhecido como calibre transversal de traço nulo (“*transverse-traceless gauge*”), ou calibre TT.

1.3 Equações de Campo Linearizadas

Vimos que ao expandir a métrica completa em uma métrica de fundo mais perturbação, fomos capazes de escrever o tensor de Einstein em uma parte para o campo de fundo e

outra parte linear nas perturbações. Analogamente, o tensor energia-momento pode ser decomposto da mesma forma: $T_{\mu\nu} = \tilde{T}_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(1)}$ (Maggiore, 2007; Mukhanov, 2005; Dodelson; Schmidt, 2024). Consequentemente, ao escrever as equações de campo de Einstein obtemos duas expressões, uma para o fundo e outra para as perturbações, isto é,

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \tilde{T}_{\mu\nu}, \quad (1.56)$$

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{(1)}. \quad (1.57)$$

Desenvolvendo o lado esquerdo da equação (1.57), temos

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^{(1)} &= R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} R^{(1)} - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} R \\ &= \frac{1}{2} (\tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\mu \gamma_\nu^\sigma + \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\nu \gamma_\mu^\sigma - \tilde{\nabla}^\sigma \tilde{\nabla}_\sigma \gamma_{\mu\nu} - \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\mu \gamma) \\ &\quad - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} (\tilde{g}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}^{(1)} - \gamma^{\alpha\beta} \tilde{R}_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \tilde{R} \\ &= \frac{1}{2} (\tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\mu \gamma_\nu^\sigma + \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\nu \gamma_\mu^\sigma - \tilde{\nabla}^\sigma \tilde{\nabla}_\sigma \gamma_{\mu\nu} - \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\mu \gamma) \\ &\quad - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} (\tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\alpha \gamma^{\sigma\alpha} - \tilde{\nabla}^\sigma \tilde{\nabla}_\sigma \gamma - \gamma^{\alpha\beta} \tilde{R}_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \tilde{R}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Após comutar as derivadas dos dois primeiros termos do primeiro parêntese, trocar para a perturbação de traço reverso, $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$, e aplicar o calibre de Lorenz (1.47), obtemos que (1.57) é

$$-2\tilde{R}^\lambda_{\mu\sigma\nu} \bar{\gamma}_\lambda^\sigma + \tilde{R}_{\lambda\mu} \bar{\gamma}_\nu^\lambda + \tilde{R}_{\lambda\nu} \bar{\gamma}_\mu^\lambda - \tilde{\nabla}^\sigma \tilde{\nabla}_\sigma \bar{\gamma}_{\mu\nu} + \tilde{g}_{\mu\nu} \bar{\gamma}^{\alpha\beta} \tilde{R}_{\alpha\beta} - \bar{\gamma}_{\mu\nu} \tilde{R} = \frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{(1)}. \quad (1.59)$$

A equação (1.59) é a equação das perturbações em espaços-tempos curvos (Maggiore, 2007; Jokela; Kajantie; Sarkkinen, 2022; Caprini; Figueroa, 2018). No geral, a solução dessa equação pode ser bem complicada, mas como veremos mais adiante, ela assume uma forma simples para o caso da métrica de Friedmann. Se a fonte não estiver presente e $\tilde{g}_{\mu\nu}$ for uma solução de vácuo, i.e. $T_{\mu\nu}^{(1)} = 0$ e $\tilde{R}_{\mu\nu} = 0$, a equação (1.59) é simplificada para (Wald, 1984; Maggiore, 2007)

$$2\tilde{R}_{\mu\sigma\nu\lambda} \bar{\gamma}^{\sigma\lambda} + \tilde{\nabla}^\sigma \tilde{\nabla}_\sigma \bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0. \quad (1.60)$$

Note que se a métrica de fundo for Minkowski, i.e. $\tilde{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, (1.60) é a clássica equação de onda encontrada por Einstein (Einstein, 1916),

$$\partial^\sigma \partial_\sigma \bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0. \quad (1.61)$$

1.4 Tensor energia-momento das ondas gravitacionais

Radiação gravitacional, assim como a eletromagnética, carrega energia consigo para longe de suas fontes. Como vimos na primeira seção (e também discutido em (Isaacson, 1968a; Isaacson, 1968b; Misner; Wheeler, 1973; Maggiore, 2007)), em uma região que contém

apenas OGs, a curvatura que acontece na geometria de fundo daquela região é devido à densidade de energia dessas ondas. Esse fenômeno é não-linear (chamado em inglês de “*backreaction*”), e aparece quando perturbamos as equações de campo até segunda ordem. Dessa forma, podemos encontrar o tensor energia-momento (TEM) efetivo das ondas utilizando a equação (1.19).

Como não conseguimos definir o TEM efetivo em uma escala menor que um comprimento de onda, de forma que não é possível descrever o quanto de energia e momento há em uma crista ou vale, um jeito de contornar isso é considerar uma região macroscópica suficientemente grande para conter vários comprimentos de onda, porém que seja muito menor que o espaço-tempo de fundo, e, então, fazer uma média sobre esses comprimentos, o que nos permite calcular a energia e momento totais dessas ondas. Esse processo remove termos oscilatórios de alta frequência e mantém apenas os de baixa frequência, que são os relevantes para a curvatura do espaço-tempo de fundo. Neste trabalho seguiremos o caminho padrão adotado nos textos base (Misner; Wheeler, 1973; Carroll, 2004) e (Maggiore, 2007). O método foi desenvolvido por Isaacson e pode ser encontrado em (Isaacson, 1968a; Isaacson, 1968b).

Primeiro, reescrevemos a equação (1.19) como

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{R} = \frac{8\pi G}{c^4}t_{\mu\nu}, \quad (1.62)$$

em que

$$t_{\mu\nu} = -\frac{c^4}{8\pi G}\langle G_{\mu\nu}^{(2)} \rangle, \quad (1.63)$$

e $\langle \dots \rangle^4$ denota o processo de média. O termo $G_{\mu\nu}^{(2)}$ é

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^{(2)} &= R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}R^{(2)} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}R^{(1)} \\ &= R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{g}^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}^{(2)} - \gamma^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}^{(1)} + \gamma^{\alpha\gamma}\gamma_{\gamma}^{\beta}\tilde{R}_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}(\tilde{g}^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}^{(1)} - \gamma^{\alpha\beta}\tilde{R}_{\alpha\beta}) \\ &= R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{g}^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}^{(2)}, \end{aligned} \quad (1.64)$$

onde usamos a equação de propagação $R_{\mu\nu}^{(1)} = 0$ e que $\tilde{R}_{\mu\nu} \sim \varepsilon^2/\lambda^2$, tornando os termos $\tilde{g}_{\mu\nu}\gamma^{\alpha\gamma}\gamma_{\gamma}^{\beta}\tilde{R}_{\alpha\beta}$ e $\gamma_{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta}\tilde{R}_{\alpha\beta}$ desprezíveis.

⁴ Mais detalhes sobre a média podem ser encontradas no apêndice B e também em (Brill; Hartle, 1964), (Isaacson, 1968b) e (Misner; Wheeler, 1973).

Escrevendo $R_{\mu\nu}^{(2)}$ e $\tilde{g}^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}^{(2)}$ em termos de $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$, temos

$$\begin{aligned}
 R_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{2} & \left[\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_\mu \bar{\gamma}^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\nu \bar{\gamma}_{\alpha\beta} + \bar{\gamma}^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\mu \bar{\gamma}_{\alpha\beta} + \bar{\gamma}^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \bar{\gamma}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \bar{\gamma}^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \bar{\gamma} \right. \\
 & - \bar{\gamma}^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\mu \bar{\gamma}_{\nu\beta} + \frac{1}{2} \bar{\gamma}_\nu^\alpha \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\mu \bar{\gamma} - \bar{\gamma}^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\nu \bar{\gamma}_{\mu\beta} + \frac{1}{2} \bar{\gamma}_\mu^\alpha \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\nu \bar{\gamma} \\
 & - \frac{1}{2} \bar{\gamma} \tilde{\nabla}^\alpha \tilde{\nabla}_\alpha \bar{\gamma}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \bar{\gamma} \tilde{\nabla}^\alpha \tilde{\nabla}_\mu \bar{\gamma}_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} \bar{\gamma} \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\mu \bar{\gamma} + \frac{1}{2} \bar{\gamma} \tilde{\nabla}^\alpha \tilde{\nabla}_\nu \bar{\gamma}_{\mu\alpha} \\
 & - \frac{1}{4} \bar{\gamma} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu \bar{\gamma} + \tilde{\nabla}^\beta \bar{\gamma}_\nu^\alpha \tilde{\nabla}_\beta \bar{\gamma}_{\mu\alpha} - \tilde{\nabla}^\beta \bar{\gamma}_{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\beta \bar{\gamma} - \tilde{\nabla}^\beta \bar{\gamma}_\nu^\alpha \tilde{\nabla}_\alpha \bar{\gamma}_{\mu\beta} \\
 & + \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_\mu \bar{\gamma}_\nu^\alpha \tilde{\nabla}_\alpha \bar{\gamma} + \frac{1}{4} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{\nabla}^\beta \bar{\gamma} \tilde{\nabla}_\beta \bar{\gamma} + \frac{1}{2} \tilde{\nabla}^\beta \bar{\gamma} \tilde{\nabla}_\nu \bar{\gamma}_{\mu\beta} - \frac{1}{4} \tilde{\nabla}_\mu \bar{\gamma} \tilde{\nabla}_\nu \bar{\gamma} \\
 & - \tilde{\nabla}_\alpha \bar{\gamma}^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\mu \bar{\gamma}_{\nu\beta} + \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_\alpha \bar{\gamma}_\nu^\alpha \tilde{\nabla}_\mu \bar{\gamma} - \tilde{\nabla}_\alpha \bar{\gamma}^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\nu \bar{\gamma}_{\mu\beta} + \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_\alpha \bar{\gamma}_\mu^\alpha \tilde{\nabla}_\nu \bar{\gamma} \\
 & \left. + \tilde{\nabla}_\alpha \bar{\gamma}^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\beta \bar{\gamma}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\alpha \bar{\gamma}^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\beta \bar{\gamma} + \frac{1}{4} \tilde{g}_{\mu\nu} \bar{\gamma} \tilde{\nabla}^\alpha \tilde{\nabla}_\alpha \bar{\gamma} \right]
 \end{aligned} \tag{1.65}$$

e

$$\begin{aligned}
 \tilde{g}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}^{(2)} = \frac{1}{2} & \left[\frac{1}{2} \tilde{\nabla}^\sigma \bar{\gamma}^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\sigma \bar{\gamma}_{\alpha\beta} + \bar{\gamma}^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}^\sigma \tilde{\nabla}_\sigma \bar{\gamma}_{\alpha\beta} - 2 \bar{\gamma}^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}^\sigma \bar{\gamma}_{\sigma\beta} + \bar{\gamma} \tilde{\nabla}^\alpha \tilde{\nabla}^\beta \bar{\gamma}_{\alpha\beta} \right. \\
 & + \tilde{\nabla}^\beta \bar{\gamma}^{\sigma\alpha} \tilde{\nabla}_\beta \bar{\gamma}_{\sigma\alpha} - \tilde{\nabla}^\beta \bar{\gamma}^{\sigma\alpha} \tilde{\nabla}_\alpha \bar{\gamma}_{\sigma\beta} + \tilde{\nabla}^\alpha \bar{\gamma} \tilde{\nabla}^\beta \bar{\gamma}_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} \tilde{\nabla}^\alpha \bar{\gamma} \tilde{\nabla}_\alpha \bar{\gamma} \\
 & \left. - 2 \tilde{\nabla}_\alpha \bar{\gamma}^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}^\sigma \bar{\gamma}_{\sigma\beta} \right].
 \end{aligned} \tag{1.66}$$

Sob a operação de média $\langle \dots \rangle$, há três propriedades importantes de que faremos uso:

- Derivadas covariantes comutam, e.g., $\langle \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \gamma_{\mu\nu} \rangle = \langle \tilde{\nabla}_\beta \tilde{\nabla}_\alpha \gamma_{\mu\nu} \rangle$;
- Divergentes, e.g., $\langle \tilde{\nabla}^\alpha \tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\nu\alpha} \rangle$, são reduzidos a $\mathcal{O}(\epsilon)$ e podem ser desprezados;
- Integração por partes faz com que as derivadas covariantes ‘pulem’ de um termo para outro, e.g., $\langle \tilde{\nabla}_\mu \gamma^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\nu \gamma_{\alpha\beta} \rangle = -\langle \gamma^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \gamma_{\mu\nu} \rangle$.

A justificativa para tais propriedades foram colocadas no apêndice B. Para maiores detalhes ver, e.g., (Arnowitt; Deser; Misner, 1961; Brill; Hartle, 1964; Isaacson, 1968b; Zalaletdinov, 1992).

Com essas três propriedades e a equação de propagação (1.21), obtemos que

$$\langle \tilde{g}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}^{(2)} \rangle = 0 \tag{1.67}$$

e

$$\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = -\frac{1}{4} \left[\langle \tilde{\nabla}_\mu \bar{\gamma}^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\nu \bar{\gamma}_{\alpha\beta} \rangle - \frac{1}{2} \langle \tilde{\nabla}_\mu \bar{\gamma} \tilde{\nabla}_\nu \bar{\gamma} \rangle - 2 \langle \tilde{\nabla}_\alpha \bar{\gamma}^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\mu \bar{\gamma}_{\nu\beta} \rangle \right]. \tag{1.68}$$

Portanto, o TEM efetivo das ondas gravitacionais é

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{32\pi G} \left[\langle \tilde{\nabla}_\mu \bar{\gamma}^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\nu \bar{\gamma}_{\alpha\beta} \rangle - \frac{1}{2} \langle \tilde{\nabla}_\mu \bar{\gamma} \tilde{\nabla}_\nu \bar{\gamma} \rangle - 2 \langle \tilde{\nabla}_\alpha \bar{\gamma}^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_{(\mu} \bar{\gamma}_{\nu)\beta} \rangle \right]. \tag{1.69}$$

Adotando o calibre TT, então $\gamma = 0$ e $\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}$, obtemos a fórmula de Isaacson (Isaacson, 1968b)

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle \tilde{\nabla}_\mu \gamma^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\nu \gamma_{\alpha\beta} \rangle. \tag{1.70}$$

Para o leitor interessado, outras formas de obter o mesmo resultado podem ser encontradas em (Isaacson, 1968b) e (Saffer; Yunes; Yagi, 2018).

2 Ondas Gravitacionais na Cosmologia

Depois da descoberta de Edwin Hubble ([Hubble, 1929](#)) de que galáxias muito distantes de nós estão se afastando cada vez mais, descartando a ideia de que o universo é estático, o estudo de objetos em grandes escalas e do cosmos, o que chamamos de Cosmologia, passou a ser uma área ativa e fundamental da Física atual.

Muitas das vezes as fontes de ondas gravitacionais estarão distantes o suficiente da Terra para que a expansão do Universo as afetem. Portanto, é importante compreendermos como que essas ondas se comportam nesse cenário. Na primeira seção deste capítulo fazemos uma breve revisão dos conceitos básicos de cosmologia. Na seção seguinte aplicamos a decomposição escalar-vetor-tensor às perturbações. A terceira seção é dedicada às ondas gravitacionais no espaço-tempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) e à derivação da fórmula de quadrupolo. Por último, na quarta seção, aplicamos o resultado encontrado a um sistema de dois corpos não-relativístico.

2.1 Uma Breve Revisão de Cosmologia

Nesta seção apresentamos os elementos necessários de Cosmologia, no contexto do modelo padrão, para que possamos aplicar o que vimos no capítulo anterior e compreender como o fenômeno de ondas gravitacionais pode ser usado como sonda cosmológica.

A cosmologia moderna tem como um de seus pilares o Princípio Cosmológico ([Lemaître, 1979](#)) que diz que, em grandes escalas (escalas maiores que $200Mpc$), o universo e sua distribuição de matéria e energia é espacialmente homogêneo e isotrópico. Um dos fenômenos que confirma esse princípio é a radiação cósmica de fundo (*cosmic background microwave* - CMB) ([Akrami et al., 2020](#)), os fótons de longo comprimento de onda mais antigos.

Neste cenário, o espaço-tempo é descrito pela métrica de Friedmann (ou FLRW)

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.1)$$

onde a função $a(t)$ é o fator de escala, determinado a partir das equações de Einstein

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \tilde{T}_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

possivelmente com uma constante cosmológica Λ^1 que pode ser incluída em $\tilde{T}_{\mu\nu}$ ([Weinberg, 2008](#)). Muitas vezes é conveniente também trabalhar com o tempo conforme η ao invés do

¹ A constante cosmológica foi incluída no chamado modelo padrão no fim da década de noventa com a indicação da expansão acelerada do universo a partir dos dados de supernovas do tipo Ia.

tempo t , definido por

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.3)$$

Dessa forma, escrevemos a métrica de Friedmann como

$$ds^2 = a^2(\eta)(-c^2 d\eta^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j). \quad (2.4)$$

O conteúdo material e energético do universo é descrito pelo tensor energia-momento de um fluido perfeito,

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = (\tilde{\rho} + \tilde{p})u_\mu u_\nu + \tilde{p}\tilde{g}_{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

sendo $\tilde{\rho}$ a densidade e $\tilde{p}$ a pressão do fluido cósmico e u^μ a quadrivelocidade. Escolhendo o referencial do próprio fluido, i.e. $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$, as equações de campo fornecem as equações de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\tilde{\rho}(t), \quad (2.6)$$

e

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3}(\tilde{\rho}(t) + 3\tilde{p}(t)), \quad (2.7)$$

onde $\dot{}$ representa a derivada em relação ao tempo cósmico t . De (2.6) define-se a função de Hubble, que fornece justamente a taxa de expansão do universo,

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (2.8)$$

Analogamente, o fator de Hubble conforme é definido como

$$\mathcal{H}(\eta) \equiv \frac{a'(\eta)}{a(\eta)}, \quad (2.9)$$

onde $'$ denotada derivada em relação a η .

O fator de escala se comporta de forma diferente dependendo da escolha de fluido utilizada para descrever o universo. Se tivermos apenas radiação dominando, $a \propto \sqrt{t}$; para matéria, $a \propto t^{2/3}$; na ausência dos dois, i.e., para um universo com apenas uma constante cosmológica Λ , então $a \propto \exp(Ht)$, onde $H = \sqrt{8\pi G\tilde{\rho}}/3$ é constante. O modelo atual da Cosmologia descreve o Universo como constituído por radiação, matéria e constante cosmológica, o modelo Λ CDM, com $H(t)$ dado por (Weinberg, 2008; Dodelson; Schmidt, 2024)

$$H(t) = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \left[\Omega_\Lambda + \Omega_R \left(\frac{a(t_0)}{a(t)} \right)^4 + \Omega_M \left(\frac{a(t_0)}{a(t)} \right)^3 \right], \quad (2.10)$$

onde Ω_Λ , Ω_R e Ω_M são os parâmetros de densidade² da constante cosmológica, radiação e matéria, respectivamente, e estão sujeitos ao vínculo $\Omega_\Lambda + \Omega_R + \Omega_M = 1$ para um universo

² O parâmetro de densidade Ω é a razão entre a densidade observada e a densidade crítica, $\Omega = \tilde{\rho}/\tilde{\rho}_{crit}$, onde $\tilde{\rho}_{crit} = 3H^2/8\pi G$. Para mais informações ver, e.g., (Lemaître, 1979), (Dodelson; Schmidt, 2024) e (Weinberg, 2008).

plano (Weinberg, 2008; Dodelson; Schmidt, 2024). H_0 é a constante de Hubble avaliada no tempo presente $t = t_0$,

$$H_0 = \left. \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right|_{t=t_0}. \quad (2.11)$$

Outro aspecto importante que surge da métrica de Friedmann é que, devido ao fator de escala, distâncias passam a ter significados diferentes. Em coordenadas esféricas, (2.1) é

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.12)$$

Suponha que tenhamos, no tempo inicial $t = t_0$, dois corpos em r_1 e r_2 , respectivamente, mas com mesmas coordenadas θ e φ . Então, a distância $r = r_2 - r_1$ entre os dois é a mesma para $t = t_1 > t_0$. Dizemos que esses dois pontos são comóveis e que a distância $r_2 - r_1$ é a distância comóvel entre os pontos. Essa é uma consequência direta da métrica de Friedmann e do princípio cosmológico: todas as distâncias entre pontos do universo expandem junto com as próprias coordenadas, deixando inalterada a distância comóvel entre os objetos (Weinberg, 2008).

Se quisermos saber de distâncias físicas devemos levar em conta o fator de escala. Para a mesma situação descrita acima, a distância própria/física r_f entre os dois pontos é dada por

$$dr_f^2 = a^2(t) dr^2. \quad (2.13)$$

Se escolhermos o primeiro corpo localizado na origem, obtemos

$$r_f = a(t) \int_0^r dr' = a(t)r. \quad (2.14)$$

Derivando em relação à t dos dois lados nos dá a famosa lei de Hubble (Hubble, 1929), que relaciona a velocidade de recessão de galáxias distantes com a taxa de expansão do universo e a distância até esses objetos,

$$\begin{aligned} v &\equiv \dot{r}_f = \dot{a}r \\ &= H r_f, \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde usamos (2.8). Se avaliado hoje, temos a aproximação

$$v = H_0 r_f. \quad (2.16)$$

Considere agora que um corpo localizado em $r_1 = 0$ emite um sinal no tempo $t = t_e$. Um observador fixo comóvel localizado em $r_2 = r$ recebe esse sinal em $t = t_o$. Como o sinal segue por uma geodésica tipo-luz, i.e. para $ds^2 = 0$, temos da métrica (2.12) que

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^r dr'. \quad (2.17)$$

Se no tempo $t_e + \delta t_e$ outro sinal é emitido e então observado em $t_o + \delta t_o$,

$$\int_{t_e + \delta t_e}^{t_o + \delta t_o} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^r dr' \quad (2.18)$$

Como o lado direito de ambas as expressões é o mesmo, obtemos a relação

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e + \delta t_e}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{a(t)} \quad (2.19)$$

Subtraindo dos dois lados $\int_{t_e + \delta t_e}^{t_o} dt/a$

$$\begin{aligned} \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_e + \delta t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} &= \int_{t_e + \delta t_e}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_e + \delta t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} \\ \Rightarrow \int_{t_o}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{a(t)} &= \int_{t_e}^{t_e + \delta t_e} \frac{dt}{a(t)}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Para δt_o (e δt_e) pequeno, $a(t) \approx a(t_o)$ ($a(t) \approx a(t_e)$), portanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{a(t_o)} \int_{t_o}^{t_o + \delta t_o} dt &= \frac{1}{a(t_e)} \int_{t_e}^{t_e + \delta t_e} dt \\ \Rightarrow \delta t_o &= \frac{a(t_o)}{a(t_e)} \delta t_e. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Agora introduzimos o redshift z , que facilita a descrição de muitas quantidades que veremos adiante, definido por (Weinberg, 2008; Dodelson; Schmidt, 2024)

$$1 + z = \frac{a(t_o)}{a(t_e)}, \quad (2.22)$$

com $z \geq 0$. Segue então a relação entre os tempos medidos pelo observador e pelo emissor (Maggiore, 2007),

$$dt_o = (1 + z)dt_e. \quad (2.23)$$

Se ambos os sinais emitidos forem duas cristas, de forma que a frequência da onda emitida é $f(t_e) \equiv f_e = 1/(\delta t_e)$ e da onda observada $f(t_o) \equiv f_o = 1/(\delta t_o)$, obtemos

$$f_e = (1 + z)f_o, \quad (2.24)$$

isto é, devido à expansão do universo, a frequência da onda diminui e é observada com um fator de $1/(1 + z)$. A relação entre os comprimentos de onda segue de forma trivial,

$$\lambda_o = (1 + z)\lambda_e. \quad (2.25)$$

Para concluir a revisão de cosmologia, precisamos da *distância luminosidade* D_L . A quantidade é definida a partir do fluxo de energia emitido pela fonte dos sinais (Weinberg, 2008; Dodelson; Schmidt, 2024)

$$F = \frac{L}{A}, \quad (2.26)$$

onde L é a luminosidade absoluta, i.e. a potência radiada medida no referencial da fonte

$$L = \frac{dE^{(f)}}{dt} \quad (2.27)$$

e A é a área da superfície atravessada pela energia. Se considerarmos uma esfera de raio $a(t)r$ centrada na fonte, então A é

$$\begin{aligned} A &= \int a^2 r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= 4\pi a^2(t) r^2. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Portanto, o fluxo de energia intrínseco à fonte é

$$F = \frac{1}{4\pi a^2(t) r^2} \frac{dE^{(f)}}{dt}. \quad (2.29)$$

Da relação $E = hf$ e com (2.24) conseguimos associar a energia medida no referencial da fonte e percebida pelo observador,

$$E^{(f)} = (1+z)E^{(o)}. \quad (2.30)$$

Junto de (2.23), obtemos que a potência medida pelo observador é

$$\frac{dE^{(o)}}{dt} = \frac{1}{(1+z)^2} \frac{dE^{(f)}}{dt}. \quad (2.31)$$

Usando (2.31), temos que fluxo F que atravessa uma esfera de raio $a(t_o)r$ indo até o observador será então

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4\pi a^2(t_o) r^2} \frac{dE^{(o)}}{dt} \\ &= \frac{1}{4\pi a^2(t_o) r^2 (1+z)^2} \frac{dE^{(f)}}{dt}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Define-se então a distância luminosidade D_L por

$$D_L = (1+z)a(t_o)r. \quad (2.33)$$

Podemos escrever D_L como função apenas de z . Para tal, temos que a distância comóvel é, a partir da métrica,

$$r = \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} \quad (2.34)$$

Da definição de H e do redshift temos que $dt/a = -dz/a(t_0)H(z)$ e, portanto,

$$r = \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = -c \int_z^0 \frac{dz'}{a(t_0)H(z')}, \quad (2.35)$$

onde o tempo de emissão t_e corresponde ao redshift z e o tempo presente t_0 a 0. Temos que a distância $a(t_0)r$ é dada em termos do redshift por

$$a(t_0)r = c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}, \quad (2.36)$$

e obtemos distância luminosidade como função de z e da cosmologia $H(z)$ (Carroll, 2004; Weinberg, 2008; Dodelson; Schmidt, 2024),

$$D_L(z) = c(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}, \quad (2.37)$$

com $H(z)$ dado por

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_R(1+z)^4 + \Omega_\Lambda}, \quad (2.38)$$

no modelo Λ CDM - plano.

No regime de baixos redshifts, $z \ll 1$, a distância luminosidade pode ser expressa como uma série de potências em z . Para tanto, expandimos o fator de escala,

$$\begin{aligned} a(t) &= a(t_0) + \dot{a}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)(t - t_0)^2 + \dots \\ &= a(t_0) \left(1 + \left. \frac{\dot{a}}{a} \right|_{t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\ddot{a}}{a} \right|_{t_0} (t - t_0)^2 + \dots \right) \\ &= a(t_0) \left(1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0[H_0(t - t_0)]^2 + \dots \right), \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde foi definido $q_0 \equiv -(1/H_0^2)(\ddot{a}/a)_{t=t_0}$, chamado de parâmetro desaceleração (Carroll, 2004). Usando que $a(t_0)/a(t) = 1+z$, a equação (2.39) pode ser invertida para escrever $t - t_0$ como função de z e, colocando (2.39) na relação (2.17), obtemos $a(t_0)r$ como uma série de potências em função de $t - t_0$ e, consequentemente, como função de z , resultando em (uma derivação completa pode ser encontrada em (Kolb; Turner, 2019))

$$D_L(z) = \frac{c}{H_0} \left[z + \frac{1}{2}(1 - q_0)z^2 + \dots \right]. \quad (2.40)$$

Para a ordem mais baixa em z temos a relação linear,

$$D_L = \frac{cz}{H_0}. \quad (2.41)$$

Se o redshift não for pequeno, a expansão deixa de ser válida e é necessário o uso da forma integral (2.37).

2.2 Decomposição SVT

Ao trabalhar com perturbações, é comum realizar uma decomposição de $\gamma_{\mu\nu}$ em partes escalares, vetoriais e tensoriais para facilitar as contas (Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008;

(Maggiore, 2018; Dodelson; Schmidt, 2024). Essa operação chama-se decomposição escalar-vetor-tensor (*Scalar-Vector-Tensor decomposition*) e pode ser encontrada nas referências citadas acima. Nesta seção e nas próximas trabalhamos com $c = 1$.

