



UnB

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

CRISTIAN LANDRI CABRAL DE MORAES

MÉTODOS EM TEORIA ALGÉBRICA DE CAMPOS QUÂNTICOS

BRASÍLIA, DF

2025

CRISTIAN LANDRI CABRAL DE MORAES

MÉTODOS EM TEORIA ALGÉBRICA DE CAMPOS QUÂNTICOS

Texto dissertativo apresentado como tese para
obtenção de título de Doutor em Física pelo
Programa de Pós-Graduação em Física da
Universidade de Brasília. Área de Concentração:
Teoria Quântica de Campos

Orientador: Prof. Dr. Aleksandr Nikolaievich
Pinzul.

Brasília, DF

2025

CRISTIAN LANDRI CABRAL DE MORAES

MÉTODOS EM TEORIA ALGÉBRICA DE CAMPOS QUÂNTICOS

Texto dissertativo apresentado como tese para obtenção de título de Doutor em Física pelo Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade de Brasília. Área de Concentração: Teoria Quântica de campos. Apresentado em 20 de fevereiro de 2025 e avaliado pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Aleksandr Nikolaievich Pinzul
(Presidente) Universidade de Brasília

Prof. Dr. Arsen Melikyan
(Membro) Universidade de Brasília

Prof. Dr. Tajron Juric
(Membro) Institut Ruđer Bošković

Prof. Dr. Daniel Ordine Vieira Lopes
(Membro) Instituto Federal de Goiania

Prof. Dr. Carolina Matte Gregory
(Suplente) Universidade de Brasília

Brasília, DF

2025

"Regulaj geometriaj formoj
kiel rektoj, egallateraj trian-
guloj, kvadratoj kaj cirkloj
estas konataj kaj ŝatataj de
la Homo ekde la prahistoriaj
tempoj, kiel dokumentas ili
aperoj en surrokaj pentraĵoj
kaj ĉizajxoj."

(Jesper Lykke Jacobsen)

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo estudar a teoria quântica de campos dentro de um quadro matemático mais rigoroso. De certa forma, segue a abordagem de Heisenberg, mas com a estrutura matemática associada à teoria das álgebras de operadores.

O foco deste estudo está nos métodos algébricos, de análise funcional e, especialmente, analíticos, que tornam esse quadro mais prático e aplicável. Destaca-se também a relação com o operador de Tomita, que tem sido mal interpretado em estudos recentes, especialmente no caso de um campo maciço localizado em um cone duplo. Nosso trabalho busca uma compreensão mais profunda da estrutura deste operador, o que pode, potencialmente, levar à sua construção.

Palavras-chave: Teoria modular; Tomita-Takesaki; Função G de Meijer; Teoria Algébrica de Campos Quânticos.

ABSTRACT

This work aims to study quantum field theory within a more rigorous mathematical framework. In a sense, it follows Heisenberg's approach, but with the mathematical structure associated with operator algebra theory.

The focus of this study is on algebraic, functional analysis, and especially analytical methods that make this framework more practical and applicable. The relationship with the Tomita operator is also emphasized, as it has been misinterpreted in recent studies, particularly in the case of a massive field localized in a double cone. Our work seeks to gain a deeper understanding of the structure of this operator, which could potentially lead to its construction.

Key-Words: Modular Theory; Tomita-Takesaki; Meijer G-function; Algebraic Quantum Field Theory.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}$	Números Reais
$\mathbb{R}^+$	Reais positivos
$\mathbb{R}^d$	Espaço euclidiano d dimensional
$\mathbb{R}_*^d$	Espaço euclidiano d dimensional sem origem
$\mathbb{C}$	Números Complexos
$\mathbb{C}^d$	Espaço hermitiano d dimensional
$\mathbf{R}$	Anéis em geral
$\text{Cen}(\mathbf{R})$	Centro do anel $\mathbf{R}$
$\mathbf{A}$	Álgebras em geral
$\mathbf{A}'$	Comutante da subálgebra $\mathbf{A}$
$\mathbf{N}$	Álgebras de Von Neumann em geral
(ELC)	Espaços localmente convexos
$\ \cdot\ $	Norma em um espaço de Banach
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produto interno em um espaço de Hilbert
$\mathbf{H}$	Espaços de Hilbert em geral
$A\mathbf{H}$	Subespaço de Hilbert gerado por aplicação do operador A
$\mathbf{A}\mathbf{H}$	Subespaço de Hilbert gerado pela aplicação de toda álgebra $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}\xi$	Subespaço de Hilbert gerado pela aplicação de toda álgebra $\mathbf{A}$ sobre $\xi \in \mathbf{H}$
$\mathbf{B}$	Bola unitária
$A _E$	Operador A com alcance restrito em (projeção ou subespaço) E
$\mathbf{A} _E$	Álgebra $\mathbf{A}$ com alcance restrito em (projeção ou subespaço) E
$\sigma(A)$	Espéctro do operador A
$\mathbf{A}^+$	Conjunto dos elementos positivos em $\mathbf{A}$
π	Representação de uma álgebra sobre algum espaço de Hilbert