Queremos entender o comportamento das ondas gravitacionais no universo em expansão. Portanto, escolhemos a métrica de fundo $\tilde{g}_{\mu\nu} = a^2(\eta)\eta_{\mu\nu}$ e a perturbação como $\gamma_{\mu\nu} = a^2(\eta)h_{\mu\nu}$, de forma que a métrica total é escrita como

$$g_{\mu\nu} = a^2\eta_{\mu\nu} + a^2h_{\mu\nu}. \quad (2.42)$$

Seguindo o mesmo caminho de (Maggiore, 2018), decompomos $h_{\mu\nu}$ em

$$\begin{aligned} h_{00} &= 2A, \\ h_{0i} &= B_i + \partial_i C, \\ h_{ij} &= -2D\delta_{ij} + (\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2)E + \frac{1}{2}(\partial_i f_j + \partial_j f_i) + h_{ij}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde A , C , D e E são escalares, B_i e f_i são vetores e h_{ij} é um tensor, tornando a expressão para o elemento de linha completo

$$\begin{aligned} ds^2 = a^2 \Big[& - (1 - 2A)d\eta^2 + 2(B_i + \partial_i C)d\eta dx^i + (\delta_{ij}(1 - 2D) \\ & + (\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2)E + \partial_{(i}f_{j)})dx^i dx^j \Big]. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Da decomposição (2.43), os termos B_i , $\partial_i C$, f_i e h_{ij} satisfazem

$$\begin{aligned} \varepsilon^{ijk}\partial_j\partial_k C &= 0, \\ \partial^i B_i &= 0, \\ \partial^i f_i &= 0, \\ \partial^j h_{ij} &= 0, \\ \delta^{ij}h_{ij} &= 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

O tensor h_{ij} é a parte transversal e sem traço (*transverse traceless*) de h_{ij} (Maggiore, 2018; Wald, 1984; Tolish; Wald, 2016; Dodelson; Schmidt, 2024). Os índices espaciais ij são movidos usando o delta δ_{ij} , então, e.g. $B_i = B^i$, $\partial_i C = \partial^i C$, $h^i_j = h_{ij}$.

Vamos ver como cada uma das componentes de $\gamma_{\mu\nu}$ se comporta sob as transformações de calibre (1.32), ou (1.34). Temos que

$$a^2 h_{\mu\nu} \rightarrow a^2 h'_{\mu\nu} = a^2 h_{\mu\nu} - \xi^\sigma \partial_\sigma \tilde{g}_{\mu\nu} - \tilde{g}_{\mu\sigma} \partial_\nu \xi^\sigma - \tilde{g}_{\sigma\nu} \partial_\mu \xi^\sigma, \quad (2.46)$$

no qual o fator de escala, por ser parte do espaço-tempo de fundo, não é afetado pela transformação (Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008; Maggiore, 2007). Agora definimos o quadri vetor ξ^μ como

$$\xi^\mu \equiv (-\alpha, \lambda^i + \partial^i \lambda), \quad (2.47)$$

onde $\partial_i \lambda^i = 0$ e $\varepsilon^{ijk} \partial_j \partial_k \lambda = 0$. Começando pela componente 00, obtemos

$$\begin{aligned} a^2 h'_{00} &= a^2 h_{00} - \xi^0 \partial_0 \tilde{g}_{00} - 2 \tilde{g}_{00} \partial_0 \xi^0 \\ a^2 2A' &= a^2 2A - (-\alpha) \partial_\eta (-a^2) - 2(-a^2) \partial_\eta (-\alpha) \\ \Rightarrow A' &= A - \partial_\eta \alpha - \mathcal{H} \alpha. \end{aligned} \quad (2.48)$$

A componente 0i,

$$\begin{aligned} a^2 h'_{0i} &= a^2 h_{0i} - \tilde{g}_{00} \partial_i \xi^0 - \tilde{g}_{ij} \partial_0 \xi^i \\ a^2 (B'_i + \partial_i C') &= a^2 (B_i + \partial_i C) - (-a^2) \partial_i (-\alpha) - a^2 \delta_{ij} \partial_\eta (\lambda^j + \partial^j \lambda) \\ B'_i + \partial_i C' &= B_i + \partial_i C - \partial_i \alpha - \partial_\eta \lambda_i - \partial_\eta \partial_i \lambda. \end{aligned} \quad (2.49)$$

De (2.49) obtemos dois resultados. O primeiro conseguimos ao derivar a expressão com ∂^i , fazendo com que B_i e $\partial_\eta \lambda_i$ sumam e resultando em

$$\begin{aligned} \partial^i \partial_i C' &= \partial^i \partial_i C - \partial^i \partial_i \alpha - \partial^i \partial_i \partial_\eta \lambda \\ \Rightarrow C' &= C - \alpha - \partial_\eta \lambda. \end{aligned} \quad (2.50)$$

O segundo conseguimos aplicando o rotacional $\varepsilon^{ijk} \partial_j$ em (2.49),

$$\varepsilon^{ijk} \partial_j B'_k + \varepsilon^{ijk} \partial_j \partial_k C' = \varepsilon^{ijk} \partial_j B_k + \varepsilon^{ijk} \partial_j \partial_k C + \varepsilon^{ijk} \partial_j \partial_k \alpha - \varepsilon^{ijk} \partial_j \partial_\eta \lambda_k - \varepsilon^{ijk} \partial_j \partial_\eta \partial_k \lambda. \quad (2.51)$$

Os termos $\varepsilon^{ijk} \partial_j \partial_k C$, $\varepsilon^{ijk} \partial_j \partial_k \alpha$ e $\varepsilon^{ijk} \partial_j \partial_k \lambda$ serão nulos, o que nos dá

$$\begin{aligned} \varepsilon^{ijk} \partial_j B'_k &= \varepsilon^{ijk} \partial_j B_k - \varepsilon^{ijk} \partial_j \partial_\eta \lambda_k \\ \Rightarrow B'_i &= B_i - \partial_\eta \lambda_i. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Finalmente, para as componentes ij temos a expressão

$$\begin{aligned} a^2 h'_{ij} &= a^2 h_{ij} - \xi^0 \partial_0 \tilde{g}_{ij} - \xi^k \partial_k \tilde{g}_{ij} - \tilde{g}_{ik} \partial_j \xi^k - \tilde{g}_{kj} \partial_i \xi^k \\ &= a^2 h_{ij} - (-\alpha) \partial_\eta (a^2 \delta_{ij}) - (\lambda^k + \partial^k \lambda) \partial_k (a^2 \delta_{ij}) - a^2 \delta_{ij} \partial_j (\lambda^k + \partial^k \lambda) \\ &\quad - a^2 \delta_{kj} \partial_i (\lambda^k + \partial^k \lambda) \\ h'_{ij} &= h_{ij} + 2\alpha \mathcal{H} \delta_{ij} - \partial_i \lambda_j - \partial_j \lambda_i - 2\partial_i \partial_j \lambda. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Usando a expressão para h_{ij} de (2.43) em ambos os lados de (2.53),

$$\begin{aligned} -2D' \delta_{ij} + (\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2) E' + \frac{1}{2} (\partial_i f'_j + \partial_j f'_i) + h'_{ij} \\ = \\ -2D \delta_{ij} + (\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2) E + \frac{1}{2} (\partial_i f_j + \partial_j f_i) + h_{ij} + 2\alpha \mathcal{H} \delta_{ij} - \partial_i \lambda_j - \partial_j \lambda_i - 2\partial_i \partial_j \lambda. \end{aligned} \quad (2.54)$$

A transformação de D é obtida ao contrair a expressão acima com δ^{ij} ,

$$D' = D + \frac{1}{3} \nabla^2 \lambda - \mathcal{H} \alpha. \quad (2.55)$$

Para E , aplicamos $\partial^i \partial^j$ em (2.54) e usamos (2.55), obtendo

$$\begin{aligned}
 -2\nabla^2 D' + \frac{2}{3}\nabla^2 \nabla^2 E' &= -2\nabla^2 D + \frac{2}{3}\nabla^2 \nabla^2 E - 2\nabla^2 \nabla^2 \lambda + 2\mathcal{H}\nabla^2 \alpha \\
 \nabla^2 \nabla^2 E' &= \nabla^2 \nabla^2 E + 3\nabla^2 (D' - D) - 3\nabla^2 \nabla^2 \lambda + 3\mathcal{H}\nabla^2 \alpha \\
 &= \nabla^2 \nabla^2 E - 2\nabla^2 \nabla^2 \lambda \\
 \Rightarrow E' &= E - 2\lambda.
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Agora, tirando o divergente ∂^i e usando (2.55) e (2.56), obtemos f'_i ,

$$\begin{aligned}
 -2\partial_j D' + \frac{2}{3}\nabla^2 \partial_j E' + \frac{1}{2}\nabla^2 f'_j &= -2\partial_j D + \frac{2}{3}\nabla^2 \partial_j E + \frac{1}{2}\nabla^2 f_j - 2\nabla^2 \partial_j \lambda - \nabla^2 \lambda_j + 2\mathcal{H}\partial_j \alpha \\
 \nabla^2 f'_j &= \frac{1}{2}\nabla^2 f_j + 2\partial_j (D' - D) - \frac{2}{3}\nabla^2 \partial_j (E' - E) \\
 &\quad - 2\nabla^2 \partial_j \lambda - \nabla^2 \lambda_j + 2\mathcal{H}\partial_j \alpha \\
 f'_i &= f_i - 2\lambda_i.
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

Por último, obtemos a transformação da parte TT de h_{ij} , o termo h_{ij} , ao substituir (2.55), (2.56) e (2.57) em (2.54)

$$\begin{aligned}
 h'_{ij} &= h_{ij} + 2\delta_{ij}(D' - D) - (\partial_i \partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2)(E' - E) - \frac{1}{2}\partial_i(f'_j - f_j) \\
 &\quad - \frac{1}{2}\partial_j(f'_i - f_i) - 2\partial_i \partial_j \lambda - \partial_i \lambda_j - \partial_j \lambda_i + 2\alpha\mathcal{H}\delta_{ij} \\
 &= h_{ij} + 2\delta_{ij}(\frac{1}{3}\nabla^2 \lambda - \alpha\mathcal{H}) - (\partial_i \partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2)(-2\lambda) - \frac{1}{2}\partial_i(-2\lambda_j) \\
 &\quad - \frac{1}{2}\partial_j(-2\lambda_i) - 2\partial_i \partial_j \lambda - \partial_i \lambda_j - \partial_j \lambda_i + 2\alpha\mathcal{H}\delta_{ij} \\
 \Rightarrow h'_{ij} &= h_{ij}.
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Portanto, a parte transversal e sem traço de $h_{\mu\nu}$ é invariante pela transformação de calibre.

Outras quantidades que permanecem invariantes são os chamados potenciais de Bardeen (Bardeen, 1980; Maggiore, 2018), escalares definidos por

$$\begin{aligned}
 \Phi &\equiv -D - \frac{1}{6}\nabla^2 E + \mathcal{H}\left(C - \frac{1}{2}\frac{dE}{d\eta}\right), \\
 \Psi &\equiv -A + \frac{1}{a}\frac{d}{d\eta}\left[a\left(C - \frac{1}{2}\frac{dE}{d\eta}\right)\right],
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

e o vetor transversal

$$\Xi_i \equiv B_i - \frac{1}{2}\frac{df_i}{d\eta}. \tag{2.60}$$

Juntos, os escalares Φ e Ψ , o vetor Ξ_i e o tensor h_{ij} contêm todas as informações físicas sobre a perturbação (Tolish; Wald, 2016; Maggiore, 2018).

Resumindo, $h_{\mu\nu}$ é decomposto em 4 escalares, 2 vetores e 1 tensor, $\{A, C, D, E, B_i, f_i, h_{ij}\}$, que se transformam de acordo com (2.46) por

$$\begin{aligned}
 A &\rightarrow A' = A - \partial_\eta \alpha - \mathcal{H} \alpha, \\
 C &\rightarrow C' = C - \alpha - \partial_\eta \lambda, \\
 D &\rightarrow D' = D + \frac{1}{3} \nabla^2 \lambda - \mathcal{H} \alpha, \\
 E &\rightarrow E' = E - 2\lambda, \\
 B_i &\rightarrow B'_i = B_i - \partial_\eta \lambda_i, \\
 f_i &\rightarrow f'_i = f_i - 2\lambda_i, \\
 h_{ij} &\rightarrow h'_{ij} = h_{ij}.
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

Escolhendo $B_i = C = E = 0$, temos o calibre Newtoniano conforme (*conformal Newtonian gauge*) (Maggiore, 2018; Dodelson; Schmidt, 2024), transformando (2.44) em

$$ds^2 = a^2 [-(1 + 2\Psi)d\eta^2 + (1 + 2\Phi)\delta_{ij} + \frac{1}{2}(\partial_i f_j + \partial_j f_i + h_{ij})dx^i dx^j]. \tag{2.62}$$

Cada um dos setores da perturbação, i.e. as partes escalares, vetoriais e tensoriais, irão gerar equações desacopladas, dadas pelas equações de Einstein linearizadas (Maggiore, 2018; Weinberg, 2008; Tolish; Wald, 2016). Neste trabalho estamos interessados apenas na parte tensorial, γ_{ij} , já que, assim como em Minkowski, os modos tensoriais são os únicos modos radiativos (Carroll, 2004; Maggiore, 2007; Weinberg, 2008; Misner; Wheeler, 1973), resultando nas ondas gravitacionais. O estudo de perturbações escalares e vetoriais pode ser encontrado em (Weinberg, 2008; Maggiore, 2018; Dodelson; Schmidt, 2024).

Além das perturbações, também precisamos ver como que o tensor energia-momento se transforma. Em cosmologia perturbativa é comum definir o tensor energia-momento total por (Dodelson; Schmidt, 2024; Mukhanov, 2005; Maggiore, 2018)

$$T^\mu{}_\nu = \tilde{T}^\mu{}_\nu + T^{(1)\mu}{}_\nu, \tag{2.63}$$

onde $\tilde{T}^\mu{}_\nu$ é

$$\tilde{T}^\mu{}_\nu = (\tilde{\rho} + \tilde{p})u^\mu u_\nu + \tilde{p}\delta^\mu{}_\nu. \tag{2.64}$$

Adotamos a quadrivelocidade comóvel $u^\mu = (1/a, 0, 0, 0)$, sujeito à condição $\tilde{g}^{\mu\nu}u_\mu u_\nu = -1$. Consideramos que a perturbação $T^{(1)\mu}{}_\nu$ corresponde a corpos massivos que seguem trajetórias tipo-tempo e que não influenciam o fluido perfeito descrito por $\tilde{T}^\mu{}_\nu$ (Tolish; Wald, 2016).

O mesmo procedimento realizado acima com $h_{\mu\nu}$ pode ser feito com o tensor energia-momento. Definimos

$$\begin{aligned}
 T^{(1)0}{}_0 &= -\delta\rho, \\
 T^{(1)0}{}_i &= V^i + \partial^i V, \\
 T^{(1)i}{}_j &= \delta p \delta^i{}_j + (\partial^i \partial_j - \frac{1}{3} \delta^i{}_j \nabla^2) J + \frac{1}{2} (\partial^i I_j + \partial_j I^i) + \mathcal{T}^i{}_j,
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

onde $V^i, \partial^i V, I^i$ e $\mathcal{T}^i_j$ satisfazem condições iguais às (2.45). Além disso, $V^i = V_i, \partial^i V = \partial_i V, I^i = I_i$ e $\mathcal{T}^i_j = \mathcal{T}_{ij}$.

A transformação de calibre do TEM é obtida de forma parecida com a de $\gamma_{\mu\nu}$. Fazendo uso de

$$T'^{\mu}_{\nu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} T^{\rho}_{\sigma}, \quad (2.66)$$

de (1.25) e seguindo os mesmo passos feitos com a perturbação, obtemos

$$T^{(1)\mu}_{\nu} \rightarrow T'^{(1)\mu}_{\nu} = T^{(1)\mu}_{\nu} - \xi^{\sigma} \partial_{\sigma} \tilde{T}^{\mu}_{\nu} - \tilde{T}^{\mu}_{\sigma} \partial_{\nu} \xi^{\sigma} + \tilde{T}^{\sigma}_{\nu} \partial_{\sigma} \xi^{\mu}. \quad (2.67)$$

Com isso, obtemos as transformações de cada componente dadas por (Maggiore, 2018)

$$\begin{aligned} \delta\rho &\rightarrow \delta\rho' = \delta\rho - \alpha\partial_{\eta}\tilde{\rho}, \\ \delta p &\rightarrow \delta p' = \delta p + \alpha\partial_{\eta}\tilde{p}, \\ V &\rightarrow V' = V - (\tilde{\rho} + \tilde{p})\partial_{\eta}\lambda, \\ V^i &\rightarrow V'^i = V^i - (\tilde{\rho} + \tilde{p})\partial_{\eta}\lambda^i, \\ J &\rightarrow J' = J, \\ I^i &\rightarrow I'^i = I^i, \\ \mathcal{T}_{ij} &\rightarrow \mathcal{T}'_{ij} = \mathcal{T}_{ij}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Novamente, vemos que a parte TT, $\mathcal{T}_{ij}$, é invariante pela transformação de calibre.

Com os índices abaixados, $T_{\mu\nu}$ é

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= g_{\mu\rho} T^{\rho}_{\nu} \\ &= \tilde{T}_{\mu\nu} + \tilde{g}_{\mu\rho} T^{(1)\rho}_{\nu} + \gamma_{\mu\rho} \tilde{T}^{\rho}_{\nu}, \end{aligned} \quad (2.69)$$

de forma que

$$T^{(1)}_{\mu\nu} \equiv \tilde{g}_{\mu\rho} T^{(1)\rho}_{\nu} + \gamma_{\mu\rho} \tilde{T}^{\rho}_{\nu}. \quad (2.70)$$

2.3 Ondas Gravitacionais em FLRW

Escolhendo perturbações somente no setor tensorial, escrevemos o elemento de linha como

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j = a^2(\eta)[-d\eta^2 + (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j]. \quad (2.71)$$

Consequentemente, $\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}$. Substituindo (2.70) em (1.59)

$$\begin{aligned} 16\pi G(\tilde{g}_{\mu\rho} T^{(1)\rho}_{\nu} + \gamma_{\mu\rho} \tilde{T}^{\rho}_{\nu}) &= -2\tilde{R}^{\lambda}_{\mu\sigma\nu}\gamma_{\lambda}^{\sigma} + \tilde{R}_{\lambda\mu}\gamma_{\nu}^{\lambda} + \tilde{R}_{\lambda\nu}\gamma_{\mu}^{\lambda} - \tilde{\nabla}^{\sigma}\tilde{\nabla}_{\sigma}\gamma_{\mu\nu} \\ &\quad + \tilde{g}_{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta}\tilde{R}_{\alpha\beta} - \gamma_{\mu\nu}\tilde{R}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Usando as equações de Einstein, $\tilde{G}_{\mu\nu} = 16\pi G\tilde{T}_{\mu\nu}$, no termo $\gamma_{\mu\rho}\tilde{T}^{\rho}_{\nu}$, obtemos

$$-2\tilde{R}^{\lambda}_{\mu\sigma\nu}\gamma_{\lambda}^{\sigma} + \tilde{R}_{\lambda\mu}\gamma_{\nu}^{\lambda} - \tilde{R}_{\lambda\nu}\gamma_{\mu}^{\lambda} - \tilde{\nabla}^{\sigma}\tilde{\nabla}_{\sigma}\gamma_{\mu\nu} + \tilde{g}_{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta}\tilde{R}_{\alpha\beta} = 16\pi G\tilde{g}_{\mu\rho}T^{(1)\rho}_{\nu}. \quad (2.73)$$

Calculando para $\mu\nu = ij$ ³,

$$\begin{aligned} 16\pi G\tilde{g}_{ik}T^{(1)k}_j &= -2\tilde{R}^{\lambda}_{i\sigma j}\gamma_{\lambda}^{\sigma} + \tilde{R}_{\lambda i}\gamma_j^{\lambda} - \tilde{R}_{\lambda j}\gamma_i^{\lambda} - \tilde{\nabla}^{\sigma}\tilde{\nabla}_{\sigma}\gamma_{ij} + \tilde{g}_{ij}\gamma^{\alpha\beta}\tilde{R}_{\alpha\beta} \\ &= 2a^{-2}\mathcal{H}^2\gamma_{ij} + a^{-2}\frac{a''}{a}\gamma_{ij} + a^{-2}\mathcal{H}^2\gamma_{ij} - (a^{-2}\frac{a''}{a}\gamma_{ij} + a^{-2}\mathcal{H}^2\gamma_{ij}) \\ &\quad - a^{-2}\partial^{\alpha}\partial_{\alpha}\gamma_{ij} - 2a^{-2}\frac{a''}{a}\gamma_{ij} - 2a^{-2}\mathcal{H}\partial_0\gamma_{ij} \\ 16\pi Ga^2\delta_{ik}\mathcal{T}^k_j &= 2\mathcal{H}^2h_{ij} - a^{-2}\partial^{\alpha}\partial_{\alpha}(a^2h_{ij}) - 2\frac{a''}{a}h_{ij} - 2a^{-2}\mathcal{H}\partial_0(a^2h_{ij}) \\ &= 2\mathcal{H}^2h_{ij} + 2\mathcal{H}^2h_{ij} + 2\frac{a''}{a}h_{ij} + 4\mathcal{H}\partial_0h_{ij} - \partial^{\mu}\partial_{\mu}h_{ij} - 2\frac{a''}{a}h_{ij} \\ &\quad - 4\mathcal{H}^2h_{ij} - 2\mathcal{H}\partial_0h_{ij} \\ &= -\partial^{\mu}\partial_{\mu}h_{ij} + 2\mathcal{H}\partial_0h_{ij}, \end{aligned} \quad (2.74)$$

e portanto,

$$\frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial \eta^2} - \nabla^2 h_{ij} + 2\frac{a'}{a}\frac{\partial h_{ij}}{\partial \eta} = 16\pi Ga^2\mathcal{T}_{ij}. \quad (2.75)$$

2.3.1 Solução de onda

Na ausência da fonte, (2.75) torna-se

$$\frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial \eta^2} - \nabla^2 h_{ij} + 2\frac{a'}{a}\frac{\partial h_{ij}}{\partial \eta} = 0. \quad (2.76)$$

Note que, diferente da equação de onda em Minkowski, para FLRW temos o termo adicional de amortecimento, $2a'/a\partial_{\eta}h_{ij}$. Definindo $g_{ij}(\eta, \vec{x}) = ah_{ij}(\eta, \vec{x})$ e substituindo no resultado acima

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial \eta^2} - \nabla^2 g_{ij} + \frac{a''}{a}g_{ij} = 0. \quad (2.77)$$

Para modos sub-Hubble, os modos que estão muito dentro do horizonte, i.e., $k^2 \gg a''/a$, onde $k = |\vec{k}|$ é o vetor de onda comóvel, o terceiro termo de (2.77) pode ser ignorado em relação ao segundo e obtemos uma equação de onda simples

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial \eta^2} - \nabla^2 g_{ij} = 0, \quad (2.78)$$

com solução de onda plana

$$g_{ij}(\eta, \vec{x}) = C_{ij}e^{i(\omega\eta - \vec{k}\cdot\vec{x})}, \quad (2.79)$$

³ Os símbolos de Christoffel para a métrica de Friedmann usados estão listadas no apêndice A.

onde C_{ij} é uma constante determinada pelas condições iniciais. Em termos de h_{ij} , obtemos

$$h_{ij}(\eta, \vec{x}) = \frac{C_{ij}}{a(\eta)} e^{i(\omega\eta - \vec{k} \cdot \vec{x})}. \quad (2.80)$$

Note que, diferente do caso para o espaço-tempo de Minkowski, por conta do fator de escala no denominador, a solução decai com a expansão do universo. Da condição de transversalidade, $k^i h_{ij} = 0$, e traço nulo, $\delta^{ij} h_{ij} = 0$, e considerando que a onda gravitacional está se propagando na direção $\hat{z}$, i.e., escolhendo $k^\mu = (\omega, 0, 0, k)$, obtemos que

$$C_{3j} = 0, \quad (2.81)$$

e portanto,

$$h_{ij}(\eta, \vec{x}) = \frac{C_{ij}}{a(\eta)} e^{i\omega(\eta - z)}. \quad (2.82)$$

Vemos então que as únicas componentes/polarizações de h_{ij} são definidas no plano transversal à direção de propagação da onda,

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & 0 \\ h_{12} & -h_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

Vamos agora calcular a densidade de energia das ondas planas fazendo uso da equação (1.70). Definida em relação ao tempo t , temos (Maggiore, 2007; Caprini; Figueroa, 2018)

$$\begin{aligned} \rho_{GW} &\equiv t_{00} = t_{tt} = \frac{1}{32\pi G} \langle \tilde{\nabla}_t \gamma^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_t \gamma_{\alpha\beta} \rangle \\ &= \frac{1}{32\pi G} \langle (\partial_t \gamma^{\alpha\beta} + \tilde{\Gamma}_{t\lambda}^\alpha \gamma^{\lambda\beta} + \tilde{\Gamma}_{t\lambda}^\beta \gamma^{\alpha\lambda}) (\partial_t \gamma_{\alpha\beta} - \tilde{\Gamma}_{t\alpha}^\lambda \gamma_{\lambda\beta} - \tilde{\Gamma}_{t\beta}^\lambda \gamma_{\alpha\lambda}) \rangle \\ &= \frac{1}{32\pi G} \langle \partial_t \gamma^{ij} \partial_t \gamma_{ij} - 2H \gamma_{ij} \partial_t \gamma^{ij} + 2H \gamma^{ij} \partial_t \gamma_{ij} - 4H^2 \gamma^{ij} \gamma_{ij} \rangle \\ &= \frac{1}{32\pi G} \langle \partial_t (a^{-2} h^{ij}) \partial_t (a^2 h_{ij}) - 2H a^2 \gamma_{ij} \partial_t (a^{-2} h^{ij}) \\ &\quad + 2H a^{-2} h^{ij} \partial_t (a^2 h_{ij}) - 4H^2 a^{-2} h^{ij} a^2 h_{ij} \rangle \\ &= \frac{1}{32\pi G} \langle \partial_t h_{ij} \partial_t h_{ij} \rangle, \end{aligned} \quad (2.84)$$

onde usamos que $\gamma_{ij} = a^2 h_{ij}$. Da relação $ad\eta = dt$ e usando a parte real de (2.80), obtemos

$$\begin{aligned} \rho_{GW} &= \frac{1}{32\pi G a^2} \langle \partial_\eta h_{ij} \partial_\eta h_{ij} \rangle \\ &= \frac{1}{32\pi G a^2} \left\langle (C^{ij} C_{ij}) \left[-\frac{\omega}{a} \sin(\omega\eta - kz) - \frac{a'}{a^2} \cos(\omega\eta - kz) \right]^2 \right\rangle \\ &= \frac{(2C_+^2 + 2C_\times^2)}{32\pi G a^2} \left\langle \frac{\omega^2}{a^2} \sin^2(\omega\eta - kz) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{a^3}\right) \right\rangle \\ &\approx \frac{\omega^2}{32\pi G a^4} (C_+^2 + C_\times^2), \end{aligned} \quad (2.85)$$

onde usamos que a média $\langle \sin^2(\omega\eta - kz) \rangle = 1/2$. Observe que ρ_{GW} cai com a^{-4} , como esperado para qualquer tipo de radiação.

Retornando à equação de propagação (2.76), é interessante explorar também soluções esfericamente simétricas, i.e. soluções do tipo $h_{ij}(\eta, r) = f_{ij}(\eta, r)/r$. Passando para as coordenadas esféricas $(\eta, r, \theta, \varphi)$, temos que (2.76) é

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial \eta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r h_{ij})}{\partial r^2} + 2 \frac{a'}{a} \frac{\partial h_{ij}}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial r^2} + 2 \frac{a'}{a} \frac{\partial f_{ij}}{\partial \eta} &= 0. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Definindo $l_{ij}(\eta, r) = a f_{ij}(\eta, r)$ e substituindo no resultado acima

$$\frac{\partial^2 l_{ij}}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 l_{ij}}{\partial r^2} + \frac{a''}{a} l_{ij} = 0. \quad (2.87)$$

Novamente, para modos sub-Hubble podemos desprezar o terceiro termo, obtendo

$$\frac{\partial^2 l_{ij}}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 l_{ij}}{\partial r^2} = 0, \quad (2.88)$$

que possui solução

$$l_{ij}(\eta, r) = A_{ij} e^{i\omega(\eta-r)}, \quad (2.89)$$

onde A_{ij} é constante e determinada pelas condições iniciais. Em termos de h_{ij} ,

$$h_{ij} = \frac{A_{ij}}{a(\eta)r} e^{i\omega(\eta-r)}, \quad (2.90)$$

com as únicas polarizações sendo $h_{11} = -h_{22} \equiv h_+$ e $h_{12} = h_{21} \equiv h_\times$ novamente.

Os modos super-Hubble, i.e. modos em que $k^2 \ll a''/a^4$, são dados pela equação (2.77) descartando o termo $\nabla^2 g_{ij}$,

$$\frac{1}{g_{ij}} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial \eta^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial^2 a}{\partial \eta^2}. \quad (2.91)$$

Utilizando $g_{ij} = a h_{ij}$ nos permite integrar facilmente a equação

$$\begin{aligned} \partial_\eta^2 h_{ij} + 2 \frac{a'}{a} \partial_\eta h_{ij} &= 0 \\ a^2 \partial_\eta^2 h_{ij} + 2 a a' \partial_\eta h_{ij} &= 0 \\ \Rightarrow h_{ij}(\eta, \vec{x}) &= A_{ij}(\vec{x}) + B_{ij}(\vec{x}) \int \frac{1}{a^2(\eta)} d\eta, \end{aligned} \quad (2.92)$$

onde A_{ij} e B_{ij} são constantes no tempo. Portanto, obtemos que os modos que estão fora do horizonte, isto é, as perturbações que possuem grandes comprimentos de onda, são iguais a um termo constante no tempo mais um termo que decai com a expansão do universo (Maggiore, 2007; Caprini; Figueroa, 2018).

⁴ Apesar dos modos super-Hubble possuírem comprimentos de onda da ordem do raio de curvatura do espaço-tempo de fundo, a precisão da equação de propagação, (1.60), é independente de λ/L , então enquanto as ondas gravitacionais forem fracas, o método que estamos aplicando é válido (Misner; Wheeler, 1973).

2.3.2 Produção de Ondas Gravitacionais e Fórmula de Quadrupolo

A produção das ondas gravitacionais em FLRW por uma fonte isolada é dada pela equação (2.75)

$$\frac{-\partial^2 h_{ij}}{\partial \eta^2} + \nabla^2 h_{ij} - 2 \frac{a'}{a} \frac{\partial h_{ij}}{\partial \eta} = -16\pi G a^2 \mathcal{T}_{ij}. \quad (2.93)$$

Já que estamos apenas com a parte TT da perturbação, $h_{\mu\nu}$, e do tensor energia-momento da fonte, $T_{\mu\nu}^{(1)}$, vamos denotar $h_{ij} \equiv h_{ij}$ e $\mathcal{T}_{ij} \equiv T_{ij}$ por simplicidade. A solução de (2.75) é (Chu, 2015; Chu, 2017b; Tolish; Wald, 2016; Burko; Harte; Poisson, 2002)

$$h_{ij}(\eta, \vec{x}) = 16\pi G \int \sqrt{-\tilde{g}(x')} G(x, x') T_{ij}(x') d^4 x', \quad (2.94)$$

onde $\tilde{g}(x')$ é o determinante da métrica de fundo em x' e $G(x, x')$ é a função de Green, que satisfaz (Chu, 2015; Chu, 2017b; Burko; Harte; Poisson, 2002; Jokela; Kajantie; Sarkkinen, 2022; Poisson; Pound; Vega, 2011)

$$\tilde{\square}_x G(x, x') = \tilde{\square}_{x'} G(x, x') = -\frac{\delta^{(4)}(x - x')}{a^2(\eta) a^2(\eta')}, \quad (2.95)$$

onde $\tilde{\square} \equiv \tilde{\nabla}^\mu \tilde{\nabla}_\mu$. Para resolver mais facilmente (2.95), definimos $\psi_{ij} = a(\eta) h_{ij}$, de forma que a equação diferencial para h_{ij} se torna

$$-\frac{\partial^2 \psi_{ij}}{\partial \eta^2} + \nabla^2 \psi_{ij} + \frac{a''}{a} \psi_{ij} = -16\pi G a^3 T_{ij}. \quad (2.96)$$

Agora fatoramos $G(x, x')$ como

$$G(x, x') = \frac{g(x, x')}{a(\eta) a(\eta')}, \quad (2.97)$$

de forma que $g(x, x')$ satisfaz

$$\left(-\partial_\eta^2 + \nabla^2 + V \right) g(x, x') = -\delta^{(4)}(x^\sigma - x'^\sigma), \quad (2.98)$$

onde definimos $V \equiv a''/a$ (Burko; Harte; Poisson, 2002; Chu, 2015). Uma equação como (2.98) possui solução dada pelo ansatz de Hadamard (Hadamard, 1923)

$$g(x, x') = \frac{\delta(\eta - \eta' - |\vec{x} - \vec{x}'|)}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{4\pi} \Theta(\eta - \eta' - |\vec{x} - \vec{x}'|) B(x, x'). \quad (2.99)$$

O primeiro termo de (2.99) é a função de Green tradicional devido ao operador $\partial^\mu \partial_\mu = -\partial_\eta^2 + \nabla^2$ e é responsável pela radiação que viaja ao longo do cone de luz passado do ponto x , também denotada por *parte direta* de h_{ij} ; o segundo termo de (2.99) é devido ao potencial V e produz a chamada *cauda* de h_{ij} (Bonnor; Rotenberg, 1966), a radiação gravitacional que se propaga dentro do cone de luz, isto é, com uma velocidade menor que a da luz. A função $B(x, x')$ é uma função contínua de dois pontos que depende do modelo cosmológico considerado (veja, e.g., (Poisson; Pound; Vega, 2011)). Aplicando (2.99) em (2.98) obtemos

duas equações para $B(x, x')$ (Jokela; Kajantie; Sarkkinen, 2022; Chu, 2015; Burko; Harte; Poisson, 2002; Poisson; Pound; Vega, 2011), uma para a propagação,

$$\left(-\partial_\eta^2 + \nabla^2 + V\right)B(x, x') = 0, \quad \eta - \eta' > |\vec{x} - \vec{x}'|, \quad (2.100)$$

e outra para a condição de contorno no cone de luz⁵,

$$(x - x')^\sigma \partial_\sigma B + B - \frac{1}{2}V = 0, \quad \eta - \eta' = |\vec{x} - \vec{x}'|. \quad (2.101)$$

Nos trabalhos (Nariai, 1968), (Haas; Poisson, 2005) e (Chu, 2015), os autores obtêm a solução geral de $B(x, x')$ para cosmologias que seguem uma lei do tipo potência, i.e. $a \propto \eta^\alpha$, o que inclui universo dominado por radiação ($\alpha = 1$), dominado por matéria ($\alpha = 2$) e *de Sitter* ($\alpha = -1$). No período de radiação não há cauda associada à radiação gravitacional, pois $a \propto \eta$, e, portanto, $a'' = 0$. Para o caso do universo dominado por matéria ($\alpha = 2$) e para *de Sitter* ($\alpha = -1$), os autores encontram que $B(x, x')$ tem a mesma forma,

$$B(x, x') = \frac{1}{\eta\eta'}. \quad (2.102)$$

Em (Jokela; Kajantie; Sarkkinen, 2022), os autores calculam a função numericamente para o modelo Λ CDM e concluem que uma boa aproximação para a solução exata encontrada é uma soma das soluções do universo dominado por matéria e *de Sitter* a menos de uma constante,

$$B(x, x') = \frac{1}{\eta\eta'} + \frac{1}{(\eta_{\max} - \eta)(\eta_{\max} - \eta')} - C, \quad (2.103)$$

onde $\eta_{\max}$ e C são constantes⁶.

Substituindo (2.97) e (2.99) em (2.94)

$$\begin{aligned} h_{ij}(\eta, \vec{x}) &= -4G \int \frac{\delta(u)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \frac{a^3(\eta')}{a(\eta)} T_{ij}(x') d^4x' - 4G \int \Theta(u) B(x, x') \frac{a^3(\eta')}{a(\eta)} T_{ij}(x') d^4x' \\ &\equiv h_{ij}^D + h_{ij}^C, \end{aligned} \quad (2.104)$$

onde $u = \eta - \eta' - |\vec{x} - \vec{x}'|$ e o sobrescrito “D” é para “direto” e “C” para “cauda”.

Seguindo (Ashtekar; Bonga; Kesavan, 2015), (Date; Hoque, 2016), (Chu, 2017a), (Hoque; Aggarwal, 2019) e (Compère; Hoque; Kutluk, 2024), agora introduzimos as tétrades (ou *vierbiens*) $e_{\alpha'}^\mu$, conjunto linearmente independente de quadrivetores ortonormais (Landau;

⁵ Derivamos as duas equações para $B(x, x')$ no apêndice C. O leitor também pode consultar, e.g., (Poisson; Pound; Vega, 2011).

⁶ Como as soluções de $B(x, x')$ para o universo dominado por matéria e *de Sitter* são iguais e para Λ CDM é aproximadamente igual a soma das duas soluções, a menos de uma constante, no apêndice C derivamos a solução de $B(x, x')$ para o universo dominado por matéria apenas. Para o leitor interessado nos detalhes técnicos de como encontrar $B(x, x')$ no caso geral, o que foge do escopo deste trabalho, ver, e.g., (Haas; Poisson, 2005), (Chu, 2015) e (Jokela; Kajantie; Sarkkinen, 2022), e as referências citadas.

Lifshitz, 1975). O índice superior de $e_{\alpha'}^{\mu}$, se transforma como um vetor e o índice inferior se transforma localmente como uma 1-forma (Poisson; Pound; Vega, 2011; Chu, 2017a; Hoque; Aggarwal, 2019). As tétrades estão sujeitas à condição

$$e_{\alpha'}^{\mu} e_{\beta'}^{\nu} \tilde{g}_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \quad (2.105)$$

onde $\eta_{\alpha\beta}$ é a métrica de Minkowski. O dual de $e_{\alpha'}^{\mu}$ é definido como

$$e_{\mu}^{\alpha'} := \eta^{\alpha\beta} \tilde{g}_{\mu\nu} e_{\beta'}^{\nu}. \quad (2.106)$$

Com isso, é fácil ver que a tétrade $e_{\alpha'}^{\mu}$ e seu dual $e_{\mu}^{\alpha'}$ satisfazem

$$e_{\beta'}^{\mu} e_{\mu}^{\alpha'} = \delta^{\alpha}_{\beta}, \quad e_{\alpha'}^{\mu} e_{\nu}^{\alpha'} = \delta^{\mu}_{\nu}. \quad (2.107)$$

Dadas essas propriedades e com $\tilde{g}_{\mu\nu} = a^2 \eta_{\mu\nu}$, temos que $e_{\alpha'}^{\mu}$ é (Chu, 2017a)

$$e_{\nu'}^{\mu} = a^{-1} \delta^{\mu}_{\nu}. \quad (2.108)$$

Definimos então o tensor energia-momento da fonte medido pelo observador local (Ashtekar; Bonga; Kesavan, 2015; Chu, 2017a; Hoque; Aggarwal, 2019; Compère; Hoque; Kutluk, 2024)

$$T_{\mu'\nu'} \equiv e_{\mu'}^{\alpha} e_{\nu'}^{\beta} T_{\alpha\beta} = a^{-2} T_{\alpha\beta}, \quad (2.109)$$

de forma que $T^{0'0'} = T_{0'0'}$ é a densidade de energia física e $T^{i'j'} = T_{i'j'}$ a pressão física (Chu, 2017a). Também definimos, respectivamente, o momento e pressão de quadrupolo físicos medidos pelo observador local (Ashtekar; Bonga; Kesavan, 2015; Chu, 2017a; Compère; Hoque; Kutluk, 2024)

$$I^{ij} = I_{ij} \equiv \int_{\mathbb{R}^3} d^3x a^3 (ax^i)(ax^j) T_{0'0'} = a^3 \int_{\mathbb{R}^3} d^3x x^i x^j T_{00}. \quad (2.110)$$

$$P^{ij} = P_{ij} \equiv \int_{\mathbb{R}^3} d^3x a^3 (ax^i)(ax^j) \delta^{ij} T_{i'j'} = a^3 \int_{\mathbb{R}^3} d^3x x^i x^j \delta^{ij} T_{ij}, \quad (2.111)$$

onde os termos ax^i formam vetores físicos e $a^3 d^3x$ forma o elemento de volume físico. Com (2.109), temos que a perturbação no referencial local à fonte é (Chu, 2017a; Chu, 2017b)

$$\begin{aligned} h_{ij} &= 4G \int \frac{\delta(u)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \frac{a^3(\eta')}{a(\eta)} e_{i'}^k(x') e_{j'}^l(x') T_{kl}(x') d^4x' \\ &\quad + 4G \int \Theta(u) B(x, x') \frac{a^3(\eta')}{a(\eta)} e_{i'}^k(x') e_{j'}^l(x') T_{kl}(x') d^4x' \\ &= 4G \int \frac{\delta(u)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \frac{a^3(\eta')}{a(\eta)} a^{-1}(\eta') \delta^k_i a^{-1}(\eta') \delta^l_j T_{kl}(x') d^4x' \\ &\quad + 4G \int \Theta(u) B(x, x') \frac{a^3(\eta')}{a(\eta)} a^{-1}(\eta') \delta^k_i a^{-1}(\eta') \delta^l_j T_{kl}(x') d^4x' \\ &= 4G \int \frac{\delta(u)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \frac{a(\eta')}{a(\eta)} T_{ij}(x') d^4x' + 4G \int \Theta(u) B(x, x') \frac{a(\eta')}{a(\eta)} T_{ij}(x') d^4x'. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Para uma fonte astrofísica isolada no universo plano de Friedmann, em ordem linear, temos que seu tensor energia-momento se conserva (Chu, 2017a),

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}^\mu T_{\mu\nu} &= 0 \\ -\partial_0 T_{0\nu} + \delta^{ij} \partial_j T_{i\nu} - 2\frac{a'}{a} T_{0\nu} + \frac{a'}{a} \delta^0_\nu T_{00} - \delta^{ij} \tilde{\Gamma}_{j\nu}^0 T_{i0} + \tilde{\Gamma}_{0\nu}^i T_{0i} - \delta^{jk} \tilde{\Gamma}_{k\nu}^i T_{ij} &= 0. \end{aligned} \quad (2.113)$$

A equação para $\nu = 0$,

$$\partial_0 T_{00} - \delta^{ij} \partial_j T_{i0} + \frac{a'}{a} T_{00} + \frac{a'}{a} \delta^{ij} T_{ij} = 0. \quad (2.114)$$

Somando e subtraindo $(a'/a)T_{00}$ e rearranjando,

$$\begin{aligned} \delta^{ij} \partial_j T_{i0} + \frac{a'}{a} T_{00} - \frac{a'}{a} \delta^{ij} T_{ij} &= \partial_0 T_{00} + 2\frac{a'}{a} T_{00} \\ \delta^{ij} \partial_j T_{i0} - \frac{a'}{a} (-T_{00} + \delta^{ij} T_{ij}) &= \partial_0 T_{00} + 2\frac{a'}{a} T_{00} \\ \delta^{ij} \partial_j T_{i0} - \frac{a'}{a} \eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} &= \partial_0 T_{00} + 2\frac{a'}{a} T_{00}. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Agora multiplicamos por a^2 e obtemos

$$a^2 \delta^{ij} \partial_j T_{i0} - a a' \eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = \partial_0 (a^2 T_{00}). \quad (2.116)$$

A equação para $\nu = i$ resulta em

$$\partial_0 T_{0i} - \delta^{kl} \partial_l T_{ki} + 2\frac{a'}{a} T_{0i} = 0. \quad (2.117)$$

Novamente, multiplicando por a^2 ,

$$\partial_0 (a^2 T_{0i}) = \delta^{kl} \partial_l (a^2 T_{ki}). \quad (2.118)$$

Se derivarmos em relação a η a expressão (2.116) e usarmos (2.118), obtemos que

$$\begin{aligned} \partial_0 (\delta^{ij} \partial_j (a^2 T_{i0})) - \partial_0 (a a' \eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}) &= \partial_0^2 (a^2 T_{00}) \\ \delta^{ij} \partial_j \partial_0 (a^2 T_{i0}) - \partial_0 (a a' \eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}) &= \partial_0^2 (a^2 T_{00}) \\ \delta^{ij} \partial_j (\delta^{kl} \partial_l (a^2 T_{ki})) &= \partial_0^2 (a^2 T_{00}) + \partial_0 (a a' \eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}) \\ \delta^{ij} \delta^{kl} \partial_j \partial_l (a^2 T_{ki}) &= \partial_0^2 (a^2 T_{00}) + \partial_0 (a a' \eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}). \end{aligned} \quad (2.119)$$

Agora, integrando por $\int d^3 x x^i x^j$ dos dois lados e fazendo uso de (2.110) e (2.111)

$$\begin{aligned} \int d^3 x x^i x^j \delta^{nm} \delta^{kl} \partial_m \partial_l (a^2 T_{kn}) &= \partial_0^2 \left(\int d^3 x x^i x^j a^2 T_{00} \right) + \partial_0 \left(a' \int d^3 x x^i x^j a \eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \right) \\ &= \partial_0^2 \left(\int d^3 x x^i x^j a^2 \frac{a}{a} T_{00} \right) + \partial_0 \left(a' \int d^3 x x^i x^j a \frac{a^2}{a^2} \eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \right) \\ &= \partial_0 \left[\partial_0 (a^{-1} I_{ij}) + \frac{a'}{a^2} (-I_{ij} + P_{ij}) \right] \\ &= \partial_0 \left[a^{-1} \partial_0 I_{ij} - \frac{a'}{a^2} (2I_{ij} - P_{ij}) \right]. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Integrando por partes duas vezes o lado esquerdo de (2.120) e assumindo uma fonte bem localizada, de forma que termos de superfície sejam nulos, temos que

$$\int d^3x x^i x^j \delta^{nm} \delta^{kl} \partial_m \partial_l (a^2 T_{kn}) = 2 \int d^3x a^2 T_{ij}. \quad (2.121)$$

Portanto, (2.120) torna-se (Chu, 2017a)

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x a^2(\eta) T_{ij}(\eta, \vec{x}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{a} \frac{\partial I_{ij}}{\partial \eta}(\eta) - \frac{a'}{a^2} (2I_{ij}(\eta) - P_{ij}(\eta)) \right]. \quad (2.122)$$

Retornando à expressão (2.112) da perturbação, a parte direta da onda é

$$\begin{aligned} h_{ij}^D(\eta, \vec{x}) &= 4G \int \frac{\delta(\eta - \eta' - |\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \frac{a(\eta')}{a(\eta)} T_{ij}(\eta', \vec{x}') d^4x' \\ &= \frac{4G}{a(\eta)} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{a(\eta - |\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} T_{ij}(\eta - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}') d^3x'. \end{aligned} \quad (2.123)$$

Vamos avaliar o comportamento do campo a grandes distâncias da fonte, i.e. pontos na zona de onda $|\vec{x}| \gg |\vec{x}'|$, de forma que $|\vec{x} - \vec{x}'| \approx |\vec{x}| - \vec{x}' \cdot \hat{n}$, onde $\hat{n}$ é o vetor unitário na direção de $\vec{x}$ (Misner; Wheeler, 1973; Landau; Lifshitz, 1975). Para velocidades muito menores que a da luz, $v \ll 1$, o sistema não muda de forma apreciável com o tempo e então podemos desconsiderar o termo $\vec{x}' \cdot \hat{n}$ em relação a $|\vec{x}|$ (Landau; Lifshitz, 1975). Definindo $|\vec{x}| \equiv r$ e o tempo retardado conforme $\eta_r = \eta - r$ e usando (2.122), obtemos com (2.123) a fórmula de quadrupolo⁷,

$$\begin{aligned} h_{ij}^D(\eta, \vec{x}) &= \frac{4G}{a(\eta)} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{a(\eta - r)}{r} T_{ij}(\eta - r, \vec{x}') d^3x' \\ &= \frac{4G}{a(\eta) a(\eta - r) r} \int_{\mathbb{R}^3} a(\eta - r)^2 T_{ij}(\eta - r, \vec{x}') d^3x' \\ &= \frac{2G}{a(\eta) a(\eta_r) r} \left(\frac{d}{d\eta} \left[\frac{1}{a} \frac{dI_{ij}}{d\eta} - \frac{a'}{a^2} (2I_{ij} - P_{ij}) \right] \right)_{\eta=\eta_r}. \end{aligned} \quad (2.124)$$

A cauda, considerando uma fonte que é ativa por um tempo finito $\eta_0 \leq \eta \leq \eta_f$ muito menor que o tempo de Hubble H_0^{-1} (Chu, 2015; Chu, 2017a; Jokela; Kajantie; Sarkkinen, 2022),

$$\begin{aligned} h_{ij}^C(\eta, \vec{x}) &= 4G \int \theta(\eta - \eta' - |\vec{x} - \vec{x}'|) B(\eta, \eta') \frac{a(\eta')'}{a(\eta)} T_{ij}(\eta', \vec{x}') d^4x' \\ &= 4G \int_{\eta_0}^{\eta_r} \int_{\mathbb{R}^3} B(\eta, \eta') \frac{a^2(\eta')}{a(\eta) a(\eta')} T_{ij} d\eta' d^3x' \\ &= \frac{2G}{a(\eta)} \int_{\eta_0}^{\eta_r} \frac{B(\eta, \eta')}{a(\eta')} \frac{d}{d\eta'} \left[\frac{1}{a} \frac{dI_{ij}}{d\eta'} - \frac{a'}{a^2} (2I_{ij} - P_{ij}) \right] d\eta'. \end{aligned} \quad (2.125)$$

⁷ Mais trabalhos sobre a fórmula de quadrupolo em outros espaços-tempos, como *de Sitter*, por exemplo, podem ser encontrados em (Ashtekar; Bonga; Kesavan, 2015; Date; Hoque, 2016; Hoque; Aggarwal, 2019; Compère; Hoque; Kutluk, 2024; Chu, 2017a).

Integrando por partes, obtêm-se

$$h_{ij}^C = \frac{2G}{a(\eta)} \left[\frac{B(\eta, \eta')}{a(\eta')} \left(\frac{1}{a} I'_{ij} - \frac{a'}{a^2} (2I_{ij} - P_{ij}) \right) \right]_{\eta_0}^{\eta_r} - \frac{2G}{a(\eta)} \int_{\eta_0}^{\eta_r} \frac{d}{d\eta'} \left(\frac{B(\eta, \eta')}{a(\eta')} \right) \left(\frac{1}{a} I'_{ij} - \frac{a'}{a^2} (2I_{ij} - P_{ij}) \right) d\eta'. \quad (2.126)$$

Como B e a , por serem quantidades que dizem respeito ao fundo, não mudam de forma significativa durante o tempo de atividade da fonte, podemos descartar o segundo termo da cauda, recuperando o resultado apresentado por (Jokela; Kajantie; Sarkkinen, 2022),

$$h_{ij}^C(\eta, \vec{x}) = \frac{2G}{a(\eta)} \left[\frac{B(\eta, \eta_r)}{a(\eta_r)} \frac{dI_{ij}}{d\eta}(\eta_r) - \frac{B(\eta, \eta_0)}{a(\eta_0)} \frac{dI_{ij}}{d\eta}(\eta_0) \right]. \quad (2.127)$$

A cauda é um efeito já conhecido na Relatividade Geral na produção da ondas gravitacionais (veja, por exemplo, (Bonnor; Rotenberg, 1966) e (Couch *et al.*, 1968)). O fenômeno é devido ao retroespalhamento da onda no próprio espaço-tempo de fundo. No contexto da cosmologia, vários trabalhos como, por exemplo, (Chu, 2015; Tolish; Wald, 2016; Ashtekar; Bonga; Kesavan, 2015; Date; Hoque, 2016; Jokela; Kajantie; Sarkkinen, 2022), discutem a cauda e seus possíveis efeitos. Chu, em (Chu, 2015), estima que, para o universo dominado por matéria, a relação entre as amplitudes é $|h_{ij}^C|/|h_{ij}^D| \propto 1/\eta_0^2$, onde η_0 é a idade do universo. Em (Jokela; Kajantie; Sarkkinen, 2022), os autores analisam o caso para o modelo Λ CDM e indicam uma supressão da cauda em relação à parte direta da ordem de 10^{-15} , com efeito cumulativo expressivo em escalas de tempo da ordem de H_0^{-1} . Portanto, para todos os fins práticos e propósito deste trabalho, ignoramos o termo da cauda e focamos apenas na parte direta da onda gravitacional, de forma que

$$h_{ij} \approx h_{ij}^D. \quad (2.128)$$

O leitor é convidado a consultar os artigos citados para mais detalhes e também mais alguns trabalhos que discutem possíveis detecções de caudas, como (Blanchet; Sathyaprakash, 1994), (Blanchet; Schafer, 1993) e (Trestini; Blanchet, 2023).

Da relação $ad\eta = dt$, podemos escrever (2.124) como

$$h_{ij}(t, \vec{x}) = \frac{2G}{a(t)r} \left[\frac{d^2 I_{ij}}{dt^2}(t) - \frac{d}{dt} \left(H(t) (2I_{ij}(t) - P_{ij}(t)) \right) \right]_{t=t_r}, \quad (2.129)$$

com o tempo retardado definido por $\int_t^{t_r} dt'/a = r$. Note a diferença com a já conhecida fórmula de quadrupolo obtida por Einstein (Einstein, 1918). Neste caso, devido à expansão do universo, aparece o termo extra $d(H(2I_{ij} - P_{ij}))/dt$ e também o fator de escala no denominador para que tenhamos a distância própria $a(t)r$ entre a fonte e o observador. No curto tempo de atividade da fonte, de forma que o efeito da expansão do universo no sistema seja negligenciável, temos que (2.129) se reduz para

$$h_{ij}(t, \vec{x}) = \frac{2G}{a(t)r} \frac{d^2 I_{ij}}{dt^2}(t_r). \quad (2.130)$$

2.4 Sistema binário

Investigamos agora como fonte das ondas gravitacionais um sistema binário isolado de objetos compactos, como estrelas de nêutrons e buracos negros. Vale mencionar que nesta seção não consideraremos $c = 1$ e, portanto, a velocidade da luz aparecerá explicitamente nas expressões.

É interessante definirmos algumas regiões em volta da fonte antes de prosseguirmos com os cálculos. Fazemos a divisão das regiões como em (Thorne; Blandford, 2017). Para uma fonte de tamanho $C \lesssim (GM/c^2)$ e massa M , a região $r \lesssim 10(GM/c^2)$ é a região de campo forte, onde o espaço-tempo é influenciado pela fonte. Para $10(GM/c^2) \lesssim r \lesssim \lambda$, temos a região de campo fraco, onde o campo gravitacional é bem aproximado pela teoria de Newton. Com $\lambda \lesssim r \lesssim \lambda$, entramos na zona de indução. A partir de $r \sim \lambda = 2\pi\lambda$ temos a zona de onda, que é dividida em mais duas partes: a zona de onda local e a zona de onda distante. A zona de onda local é a região $\lambda \lesssim r \lesssim R$, para algum R , onde não há influência externa de outros corpos e da expansão do universo. A zona de onda distante, i.e. $r \gtrsim R$, é onde a onda gravitacional que está se propagando passa a sentir a influência da expansão cósmica e de outros corpos. A região $10(GM/c^2) \lesssim r \lesssim R$ é a região local assintótica de repouso da fonte.