Ω	Vetor cíclico e separável
π_φ	Representação referente à construção GNS sobre o estado φ
Ω_φ	Vetor cíclico e separável referente à construção GNS sobre o estado φ
$\mathcal{O}$	Subconjunto de $\mathbb{R}^n$
$\overline{\mathcal{O}}$	fechamento sobre subespaço $\mathcal{O}$
S	Operador de Tomita
Δ	Operador Modular
J	Involução modular
$D(A)$	Domínio do operador A
$R(A)$	Produto esquerdo de A
$\mathcal{M}$	O espaço-tempo
$O(n-1, 1)$	Grupo de Lorentz de dimensão n
$O(n-1, 1)_+$	Grupo restrito de Lorentz de dimensão n
$\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$	Grupo especial linear de dimensão n
$L^2(\mathbb{R}^n)$	Funções de quadrado integrável em $\mathbb{R}^n$
$L^2(\mathcal{O})$	Funções de quadrado integrável com suporte compacto em $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$
$h_n(x)$	Funções de Hermite
$H_n(x)$	Polinômios normalizados de Hermite
$\text{supp}(f)$	Suporte da função f
$\text{CCR}(\mathbf{H})$	Álgebra de Weyl associada ao espaço de Hilbert $\mathbf{H}$
$l^2(\mathbf{H})$	Sequências de quadrado somáveis em $\mathbf{H}$
$\mathcal{S}(\mathcal{O})$	Funções teste no subespaço $\mathcal{O}$
$\Im z, \Re z$	Respectivamente, componente imaginária e real de $z \in \mathbb{C}$
$\overline{f}$	Conjugado complexo da função f
V^+	Cone de luz dianteiro
V^-	Cone de luz traseiro

W^+	Cunha direita
X	Cone duplo
$\mathcal{H}$	Espaço de Hilbert de uma partícula (<i>One Particle Hilbert space</i>)
$e^{\mathcal{H}}$	Espaço de Fock
s	Operador de Tomita para o subespaço padrão
δ	Operador Modular para o subespaço padrão
j	Involução modular no subespaço padrão
C^∞	Conjunto das funções infinitamente diferenciáveis
$\hat{f}$	Transformada (Mellin ou Fourier) da função f
μ_m	Operador $\sqrt{-\nabla^2 + m^2}$
H_m^α	Fecho no domínio do operador $\overline{D(\mu_m^\alpha)}$
$H_m^\sigma(\mathcal{O}) = \overline{D(\mu_m^\sigma) \cap L^2(\mathcal{O})}$	Para $\sigma = \pm \frac{1}{2}$
$\mathcal{O}^c$	Complemento do subespaço $\mathcal{O}$
$\mathcal{U}^\circ$	Conjunto polar de $\mathcal{U}$
ρ	Inversão radial
$J(x)$	Jacobiano da transformação de coordenadas para x
$\mathbf{T}$	conjunto dos vetores estritamente temporais
$\mathbf{E}$	Conjunto dos vetores estritamente espaciais
$\log \Delta$	Operador hamiltoniano modular
$\mathcal{D}(s)$	Grupo de dilatação global
$J_\alpha(x)$	Função de Bessel de primeira espécie
$Y_\alpha(x)$	Função de Bessel de segunda espécie
$I_\alpha(x)$	Função de Bessel modificada de primeira espécie
$K_\alpha(x)$	Função de Bessel modificada de segunda espécie