A produção de OGs aqui é calculada na zona de onda local, onde a intuição Newtoniana pode ser usada. Durante a propagação nessa região o fator de escala não muda de forma apreciável e pode ser tido como constante, $a = \text{const.}$ Definimos as coordenadas físicas

$$\vec{x}_f = a\vec{x}, \quad (2.131)$$

do qual temos

$$d\vec{x}_f = a d\vec{x} + H\vec{x}_f dt = a d\vec{x} + \mathcal{H}\vec{x}_f d\eta. \quad (2.132)$$

Portanto, enquanto $|\vec{x}_f|$ for muito menor que a escala λ_H do horizonte, então $d\vec{x}_f = a d\vec{x}$.

Tratamos os corpos da binária como massas pontuais m_1 e m_2 e de posições $\vec{x}_f^1$ e $\vec{x}_f^2$, respectivamente. Ilustramos na figura 2.1 o sistema.

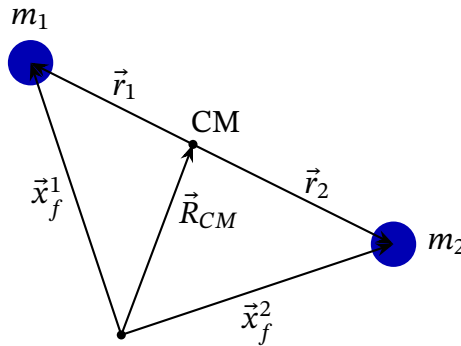


Figura 2.1 – Ilustração do sistema binário considerado.

O vetor $\vec{R}_{CM}$ que localiza o centro de massa é dado por

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1 \vec{x}_f^1 + m_2 \vec{x}_f^2}{m_1 + m_2}. \quad (2.133)$$

Definimos a coordenada relativa física entre as massas por

$$\vec{R}_f \equiv \vec{x}_f^1 - \vec{x}_f^2, \quad (2.134)$$

e também definimos as distâncias $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ saindo a partir do CM, de forma que $|\vec{R}_f| = |\vec{r}_1| + |\vec{r}_2|$. Com isso, note que

$$\begin{aligned} \vec{x}_f^1 &= \vec{r}_1 + \vec{R}_{CM}, \\ \vec{x}_f^2 &= \vec{r}_2 + \vec{R}_{CM}. \end{aligned} \quad (2.135)$$

Substituindo (2.135) em $\vec{R}_{CM}$, obtém-se a relação

$$\begin{aligned} \vec{R}_{CM} &= \frac{m_1 \vec{x}_f^1 + m_2 \vec{x}_f^2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + (m_1 + m_2) \vec{R}_{CM}}{m_1 + m_2} \\ \Rightarrow \vec{r}_1 &= -\vec{r}_2 \frac{m_2}{m_1}. \end{aligned} \quad (2.136)$$

Substituindo (2.135) na coordenada relativa $\vec{R}_f$,

$$\vec{R}_f = \vec{x}_f^1 - \vec{x}_f^2 = \vec{r}_1 + \vec{R}_{CM} - (\vec{r}_2 + \vec{R}_{CM}) = \vec{r}_1 - \vec{r}_2. \quad (2.137)$$

Agora, usando (2.136) em (2.137) duas vezes, obtemos dois resultados:

$$\begin{aligned} \vec{R}_f &= -\frac{m}{m_1} \vec{r}_2, \\ \vec{R}_f &= \frac{m}{m_2} \vec{r}_1. \end{aligned} \quad (2.138)$$

Retornando às equações (2.135) e usando (2.138) e a massa reduzida μ , temos

$$\begin{aligned} \vec{x}_f^1 &= \vec{r}_1 + \vec{R}_{CM} = \frac{\mu}{m_1} \vec{R}_f + \vec{R}_{CM}, \\ \vec{x}_f^2 &= \vec{r}_2 + \vec{R}_{CM} = -\frac{\mu}{m_2} \vec{R}_f + \vec{R}_{CM}. \end{aligned} \quad (2.139)$$

As equações de movimento para cada massa são

$$\ddot{\vec{x}}_f^1 m_1 = -\frac{Gm_1 m_2}{R_f^3} \vec{R}_f \quad (2.140)$$

e

$$\ddot{\vec{x}}_f^2 m_2 = -\frac{Gm_1 m_2}{R_f^3} \vec{R}_f. \quad (2.141)$$

Usando (2.139) nas duas equações e subtraindo a primeira da segunda, obtemos a equação de movimento

$$2\mu \ddot{\vec{R}}_f + \ddot{\vec{R}}_{CM} (m_1 - m_2) = \frac{2Gm_1 m_2}{R_f^3} \vec{R}_f \quad (2.142)$$

Portanto, no referencial do centro de massa do sistema ($\vec{R}_{CM} = \vec{0}$) o problema se reduz para o de um corpo só, com massa igual a massa reduzida $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ e equação de movimento dada por

$$\mu \ddot{\vec{R}}_f = -\frac{Gm_1 m_2}{R_f^3} \vec{R}_f \Rightarrow \ddot{\vec{R}}_f = -\frac{Gm}{R_f^3} \vec{R}_f, \quad (2.143)$$

onde $m = m_1 + m_2$ é a massa total.

O tensor energia-momento de uma partícula qualquer de massa M é (Landau; Lifshitz, 1975)

$$T^{\mu\nu} = \frac{M}{\sqrt{|\tilde{g}|}} \int u^\mu u^\nu \delta^{(4)}(x - x_p(\tau)) d\tau, \quad (2.144)$$

onde $x_p(\tau)$ é a trajetória da partícula, τ o tempo próprio e u^μ a quadrivelocidade. Seguindo como em (Hoque; Aggarwal, 2019), nas coordenadas (η, x^i) e com a métrica $\tilde{g}_{\mu\nu} = a^2 \eta_{\mu\nu}$, temos que o tempo próprio da partícula é

$$\begin{aligned} d\tau &= \frac{1}{c} \sqrt{-\tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \\ &= \frac{a}{c} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \left(\frac{dx^\mu}{d\eta}\right) \left(\frac{dx^\nu}{d\eta}\right) d\eta} \\ &= \frac{a}{c} \sqrt{c^2 - \left(\frac{dx^i}{d\eta}\right)^2} d\eta \\ &= a \sqrt{1 - (v/c)^2} d\eta. \end{aligned} \quad (2.145)$$

Para o caso não-relativístico temos que T^{00} é então

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{M}{a^4} \int (u^0)^2 \delta^{(4)}(x - x_p(\tau)) d\tau \\ &= \frac{M}{a^4} \int \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2 \delta^{(4)}(x - x_p(\eta)) \frac{d\tau}{d\eta} d\eta \\ &= \frac{M}{a^5} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_p(\eta)). \end{aligned} \quad (2.146)$$

Abaixando os índices de T^{00} com $\tilde{g}_{00}$,

$$T_{00} = \frac{M}{a(\eta)} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_p(\eta)). \quad (2.147)$$

Portanto, para duas massas m_1 e m_2 com trajetórias $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_2$, respectivamente, a densidade de energia total é a soma das duas densidades de energia,

$$T_{00} = \frac{m_1}{a(\eta)} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_1(\eta)) + \frac{m_2}{a(\eta)} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_2(\eta)). \quad (2.148)$$

Como $a(\eta)$ muda apenas em escalas cosmológicas, podemos normalizar o tempo conforme de forma que no tempo presente $\eta = t$ (Maggiore, 2007) e trocar η por t no resultado acima.

Então, de (2.110), obtém-se o momento de quadrupolo (Hoque; Aggarwal, 2019)

$$\begin{aligned}
 I_{ij} &= a^3 \int x^i x^j T_{00} d^3x \\
 &= a^3 \int x^i x^j \left(\frac{m_1}{a(t)} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_1(t)) + \frac{m_2}{a(t)} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_2(t)) \right) d^3x \\
 &= a^2 m_1 x_1^i(t) x_1^j(t) + a^2 m_2 x_2^i(t) x_2^j(t) \\
 &\equiv m_1 x_f^{i(1)}(t) x_f^{j(1)}(t) + m_2 x_f^{i(2)}(t) x_f^{j(2)}(t),
 \end{aligned} \tag{2.149}$$

onde transformamos os vetores $a\vec{x}_1$ e $a\vec{x}_2$ nos vetores físicos $\vec{x}_f^1$ e $\vec{x}_f^2$. Agora, fazendo uso de (2.139), que relaciona as coordenadas físicas com a coordenada relativa física $\vec{R}_f$ e a posição do centro de massa $\vec{R}_{CM}$, obtemos que I_{ij} é

$$\begin{aligned}
 I_{ij} &= m_1 x_f^{i(1)}(t) x_f^{j(1)}(t) + m_2 x_f^{i(2)}(t) x_f^{j(2)}(t) \\
 &= m_1 \left(\frac{\mu}{m_1} R_f^i + R_{CM}^i \right) \left(\frac{\mu}{m_1} R_f^j + R_{CM}^j \right) + m_2 \left(-\frac{\mu}{m_2} R_f^i + R_{CM}^i \right) \left(-\frac{\mu}{m_2} R_f^j + R_{CM}^j \right) \\
 &= \mu R_f^i(t) R_f^j(t) + (m_1 + m_2) R_{CM}^i R_{CM}^j.
 \end{aligned} \tag{2.150}$$

Portanto, como estamos considerando o problema no CM do sistema, o momento de quadrupolo se torna a simples expressão (Hoque; Aggarwal, 2019)

$$I_{ij} = \mu R_f^i(t) R_f^j(t). \tag{2.151}$$

Escolhemos a órbita no plano $x - y$ e $\vec{R}_f(t)$ dado por

$$\vec{R}_f(t) = [R_f \cos(\Phi(t)/2 + \pi/2), R_f \sin(\Phi(t)/2 + \pi/2), 0], \tag{2.152}$$

onde $R_f \equiv |\vec{R}_f|$ e $\Phi(t)$ é a fase orbital definida por (Maggiore, 2007)

$$\Phi(t) \equiv 2 \int \omega(t) dt, \tag{2.153}$$

com ω a velocidade angular orbital. Estudamos o regime em que $\dot{\omega} \ll \omega^2$, i.e., o regime de órbita quasi-circular, em que o raio orbital diminui de forma adiabática permitindo a aproximação de movimento circular, de forma que a velocidade radial $|\dot{R}_f|$ é muito menor que a velocidade tangencial ωR_f e podemos ignorar as derivadas $\dot{R}_f$ e $\dot{\omega}$. Com essas condições, teremos as únicas componentes não nulas do momento de quadrupolo:

$$\begin{aligned}
 \ddot{I}_{11} &= -\ddot{I}_{22} = \frac{\mu}{2} R_f^2 \dot{\Phi}^2 \cos \Phi = 2\mu R_f^2 \omega^2 \cos \Phi, \\
 \ddot{I}_{12} &= \ddot{I}_{21} = \frac{\mu}{2} R_f^2 \dot{\Phi}^2 \sin \Phi = 2\mu R_f^2 \omega^2 \sin \Phi.
 \end{aligned} \tag{2.154}$$

De (2.130) vemos que

$$h_+ = \frac{h_{11} - h_{22}}{2} = \frac{G}{c^4 a r} (\ddot{I}_{11} - \ddot{I}_{22}) \tag{2.155}$$

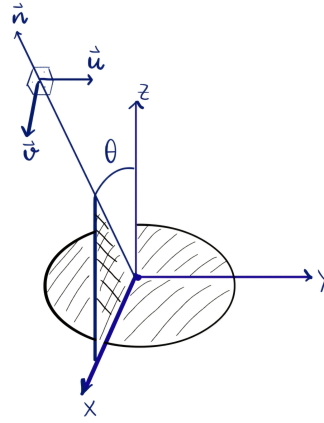


Figura 2.2 – Esquema da configuração considerada para a onda gravitacional radiada em uma direção $\vec{n}$.

e

$$h_{\times} = \frac{h_{12} + h_{21}}{2} = \frac{G}{c^4 ar} (\ddot{I}_{12} + \ddot{I}_{21}). \quad (2.156)$$

Portanto, substituindo os momentos de quadrupolo, temos que h_+ e $h_{\times}$ serão

$$h_+(t) = \frac{4G}{c^4 a(t)r} \mu \omega^2 R_f^2 \cos \Phi(t_r) \quad (2.157)$$

e

$$h_{\times}(t) = \frac{4G}{c^4 a(t)r} \mu \omega^2 R_f^2 \sin \Phi(t_r), \quad (2.158)$$

lembrando que avaliamos as derivadas no tempo retardado $t_r = t - ar/c \equiv t - r_f/c$.

Se quisermos a radiação em uma direção fixa $\vec{n}$ formando um ângulo θ entre o eixo z e $\vec{n}$, então termos envolvendo θ aparecerão em h_+ e $h_{\times}$. Definimos junto de $\vec{n}$ os vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$, que são ortogonais entre si e a $\vec{n}$ (figura 2.2), formando outro referencial (x', y', z') , com x' alinhado com $\vec{v}$, y' com $\vec{u}$ e z' com $\vec{n}$. Queremos então as polarizações $+$ e $\times$ nesse referencial rotacionado, que chamamos de S' . Para S' , as ondas se propagam em seu eixo z' , i.e., as polarizações são definidas no plano $x' - y'$, e são (Maggiore, 2007)

$$\begin{aligned} h_+ &= \frac{G}{c^4 ar} (\ddot{I}'_{11} - \ddot{I}'_{22}), \\ h_{\times} &= \frac{G}{c^4 ar} (\ddot{I}'_{12} - \ddot{I}'_{21}), \end{aligned} \quad (2.159)$$

onde I'_{ij} é o momento de quadrupolo para S' . Portanto, aplicando uma rotação $R(\theta)$ em I_{ij} obtemos I'_{ij} ,

$$I' = R^T I R = R_{ki} R_{lj} I_{kl}. \quad (2.160)$$

Usando a matriz de rotação

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (2.161)$$

obtemos

$$\begin{aligned} I'_{11} &= \cos^2 \theta I_{11}, \\ I'_{22} &= I_{22}, \\ I'_{12} &= I_{21} = \cos \theta I_{12}. \end{aligned} \quad (2.162)$$

Substituindo (2.162) em (2.159),

$$\begin{aligned} h_+(t) &= \frac{G}{c^4 a r} (\ddot{I}_{11} \cos^2 \theta - \ddot{I}_{22}), \\ h_\times(t) &= \frac{G}{c^4 a r} (2\ddot{I}_{12} \cos \theta). \end{aligned} \quad (2.163)$$

Usando (2.154) no resultado acima, temos que

$$\begin{aligned} h_+(t) &= \frac{4G\mu\omega^2 R_f^2}{c^4 a(t)r} \frac{(1 + \cos^2 \theta)}{2} \cos \Phi(t_r), \\ h_\times(t) &= \frac{4G\mu\omega^2 R_f^2}{c^4 a(t)r} \cos(\theta) \sin \Phi(t_r). \end{aligned} \quad (2.164)$$

Agora, das equações de movimento, temos que

$$\begin{aligned} \frac{Gm\mu}{R_f^2} &= \mu \frac{v_f^2}{R_f} \\ \Rightarrow \omega^2 &= \frac{Gm}{R_f^3}, \end{aligned} \quad (2.165)$$

onde usamos que a velocidade física $v_f = \omega R_f$. Introduzimos agora a quantidade chamada de “*chirp mass*”, definida por (Maggiore, 2007)

$$M_c \equiv \mu^{3/5} m^{2/5}. \quad (2.166)$$

Definindo $2\omega \equiv \omega_{og} = 2\pi f_{og}$ como a frequência da OG e fazendo uso de (2.165) e (2.166) em (2.164), obtemos

$$\begin{aligned} h_+(t) &= \frac{4G}{c^4 a(t)r} \left(\frac{M_c}{m^{2/5}} \right)^{5/3} \omega^2 \left(\frac{Gm}{\omega^2} \right)^{2/3} \frac{(1 + \cos^2 \theta)}{2} \cos \Phi(t_r) \\ &= \frac{4}{a(t)r} \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/3} \left(\frac{\pi f_{og}(t_r)}{c} \right)^{2/3} \frac{(1 + \cos^2 \theta)}{2} \cos \Phi(t_r), \end{aligned} \quad (2.167)$$

e

$$\begin{aligned} h_\times(t) &= \frac{4G}{c^4 a(t)r} \left(\frac{M_c}{m^{2/5}} \right)^{5/3} \omega^2 \left(\frac{Gm}{\omega^2} \right)^{2/3} \cos \theta \sin \Phi(t_r) \\ &= \frac{4}{a(t)r} \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/3} \left(\frac{\pi f_{og}(t_r)}{c} \right)^{2/3} \cos \theta \sin \Phi(t_r), \end{aligned} \quad (2.168)$$

Após a onda gravitacional ser gerada ela viaja até o observador obedecendo a equação de propagação (2.76). Usando o resultado acima no tempo de emissão t_e como condição

inicial para a solução (2.90) de (2.76) obtemos que os sinais observados no tempo t_o são (Maggiore, 2007)

$$\begin{aligned} h_+(t_o) &= \frac{4}{a(t_o)r} \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/3} \left(\frac{\pi f_{og}(t_{re})}{c} \right)^{2/3} \frac{(1 + \cos^2 \theta)}{2} \cos \Phi(t_{ro}), \\ h_\times(t_o) &= \frac{4}{a(t_o)r} \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/3} \left(\frac{\pi f_{og}(t_{re})}{c} \right)^{2/3} \cos \theta \sin \Phi(t_{ro}), \end{aligned} \quad (2.169)$$

onde t_{re} é o tempo retardado de emissão e t_{ro} o tempo retardado de observação. Da relação $f(t_e) = (1+z)f(t_o)$ e adotando o tempo observado como o tempo presente $t_o = t_0$, obtemos portanto

$$\begin{aligned} h_+(t_0) &= \frac{4}{a(t_0)r} \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/3} \left(\frac{\pi(1+z)f_{og}(t_{ro})}{c} \right)^{2/3} \frac{(1 + \cos^2 \theta)}{2} \cos \Phi(t_{ro}), \\ h_\times(t_0) &= \frac{4}{a(t_0)r} \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/3} \left(\frac{\pi(1+z)f_{og}(t_{ro})}{c} \right)^{2/3} \cos \theta \sin \Phi(t_{ro}). \end{aligned} \quad (2.170)$$

O fator de $(1+z)^{2/3}$ pode ser decomposto em $(1+z)^{5/3}/(1+z)$ e tirado de dentro do parêntese, multiplicando então M_c e $a(t_0)r$. Definimos então a nova quantidade $M_z \equiv (1+z)M_c$ e usamos a distância luminosidade (2.33), resultando em

$$h_+(t_0) = \frac{4}{D_L(z)} \left(\frac{GM_z}{c^2} \right)^{5/3} \left(\frac{\pi f_{og}(t_{ro})}{c} \right)^{2/3} \frac{(1 + \cos^2 \theta)}{2} \cos \Phi(t_{ro}) \quad (2.171)$$

e

$$h_\times(t_0) = \frac{4}{D_L(z)} \left(\frac{GM_z}{c^2} \right)^{5/3} \left(\frac{\pi f_{og}(t_{ro})}{c} \right)^{2/3} \cos \theta \sin \Phi(t_{ro}). \quad (2.172)$$

Note como o resultado para h_+ e $h_\times$ nos dá diretamente a distância luminosidade D_L da binária, fazendo das ondas gravitacionais um ótimo fenômeno para testar modelos cosmológicos, i.e., serve como um novo tipo de sonda cosmológica para medir a constante de Hubble, H_0 , através de D_L ! No entanto, embora permitam uma medida precisa da distância luminosidade, as ondas gravitacionais, por si só, não fornecem o redshift z da fonte. A menos que o evento produza uma contrapartida eletromagnética junto da gravitacional, não é possível determinar com certeza z e, conseqüentemente, isso limita a utilização de eventos puramente gravitacionais em análises cosmológicas para inferir H_0 , fazendo-se necessário recorrer a métodos alternativos para complementar a ausência do redshift, como o uso de redshifts de galáxias através de um catálogo de galáxias (Palmese *et al.*, 2023). A primeira vez em que foi proposto o uso das ondas gravitacionais como sonda cosmológica foi em 1986 por Bernard Schutz (Schutz, 1986), e desde então novos trabalhos vem sendo desenvolvidos (ver, e.g., (Markovic, 1993; Cutler *et al.*, 1993; Chernoff; Finn, 1993; Nissanke *et al.*, 2013; Feeney *et al.*, 2021)).

A fase Φ e a frequência f_{og} de h_+ e $h_\times$ podem ser obtidas a partir da potência radiada em ondas gravitacionais (Maggiore, 2007). Novamente na zona de onda local, a energia

contida em um volume V é

$$E = c \int_V a^3 t_{00} d^3x, \quad (2.173)$$

e a potência radiada é

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -c \int a^3 \partial^0 t_{00} d^3x \\ &= c \int a^3 \partial^i t_{i0} d^3x \\ &= c \int a^2 n^i t_{i0} d^2x, \end{aligned} \quad (2.174)$$

onde usamos a equação de conservação $\tilde{\nabla}^\mu t_{\mu\nu} \rightarrow \partial^\mu t_{\mu\nu} = 0$, já que todas as conexões tornam-se nulas no regime em que estamos. Em coordenadas esféricas o vetor tipo-espaço unitário normal à superfície de uma esfera centrada na fonte é $n^i = (1/a, 0, 0)$, então

$$P = c \int ar^2 \sin \theta t_{r0} d\theta d\varphi = car^2 \int t_{r0} d\Omega. \quad (2.175)$$

Com a expressão para $t_{\mu\nu}$, equação (1.70), conseguimos calcular t_{0r} ⁸

$$\begin{aligned} t_{0r} &= \frac{c^4}{32\pi G} \langle \tilde{\nabla}_0 \gamma^{ij} \tilde{\nabla}_r \gamma_{ij} \rangle \\ &= \frac{c^4}{32\pi G} \langle \tilde{\nabla}_0 \gamma^{11} \tilde{\nabla}_r \gamma_{11} + \tilde{\nabla}_0 \gamma^{12} \tilde{\nabla}_r \gamma_{12} + \tilde{\nabla}_0 \gamma^{21} \tilde{\nabla}_r \gamma_{21} + \tilde{\nabla}_0 \gamma^{22} \tilde{\nabla}_r \gamma_{22} \rangle \\ &= \frac{c^4}{32\pi G} \left\langle \partial_0 h^{11} \partial_r h_{11} + \partial_0 h^{12} \partial_r h_{12} - \frac{\partial_0 h^{12} h_{12}}{r} + \partial_0 h^{21} \partial_r h_{21} - \frac{\partial_0 h^{21} h_{21}}{r} \right. \\ &\quad \left. + \partial_0 h^{22} \partial_r h_{22} - 2 \frac{\partial_0 h^{22} h_{22}}{r} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.176)$$

Note que, como $h_{ij} \propto 1/r$, os termos acompanhados de $1/r$ são de $\mathcal{O}(1/r^3)$, portanto podemos ignorá-los e obtemos

$$t_{0r} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial_0 h_{ij} \partial_r h_{ij} \rangle = \frac{c^3}{32\pi G} \langle \partial_t h_{ij} \partial_r h_{ij} \rangle, \quad (2.177)$$

onde usamos que $(1/c)\partial_t = \partial_0$. Lembrando que h_{ij} é função do tempo retardado $t_r = t - ra/c$, conseguimos escrever a derivada $\partial_r h_{ij}$ como uma derivada temporal

$$\frac{\partial h_{ij}(t_r)}{\partial r} = \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial r}, \quad (2.178)$$

Derivando t_r em relação a t_r e r , temos que

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial r} = -\frac{a}{c} \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} \quad (2.179)$$

e que t_{0r}

$$t_{0r} = -\frac{ac^2}{32\pi G} \langle \partial_t h_{ij} \partial_t h_{ij} \rangle. \quad (2.180)$$

⁸ Os símbolos de Christoffel usados estão listados no apêndice A.

Colocando (2.180) na expressão para a potência,

$$P = -\frac{c^3 a^2 r^2}{32\pi G} \int \langle \partial_t h_{ij} \partial_t h_{ij} \rangle d\Omega = -\frac{a^2 r^2 c^3}{16\pi G} \int \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle d\Omega. \quad (2.181)$$

Derivando (2.164) em relação a t ,

$$\begin{aligned} \dot{h}_+ &= -\frac{8G\mu\omega^3 R_f^2}{c^4 a r} \frac{(1 + \cos^2 \theta)}{2} \sin \Phi, \\ \dot{h}_\times &= \frac{8G\mu\omega^3 R_f^2}{c^4 a r} \cos \theta \cos \Phi. \end{aligned} \quad (2.182)$$

Portanto P é

$$\begin{aligned} P &= -\frac{a^2 r^2 c^3}{16\pi G} \int \left\langle \left(-\frac{8G\mu\omega^3 R_f^2}{c^4 a r} \frac{(1 + \cos^2 \theta)}{2} \sin \Phi \right)^2 + \left(\frac{8G\mu\omega^3 R_f^2}{c^4 a r} \cos \theta \cos \Phi \right)^2 \right\rangle d\Omega \\ &= -\frac{a^2 r^2 c^3}{16\pi G} \left(\frac{8G\mu\omega^3 R_f^2}{c^4 a r} \right)^2 \int \left[\left(\frac{(1 + \cos^2 \theta)}{2} \right)^2 \langle \sin^2 \Phi \rangle + \cos^2 \theta \langle \cos^2 \Phi \rangle \right] d\Omega \\ &= -\frac{4G\mu^2 \omega^6 R_f^4}{\pi c^5} \int \left[\left(\frac{(1 + \cos^2 \theta)}{2} \right)^2 \frac{1}{2} + \cos^2 \theta \frac{1}{2} \right] d\Omega \\ &= -\frac{32}{5} \frac{G\mu^2 \omega^6 R_f^4}{c^5}, \end{aligned} \quad (2.183)$$

onde usamos novamente que $\langle \sin^2 \Phi \rangle = \langle \cos^2 \Phi \rangle = 1/2$ e que a integral $\int [(1 + \cos^2 \theta)^2/4 + \cos^2 \theta] d\Omega/4\pi = 4/5$. Utilizando (2.166) e (2.165), a potência pode ser colocado em função de M_c e ω_{og} ,

$$\begin{aligned} P &= -\frac{32}{5} \frac{G}{c^5} \left(\frac{M_c}{m^{2/5}} \right)^{10/3} \omega^6 \left(\frac{Gm}{\omega^2} \right)^{4/3} \\ &= -\frac{32}{5} \frac{G^{7/3}}{c^5} (M_c \omega)^{10/3} \\ &= -\frac{32}{5} \frac{c^5}{G} \left(\frac{GM_c \omega_{og}}{2c^3} \right)^{10/3}. \end{aligned} \quad (2.184)$$

A energia carregada pelas ondas gravitacionais vem da energia total do sistema, i.e., da energia orbital (Maggiore, 2007),

$$E = E_c + E_{pot} = -\frac{Gm_1 m_2}{2R_f}. \quad (2.185)$$

Colocando em termos de M_c e ω_{og} ,

$$E = -\frac{Gm_1 m_2}{2} \left(\frac{\omega^2}{Gm} \right)^{1/3} = -\frac{m_1 m_2}{m^{1/3}} \left(\frac{G\omega_{og}}{32} \right)^{2/3} = -M_c^{5/3} \left(\frac{G\omega_{og}}{32} \right)^{2/3}. \quad (2.186)$$

Derivando em relação ao tempo para obter a taxa de variação da energia,

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3} \left(\frac{G^2 M_c^5}{32} \right)^{1/3} \frac{\dot{\omega}_{og}}{\omega_{og}^{1/3}}. \quad (2.187)$$

Igualando (2.184) e (2.187) nos dá uma equação diferencial para ω_{og} (Maggiore, 2007),

$$\dot{\omega}_{og} = \frac{12}{5} 2^{1/3} \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3} \omega_{og}^{11/3}, \quad (2.188)$$

ou, usando $\omega_{og} = 2\pi f_{og}$,

$$\dot{f}_{og} = \frac{96}{5} \pi^{8/3} \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3} f_{og}^{11/3}. \quad (2.189)$$

Introduzindo o tempo para a coalescência da binária,

$$\tau = t_{coal} - t, \quad (2.190)$$

onde t_{coal} é o tempo da coalescência, i.e. uma constante, e integrando (2.189) em função de τ ,

$$f_{og}(\tau) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{5}{256\tau} \right)^{3/8} \left(\frac{c^3}{GM_c} \right)^{5/8}. \quad (2.191)$$