Funções de Meijer

$$G_{i,j}^{n,m} \left[x \left| \begin{matrix} \overline{a_i} \\ \overline{b_j} \end{matrix} \right. \right]$$

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Motivação	12
2	ANÉIS, ÁLGEBRAS E OPERADORES	16
2.1	Definições	16
2.2	Topologia dos espaços algébricos	18
2.3	Construção GNS	22
2.4	Teorema de Tomita-Takesaki	25
3	MECÂNICA QUÂNTICA DE CAMPOS AXIOMÁTICA	30
3.1	Invariância relativística	30
3.2	Relações canônicas de comutação	33
3.2.1	Mecânica quântica	34
3.2.2	Unitariedades de Weyl	36
3.3	Axiomas	39
4	SUBESPAÇO PADRÃO	41
4.1	Teoria geral	41
4.2	Cone duplo sem massa	53
4.3	Cone duplo massivo	60
5	RESULTADOS ORIGINAIS	64
5.1	O operador μ_m em dimensão 1+1	64
5.2	O operador μ_m em dimensão 3+1	68
5.3	Análise numérica	70
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	74
6.1	Conclusões	74
6.2	Perspectivas futuras	76
	REFERÊNCIAS	78
	APÊNDICE A – SUBESPAÇOS PADRÕES DE HILBERT E TEORIA DE TOMITA-TAKESAKI	82
	APÊNDICE B – ESPAÇOS DE SOBOLEV	90
	APÊNDICE C – FUNÇÃO DE MEIJER	94

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

A mecânica quântica é um grande triunfo da ciência moderna, porém as necessidades impostas pela realidade física não estão totalmente de acordo com o apuro matemático desta teoria.

Um exemplo é a partícula livre, cuja função de onda formalmente não pertence ao espaço de Hilbert tratado, pois ela não é dita de quadrado integrável. Outra situação é o operador momento, trata-se de um operador ilimitado, extrapolando o escopo da teoria. Curiosamente, tais casos são facilmente tratados nas esferas experimentais e aplicadas da física: basta limitar o espaço em que são definidos, contudo isso não satisfaz as ambições teóricas, pois de certa forma trata-se de um recurso *ad hoc*.

Outro elemento que deve ser levado em consideração é a teoria da relatividade restrita, que exige a invariância dos resultados físicos sobre o grupo de Poincaré. Grandes resultados já foram obtidos com a intersecção dessas duas teorias, a saber teoria quântica e relatividade (comumente alcunhada teoria quântica de campos), mas um formalismo mais abrangente ainda é alvo de estudos.

Assim surge a teoria quântica de campos axiomática, como uma expansão natural da anterior, se destinando a tratar tais inconsistências. Para entender esta nova teoria é preciso se ater mais ao estudo de álgebras do que de costume, por isso uma atenção será dada na contextualização matemática desse tópico.

Historicamente, a origem dos estudos em álgebra de operadores remonta à década de 20 em 1900, fortemente ligada a três nomes: Hilbert, Heisenberg e Jhon von Neumann. Os estudos de Heisenberg são conhecidos como a fundação da mecânica quântica, já os desenvolvimentos de Hilbert e Jhon (von Neumann trabalhava como assistente de Hilbert nesse interstício) estavam relacionados à teoria espectral e formas quadráticas infinitas, além de equações integrais. (LANDSMAN, 1998)

Uma antiga anedota do mundo acadêmico conta sobre como a abordagem de Schödinger foi mais acessível no seu tempo devido ao desconhecimento de matrizes por parte da comunidade de físicos. Verdade ou não, o fato é que Bohr demonstrou certa familiaridade com o assunto e acabou por levar a Hilbert o conhecimento dessa emergente área.

Hilbert e seus assistentes (Nordheim e von Neumann) acabaram por descrever a estrutura matemática da mecânica quântica. No entanto os detalhes só foram satisfatoriamente esclarecidos, formando a base do entendimento moderno, com os desdobramentos do próprio von Neumann em seu livro *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (1932).