Por exemplo, se tivermos uma binária composta por $m_1 = m_2 = 1.4 M_\odot$, logo $M_c = 1.21 M_\odot$ e a frequência,

$$f_{og}(\tau) \approx 134 \text{ Hz} \left(\frac{1s}{\tau} \right)^{3/8}, \quad (2.192)$$

ou o tempo de coalescência,

$$\tau \approx 2.18 \text{ s} \left(\frac{100 \text{ Hz}}{f_{og}} \right)^{8/3}. \quad (2.193)$$

A frequência medida pelo observador distante é, usando (2.24),

$$\begin{aligned} f_{og}(\tau_o) &= \frac{1}{1+z} \frac{1}{\pi} \left(\frac{5}{256\tau} \right)^{3/8} \left(\frac{c^3}{GM_c} \right)^{5/8} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{5}{256\tau_o} \right)^{3/8} \left(\frac{c^3}{GM_z} \right)^{5/8}, \end{aligned} \quad (2.194)$$

onde definimos o tempo para a coalescência observado $\tau_o \equiv (1+z)\tau$. Note que não precisamos considerar o tempo retardado ao trabalhar com τ . Se $\tau_r \equiv (t_{coal})_r - t_r$ é o tempo retardado para a coalescência, então $\tau_r = t_{coal} - r_f/c - (t - r_f/c) = t_{coal} - t = \tau$. A partir da frequência podemos determinar a fase Φ com a equação (2.153). Primeiro, note que Φ tem a mesma forma para a frequência no referencial da fonte quanto no referencial do observador,

$$\Phi = 2\pi \int f(t_e) dt_e = 2\pi \int (1+z) f(t_o) \frac{dt_o}{1+z} = 2\pi \int f(t_o) dt_o. \quad (2.195)$$

Portanto, integrando (2.194),

$$\Phi(\tau_o) = -2\pi \int f_{og}(\tau_{obs}) d\tau_o = -2 \left(\frac{c^3 \tau_o}{5GM_z} \right)^{5/8} + \Phi_0, \quad (2.196)$$

onde Φ_0 é a constante de integração, determinada pela condição inicial $\Phi(0) \equiv \Phi_0$. Finalmente, substituindo (2.194) em h_+ e $h_\times$,

$$h_+(\tau_o) = \frac{1}{D_L(z)} \left(\frac{GM_z}{c^2} \right)^{5/4} \left(\frac{5}{c\tau_o} \right)^{1/4} \frac{(1 + \cos^2 \theta)}{2} \cos \Phi(\tau_o), \quad (2.197)$$

e

$$h_{\times}(\tau_o) = \frac{1}{D_L(z)} \left(\frac{GM_z}{c^2} \right)^{5/4} \left(\frac{5}{c\tau_o} \right)^{1/4} \cos \theta \sin \Phi(\tau_o), \quad (2.198)$$

com $\Phi(\tau_o)$ dado pela equação (2.196). A figura 2.3 ilustra o formato de h_+ em função do tempo t . Note que, a medida que $t \rightarrow t_{coal}$, a frequência $f_{og} \rightarrow \infty$, como ilustrado na figura

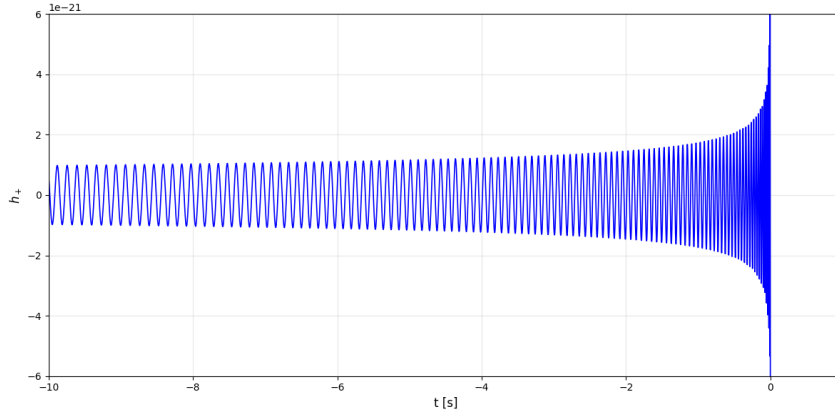


Figura 2.3 – Imagem ilustrativa de h_+ em função do tempo. Escolhemos para fazer o gráfico $m_1 = 42M_{\odot}$ e $m_2 = 31.4M_{\odot}$, $D_L = 150\text{Mpc}$ e $z = 0.03$.

2.4, com o gráfico da equação (2.191).

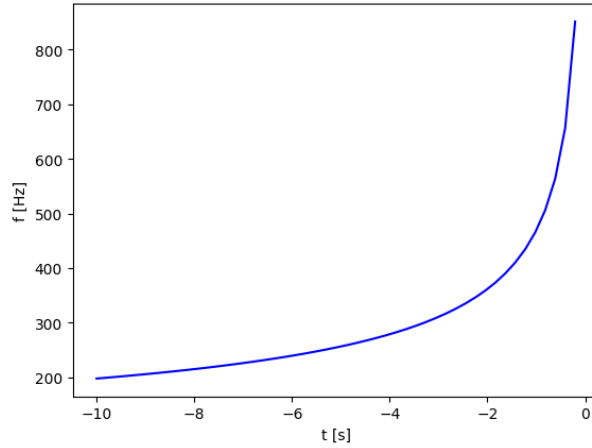


Figura 2.4 – Gráfico da frequência das ondas gravitacionais de uma binária em função do tempo.

O gráfico de h_+ divergir significa que chegamos no limite do modelo adotado e são necessárias correções. A fase que conseguimos descrever aqui é a fase inspiral da binária. A frequência passa a divergir quando a binária chega na fase de fusão dos corpos, tornando o regime linear insuficiente para descrever as outras etapas da dinâmica do sistema. É importante lembrar que fizemos a suposição de massas pontuais e órbita circular para descrever a evolução do sistema e isso não é o que acontece na realidade. Além das órbitas poderem ser elípticas, os objetos que compõe a binária são extremamente compactos e, portanto, na medida que a separação da binária se aproxima do tamanho dos objetos, o

campo gravitacional de um passa a afetar o companheiro de órbita e efeitos de maré⁹, de rotação¹⁰, além de outras interações entre multipolos de ordem mais alta (Thorne, 1980) e não-linearidades precisam ser levados em conta. Para resolver esse problema e conseguir modelos teóricos mais precisos são utilizadas técnicas de relatividade numérica e de expansão pós-Newtoniana (PN) e pós-Minkowskiana (PM) nas equações de movimento, fazendo correções na fase da onda gravitacional de $\mathcal{O}(v^n/c^n)$, com $n > 0$, ou, equivalentemente, correções de ordem $(n/2)$ PN. Como entrar nesses detalhes foge do escopo deste trabalho, para mais informações ver, e.g., (Epstein; Wagoner, 1975; Damour; Iyer, 1991; Maggiore, 2007) e as revisões (Blanchet, 2014; Blanchet, 2024).

Apesar disso, o resultado obtido não é desprezível. E de fato, o sinal completo emitido por uma binária é bem parecido com o mostrado acima. Na figura 2.5 temos uma ilustração mais precisa do processo completo de emissão das ondas, onde vemos que a parte inicial do gráfico é parecida com o resultado que obtivemos, mudando apenas no final, onde acontece a fusão da binária e a sua estabilização ao se tornar um único corpo, emitindo ondas gravitacionais que decaem rapidamente.

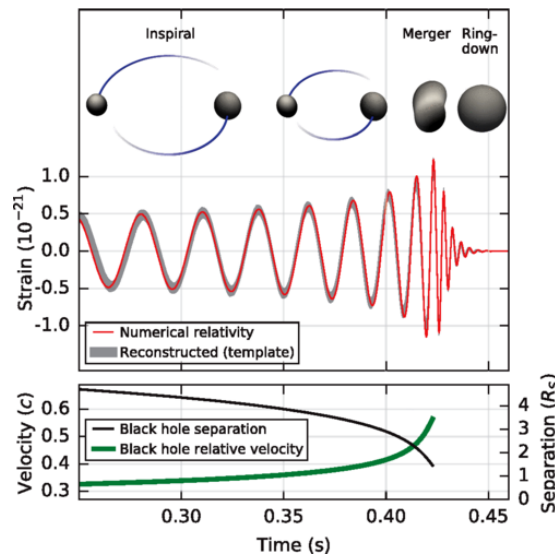


Figura 2.5 – O gráfico superior mostra a amplitude h_+ (chamada em inglês de *strain*) em função do tempo criada por dois buracos negros usando relatividade numérica. O gráfico inferior mostra a evolução da separação orbital e da velocidade dos buracos negros. A imagem é de (Abbott *et al.*, 2016) e possui permissão para uso público.

⁹ Particularmente para estrelas de nêutrons o efeito de maré é importante. A equação de estado da estrela e seus números de Love (números adimensionais que dão informação sobre sua estrutura interna) passam a ser necessárias na descrição da dinâmica, o que torna as ondas gravitacionais ótimas fontes para estudo desses objetos astrofísicos. Contudo, as correções devido a efeitos de maré e mudanças na estrutura da estrela que aparecem são de $\mathcal{O}(v^{10}/c^{10})$, i.e., de ordem 5PN. Mais informações podem ser encontradas em (Flanagan; Hinderer, 2008), (Hinderer, 2008), (Binnington; Poisson, 2009), (Blanchet, 2024).

¹⁰ Não consideramos os possíveis efeitos de precessão da órbita, além da interação entre o momento angular orbital e os spins dos corpos. As correções feitas na onda gravitacional devido a esses efeitos começam a aparecer na fase e amplitude e são de $\mathcal{O}(v^3/c^3)$. Para mais informações, ver, e.g., (Maggiore, 2007; Blanchet, 2024).

3 Usando Ondas Gravitacionais

Neste terceiro e último capítulo discutimos os usos das ondas gravitacionais. Na primeira seção vemos o efeito que as ondas causam ao passar por um conjunto de massas teste em queda livre, efeito esse essencial na detecção das ondas. Na segunda seção discutimos brevemente os tipos de fontes e também listamos os detectores em operação e projetos futuros. Na terceira seção fazemos uma breve descrição de como o sinal detectado é descrito. Na quarta seção vemos os princípios básicos de estatística Bayesiana. Por último, na quinta seção, aplicamos o método Bayesiano em um simples exemplo usando dados de distância luminosidade do evento GW170817.

3.1 Efeitos das Ondas Gravitacionais

Os efeitos da passagem da onda gravitacional podem ser entendidos ao considerarmos o movimento relativo entre as geodésicas tipo-tempo paralelas de massas teste que estão próximas e em queda livre enquanto a onda passa por elas.

A reação das massas à OG é compreendida usando a equação de desvio geodésico (Carroll, 2004):

$$\frac{D^2}{d\tau^2}\xi^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}U^\nu U^\rho \xi^\sigma, \quad (3.1)$$

onde ξ^μ é o quadrivetor tipo-espaço que aponta da geodésica de uma massa para outra, $U^\mu = dx^\mu/d\tau$ é a quadri-velocidade das massas e τ o tempo próprio. No limite de baixas velocidades e escolhendo $U^\mu = (1,0,0,0)$, a equação se reduz para

$$\frac{d^2\xi^i}{dt^2} = R^i{}_{00j}\xi^j. \quad (3.2)$$

O tensor de curvatura é

$$R^i{}_{00j} = \tilde{R}^i{}_{00j} + R^{(1)i}{}_{00j}. \quad (3.3)$$

Da equação (1.12), temos que $R^{(1)i}{}_{00j}$ é

$$R^{(1)i}{}_{00j} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{ik}\tilde{\nabla}_0\tilde{\nabla}_0\gamma_{jk}, \quad (3.4)$$

onde $\gamma_{ij} = a^2 h_{ij}$ e h_{ij} possui apenas a parte TT. Obtemos portanto,

$$\begin{aligned}
 R^{(1)i}_{00j} &= \frac{1}{2} \tilde{g}^{ik} \tilde{\nabla}_0 (\partial_0 \gamma_{jk} - \tilde{\Gamma}_{0j}^i \gamma_{ik} - \tilde{\Gamma}_{0k}^i \gamma_{jk}) \\
 &= \frac{1}{2} \tilde{g}^{ik} \tilde{\nabla}_0 (\partial_0 \gamma_{jk} - \frac{\dot{a}}{a} \delta^i_j \gamma_{ik} - \frac{\dot{a}}{a} \delta^i_k \gamma_{ji}) \\
 &= \frac{1}{2} \tilde{g}^{ik} \tilde{\nabla}_0 (a^2 \partial_0 h_{jk}) \\
 &= \frac{1}{2} a^{-2} \eta^{ik} a^2 \partial_0^2 h_{jk} \\
 &= \frac{1}{2} \partial_0^2 h_{ij}.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Além disso, em escalas pequenas onde a expansão do universo é negligenciável, o tensor de curvatura reduz para

$$R^i_{00j} \approx R^{(1)i}_{00j} = \frac{1}{2} \partial_0^2 h_{ij}, \tag{3.6}$$

e a equação (3.2) se torna

$$\frac{d^2 \xi^i}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2 h_{ij}}{dt^2} \xi^j, \tag{3.7}$$

que é o mesmo resultado obtido para o caso de Minkowski. Por exemplo, vamos considerar que as massas teste estão organizadas em formato de anel com centro na origem do sistema de coordenadas. Escrevemos $\xi^i(t) = x_0^i + \delta x^i(t)$, onde $x_0^i = \xi^i(0)$ é a posição inicial de uma massa até a origem e $\delta x^i(t)$ é um pequeno deslocamento dessa posição. Então, se uma onda gravitacional que possui apenas a polarização $h_+(t) = h_+ \cos(\omega t + kz)$ passar pelas massas em $z = 0$, teremos as equações

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \delta x^1}{dt^2} &= -\frac{1}{2} (x_0^1 + \delta x^1) \omega^2 h_+(t), \\
 \frac{d^2 \delta x^2}{dt^2} &= \frac{1}{2} (x_0^2 + \delta x^2) \omega^2 h_+(t).
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Como $\delta x^i(t)$ é da ordem de h_{ij} , em primeira ordem temos que,

$$\begin{aligned}
 \delta x^1(t) &= \frac{1}{2} x_0^1 h_+(t), \\
 \delta x^2(t) &= -\frac{1}{2} x_0^2 h_+(t).
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Desse forma, aquelas massas que estiverem inicialmente na direção x^1 irão oscilar na direção x^1 e o mesmo vale para aquelas que estiverem inicialmente na direção x^2 , resultando no efeito mostrado na figura 3.1.

De forma similar, se houver apenas a polarização $h_\times$ passando, teremos as equações

$$\begin{aligned}
 \delta x^1(t) &= \frac{1}{2} x_0^2 h_\times(t), \\
 \delta x^2(t) &= \frac{1}{2} x_0^1 h_\times(t),
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

fazendo as massas se movimentarem em formato de $\times$, como ilustrado na figura 3.2.

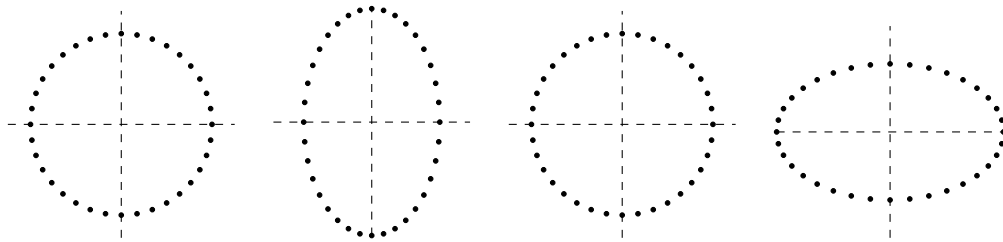


Figura 3.1 – Efeito de uma onda gravitacional com polarização h_+ passando por um conjunto de massas teste organizados em formato de anel.

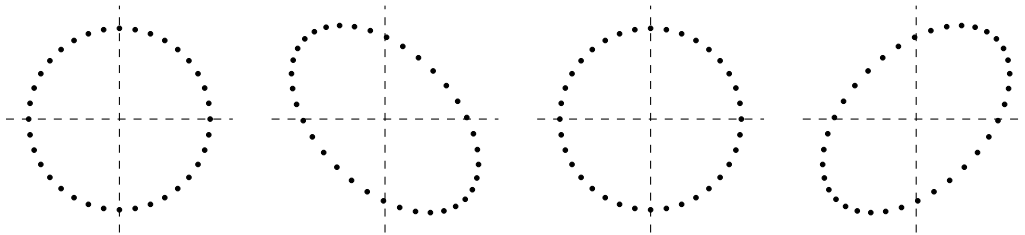


Figura 3.2 – Efeito de uma onda gravitacional com polarização $h_\times$ passando por um conjunto de massas teste organizadas em formato de anel.

A maioria dos experimentos realizados para a detecção de ondas gravitacionais combina esse efeito causado pela passagem da onda com técnicas de interferometria. Um feixe luz monocromática é dividida em dois feixes que se propagam com alguma angulação entre si e são confinados dentro de uma cavidade (refletores posicionados sobre os eixos $x - y$ a uma distância L da origem do sistema de coordenadas, por exemplo). Após um número de viagens feitas pelos feixes dentro da cavidade eles são recombinados, formando um padrão de interferência. No caso ideal, as extremidades da cavidade representam as massas teste em queda livre e reagem à passagem da onda gravitacional pelo detector, deixando o padrão de interferência dos feixes recombinados modificado. Para mais detalhes técnicos sobre como os detectores funcionam, o leitor pode ver, e.g., (Aasi *et al.*, 2015).

3.2 Fontes e experimentos

De forma geral, qualquer objeto com massa gera ondas gravitacionais ao acelerar. Porém, os objetos que produzem ondas que são detectáveis são objetos astrofísicos muito massivos. Existem quatro categorias principais de ondas gravitacionais provenientes desses objetos: ondas gravitacionais de binárias de corpos compactos, ondas gravitacionais contínuas, ondas gravitacionais estocásticas e ondas gravitacionais de explosões (*bursts*).

As binárias de objetos compactos podem ser compostas por estrelas de nêutrons, buracos negros e anãs brancas, e são atualmente a principal fonte detectada. Essas ondas apresentam um sinal com frequência crescente à medida que os corpos se aproximam, com frequências típicas indo de 1 Hz até 10^4 Hz (Thorne, 1995), sendo acessíveis aos detectores atuais. As binárias de buracos negros supermassivos emitem ondas com frequências muito

menores, da ordem de nanohertz, sendo acessíveis aos *Pulsar Timing Arrays* (Flanagan; Hughes, 2005); ondas gravitacionais contínuas são emitidas por objetos isolados que possuem alguma assimetria, como estrelas de nêutrons em alta rotação. O sinal emitido possui frequência estável, tipicamente entre algumas dezenas de Hz até alguns kHz, dependendo da rotação do objeto; as ondas gravitacionais estocásticas são ondas "aleatórias", geradas por inúmeras fontes independentes formando um fundo difuso, assim como a radiação cósmica de fundo. Esse tipo de onda pode ter uma ampla faixa de frequências, desde nHz até kHz (Flanagan; Hughes, 2005). Uma fonte particularmente interessante é a dinâmica do Universo antigo (Buonanno, 2004; Caprini; Figueroa, 2018); as ondas gravitacionais de explosões são sinais transitórios gerados por eventos cataclísmicos e imprevisíveis, como supernovas. Esses sinais são breves, podendo cobrir uma ampla faixa de frequências — de dezenas de Hz até alguns kHz, dependendo do mecanismo e do detector envolvido (Thorne, 1995).

Abaixo listamos vários detectores que estão em operação junto da faixa de frequência em que operam, além de projetos futuros que estão em desenvolvimento. O leitor também pode consultar (Vajente, 2022) para um *review* completo.

- **aLIGO (Advanced Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory)**: Interferômetro terrestre com braços de 4 km nos EUA (Hanford e Livingston), sensível a frequências de 10 Hz a 10 kHz (Aasi *et al.*, 2015);
- **Advanced Virgo**: Interferômetro terrestre com braços de 3 km na Itália, sensível a frequências semelhantes ao LIGO (Bersanetti *et al.*, 2021);
- **KAGRA**: Interferômetro subterrâneo com braços de 3 km localizado em Kamioka, Japão. Sensível a frequências na faixa de alguns Hz até 10^4 Hz (KAGRA..., 2019);
- **GEO600**: Interferômetro terrestre localizado próximo a Hannover, Alemanha, com braços de 600 metros. Sensível a frequências de 50 Hz a 6 kHz (Lück; Team *et al.*, 1997);
- **Einstein Telescope (ET)**: Detector terrestre de terceira geração em planejamento; interferômetro triangular subterrâneo com braços de 10 km, é planejado para uma sensibilidade a frequências de 1 Hz a 10 kHz (Punturo *et al.*, 2010);
- **Cosmic Explorer (CE)**: Projeto de detector de terceira geração nos EUA, com braços de 40 km e 20 km, com sensibilidade a frequências de alguns Hz a kHz (Hall, 2022);
- **Taiji**: Projeto chinês de interferômetro espacial composto de três satélites separados por 3 milhões de quilômetros, será sensível a baixas frequências em uma faixa de 1 mHz a 1 Hz (Luo *et al.*, 2021);
- **TianQin**: Projeto chinês de interferômetro espacial com três satélites em órbita ao redor da Terra a uma altura de 10^5 km e separados por 1.7×10^5 km, sensível a frequências de 0.1 mHz a 1 Hz (Mei *et al.*, 2021);
- **LISA (Laser Interferometer Space Antenna)**: Projeto de interferômetro espacial composto por três satélites em órbita ao redor do Sol, formando um triângulo com lados de 2.5 milhões de quilômetros. Desenhado para ser sensível a frequências em

uma faixa de 0.1 mHz a 0.1 Hz (Danzmann; Team *et al.*, 1996);

- **DECIGO (Deci-hertz Interferometer Gravitational wave Observatory):** Projeto japonês de interferômetro espacial formado por 3 satélites distantes de 1000 km, com sensibilidade a frequências em uma faixa de 0.1 Hz a 10 Hz (Sato *et al.*, 2017);
- **Pulsar Timing Arrays (PTAs):** Colaborações que utilizam radiotelescópios para monitorar os sinais de pulsares. Ao contrário dos vários detectores terrestres, os PTAs fazem uso de pulsares para detectar ondas gravitacionais na faixa de nanohertz. Como são excelentes relógios, os pulsares permitem que sejam detectadas diferenças no tempo de viagem da luz que emitem até a Terra, causadas por ondas gravitacionais de períodos muito longos atravessando o espaço entre eles. Algumas colaborações em operação são o EPTA (European Pulsar Timing Array), o African Pulsar Timing (APT), o International Pulsar Timing Array (IPTA), o North American Nanohertz Observatory for Gravitational Waves (NANOGrav), o Indian Pulsar Timing Array Project (InPTA) e o Parkes Pulsar Timing Array (PPTA) (Manchester, 2013; Kramer; Champion, 2013; Afzal *et al.*, 2023; Tarafdar *et al.*, 2022).

3.3 Breve descrição do sinal das ondas gravitacionais

As ondas gravitacionais detectadas pelos experimentos são uma combinação das polarizações h_+ e $h_\times$ e dependem da orientação do detector em relação à fonte e também sua geometria (Maggiore, 2007). De forma geral, o *output* do detector é

$$s(t) = h(t) + n(t), \quad (3.11)$$

onde $h(t)$ é o sinal da onda gravitacional,

$$h(t) = F_+ h_+(t) + F_\times h_\times(t), \quad (3.12)$$

e $n(t)$ é o ruído do detector (Maggiore, 2007). As funções F_+ e $F_\times$ são as chamadas *funções de padrão de antena* e dependem da geometria do detector. No caso de um interferômetro em formato de ‘L’, como o LIGO, no qual seus braços estão dispostos sobre os eixos $x - y$, as funções de padrão são (ver, e.g., (Apostolatos *et al.*, 1994), (Maggiore, 2007) e (Whelan, 2013))

$$\begin{aligned} F_+(\theta, \varphi, \psi) &= \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) \cos(2\varphi) \cos(2\psi) - \cos \theta \sin 2\varphi \sin(2\psi), \\ F_\times(\theta, \varphi, \psi) &= \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) \cos(2\varphi) \sin(2\psi) + \cos \theta \sin(2\varphi) \cos(2\psi), \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde os ângulos θ e φ localizam a binária no céu e ψ é o ângulo de polarização associado à liberdade de rotação dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ que formam o plano transversal à direção de propagação da onda (figura 3.3).

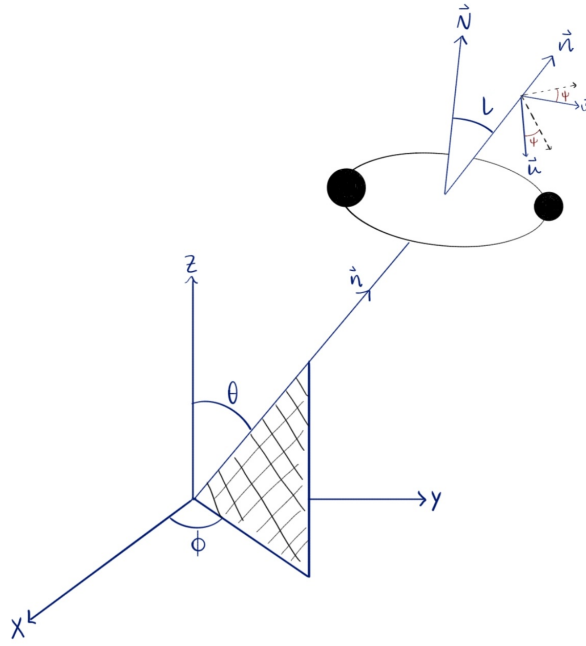


Figura 3.3 – Ilustração do referencial do detector na Terra observando uma binária distante com vetor normal $\vec{N}$ ao plano orbital.

Das equações (2.197) e (2.198) para h_+ e $h_\times$, escrevemos

$$\begin{aligned} h_+(t) &= \frac{A(t)}{D_L} \frac{(1 + \cos^2 \iota)}{2} \cos \Phi(t), \\ h_\times(t) &= \frac{A(t)}{D_L} \cos \iota \sin \Phi(t), \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde $A(t)$ é a amplitude e trocamos o ângulo θ das expressões originais do capítulo anterior por ι , para não confundir com o ângulo θ do referencial do detector, como na figura 3.3. Portanto, temos que $h(t)$ é

$$\begin{aligned} h(t) &= F_+ \frac{A(t)}{D_L} \frac{(1 + \cos^2 \iota)}{2} \cos \Phi(t) + F_\times \frac{A(t)}{D_L} \cos \iota \sin \Phi(t) \\ &= \frac{A(t)}{D_L} \left[F_+ \frac{(1 + \cos^2 \iota)}{2} \cos \Phi(t) + F_\times \cos \iota \sin \Phi(t) \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Para deixar essa expressão em um formato mais simples, podemos definir

$$\begin{aligned} \alpha \cos \gamma &\equiv F_+ \frac{(1 + \cos^2 \iota)}{2}, \\ \alpha \sin \gamma &\equiv F_\times \cos \iota, \end{aligned} \quad (3.16)$$

e, usando que $\alpha \cos (\Phi - \gamma) = \alpha \cos \gamma \cos \Phi + \alpha \sin \gamma \sin \Phi$, obtemos

$$h(t) = \frac{A(t)}{D_L} \alpha \cos (\Phi(t) - \gamma), \quad (3.17)$$

com α dado por

$$\alpha = \sqrt{F_+^2(\theta, \varphi, \psi) \frac{(1 + \cos^2 \iota)^2}{4} + F_\times^2(\theta, \varphi, \psi) \cos^2 \iota}, \quad (3.18)$$

e γ por

$$\gamma = \tan^{-1} \left(\frac{2 \cos(\iota) F_{\times}(\theta, \varphi, \psi)}{(1 + \cos^2 \iota) F_{+}(\theta, \varphi, \psi)} \right). \quad (3.19)$$

Na descrição do sinal é conveniente trabalhar no espaço das frequências. Definimos a transformada de Fourier de uma função $x(t)$ por

$$F\{x(t)\}(f) = \tilde{x}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i f t} x(t) dt, \quad (3.20)$$

e sua inversa,

$$F^{-1}\{\tilde{x}(f)\}(t) = x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i f t} \tilde{x}(f) df. \quad (3.21)$$

Como $h(t)$ e $n(t)$ são reais, vemos com a transformada de Fourier que $\tilde{h}(-f) = \tilde{h}^*(f)$ e $\tilde{n}(-f) = \tilde{n}^*(f)$.