Uma atenção especial é devida ao fato de que a mecânica quântica tradicional está associada a uma categoria bem restrita de álgebras (aquelas introduzidas por Heisenberg). Isso ocorre porque o estudo mais abstrato dessa área da matemática remonta ao conceito de anéis (mais próximo a abordagem tratada por Von Neumann) e passa por desenvolvimentos conhecidos como representações, para se adequar a necessidades muito particulares da física.

O resgate do estudo dessa álgebra mais abstrata e suas características serão abordadas no capítulo [2]. Os detalhes devem ser guardados para o momento adequado, mas algo pode ser dito sobre o tipo de álgebra que se deseja obter nesse resgate, que será batizada em homenagem a von Neumann. Basicamente a topologia e a estrutura dela são determinadas para que a noção de evolução temporal seja natural. Isso se obtém com a introdução de um operador conhecido como **operador de Tomita**, capaz de gerar automorfismos com propriedades adequadas para o contexto quântico.

Um breve contexto se faz necessário. Em 1967 surgia uma forma nova de entender essas álgebras, conhecida hoje como teoria modular ou teoria de Tomita-Takesaki. Como mencionado anteriormente, há um operador responsável por introduzir automorfismos, que posteriormente seriam interpretados como evoluções temporais em certos parâmetros. Para compreender porque interpretar esses automorfismos como evoluções temporais é preciso recorrer a teoria física que se tinha desenvolvido nesse ambiente, a já mencionada teoria quântica de campos axiomática.

Mais detalhes sobre essa abordagem e como isso se comunica com a mecânica quântica de campos tradicional serão dadas no capítulo [3], mas a título de antecipação comenta-se superficialmente.

Brevemente, como o nome já sugere, é uma teoria alicerçada sobre uma lista de axiomas motivados na experiência da mecânica quântica. O início dessa proposta possivelmente se deu em 1957 com Haag observando a similaridade com certas operações em álgebras de von Neumann e regiões do espaçotempo. A busca por setores incapazes de compartilhar informação parecia estar relacionada à ação de achar elementos algébricos comutantes.

A conclusão de Haag é a associação dos dois conceitos: regiões do espaçotempo deveriam estar conjugadas a subálgebras de von Neumann, de modo que a comutação de duas subálgebras leve necessariamente a zonas incomunicáveis. Esse ambiente recebe o nome de redes de Hagg-Kastler e foi o impulsionador para a área tomar corpo a partir de Araki em 1964.

Com a chegada da teoria de Tomita-Takesaki, os resultados de Araki foram revisitados e reinterpretados nessa linguagem mais moderna. Daí é que estados quânticos em equilíbrio termal descritos por Haag, Hugenholtz, e Winnink foram caracterizados em termos de uma condição algébrica já conhecida por Kubo, Martin e Schwinger. Essa condição é satisfeita quando o operador de Tomita é colocado como o responsável pela evolução desses estados, assim ele passa a ser relacionado ao gerador de simetrias temporais.

Após o que foi exposto, é bem natural de se imaginar que o operador de Tomita se tornou um dos objetos mais investigados na área. Assim surgiram alguns resultados explícitos de regiões específicas, como é o caso da cunha direita (a região de fora do cone de luz) determinado por Joseph J. Bisognano e Eyvind H. Wichmann por volta de 1975 (BISOGNANO, 1975)(BISOGNANO, 1976), o cone de luz frontal por D. Buchholz em 1978 (BUCHHOLZ, 1978) e uma região conhecida como duplo cone por Peter D. Hislop e Roberto Longo em 1982 (LONGO, 1982).

Um resultado obtido por Bisognano e Wichmann não se estendeu para os outros casos: considerar a presença de massa ou não é indiferente para a descrição do operador. Na teoria isso não seria um problema, pois em 1989 Franca Figliolini e Daniele Guido conseguiram descrever um processo generalizado para qualquer região fechada (FIGLIOLINI, 1989). O problema é que esse processo não parece ter tornando os operadores extraídos por meio deles acessíveis para fins práticos.