O ruído é assumido como gaussiano e estacionário, i.e., as componentes de Fourier do ruído possuem distribuição de probabilidade gaussiana e são não correlacionadas, sendo definidas por

$$\langle \tilde{n}^*(f) \tilde{n}(f') \rangle = \frac{1}{2} \delta(f - f') S_n(f), \quad (3.22)$$

onde $\langle \dots \rangle$ denota uma média de *ensemble*¹ e $S_n(f)$ é o espectro de potência do ruído² e possui unidades de Hz^{-1} (Maggiore, 2007; Finn, 1992; Moore; Cole; Berry, 2014; Cutler; Flanagan, 1994). Observe também que, como $\tilde{n}(-f) = \tilde{n}^*(f)$, temos $S_n(f) = S_n(-f)$. Outra quantidade importante que vem do espectro de potência é a densidade espectral de amplitude (*amplitude spectral density* - ASD), que nada mais é que a raiz quadrada do espectro de potência, $\sqrt{S_n(f)}$, e nos dá a sensibilidade do detector para diferentes frequências. Na figura 3.4 vemos um plot do ASD para vários detectores e fontes de ondas gravitacionais.

Assumimos, sem perda de generalidade, que a média $\langle n(t) \rangle = 0$. O valor quadrático

¹ A média de ensemble é uma média feita sobre várias realizações do sistema. Contudo, como temos apenas um sistema, a média de ensemble pode ser substituída por uma média temporal (o princípio ergódico é invocado aqui). A ideia é medir $n(t)$ por um período de tempo T longo o suficiente (isso que chamamos de uma realização) e então calcular $\tilde{n}(f)$ com uma resolução na frequência de $1/T$. Repetindo-se o processo várias vezes, obtêm-se a média. Para mais informações, ver, e.g., (Maggiore, 2007) e (Moore; Cole; Berry, 2014) e referências citadas.

² Também chamado de densidade do espectro de potência, ou do inglês *Power Spectrum Density* (PSD).

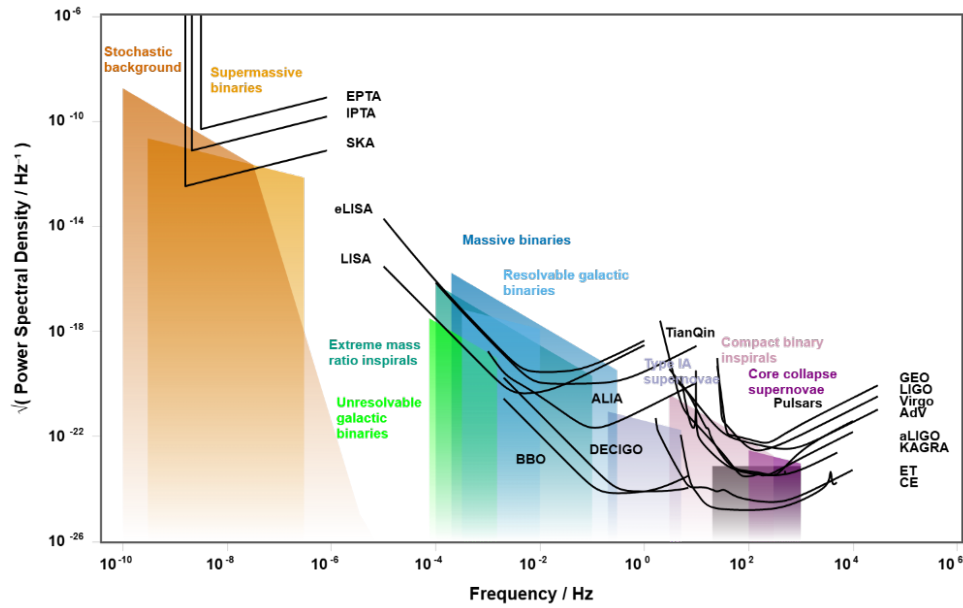


Figura 3.4 – Curvas de sensibilidade para diferentes detectores e fontes de ondas gravitacionais. O detector é sensível à fontes que possuem a área colorida acima da curva preta. A imagem foi produzida através do site <http://gwplotter.com/>. Detalhes técnicos podem ser encontrados em (Moore; Cole; Berry, 2014).

médio do ruído pode ser obtido integrando o espectro de potência,

$$\begin{aligned}
 \langle n^2(t) \rangle &= \langle n(t)n^*(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T n(t)n^*(t)dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{n}(f)\tilde{n}^*(f')e^{-2\pi ift}e^{2\pi if't}dfdf'dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \tilde{n}(f)\tilde{n}^*(f') \rangle e^{-2\pi ift}e^{2\pi if't}dfdf' \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\delta(f-f')S_n(f)e^{-2\pi ift}e^{2\pi if't}dfdf' \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f)df \\
 &= \int_0^{\infty} S_n(f)df,
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

onde nas duas últimas linhas usamos que $S_n(f) = S_n(-f)$ e trocamos os limites de integração para que $\langle n^2(t) \rangle$ seja definido apenas para frequências positivas, $f > 0$.

Agora, supondo que sabemos de antemão qual o formato do sinal da onda que queremos detectar, desejamos *filtrar* do *output* $s(t)$ o sinal $h(t)$. Isso é feito construindo-se um filtro de Wiener (Wiener, 1964) que, ao ser aplicado ao *output*, separa $h(t)$ do ruído (Moore; Cole; Berry, 2014). Definimos

$$\hat{s} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)K(t)dt, \tag{3.24}$$

onde $K(t)$ é um filtro real, com transformada de Fourier $\tilde{K}(f)$. O melhor filtro para extrair o sinal do ruído é aquele que maximiza a relação sinal-ruído (chamado de *signal-to-noise*

ratio, SNR), S/N . S é definido como o valor esperado de $\hat{s}$ quando o sinal, $h(t)$, está presente e N é a raiz quadrada média de $\hat{s}$ quando não há sinal. Teremos,

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle s(t) \rangle F(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) K(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(f) e^{2\pi i f t} K(t) df dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(f) \tilde{K}^*(f) df. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Para N^2 , temos

$$\begin{aligned} N^2 &= \langle \hat{s}^2 \rangle_{h(t)=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(t) K(t') \langle n(t) n(t') \rangle dt dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(t) K(t') \langle \tilde{n}(f) \tilde{n}^*(f') \rangle e^{2\pi i (f t - f' t')} df df' dt dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \tilde{n}(f) \tilde{n}^*(f') \rangle \tilde{K}(f') \tilde{K}^*(f) df df' \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) |\tilde{K}(f)|^2 df, \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde usamos (3.22). O SNR é definido então por

$$\frac{S^2}{N^2} \equiv \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(f) \tilde{K}^*(f) df \right|^2}{\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) |\tilde{K}(f)|^2 df}. \quad (3.27)$$

Dividindo e multiplicando por $\sqrt{S_n}$ no numerador,

$$\frac{S^2}{N^2} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{h}(f)}{\sqrt{S_n(f)}} \sqrt{S_n(f)} \tilde{K}^*(f) df \right|^2}{\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) |\tilde{K}(f)|^2 df}. \quad (3.28)$$

Agora, podemos usar a desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} A(f) B(f) df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |A(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |B(f)|^2 df. \quad (3.29)$$

para separar a integral do numerador em duas integrais (Moore; Cole; Berry, 2014). A igualdade só será mantida se $A(f)$ e $B(f)$ forem iguais a menos de uma constante, i.e., para $A(f) = \tilde{h}/\sqrt{S_n(f)}$ e $B(f) = \sqrt{S_n(f)} \tilde{K}^*(f)$, (3.27) é maximizado quando

$$\tilde{K}^*(f) = C \frac{\tilde{h}(f)}{S_n(f)}, \quad (3.30)$$

onde C é a constante. A equação (3.30) define o filtro ótimo de Wiener, o filtro que maximiza (3.27) e que faz a melhor extração de $h(t)$ de $s(t)$ (Maggiore, 2007; Moore; Cole; Berry, 2014; Cutler; Flanagan, 1994). Da desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos então,

$$\frac{S^2}{N^2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{h}(f)|^2}{S_n(f)} df \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) |\tilde{K}(f)|^2 df}{\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) |\tilde{K}(f)|^2 df} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{h}(f)|^2}{S_n(f)} df, \quad (3.31)$$

ou,

$$\frac{S^2}{N^2} = 4 \int_0^\infty \frac{|\tilde{h}(f)|^2}{S_n(f)} df. \quad (3.32)$$

A equação (3.32) nos dá o valor ótimo do SNR.

Introduzimos o produto interno entre duas funções $g(f)$ e $h(f)$ (Finn, 1992),

$$(h|g) = \int_0^\infty \frac{\tilde{h}^*(f)\tilde{g}(f) + \tilde{h}(f)\tilde{g}^*(f)}{(1/2)S_n(f)} df = 4\text{Re}\left(\int_0^\infty \frac{\tilde{h}^*(f)\tilde{g}(f)}{S_n(f)} df\right). \quad (3.33)$$

Dessa forma, empregando o produto interno em (3.32), conseguimos escrever o valor ótimo de SNR como

$$\frac{S}{N} = (h|h)^{1/2}. \quad (3.34)$$

Para um alto valor de S/N o sinal da onda gravitacional pode ser diferenciado do ruído, mesmo que a amplitude do ruído seja maior que a do sinal. O procedimento apresentado é a base da técnica de filtragem casada (*matched filtering*), central na análise dos dados das ondas gravitacionais. O leitor interessado em mais detalhes sobre a análise do sinal, pode consultar, e.g., (Finn, 1992), (Cutler; Flanagan, 1994), (Moore; Cole; Berry, 2014), (Abbott *et al.*, 2016).

3.4 Noções de Estatística Bayesiana e Inferência de Parâmetros

Vimos na descrição do sinal detectado que o formato da onda gravitacional é assumido como conhecido para aplicar a técnica de filtragem. No entanto, na prática, não temos acesso direto aos diversos parâmetros físicos (como massas, distância, inclinação orbital, etc.) que caracterizam a onda e, portanto, não sabemos de antemão qual é o seu formato exato. Para lidar com isso, é necessário considerar uma família de moldes (ou *templates*) $h(t; \Theta)$, onde $\Theta = \{\Theta_1, \dots, \Theta_N\}$ representa o conjunto dos parâmetros do sistema, e realizar a filtragem com os diversos filtros ótimos definidos por $\tilde{K}^*(f) \sim \tilde{h}(f; \Theta)/S_n(f)$.

Após a detecção de uma onda gravitacional, um subconjunto de moldes irá produzir um valor de SNR acima de um limiar mínimo previamente estabelecido. Esses moldes são considerados compatíveis com o sinal observado. Surge, então, a seguinte questão central: quais são os valores mais prováveis dos parâmetros Θ que descrevem os dados observados e quais são as incertezas associadas a essas estimativas?

Problemas dessa natureza são recorrentes em diversas áreas da ciência: temos acesso a um conjunto de dados D e desejamos estimar os parâmetros Θ que melhor os descrevem, condicionados a um modelo/hipótese M . Em termos probabilísticos, buscamos a distribuição de probabilidade $P(\Theta|D, M)$, i.e., a probabilidade dos parâmetros assumirem certos valores, dado o conjunto de dados e o modelo assumido.

Nesta seção, portanto, introduzimos os conceitos fundamentais de estatística Bayesiana e da inferência de parâmetros, ferramentas que utilizaremos na seção seguinte para inferir a constante de Hubble a partir de dados de distância luminosidade de ondas gravitacionais.

Começamos introduzindo os axiomas de Kolmogorov (Kolmogorov, 1963). Para um conjunto S formado por subconjuntos $A_1, A_2, A_3, \dots$, a função probabilidade P , real e positiva, satisfaz os axiomas:

- Para todo subconjunto $A_i \in S$, $P(A_i) \geq 0$;
- Para subconjuntos disjuntos, e.g., $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$;
- $P(S) = 1$.

Além disso, introduzimos a probabilidade condicional de um subconjunto A ocorrer dado que outro subconjunto B ocorreu, i.e., $P(A|B)$, definida por

$$P(A|B) = \frac{P(A, B)}{P(B)}, \quad (3.35)$$

onde $P(A, B) \equiv P(A \cap B)$ é a probabilidade conjunta de A e B . De forma similar, temos que a probabilidade de B ocorrer dado A é

$$P(B|A) = \frac{P(B, A)}{P(A)}. \quad (3.36)$$

Como $A \cap B = B \cap A$, então $P(A \cap B) = P(B \cap A)$, e, portanto,

$$\begin{aligned} P(A|B)P(B) &= P(B|A)P(A) \\ \Rightarrow P(A|B) &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

que é o teorema de Bayes. Note que, para qualquer B e A_i disjuntos, com $i = 1, \dots, N$, tal que $\cup_i A_i = S$, teremos

$$\begin{aligned} B &= (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_N \cap B) \\ \Rightarrow P(B) &= P([A_1 \cap B] \cup [A_2 \cap B] \cup \dots \cup [A_N \cap B]). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Usando o segundo axioma,

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_N \cap B) = \sum_i P(B \cap A_i). \quad (3.39)$$

Com a definição de probabilidade condicional, obtemos

$$P(B) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i). \quad (3.40)$$

Portanto, (3.37) é

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}, \quad (3.41)$$

onde vemos que o denominador, $P(B)$, chamado de *evidência*, é apenas um fator que normaliza a distribuição de probabilidade $P(A|B)$, chamada de *posterior*. No caso contínuo, a

evidência é a integral (ou *marginalização*) do numerador sobre todos os valores possíveis de A ,

$$P(B) = \int P(B|A)P(A)dA. \quad (3.42)$$

O termo $P(A)$ no teorema de Bayes, é conhecido como a probabilidade *anterior* (ou *prior*) e representa nossa “crença prévia” em A . A função $P(B|A)$ é a *verossimilhança* (ou *likelihood*), que é uma distribuição estatística como, e.g., a distribuição gaussiana.

Podemos usar a posterior para encontrar o valor esperado de alguma quantidade que estamos interessados. Por exemplo, suponha que temos um conjunto de parâmetros $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots\}$, e um modelo M , de forma que o teorema de Bayes é

$$P(\theta|M) = \frac{P(M|\theta)P(\theta)}{P(M)}. \quad (3.43)$$

Então, o valor mais provável de um parâmetro θ_i específico é definido por (Barlow, 1993)

$$\langle \theta_i \rangle \equiv \int \theta_i P(\theta|M) d\theta. \quad (3.44)$$

O erro associado a esses parâmetros é dado pela matriz

$$\Sigma_{ij} = \int (\theta_i - \langle \theta_i \rangle)(\theta_j - \langle \theta_j \rangle) P(\theta|M) d\theta, \quad (3.45)$$

que é a matriz covariância (Barlow, 1993).

No caso das ondas gravitacionais³, a inferência dos parâmetros θ que descrevem o sinal da onda gravitacional $h(t; \theta)$ detectada no *output* $s(t; \theta) = h(t; \theta) + n(t)$, a posterior é (Finn, 1992; Cutler *et al.*, 1993)

$$P(\theta|s) = N e^{-\frac{1}{2} \Gamma_{ij} \Delta \theta^i \Delta \theta^j}, \quad (3.46)$$

onde Γ_{ij} é a matriz de Fisher (Fisher, 1935; Gair; Antonelli; Barbieri, 2023), dada por

$$\Gamma_{ij} \equiv \left(\frac{\partial h}{\partial \theta_i} \middle| \frac{\partial h}{\partial \theta_j} \right), \quad (3.47)$$

lembrando que o símbolo $(\cdot|\cdot)$ denota o produto interno (3.33). O fator $N = \sqrt{\det(\Gamma_{ij}/2\pi)}$ é a normalização e $\Delta \theta^i$ é o erro do parâmetro θ_i . Para altos valores de SNR, i.e., para erros pequenos, o valor esperado de $\Delta \theta^i$ é (Finn, 1992; Maggiore, 2007; Cutler *et al.*, 1993)

$$\langle \Delta \theta^i \Delta \theta^j \rangle = (\Gamma^{-1})^{ij}. \quad (3.48)$$

³ Não iremos demonstrar as equações dadas nesta parte já que fugiria do foco do trabalho e também não faremos uso desses elementos. O leitor interessado em uma discussão mais completa sobre a inferência dos parâmetros da onda gravitacional pode consultar, e.g., (Finn, 1992), (Cutler *et al.*, 1993), (Cutler, 1998), (Maggiore, 2007), (Abbott *et al.*, 2016) e (Gair; Antonelli; Barbieri, 2023).

3.5 Inferindo a constante de Hubble

O uso de ondas gravitacionais na Cosmologia foi proposto pela primeira vez por Schutz em 1986 (Schutz, 1986). Nesta seção, utilizamos o evento GW170817 e fazemos um simples exemplo de aplicação da estatística Bayesiana para inferir o valor da constante de Hubble.

As fontes de ondas que são usadas como sonda cosmológica são chamada de *sirene padrão* (Holz; Hughes, 2005). As sirenes padrão podem ser de dois tipos: *sirenes claras* e *sirenes escuras*. As sirenes claras, como o nome sugere, são as fontes que emitem radiação eletromagnética junto da gravitacional, como uma binária de estrelas de nêutrons, possibilitando uma medida de seu redshift de forma independente da onda gravitacional. Já as sirenes escuras, como as binárias de buracos negros, são o tipo mais comum de sirene detectada atualmente e emitem apenas o sinal gravitacional, impossibilitando acesso ao redshift da fonte.

O evento GW170817 (Abbott et al., 2017), detectado no dia 17 de agosto de 2017 pela colaboração LIGO-Virgo, foi o primeiro e único evento, até o momento, que resultou da coalescência de uma binária de estrelas de nêutrons. As estrelas possuíam massas de $1.46^{+0.12}_{-0.10}M_{\odot}$ e $1.27^{+0.9}_{-0.9}M_{\odot}$ e estavam a uma distância de $40^{+8}_{-14}Mpc$. A fusão da binária também deu resultado a uma explosão de raios gama (γ -ray burst - GRB), detectado pelo Fermi-GBM 1.7 segundos após as ondas gravitacionais, o que possibilitou a identificação da galáxia hospedeira da binária, dando uma medida independente para o redshift de $z = 0.0098$ (Levan et al., 2017).

A presença de ambos os sinais, gravitacional e eletromagnético, faz GW170817 ser uma sirene clara, ótima sonda para inferir o valor da constante de Hubble. Para tal, seguimos o método estatístico desenvolvido por (Chen; Fishbach; Holz, 2018) e reproduzimos a aplicação feita em linguagem *Python* no tutorial criado por Simone Mastrogiovanni no endereço eletrônico <https://github.com/simone-mastrogiovanni>.

Para um evento com dados independentes de ondas gravitacionais e uma contrapartida eletromagnética, d_{og} e d_{em} , respectivamente, a distribuição de probabilidade posterior de H_0 é, pelo teorema de Bayes,

$$P(H_0|d_{og}, d_{em}) = P(d_{og}, d_{em}|H_0)P(H_0), \quad (3.49)$$

onde $P(H_0)$ é a *prior* em H_0 e $P(d_{og}, d_{em}|H_0)$ é a *likelihood* dos dados condicionados à H_0 ,

$$P(d_{og}, d_{em}|H_0) = \frac{1}{\beta(H_0)} \int P(d_{og}, d_{em}, D_L, z|H_0) dD_L dz, \quad (3.50)$$

onde $\beta(H_0)$ é um fator que leva em conta efeitos de seleção (Chen; Fishbach; Holz, 2018; Mandel; Farr; Gair, 2019), D_L é a distância luminosidade e z o redshift. Assumimos que os dados da onda gravitacional, d_{og} , dependem apenas da distância luminosidade; os dados da contrapartida eletromagnética dependem do redshift. Dessa forma, a *likelihood* pode ser

fatorada como

$$\int P(d_{og}, d_{em}, D_L, z, \Omega | H_0) dD_L dz = \int P(d_{og} | D_L) P(d_{em} | z) P(D_L | z, H_0) \times P(z) dD_L dz, \quad (3.51)$$

Como sabemos a distância luminosidade da fonte, que denotamos por $\hat{D}_L$, a distribuição $P(D_L | z, H_0)$ é dada por uma delta de Dirac centrada em $\hat{D}_L$, resultando em

$$\begin{aligned} \int P(d_{og}, d_{em}, D_L, z, \Omega | H_0) dD_L dz &= \int P(d_{og} | D_L) P(d_{em} | z) \\ &\times \delta(D_L - \hat{D}_L(z, H_0)) P(z) dD_L dz \\ &= \int P(d_{og} | \hat{D}_L(z, H_0)) P(d_{em} | z) P(z) dz. \end{aligned} \quad (3.52)$$

A *likelihood* $P(d_{em} | z)$ é a probabilidade dos dados eletromagnéticos na presença do sinal de uma fonte com redshift z e seleciona um valor específico caso haja a contrapartida eletromagnética, portanto escrevemos como uma delta de Dirac centrada no valor medido de z , que escolhemos ser o mesmo da galáxia hospedeira,

$$P(d_{em} | z) = \delta(z - \hat{z}). \quad (3.53)$$

Portanto, obtemos que a posterior em H_0 é

$$P(H_0 | d_{og}, d_{em}) \propto \frac{P(H_0)}{\beta(H_0)} P(d_{og} | \hat{D}_L(\hat{z}, H_0)) P(\hat{z}). \quad (3.54)$$

O fator $\beta(H_0)$ que usamos é $\beta(H_0) \propto H_0^3$, dado por (Chen; Fishbach; Holz, 2018; Fishbach *et al.*, 2019)⁴, que é calculado para baixos redshifts, $z \ll 1$, onde a distância luminosidade assume a forma

$$D_L = \frac{cz}{H_0}. \quad (3.55)$$

Adotamos a *prior* $P(z)$ usada em (Chen; Fishbach; Holz, 2018), proporcional à distribuição de objetos por redshift no volume comóvel,

$$P(z) \propto \frac{dN}{dz} \propto \frac{dV_c}{dz}, \quad (3.56)$$

com $dV_c = 4\pi r^2 dr$, onde r é a distância comóvel. Para baixos redshifts, temos $r(z) = cz/H_0$, e, portanto, $dV_c \propto z^2 dz$, então

$$P(z) \propto z^2. \quad (3.57)$$

Como vimos no capítulo 2, o sinal de onda gravitacional nos dá uma forma direta de medir a distância luminosidade da fonte. Essa informação está na *likelihood* $P(d_{og} | \hat{D}_L(z, H_0))$,

⁴ Não iremos entrar em detalhes de como encontrar β . Para mais informações, ver, e.g., (Chen; Fishbach; Holz, 2018), (Fishbach *et al.*, 2019), (Mandel; Farr; Gair, 2019)

que é a probabilidade dos dados de onda gravitacional na presença de um sinal de uma fonte com distância luminosidade $\hat{D}_L$. Podemos obtê-la a partir de

$$P(D_L|d_{og}) \propto P(d_{og}|D_L)P(D_L). \quad (3.58)$$

Juntando todas essas partes, temos que a posterior em H_0 se torna

$$P(H_0|d_{og}, d_{em}) \propto \frac{P(H_0)}{H_0^3} \frac{P(\hat{D}_L(\hat{z}, H_0)|d_{og})}{P(\hat{D}_L(\hat{z}, H_0))} \hat{z}^2. \quad (3.59)$$

A distribuição $P(D_L|d_{og})$ que iremos usar é a posterior da distância luminosidade do evento GW170817, gerada a partir do seu sinal detectado. O sinal foi modelado utilizando correções pós-Newtonianas, sendo melhor descrito pelo *template* IMRPhenomPv2 (ver, e.g., (Husa *et al.*, 2016)) e está disponível publicamente no endereço https://dcc.ligo.org/public/0157/P1800370/005/GW170817_GWTC-1.hdf5. Na figura 3.5 mostramos $P(D_L|d_{og})$.

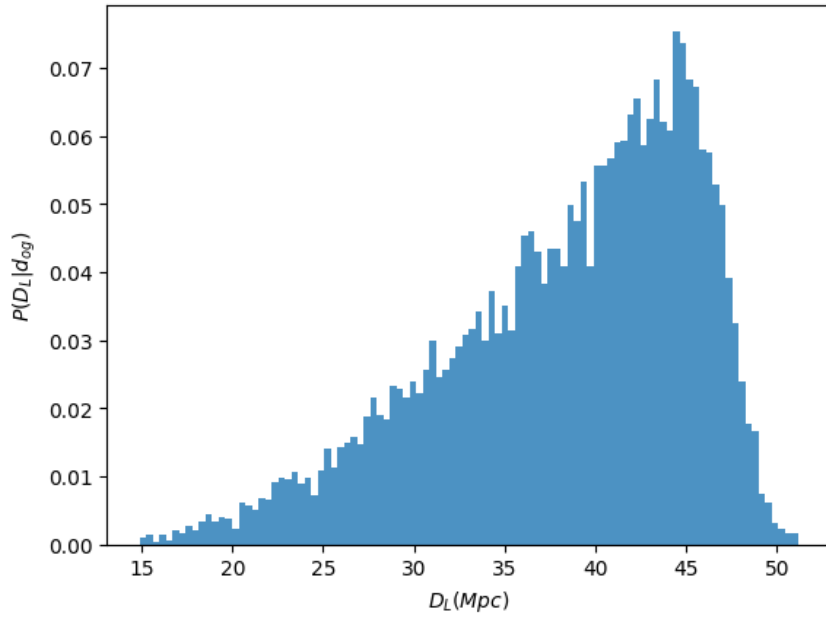


Figura 3.5 – Distribuição de probabilidade posterior do evento GW170817 para a distância luminosidade.

A *prior* usada na construção da posterior de GW170817 foi para uma distribuição uniforme de fontes no volume comóvel (Abbott *et al.*, 2017),

$$P(D_L) \propto D_L^2. \quad (3.60)$$

Dessa forma, obtemos a distribuição $P(d_{og}|D_L)$ em função de D_L , como mostrado na figura 3.6.

Assumimos a *prior* em H_0 como uniforme no intervalo $[20, 140] \text{ km/s/Mpc}$, i.e., qualquer valor entre 20 e 140 é igualmente válido para H_0 . Agora, o que temos que fazer é:

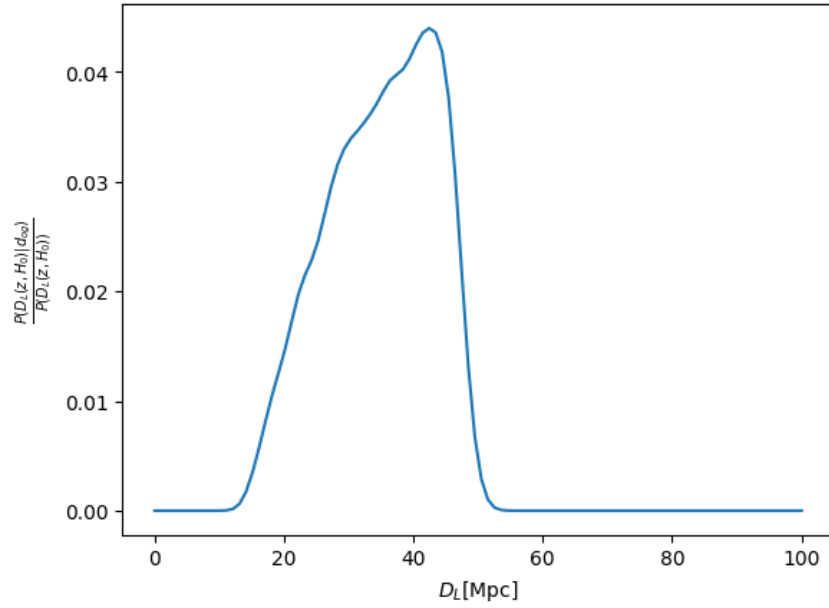


Figura 3.6 – Função *likelihood* da distância luminosidade do evento GW170817.

calculamos (3.59) para cada valor de H_0 , i.e., para cada H_0 na *prior* nós avaliamos a distância luminosidade,

$$\hat{D}_L = \frac{c\hat{z}}{H_0}, \quad (3.61)$$

a *likelihood* $P(d_{og}|\hat{D}_L(\hat{z}, H_0))$ e o fator de normalização H_0^3 . O redshift da galáxia NGC 4993 é de $\hat{z} = 0.0098$. O gráfico de $P(H_0|d_{og}, d_{em})$ é mostrado na figura 3.7, onde marcamos a posição de H_0 em que a posterior tem valor máximo (*maximum a posteriori value* - MAP) e o intervalo de confiança de 68% da distribuição. Temos que o resultado obtido para a constante de Hubble foi de $67.3^{+14.5}_{-4.9} \text{ km/s/Mpc}$.

Apesar de termos feito um exemplo simplificado e com um único evento, vemos que o resultado é condizente com o valor de H_0 medido através da CMB e supernova tipo Ia, $66.93 \pm 0.62 \text{ km/s/Mpc}$ (Ade *et al.*, 2016) e $73.48 \pm 1.66 \text{ km/s/Mpc}$ (Riess *et al.*, 2016), respectivamente, mostrando como as ondas gravitacionais são uma ferramenta promissora e independente para medir a constante de Hubble. Com o aumento no número de detecções e melhorias na sensibilidade dos detectores, espera-se que essa abordagem contribua significativamente para a astronomia de multimensageiros nos próximos anos. Como o evento GW170817 foi o único de seu tipo até o momento de produção deste trabalho, o método mais utilizado para inferir a constante de Hubble é o da *sirene escura* através de dados de binárias de buracos negros, onde não há a contrapartida eletromagnética e nem conhecimento da possível galáxia que pode hospedar a fonte. Muitos trabalhos vêm sendo desenvolvidos neste segmento, o leitor pode ver, e.g., (Fishbach *et al.*, 2019), (Soares-Santos *et al.*, 2019), (Andreas *et al.*, 2021), (Palmese *et al.*, 2020), (Palmese *et al.*, 2023) e (Alfradique *et al.*, 2024).

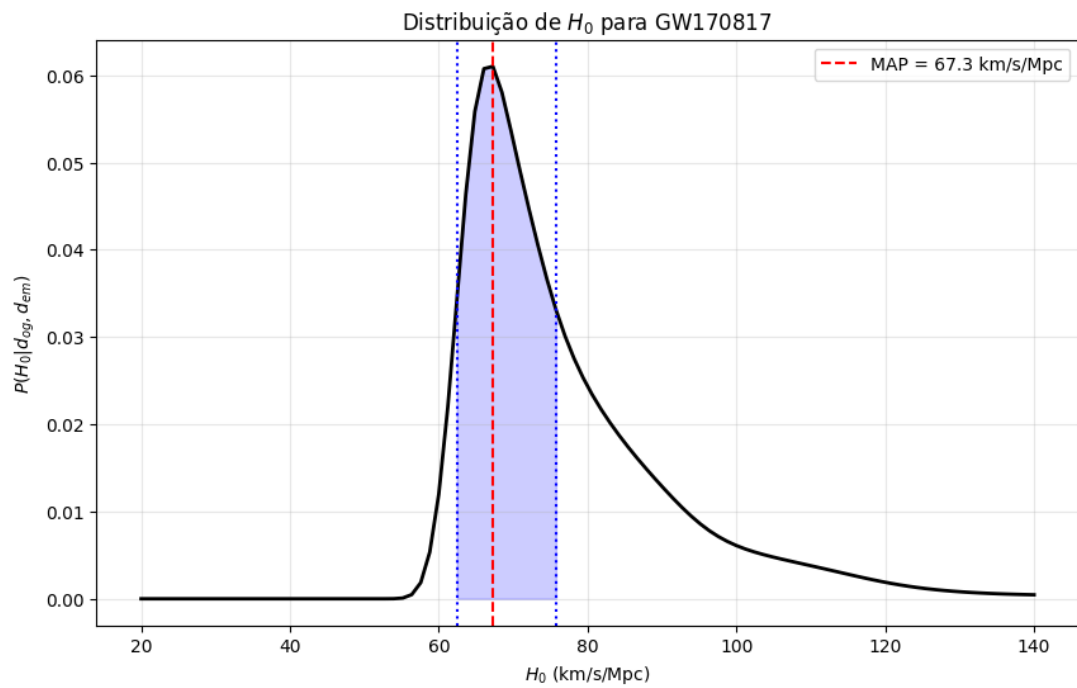


Figura 3.7 – Distribuição posterior de H_0 para o evento GW170817. O valor encontrado para a maior probabilidade foi de $67.3^{+14.5}_{-4.9} \text{ km/s/Mpc}$.

Conclusão

Neste trabalho nós estudamos as ondas gravitacionais no contexto da Cosmologia, vendo seu comportamento para o Universo em expansão e como podem servir como uma excelente sonda cosmológica. Nossa análise mostrou que a propagação das ondas no espaço-tempo descrito pela métrica plana de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker introduz um amortecimento na equação de onda, resultando em uma amplitude que decai com o fator de escala, $h_{ij} \propto a^{-1}$.

Encontramos com a produção das ondas por uma fonte massiva que a radiação gravitacional carrega a informação sobre a distância luminosidade, D_L , do objeto, mostrando como as ondas gravitacionais servem de sonda cosmológica. Além disso, vimos também que o sinal detectado aqui na Terra não nos dá acesso à verdadeira massa da fonte através da *chirp mass*, M_c , mas sim da massa desviada para o vermelho $M_z = (1 + z)M_c$.

No final, utilizando os dados de distância luminosidade do evento GW170817 junto de seu redshift, em um pequeno exemplo inferimos através do método Bayesiano um valor para a constante de Hubble de $H_0 = 67.3^{+14.5}_{-4.9}$, que está de acordo com resultados de outras sondas cosmológicas independentes, como as observações da radiação cósmica de fundo e supernovas do tipo Ia. Este resultado, embora obtido a partir de um único evento, já ilustra o potencial das ondas gravitacionais como ferramentas para a cosmologia de precisão e astronomia de multimensageiros. Espera-se que, com o aumento do número de eventos detectados, com a melhoria na precisão dos detectores, o aprimoramento nos modelos teóricos e nas técnicas de inferência estatística, tais estimativas se tornem cada vez mais precisas, contribuindo de forma significativa na compreensão do Universo.

Referências

- AASI, J.; ABBOTT, B.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T.; ABERNATHY, M.; ACKLEY, K.; ADAMS, C.; ADAMS, T.; ADDESSO, P.; ADHIKARI, R. *et al.* Advanced ligo. **Classical and quantum gravity**, IOP Publishing, v. 32, n. 7, p. 074001, 2015. Citado nas pp. 56 e 57.
- ABBOTT, B. P.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T.; ACERNESE, F.; ACKLEY, K.; ADAMS, C.; ADAMS, T.; ADDESSO, P.; ADHIKARI, R. X.; ADYA, V. B. *et al.* Gw170817: observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. **Physical review letters**, APS, v. 119, n. 16, p. 161101, 2017. Citado nas pp. 9, 66 e 68.
- ABBOTT, B. P.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T. D.; ABERNATHY, M. R.; ACERNESE, F.; ACKLEY, K.; ADAMS, C.; ADAMS, T.; ADDESSO, P.; ADHIKARI, R. X. *et al.* Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. **Physical review letters**, APS, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016. DOI [10.1103/PhysRevLett.116.061102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.061102>. Citado nas pp. 6, 8, 53, 63 e 65.
- ADE, P. A.; AGHANIM, N.; ARNAUD, M.; ASHDOWN, M.; AUMONT, J.; BACCIGALUPI, C.; BANDAY, A.; BARREIRO, R.; BARTLETT, J.; BARTOLO, N. *et al.* Planck 2015 results-xiii. cosmological parameters. **Astronomy & Astrophysics**, EDP sciences, v. 594, p. A13, 2016. Citado na p. 69.
- AFZAL, A.; AGAZIE, G.; ANUMARLAPUDI, A.; ARCHIBALD, A. M.; ARZOUMANIAN, Z.; BAKER, P. T.; BÉCSY, B.; BLANCO-PILLADO, J. J.; BLECHA, L.; BODDY, K. K. *et al.* The nanograv 15 yr data set: Search for signals from new physics. **The Astrophysical Journal Letters**, IOP Publishing, v. 951, n. 1, p. L11, 2023. Citado na p. 58.
- AKRAMI, Y.; ASHDOWN, M.; AUMONT, J.; BACCIGALUPI, C.; BALLARDINI, M.; BANDAY, A. J.; BARREIRO, R.; BARTOLO, N.; BASAK, S.; BENABED, K. *et al.* Planck 2018 results-vii. isotropy and statistics of the cmb. **Astronomy & Astrophysics**, EDP sciences, v. 641, p. A7, 2020. Citado na p. 22.
- ALFRADIQUE, V.; PALMESE, A.; TEIXEIRA, G.; SANTANA-SILVA, L.; SANTOS, A.; DARC, P. A dark standard siren measurement of the hubble constant following ligo/virgo/kagra o4a and previous runs. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 535, n. 1, p. 961–975, 2024. Citado na p. 69.
- ANDREAS, F.; STEFANO, F.; FRANCESCO, I.; MICHELE, M.; MICHELE, M. Cosmology with ligo/virgo dark sirens: Hubble parameter and modified gravitational wave propagation. **JCAP**, v. 8, p. 026, 2021. Citado na p. 69.

- APOSTOLATOS, T. A.; CUTLER, C.; SUSSMAN, G. J.; THORNE, K. S. Spin-induced orbital precession and its modulation of the gravitational waveforms from merging binaries. **Physical Review D**, APS, v. 49, n. 12, p. 6274, 1994. Citado na p. 58.
- ARNOWITT, R.; DESER, S.; MISNER, C. W. Wave zone in general relativity. **Physical Review**, APS, v. 121, n. 5, p. 1556, 1961. Citado na p. 21.
- ASHTEKAR, A.; BONGA, B.; KESAVAN, A. Asymptotics with a positive cosmological constant. iii. the quadrupole formula. **Physical Review D**, APS, v. 92, n. 10, p. 104032, 2015. Citado nas pp. 37, 38, 40 e 41.
- BARDEEN, J. M. Gauge-invariant cosmological perturbations. **Physical Review D**, APS, v. 22, n. 8, p. 1882, 1980. Citado na p. 30.
- BARLOW, R. J. **Statistics: a guide to the use of statistical methods in the physical sciences**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1993. Citado na p. 65.
- BERSANETTI, D.; PATRICELLI, B.; PICCINNI, O. J.; PIERGIOVANNI, F.; SALEMI, F.; SEQUINO, V. Advanced virgo: Status of the detector, latest results and future prospects. **Universe**, MDPI, v. 7, n. 9, p. 322, 2021. Citado na p. 57.
- BINNINGTON, T.; POISSON, E. Relativistic theory of tidal love numbers. **Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology**, APS, v. 80, n. 8, p. 084018, 2009. Citado na p. 53.
- BLANCHET, L. Gravitational radiation from post-newtonian sources and inspiralling compact binaries. **Living reviews in relativity**, Springer, v. 17, n. 1, p. 2, 2014. Citado na p. 53.
- BLANCHET, L. Post-newtonian theory for gravitational waves. **Living Reviews in Relativity**, Springer, v. 27, n. 1, p. 4, 2024. Citado na p. 53.
- BLANCHET, L.; SATHYAPRAKASH, B. S. Signal analysis of gravitational wave tails. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 11, n. 11, p. 2807, 1994. Citado na p. 41.
- BLANCHET, L.; SCHAFER, G. Gravitational wave tails and binary star systems. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 10, n. 12, p. 2699, 1993. Citado na p. 41.
- BONNOR, W.; ROTENBERG, M. Gravitational waves from isolated sources. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences**, The Royal Society London, v. 289, n. 1417, p. 247–274, 1966. Citado nas pp. 36 e 41.
- BRILL, D. R.; HARTLE, J. B. Method of the self-consistent field in general relativity and its application to the gravitational geon. **Physical Review**, v. 135, n. 1B, p. B271 – B278, 1964. Citado nas pp. 10, 13, 14, 20, 21, 84 e 86.

- BUONANNO, A. Gravitational waves from the early universe. *In: Particle Physics And Cosmology: The Quest for Physics Beyond the Standard Model (s)(TASI 2002)*. [S.l.]: World Scientific, 2004. p. 855–892. Citado na p. [57](#).
- BURKO, L. M.; HARTE, A. I.; POISSON, E. Mass loss by a scalar charge in an expanding universe. **Physical Review D**, APS, v. 65, n. 12, p. 124006, 2002. Citado nas pp. [36](#), [37](#), [87](#), [88](#) e [89](#).
- CAPRINI, C.; FIGUEROA, D. G. Cosmological backgrounds of gravitational waves. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 35, n. 16, p. 163001, 2018. Citado nas pp. [19](#), [34](#), [35](#) e [57](#).
- CARROLL, S. M. **Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004. Citado nas pp. [12](#), [16](#), [17](#), [20](#), [27](#), [31](#) e [54](#).
- CHEN, H.-Y.; FISHBACH, M.; HOLZ, D. E. A two per cent hubble constant measurement from standard sirens within five years. **Nature**, Nature Publishing Group UK London, v. 562, n. 7728, p. 545–547, 2018. Citado nas pp. [66](#) e [67](#).
- CHERNOFF, D. F.; FINN, L. S. Gravitational radiation, inspiraling binaries, and cosmology. **arXiv preprint gr-qc/9304020**, 1993. Citado na p. [48](#).
- CHU, Y.-Z. Transverse traceless gravitational waves in a spatially flat flrw universe: Causal structure from dimensional reduction. **Physical Review D**, APS, v. 92, n. 12, p. 124038, 2015. Citado nas pp. [36](#), [37](#), [40](#), [41](#) e [89](#).
- CHU, Y.-Z. Gravitational wave memory in ds4+ 2n and 4d cosmology. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 34, n. 3, p. 035009, 2017. Citado nas pp. [37](#), [38](#), [39](#) e [40](#).
- CHU, Y.-Z. More on cosmological gravitational waves and their memories. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 34, n. 19, p. 194001, 2017. Citado nas pp. [36](#) e [38](#).
- COMPÈRE, G.; HOQUE, S. J.; KUTLUK, E. Ş. Quadrupolar radiation in de sitter: displacement memory and bondi metric. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 41, n. 15, p. 155006, 2024. Citado nas pp. [37](#), [38](#) e [40](#).
- COUCH, W.; TORRENCE, R.; JANIS, A.; NEWMAN, E. Tail of a gravitational wave. **Journal of Mathematical Physics**, American Institute of Physics, v. 9, n. 3, p. 484–496, 1968. Citado na p. [41](#).
- CUTLER, C. Angular resolution of the lisa gravitational wave detector. **Physical Review D**, APS, v. 57, n. 12, p. 7089, 1998. Citado na p. [65](#).
- CUTLER, C.; APOSTOLATOS, T. A.; BILDSTEN, L.; FINN, L. S.; FLANAGAN, E. E.; KENNEFICK, D.; MARKOVIC, D. M.; ORI, A.; POISSON, E.; SUSSMAN, G. J. *et al.* The last three minutes: Issues in gravitational-wave measurements of coalescing compact

- binaries. **Physical Review Letters**, APS, v. 70, n. 20, p. 2984, 1993. Citado nas pp. 48 e 65.
- CUTLER, C.; FLANAGAN, E. E. Gravitational waves from merging compact binaries: How accurately can one extract the binary's parameters from the inspiral waveform? **Physical Review D**, APS, v. 49, n. 6, p. 2658, 1994. Citado nas pp. 60, 62 e 63.
- DAMOUR, T.; IYER, B. R. Post-newtonian generation of gravitational waves. ii. the spin moments. *In: Annales de l'IHP Physique théorique*. [S.l.: s.n.], 1991. v. 54, n. 2, p. 115–164. Citado na p. 53.
- DANZMANN, K.; TEAM, L. S. *et al.* Lisa: laser interferometer space antenna for gravitational wave measurements. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 13, n. 11A, p. A247, 1996. Citado na p. 58.
- DATE, G.; HOQUE, S. J. Gravitational waves from compact sources in a de sitter background. **Physical Review D**, APS, v. 94, n. 6, p. 064039, 2016. Citado nas pp. 37, 40 e 41.
- DEWITT, B. S.; BREHME, R. W. Radiation damping in a gravitational field. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 9, n. 2, p. 220–259, 1960. Citado na p. 84.
- DODELSON, S.; SCHMIDT, F. **Modern cosmology**. [S.l.]: Elsevier, 2024. Citado nas pp. 19, 23, 24, 25, 27, 28 e 31.
- DURRER, R. **The cosmic microwave background**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2020. Citado na p. 8.
- EINSTEIN, A. Näherungsweise integration der feldgleichungen der gravitation. **Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften**, p. 688–696, 1916. Citado nas pp. 8 e 19.
- EINSTEIN, A. Über gravitationswellen. **Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin**, Springer, v. 154, p. 1918, 1918. Citado nas pp. 8 e 41.
- EPSTEIN, R.; WAGONER, R. V. Post-newtonian generation of gravitational waves. **Astrophysical Journal**, vol. 197, May 1, 1975, pt. 1, p. 717–723., v. 197, p. 717–723, 1975. Citado na p. 53.
- FEENEY, S. M.; PEIRIS, H. V.; NISSANKE, S. M.; MORTLOCK, D. J. Prospects for measuring the hubble constant with neutron-star–black-hole mergers. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 126, p. 171102, Apr 2021. DOI [10.1103/PhysRevLett.126.171102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.126.171102). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.171102>. Citado na p. 48.
- FINN, L. S. Detection, measurement, and gravitational radiation. **Physical Review D**, APS, v. 46, n. 12, p. 5236, 1992. Citado nas pp. 60, 63 e 65.
- FISHBACH, M.; GRAY, R.; HERNANDEZ, I. M.; QI, H.; SUR, A.; ACERNESE, F.; AIELLO, L.; ALLOCCA, A.; ALOY, M.; AMATO, A. *et al.* A standard siren measurement of

- the hubble constant from gw170817 without the electromagnetic counterpart. **The Astrophysical Journal Letters**, IOP Publishing, v. 871, n. 1, p. L13, 2019. Citado nas pp. 67 e 69.
- FISHER, R. A. The logic of inductive inference. **Journal of the royal statistical society**, JSTOR, v. 98, n. 1, p. 39–82, 1935. Citado na p. 65.
- FLANAGAN, E. E.; HINDERER, T. Constraining neutron-star tidal love numbers with gravitational-wave detectors. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 77, p. 021502, Jan 2008. DOI [10.1103/PhysRevD.77.021502](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.77.021502). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.77.021502>. Citado na p. 53.
- FLANAGAN, E. E.; HUGHES, S. A. The basics of gravitational wave theory. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 7, n. 1, p. 204, 2005. Citado na p. 57.
- FRIEDLANDER, F. G. **The wave equation on a curved space-time**. [S.l.]: Cambridge university press, 1975. v. 2. Citado na p. 87.
- GAIR, J. R.; ANTONELLI, A.; BARBIERI, R. A fisher matrix for gravitational-wave population inference. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 519, n. 2, p. 2736–2753, 2023. Citado na p. 65.
- HAAS, R.; POISSON, E. Mass change and motion of a scalar charge in cosmological space-times. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 22, n. 15, p. S739, 2005. Citado nas pp. 37 e 89.
- HADAMARD, J. **Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations**. [S.l.]: New Haven Yale University Press, 1923. Citado nas pp. 36 e 87.
- HALL, E. D. Cosmic explorer: A next-generation ground-based gravitational-wave observatory. **Galaxies**, MDPI, v. 10, n. 4, p. 90, 2022. Citado na p. 57.
- HINDERER, T. Tidal love numbers of neutron stars. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 677, n. 2, p. 1216, 2008. Citado na p. 53.
- HOLZ, D. E.; HUGHES, S. A. Using gravitational-wave standard sirens. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 629, n. 1, p. 15, 2005. Citado na p. 66.
- HOQUE, S. J.; AGGARWAL, A. Quadrupolar power radiation by a binary system in de sitter background. **International Journal of Modern Physics D**, World Scientific, v. 28, n. 01, p. 1950025, 2019. Citado nas pp. 37, 38, 40, 44 e 45.
- HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. **Proceedings of the national academy of sciences**, National Academy of Sciences, v. 15, n. 3, p. 168–173, 1929. Citado nas pp. 22 e 24.
- HUSA, S.; KHAN, S.; HANNAM, M.; PÜRRER, M.; OHME, F.; FORTEZA, X. J.; BOHÉ, A. Frequency-domain gravitational waves from nonprecessing black-hole binaries. i. new

- numerical waveforms and anatomy of the signal. **Physical Review D**, APS, v. 93, n. 4, p. 044006, 2016. Citado na p. 68.
- ISAACSON, R. A. Gravitational radiation in the limit of high frequency. i. the linear approximation and geometrical optics. **Physical Review**, v. 166, n. 5, p. 1263–1271, 1968. Citado nas pp. 10, 11, 13, 14, 17, 19 e 20.
- ISAACSON, R. A. Gravitational radiation in the limit of high frequency. ii. nonlinear terms and the effective stress tensor. **Physical Review**, v. 166, n. 5, p. 1272–1280, 1968. Citado nas pp. 14, 19, 20, 21, 84 e 86.
- JOKELA, N.; KAJANTIE, K.; SARKKINEN, M. Gravitational wave memory and its tail in cosmology. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 106, p. 064022, Sep 2022. DOI 10.1103/PhysRevD.106.064022. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.106.064022>. Citado nas pp. 19, 36, 37, 40, 41 e 88.
- KAGRA: 2.5 generation interferometric gravitational wave detector. **Nature Astronomy**, Nature Publishing Group UK London, v. 3, n. 1, p. 35–40, 2019. Citado na p. 57.
- KOLB, E. W.; TURNER, M. S. **The Early Universe**. [S.l.]: Taylor and Francis, 2019. v. 69. ISBN 978-0-429-49286-0, 978-0-201-62674-2. DOI 10.1201/9780429492860. Citado na p. 27.
- KOLMOGOROV, A. N. The theory of probability. **Mathematics, Its Content, Methods, and Meaning**, MIT Press Cambridge, v. 2, p. 110–118, 1963. Citado na p. 64.
- KRAMER, M.; CHAMPION, D. J. The european pulsar timing array and the large european array for pulsars. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 30, n. 22, p. 224009, 2013. Citado na p. 58.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. Classical field theory. **Course of Theoretical Physics**, v. 2, 1975. Citado nas pp. 13, 15, 38, 40 e 44.
- LEIBUNDGUT, B. Cosmological implications from observations of type ia supernovae. **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 39, n. 1, p. 67–98, 2001. Citado na p. 8.
- LEMAÎTRE, G. A homogeneous universe of constant mass and increasing radius accounting for the radial velocity of extra-galactic nebulae. In: **A source book in astronomy and astrophysics, 1900–1975**. [S.l.]: Harvard University Press, 1979. p. 844–848. Citado nas pp. 22 e 23.
- LEVAN, A. J.; LYMAN, J.; TANVIR, N.; HJORTH, J.; MANDEL, I.; STANWAY, E. R.; STEEGHS, D.; FRUCHTER, A.; TROJA, E.; SCHRÖDER, S. *et al.* The environment of the binary neutron star merger gw170817. **The Astrophysical Journal Letters**, IOP Publishing, v. 848, n. 2, p. L28, 2017. Citado na p. 66.

- LÜCK, H.; TEAM, G. *et al.* The geo600 project. **Classical and quantum gravity**, IOP Publishing, v. 14, n. 6, p. 1471, 1997. Citado na p. 57.
- LUO, Z.; WANG, Y.; WU, Y.; HU, W.; JIN, G. The taiji program: A concise overview. **Progress of Theoretical and Experimental Physics**, Oxford University Press, v. 2021, n. 5, p. 05A108, 2021. Citado na p. 57.
- MAGGIORE, M. **Gravitational Waves. Vol. 1: Theory and Experiments**. [S.l.]: Oxford University Press, 2007. Citado nas pp. 10, 14, 17, 19, 20, 25, 28, 31, 34, 35, 44, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 53, 58, 60, 62 e 65.
- MAGGIORE, M. **Gravitational Waves. Vol. 2: Astrophysics and Cosmology**. [S.l.]: Oxford University Press, 2018. Citado nas pp. 27, 28, 30, 31 e 32.
- MANCHESTER, R. The international pulsar timing array. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 30, n. 22, p. 224010, 2013. Citado na p. 58.
- MANDEL, I.; FARR, W. M.; GAIR, J. R. Extracting distribution parameters from multiple uncertain observations with selection biases. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 486, n. 1, p. 1086–1093, 2019. Citado nas pp. 66 e 67.
- MARKOVIC, D. Possibility of determining cosmological parameters from measurements of gravitational waves emitted by coalescing, compact binaries. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 48, p. 4738–4756, Nov 1993. DOI [10.1103/PhysRevD.48.4738](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.48.4738). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.48.4738>. Citado na p. 48.
- MEI, J.; BAI, Y.-Z.; BAO, J.; BARAUSSE, E.; CAI, L.; CANUTO, E.; CAO, B.; CHEN, W.-M.; CHEN, Y.; DING, Y.-W. *et al.* The tianqin project: Current progress on science and technology. **Progress of Theoretical and Experimental Physics**, Oxford University Press, v. 2021, n. 5, p. 05A107, 2021. Citado na p. 57.
- MISNER, K. S. T. C. W.; WHEELER, J. A. **Gravitation**. [S.l.]: W. H. Freeman and Company, 1973. Citado nas pp. 10, 12, 13, 19, 20, 31, 35, 40 e 84.
- MOORE, C. J.; COLE, R. H.; BERRY, C. P. Gravitational-wave sensitivity curves. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 32, n. 1, p. 015014, 2014. Citado nas pp. 6, 60, 61, 62 e 63.
- MUKHANOV, V. **Physical foundations of cosmology**. [S.l.]: Cambridge university press, 2005. Citado nas pp. 19, 27, 28 e 31.
- NARIAI, H. On the green's function in an expanding universe and its role in the problem of mach's principle. **Progress of Theoretical Physics**, Oxford University Press, v. 40, n. 1, p. 49–59, 1968. Citado nas pp. 37 e 89.

- NISSANKE, S.; HOLZ, D. E.; DALAL, N.; HUGHES, S. A.; SIEVERS, J. L.; HIRATA, C. M. Determining the hubble constant from gravitational wave observations of merging compact binaries. **arXiv preprint arXiv:1307.2638**, 2013. Citado na p. 48.
- PALMESE, A.; BOM, C. R.; MUCESH, S.; HARTLEY, W. G. A standard siren measurement of the hubble constant using gravitational-wave events from the first three ligo/virgo observing runs and the desi legacy survey. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 943, n. 1, p. 56, 2023. Citado nas pp. 48 e 69.
- PALMESE, A.; DEVICENTE, J.; PEREIRA, M.; ANNIS, J.; HARTLEY, W.; HERNER, K.; SOARES-SANTOS, M.; CROCCE, M.; HUTERER, D.; HERNANDEZ, I. M. *et al.* A statistical standard siren measurement of the hubble constant from the ligo/virgo gravitational wave compact object merger gw190814 and dark energy survey galaxies. **The Astrophysical Journal Letters**, IOP Publishing, v. 900, n. 2, p. L33, 2020. Citado na p. 69.
- POISSON, E.; POUND, A.; VEGA, I. The motion of point particles in curved spacetime. **Living Reviews in Relativity**, Springer, v. 14, p. 1–190, 2011. Citado nas pp. 36, 37 e 38.
- PUNTURO, M.; ABERNATHY, M.; ACERNESE, F.; ALLEN, B.; ANDERSSON, N.; ARUN, K.; BARONE, F.; BARR, B.; BARSUGLIA, M.; BEKER, M. *et al.* The einstein telescope: A third-generation gravitational wave observatory. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 27, n. 19, p. 194002, 2010. Citado na p. 57.
- RIESS, A. G.; MACRI, L. M.; HOFFMANN, S. L.; SCOLNIC, D.; CASERTANO, S.; FILIPPENKO, A. V.; TUCKER, B. E.; REID, M. J.; JONES, D. O.; SILVERMAN, J. M. *et al.* A 2.4% determination of the local value of the hubble constant. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 826, n. 1, p. 56, 2016. Citado na p. 69.
- SAFFER, A.; YUNES, N.; YAGI, K. The gravitational wave stress–energy (pseudo)-tensor in modified gravity. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 35, n. 5, p. 055011, 2018. Citado na p. 21.
- SATO, S.; KAWAMURA, S.; ANDO, M.; NAKAMURA, T.; TSUBONO, K.; ARAYA, A.; FUNAKI, I.; IOKA, K.; KANDA, N.; MORIWAKI, S. *et al.* The status of decigo. In: IOP PUBLISHING. **Journal of Physics: Conference Series**. [S.l.], 2017. v. 840, n. 1, p. 012010. Citado na p. 58.
- SCHUTZ, B. F. Determining the hubble constant from gravitational wave observations. **Nature**, Nature Publishing Group UK London, v. 323, n. 6086, p. 310–311, 1986. Citado nas pp. 48 e 66.
- SOARES-SANTOS, M.; PALMESE, A.; HARTLEY, W.; ANNIS, J.; GARCIA-BELLIDO, J.; LAHAV, O.; DOCTOR, Z.; FISHBACH, M.; HOLZ, D.; LIN, H. *et al.* First measurement of the hubble constant from a dark standard siren using the dark energy survey galaxies

- and the ligo/virgo binary–black-hole merger gw170814. **The Astrophysical Journal Letters**, IOP Publishing, v. 876, n. 1, p. L7, 2019. Citado na p. 69.
- TARAFDAR, P.; NOBLESON, K.; RANA, P.; SINGHA, J.; KRISHNAKUMAR, M.; JOSHI, B. C.; PALADI, A. K.; KOLHE, N.; BATRA, N. D.; AGARWAL, N. *et al.* The indian pulsar timing array: First data release. **Publications of the Astronomical Society of Australia**, Cambridge University Press, v. 39, p. e053, 2022. Citado na p. 58.
- THORNE, K. S. Multipole expansions of gravitational radiation. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 52, n. 2, p. 299, 1980. Citado na p. 53.
- THORNE, K. S. Gravitational waves. **arXiv preprint gr-qc/9506086**, 1995. Citado nas pp. 56 e 57.
- THORNE, K. S.; BLANDFORD, R. D. **Modern classical physics: optics, fluids, plasmas, elasticity, relativity, and statistical physics**. [S.l.]: Princeton University Press, 2017. Citado na p. 42.
- TOLISH, A.; WALD, R. M. Cosmological memory effect. **Physical Review D**, APS, v. 94, n. 4, p. 044009, 2016. Citado nas pp. 28, 30, 31, 36, 41 e 87.
- TRESTINI, D.; BLANCHET, L. Gravitational-wave tails of memory. **Physical Review D**, APS, v. 107, n. 10, p. 104048, 2023. Citado na p. 41.
- VAJENTE, G. **Present and Future of Gravitational Wave Astronomy**. [S.l.]: MDPI, 2022. 91 p. Citado na p. 57.
- WALD, R. M. **General Relativity**. [S.l.]: Chicago University Press, 1984. Citado nas pp. 12, 16, 17, 18, 19 e 28.
- WEINBERG, S. **Cosmology**. [S.l.]: OUP Oxford, 2008. Citado nas pp. 22, 23, 24, 25, 27, 28 e 31.
- WHELAN, J. T. The geometry of gravitational wave detection. **en. In:()**, p. 15, 2013. Citado na p. 58.
- WIENER, N. **Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series**. [S.l.]: The MIT press, 1964. Citado na p. 61.
- YOO, J.; FITZPATRICK, A. L.; ZALDARRIAGA, M. New perspective on galaxy clustering as a cosmological probe: General relativistic effects. **Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology**, APS, v. 80, n. 8, p. 083514, 2009. Citado na p. 8.
- ZALALETDINOV, R. M. Averaging out the einstein equations. **General Relativity and Gravitation**, Springer, v. 24, p. 1015–1031, 1992. Citado nas pp. 21 e 86.

Apêndices

Apêndice A – Símbolo de Christoffel

Neste apêndice listamos os símbolos de Christoffel referentes à métrica de fundo $\tilde{g}_{\mu\nu}$ utilizados ao decorrer deste trabalho. As conexões são calculados a partir de

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\rho\sigma}(\partial_{\mu}\tilde{g}_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}\tilde{g}_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}\tilde{g}_{\mu\nu}). \quad (\text{A.1})$$

A métrica de fundo usada é a métrica de Friedmann espacialmente homogênea e isotrópica.

1 - Coordenadas (t,x,y,z)

Métrica:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Símbolos de Christoffel não nulos:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{0j}^i &= \tilde{\Gamma}_{j0}^i = \frac{\dot{a}}{a}\delta^i_j, \\ \tilde{\Gamma}_{ij}^0 &= \tilde{\Gamma}_{ji}^0 = a\dot{a}\delta_{ij}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

2 - Coordenadas (η,x,y,z)

Métrica:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -a^2(\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(\eta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(\eta) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

Símbolos de Christoffel não nulos:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{00}^0 &= \frac{a'}{a}, \\ \tilde{\Gamma}_{0j}^i &= \tilde{\Gamma}_{j0}^i = \frac{a'}{a}\delta^i_j, \\ \tilde{\Gamma}_{ij}^0 &= \tilde{\Gamma}_{ji}^0 = \frac{a'}{a}\delta_{ij}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

3 - Coordenadas (t,r,θ,φ)

Métrica:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t)r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

Símbolos de Christoffel não nulos:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}_{11}^0 &= a\dot{a}, \quad \tilde{\Gamma}_{22}^0 = a\dot{a}r^2, \quad \tilde{\Gamma}_{33}^0 = a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \\
 \tilde{\Gamma}_{22}^1 &= -r, \quad \tilde{\Gamma}_{33}^1 = -r \sin^2 \theta, \quad \tilde{\Gamma}_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \\
 \tilde{\Gamma}_{01}^1 &= \tilde{\Gamma}_{02}^2 = \tilde{\Gamma}_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a}, \\
 \tilde{\Gamma}_{12}^2 &= \tilde{\Gamma}_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad \tilde{\Gamma}_{23}^3 = \cot \theta.
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Apêndice B – Processo de média de Isaacson

Neste apêndice justificamos as regras da operação de média usadas na seção 1.4. Seguimos (Isaacson, 1968b) e (Misner; Wheeler, 1973). O leitor interessado pode consultar as referências para mais informações.

Em (Isaacson, 1968b), o autor define o processo de média de tensores, chamado por ele de *média de Brill-Hartle*, em homenagem à Dieter Brill e James Hartle que usaram a técnica pela primeira vez no trabalho (Brill; Hartle, 1964).

Integrar um campo tensorial não nos dá um tensor num espaço curvo, já que não podemos somar diretamente tensores em pontos diferentes do espaço-tempo. Porém, podemos somar tensores em um mesmo ponto! A ideia é construir uma média transportando paralelamente todos os tensores para um único ponto e então somá-los. Portanto, para definir o processo de média de um campo tensorial em uma região é necessário o uso do *bitensor* $\tilde{g}_\mu^{\alpha'}(x, x')$: função de dois pontos que transporta paralelamente um tensor de um ponto x para outro ponto x' (DeWitt; Brehme, 1960). O índice superior de $\tilde{g}_\mu^{\alpha'}(x, x')$ se transforma como um tensor no ponto x e o inferior como um tensor em x' . Consideramos que os pontos x e x' estão perto o suficiente para que haja apenas uma geodésica de $\tilde{g}_{\mu\nu}$ entre os dois pontos, de forma que um tensor $S_{\mu\nu}(x)$ seja o único tensor em x que é obtido ao transportar paralelamente $S_{\mu\nu}$ de x' para x . O bitensor é então usado como

$$S_{\mu\nu}(x) = \tilde{g}_\mu^{\alpha'}(x, x') \tilde{g}_\nu^{\beta'}(x, x') S_{\alpha'\beta'}(x'). \quad (\text{B.1})$$

Dado que o tensor $S_{\mu\nu}$ possui apenas componentes de alta frequência com comprimento de onda λ , em uma região com várias vezes o tamanho de λ e geometria de fundo $\tilde{g}_{\mu\nu}$, que contém apenas componentes de baixa frequência com comprimento de onda $L \gg \lambda$, define-se a média de $S_{\mu\nu}$ como

$$\langle S_{\mu\nu}(x) \rangle \equiv \int \sqrt{-\tilde{g}(x')} \tilde{g}_\mu^{\alpha'}(x, x') \tilde{g}_\nu^{\beta'}(x, x') S_{\alpha'\beta'}(x') f(x, x') d^4 x', \quad (\text{B.2})$$

onde $\tilde{g}(x')$ é o determinante de $\tilde{g}_{\mu\nu}$ em x' e $f(x, x')$ é uma função peso que decai suavemente para zero quando x e x' se diferem de uma distância d , tal que $\lambda \ll d \ll L$, e obedece a normalização

$$\int \sqrt{-\tilde{g}(x')} f(x, x') d^4 x' = 1. \quad (\text{B.3})$$

Assumindo que as componentes de $S_{\mu\nu}$ são de ordem $\mathcal{O}(\varepsilon)$, com $\varepsilon \ll L$, temos as seguintes propriedades:

- Sob o processo de média, derivadas covariantes comutam:

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta S_{\mu\nu} \rangle &= \langle \tilde{\nabla}_\beta \tilde{\nabla}_\alpha S_{\mu\nu} - \tilde{R}^\lambda_{\mu\alpha\beta} S_{\lambda\nu} - \tilde{R}^\lambda_{\nu\alpha\beta} S_{\mu\lambda} \rangle \\ &= \langle \tilde{\nabla}_\beta \tilde{\nabla}_\alpha S_{\mu\nu} \rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^3),\end{aligned}\quad (\text{B.4})$$

onde $\langle \tilde{R}^\lambda_{\mu\alpha\beta} \rangle = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$;

- Divergentes são zero sob a média:

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\nabla}_\sigma S_{\mu\nu}{}^\sigma \rangle &= \int \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}_\mu{}^{\alpha'}(x, x') \tilde{g}_\nu{}^{\beta'}(x, x') \tilde{\nabla}_{\sigma'} S_{\alpha'\beta'}{}^{\sigma'}(x') f(x, x') d^4 x' \\ &= \int \sqrt{-\tilde{g}} \left[\tilde{\nabla}_{\sigma'} (\tilde{g}_\mu{}^{\alpha'} \tilde{g}_\nu{}^{\beta'} S_{\alpha'\beta'}{}^{\sigma'} f) - (\tilde{\nabla}_{\sigma'} \tilde{g}_\mu{}^{\alpha'}) \tilde{g}_\nu{}^{\beta'} S_{\alpha'\beta'}{}^{\sigma'} f \right. \\ &\quad \left. - \tilde{g}_\mu{}^{\alpha'} (\tilde{\nabla}_{\sigma'} \tilde{g}_\nu{}^{\beta'}) S_{\alpha'\beta'}{}^{\sigma'} f - \tilde{g}_\mu{}^{\alpha'} \tilde{g}_\nu{}^{\beta'} S_{\alpha'\beta'}{}^{\sigma'} \partial_{\sigma'} f \right] d^4 x'\end{aligned}\quad (\text{B.5})$$

Na integral acima o primeiro termo é zero pelo teorema de Stokes. O segundo e terceiro termos são muito menor que $\mathcal{O}(1)$, pois, como $\tilde{g}_\mu{}^{\alpha'}$ é uma quantidade que depende apenas do fundo, então $\partial \tilde{g}_\mu{}^{\alpha'} \sim \tilde{g}_\mu{}^{\alpha'}/L = \mathcal{O}(1)$ e $\tilde{g}_\mu{}^{\alpha'} = \mathcal{O}(1)$, sobrando apenas $S = \mathcal{O}(\varepsilon)$ e $f = \mathcal{O}(d)$. No último termo temos que $\partial f \sim f/d = \mathcal{O}(1)$, sobrando apenas $S = \mathcal{O}(\varepsilon)$. Portanto, o divergente de $S_{\mu\nu}$ é desprezível no limite de altas frequências, i.e. $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\langle \tilde{\nabla}_\sigma S_{\mu\nu}{}^\sigma \rangle \doteq \varepsilon \quad (\text{B.6})$$

onde o símbolo “ $\doteq$ ” é introduzido por Isaacson e lê-se como “é reduzido por um fator de”;

- Derivadas covariantes “pulam” de um termo para outro. Começando com

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\nabla}^\rho S_\mu{}^\sigma \tilde{\nabla}_\sigma S_{\rho\nu} \rangle &= \int \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}_\mu{}^{\alpha'} \tilde{g}_\nu{}^{\beta'} \tilde{\nabla}^{\rho'} S_{\alpha'\sigma'} \tilde{\nabla}_{\sigma'} S_{\rho'\beta'} f(x, x') d^4 x' \\ &= \int \sqrt{-\tilde{g}} \left[\tilde{\nabla}_{\sigma'} (\tilde{g}_\mu{}^{\alpha'} \tilde{g}_\nu{}^{\beta'} \tilde{\nabla}^{\rho'} S_{\alpha'\sigma'} S_{\rho'\beta'} f) - (\tilde{\nabla}_{\sigma'} \tilde{g}_\mu{}^{\alpha'}) \tilde{g}_\nu{}^{\beta'} \tilde{\nabla}^{\rho'} S_{\alpha'\sigma'} S_{\rho'\beta'} f \right. \\ &\quad - \tilde{g}_\mu{}^{\alpha'} (\tilde{\nabla}_{\sigma'} \tilde{g}_\nu{}^{\beta'}) \tilde{\nabla}^{\rho'} S_{\alpha'\sigma'} S_{\rho'\beta'} f - \tilde{g}_\mu{}^{\alpha'} \tilde{g}_\nu{}^{\beta'} (\tilde{\nabla}_{\sigma'} \tilde{\nabla}^{\rho'} S_{\alpha'\sigma'}) S_{\rho'\beta'} f \\ &\quad \left. - \tilde{g}_\mu{}^{\alpha'} \tilde{g}_\nu{}^{\beta'} \tilde{\nabla}^{\rho'} S_{\alpha'\sigma'} S_{\rho'\beta'} \partial_{\sigma'} f \right] d^4 x'.\end{aligned}\quad (\text{B.7})$$

Separando o primeiro, segundo, terceiro e quinto termos do quarto termo, temos

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\nabla}^\rho S_\mu{}^\sigma \tilde{\nabla}_\sigma S_{\rho\nu} \rangle &= \int \sqrt{-\tilde{g}} \left[\tilde{\nabla}_{\sigma'} (\tilde{g}_\mu{}^{\alpha'} \tilde{g}_\nu{}^{\beta'} \tilde{\nabla}^{\rho'} S_{\alpha'\sigma'} S_{\rho'\beta'} f) - (\tilde{\nabla}_{\sigma'} \tilde{g}_\mu{}^{\alpha'}) \tilde{g}_\nu{}^{\beta'} \tilde{\nabla}^{\rho'} S_{\alpha'\sigma'} S_{\rho'\beta'} f \right. \\ &\quad \left. - \tilde{g}_\mu{}^{\alpha'} (\tilde{\nabla}_{\sigma'} \tilde{g}_\nu{}^{\beta'}) \tilde{\nabla}^{\rho'} S_{\alpha'\sigma'} S_{\rho'\beta'} f - \tilde{g}_\mu{}^{\alpha'} \tilde{g}_\nu{}^{\beta'} \tilde{\nabla}^{\rho'} S_{\alpha'\sigma'} S_{\rho'\beta'} \partial_{\sigma'} f \right] d^4 x' \\ &\quad - \int \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}_\mu{}^{\alpha'} \tilde{g}_\nu{}^{\beta'} (\tilde{\nabla}_{\sigma'} \tilde{\nabla}^{\rho'} S_{\alpha'\sigma'}) S_{\rho'\beta'} f d^4 x' \\ &= \int \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}_\mu{}^{\alpha'} \tilde{g}_\nu{}^{\beta'} \tilde{\nabla}_{\sigma'} (\tilde{\nabla}^{\rho'} S_{\alpha'\sigma'} S_{\rho'\beta'}) f d^4 x' \\ &\quad - \int \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}_\mu{}^{\alpha'} \tilde{g}_\nu{}^{\beta'} (\tilde{\nabla}_{\sigma'} \tilde{\nabla}^{\rho'} S_{\alpha'\sigma'}) S_{\rho'\beta'} f d^4 x' \\ &= \langle \tilde{\nabla}_\sigma (\tilde{\nabla}^\rho S_\mu{}^\sigma S_{\rho\nu}) \rangle - \langle (\tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}^\rho S_\mu{}^\sigma) S_{\rho\nu} \rangle,\end{aligned}\quad (\text{B.8})$$

onde usamos (B.5) para obter $\langle \tilde{\nabla}_\sigma (\tilde{\nabla}^\rho S_\mu^\sigma S_{\rho\nu}) \rangle$. Esse termo, como vimos, é a média do divergente do tensor, e, portanto, podemos negligenciá-lo. Isso justifica a propriedade

$$\langle \tilde{\nabla}^\rho S_\mu^\sigma \tilde{\nabla}_\sigma S_{\rho\nu} \rangle = -\langle (\tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}^\rho S_\mu^\sigma) S_{\rho\nu} \rangle. \quad (\text{B.9})$$

- A última propriedade é o gradiente ser zero:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\nabla}_\beta (S_\mu^\alpha \tilde{\nabla}_\sigma S_{\alpha\nu}) \rangle &= \langle \tilde{\nabla}_\beta S_\mu^\alpha \tilde{\nabla}_\sigma S_{\alpha\nu} \rangle + \langle S_\mu^\alpha \tilde{\nabla}_\beta \tilde{\nabla}_\sigma S_{\alpha\nu} \rangle \\ &= -\langle S_\mu^\alpha \tilde{\nabla}_\beta \tilde{\nabla}_\sigma S_{\alpha\nu} \rangle + \langle S_\mu^\alpha \tilde{\nabla}_\beta \tilde{\nabla}_\sigma S_{\alpha\nu} \rangle \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Mais detalhes sobre o assunto podem ser encontrados em (Isaacson, 1968b), (Brill; Hartle, 1964) e (Zalaletdinov, 1992).

Apêndice C – Equações para a cauda da onda gravitacional

Neste apêndice derivamos as equações (2.100) e (2.101) que descrevem o termo $B(x, x')$, responsável pela cauda da onda gravitacional. A função $B(x, x')$ é uma função de dois pontos suave (Burko; Harte; Poisson, 2002; Tolish; Wald, 2016; Hadamard, 1923) que surge como parte da solução da equação diferencial (2.98),

$$(\square + V)g(x, x') = -\delta^{(4)}(x^\sigma - x'^\sigma), \quad (\text{C.1})$$

onde $\square \equiv \partial^\mu \partial_\mu = -\partial^2 / \partial \eta^2 + \nabla^2$ e $V(\eta) \equiv a''/a$. A função de Green reduzida $g(x, x')$ é dada pelo ansatz de Hadamard (Hadamard, 1923; Friedlander, 1975),

$$g(x, x') = \frac{\delta(u)}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{4\pi}\Theta(u)B(x, x') \quad (\text{C.2})$$

onde $u = \eta - \eta' - |\vec{x} - \vec{x}'|$ e Θ é a função de Heaviside, que faz com que a cauda viaje por geodésicas tipo-tempo. Substituindo $g(x, x')$ em (C.1),

$$\square \left(\frac{\delta(u)}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) + \square \left(\frac{1}{4\pi}\Theta(u)B(x, x') \right) + V \frac{\delta(u)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + VB(x, x')\Theta(u) = -\delta^{(4)}(x^\sigma - x'^\sigma) \quad (\text{C.3})$$

O primeira termo do lado esquerdo é $-\delta^{(4)}(x^\sigma - x'^\sigma)$ e cancela com o delta do lado direito da igualdade. O segundo termo é

$$\begin{aligned} \square(B(x, x')\Theta(u)) &= \partial^\mu \partial_\mu (B\Theta(u)) = \Theta(u)\partial^\mu \partial_\mu B + \partial_\mu B \partial^\mu \Theta + \partial^\mu B \partial_\mu \Theta + B \partial^\mu \partial_\mu \Theta \\ &= \Theta(u)\square B + \partial_\mu B \delta(u)\partial^\mu u + \partial^\mu B \delta(u)\partial_\mu u + B \partial^\mu (\delta(u)\partial_\mu u) \\ &= \Theta(u)\square B + 2\delta(u)\partial^\mu B \partial_\mu u + B \partial^\mu (\delta(u))\partial_\mu u + B \delta(u)\square u, \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

onde usamos que a derivada da função Θ é o delta de Dirac, δ . Portanto, (C.3) se torna

$$\square B \Theta(u) + 2\delta(u)\partial^\mu B \partial_\mu u + B \partial^\mu \delta(u)\partial_\mu u + B \delta(u)\square u + V \frac{\delta(u)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + VB\Theta(u) = 0. \quad (\text{C.5})$$

Agora usamos as duas condições para $u = \eta - \eta' - |\vec{x} - \vec{x}'|$: i) $u > 0 \Rightarrow \eta - \eta' > |\vec{x} - \vec{x}'|$; ii) $u = 0 \Rightarrow \eta - \eta' = |\vec{x} - \vec{x}'|$. Para a primeira condição, $\Theta(u) = 1$ e $\delta(u) = 0$, então obtemos a equação de propagação para $B(x, x')$ (equação 2.100) dentro do cone de luz passado do ponto x (ou, de forma equivalente, dentro do cone de luz futuro de x'),

$$(\square + V)B(x, x') = 0, \quad \eta - \eta' > |\vec{x} - \vec{x}'|. \quad (\text{C.6})$$

A segunda condição nos dá que $\Theta(u) = 0$ e $\delta(u) = 1$, logo (C.5) torna-se

$$2\partial^\mu B \partial_\mu u + B \square u + \frac{V}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = 0, \quad \eta - \eta' = |\vec{x} - \vec{x}'|. \quad (\text{C.7})$$

Escrevendo $u = x^0 - x'^0 - \sqrt{(x^1 - x'^1)^2 + (x^2 - x'^2)^2 + (x^3 - x'^3)^2}$, vemos que $\partial_\mu u$ é

$$\frac{\partial u}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial u}{\partial x^0}, \frac{\partial u}{\partial x^1}, \frac{\partial u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial x^3} \right) = \left(1, -\frac{x^1 - x'^1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, -\frac{x^2 - x'^2}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, -\frac{x^3 - x'^3}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right). \quad (\text{C.8})$$

Derivando com ∂^μ , obtemos

$$\begin{aligned} \partial^\mu \partial_\mu u &= \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu u = -\partial_0(\partial_0 u) + \partial_1(\partial_1 u) + \partial_2(\partial_2 u) + \partial_3(\partial_3 u) \\ &= -\frac{3}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \left(\frac{(x^1 - x'^1)^2}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} + \frac{(x^2 - x'^2)^2}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} + \frac{(x^3 - x'^3)^2}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \right) \\ &= -\frac{3}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= -\frac{2}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Substituindo o resultado acima em (C.7),

$$\begin{aligned} 2\partial^\mu B \partial_\mu u - \frac{2B}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{V}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= 0 \\ |\vec{x} - \vec{x}'| \partial^\mu B \partial_\mu u - B + \frac{V}{2} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Utilizando (C.8),

$$\begin{aligned} |\vec{x} - \vec{x}'| (\partial^0 B \partial_0 u + \partial^1 B \partial_1 u + \partial^2 B \partial_2 u + \partial^3 B \partial_3 u) - B + \frac{V}{2} &= 0 \\ |\vec{x} - \vec{x}'| \partial^0 B - \partial^1 B (x^1 - x'^1) - \partial^2 B (x^2 - x'^2) - \partial^3 B (x^3 - x'^3) - B + \frac{V}{2} &= 0 \\ - (x^0 - x'^0) \partial_0 B - \partial_1 B (x^1 - x'^1) - \partial_2 B (x^2 - x'^2) - \partial_3 B (x^3 - x'^3) - B + \frac{V}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

onde usamos a condição $u = 0$ que implica $x^0 - x'^0 = |\vec{x} - \vec{x}'|$. Finalmente, obtemos a expressão final para o comportamento de $B(x, x')$ no cone de luz (equação 2.101),

$$(x - x')^\mu \partial_\mu B + B - \frac{V}{2} = 0, \quad \eta - \eta' = |\vec{x} - \vec{x}'|. \quad (\text{C.12})$$

Como consequência de (C.12) e de $B(x, x')$ ser suave, é estabelecido a coincidência no limite (Burko; Harte; Poisson, 2002; Jokela; Kajantie; Sarkkinen, 2022)

$$\lim_{x \rightarrow x'} B = \frac{1}{2} V. \quad (\text{C.13})$$

Para encontrar B , vamos considerar a solução dada por (Burko; Harte; Poisson, 2002). Considere que os pontos x' e x são pontos fixos no espaço-tempo e que uma linha reta entre x' e x seja definida pela relação

$$x''^\alpha = x'^\alpha + (\eta'' - \eta') n^\alpha, \quad (\text{C.14})$$

onde x''^α vai de x' a x quando η'' vai de η' a η . O vetor n^α é

$$n^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\eta''}, \quad (\text{C.15})$$

normalizado de forma que $n^0 = 1$. Devido a essa normalização, temos que $d\eta = d\eta''$. Com isso, podemos escrever (C.12) como

$$\begin{aligned} (x'' - x')^\alpha \partial_\alpha B + B - \frac{1}{2}V &= 0 \\ (\eta'' - \eta') n^\alpha \partial_\alpha B + B - \frac{1}{2}V &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Abrindo essa relação, temos

$$\begin{aligned} (\eta'' - \eta') n^0 \partial_0 B + (\eta'' - \eta') n^i \partial_i B + B - \frac{1}{2}V &= 0 \\ (\eta'' - \eta') \partial_0 B + (\eta'' - \eta') \frac{dx^i}{d\eta''} \partial_i B + B - \frac{1}{2}V &= 0 \\ (\eta'' - \eta') \left(\frac{\partial B}{\partial \eta} + \vec{n} \cdot \vec{\nabla} B \right) + B - \frac{1}{2}V &= 0 \\ (\eta'' - \eta') \left(\frac{\partial B}{\partial \eta''} + \vec{n} \cdot \vec{\nabla} B \right) + B - \frac{1}{2}V &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Agora, com a derivada $dB/d\eta$, temos a relação

$$\frac{dB}{d\eta} = \frac{\partial B}{\partial \eta''} \frac{d\eta''}{d\eta} + \frac{\partial B}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \eta''} \frac{d\eta''}{d\eta} = \frac{\partial B}{\partial \eta''} + \vec{n} \cdot \vec{\nabla} B. \quad (\text{C.18})$$

Substituindo em (C.17), obtemos

$$\begin{aligned} (\eta'' - \eta') \frac{dB}{d\eta} + B - \frac{1}{2}V &= 0 \\ (\eta'' - \eta') \frac{dB}{d\eta''} + B - \frac{1}{2}V &= 0 \\ \frac{d}{d\eta''} ((\eta'' - \eta')B) - \frac{1}{2}V &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Essa equação pode ser integrada facilmente, resultando na solução que satisfaz (C.13) (Burko; Harte; Poisson, 2002),

$$B(x, x') = \frac{1}{2(\eta - \eta')} \int_{\eta'}^{\eta} V(\eta'') d\eta''. \quad (\text{C.20})$$

Para um universo dominado por matéria, $a(\eta) \propto \eta^2$, portanto V é

$$V = \frac{a''}{a} = \frac{2}{\eta^2}. \quad (\text{C.21})$$

Substituindo em (C.20) e realizando a integral, temos que $B(x, x')$ é

$$B(\eta, \eta') = \frac{1}{\eta\eta'}. \quad (\text{C.22})$$

Para o leitor interessado, a solução de $B(x, x')$ para o caso geral $a \propto \eta^\alpha$ pode ser encontrada, e.g., em (Nariai, 1968), (Haas; Poisson, 2005) e (Chu, 2015).



UnB