Em verdade, o artigo de Figliolini e Guido não é sobre a determinação de operadores de Tomita, e sim no fato de que eles são contínuos com relação à massa. Mesmo assim, no meio desse processo, uma forma geral dele é derivada e essa referência acabou por se tornar ubíqua na área. Com a popularidade desse trabalho, veio também a necessidade de conhecer a abordagem que foi utilizada. trata-se de uma forma de entender a álgebra conhecida como Subespaços Padrões de Hilbert.

Existe um motivo muito mais abrangente para se interessar no estudo desses subespaços que foi abordado no apêndice [A]. Porém, nos moldes da narrativa que está se desenrolando aqui, aquilo encontrado no capítulo [4] é o suficiente para compreendê-lo. O que se deve manter em mente é que tratam-se de estruturas análogas à abordagem dada por Tomita e Takesaki.

O fato é que, uma classe muito particular de funções (quando organizadas de determinada forma) são os blocos fundamentais do cobiçado operador de Tomita. Trata-se das funções convergentes na atuação do operador μ_m , que pode ser representado como uma transformada de Fourier: $\widehat{\mu_m f}(p) = \sqrt{p^2 + m^2} \hat{f}(p)$. No apêndice [B] é possível entender como espaços semelhantes a esse contribuem para a física.

Eis que em 2021 o operador massivo de Tomita para o duplo cone é determinado por Roberto Longo e Gerardo Morsella ([LONGO, 2021](#)) por meios completamente particulares, isso é, sem usar as generalizações de Figliolini e Guido. Esse artigo seria relevante para poder usar o operador em casos concretos, isso se ele não estivesse equivocado.

Em 2023 Henning Bostelmann, Daniela Cadamuro e Christoph Minz questionam esses resultados com a publicação ([BOSTELMANN, 2023](#)) e o próprio Longo fez correções no ser artigo mudando inclusive o título que passou a ser "The massless modular Hamiltonian". Assim entende-se que mais elementos da teoria, para além do operador de Tomita, devem ser melhor explorados antes de seguir a busca.

Essa é a motivação para o presente trabalho, achar ferramentas que possam auxiliar a área em um nível mais técnico. Como já foi mencionado, apesar da determinação do operador modular para qualquer região, isso não tem apelo prático, então estudemos aquilo que Figliolini e Guido deixaram de mais palpável: o operador μ_m .

As ferramentas a que se fez referência podem ser conferidas no apêndice [C] e encontram na Função de Meijer seu maior representante. Para demonstrar como elas são utilizadas, o operador μ_m (ou suas potências mais interessantes) será determinado no espaço das configurações no capítulo [5].

As ultimas considerações e conclusões a se fazer estarão no capítulo [6].

2 ANÉIS, ÁLGEBRAS E OPERADORES

Na busca em ser o mais inclusivo possível, tratar-se-á a estrutura matemática desde o seu objeto mais fundamental, os anéis.

2.1 Definições

Considera-se o tripleto $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ um **anel** quando o conjunto $\mathbf{R}$ é um grupo comutativo com respeito à operação binária $+: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ e um monoide com respeito à remanescente operação também binária $\cdot: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Se a operação " $\cdot$ " é comutativa o anel é dito **comutativo**.

O **centro** de um anel é o conjunto de todos os elementos que comutam com qualquer um outro. $\text{Cen}(\mathbf{R}) = \{r \in \mathbf{R} : r \cdot x = x \cdot r, \forall x \in \mathbf{R}\}$. O tripleto $(\mathbf{R}, \phi, \mathbf{K})$ composto de um anel $\mathbf{R}$, um homomorfismo $\phi: \mathbf{K} \rightarrow \text{Cen}\mathbf{R}$ e o anel comutativo $\mathbf{K}$ é chamado de **K-álgebra**(ANDERSON, 1973).

Para os nossos propósitos podemos suprimir o homomorfismo ϕ e $\mathbf{K}$ será sempre $\mathbb{C}$, os números complexos, então denotaremos álgebras apenas como $\mathbf{R}$.

As álgebras podem ser **abstratas** ou **concretas**. Tal denominação se refere à utilização mais frequente das álgebras, que são encontradas como o conjunto de operadores atuando sobre algum espaço vetorial.

É possível definir um isomorfismo entre uma álgebra qualquer e a álgebra de operadores de determinado espaço, tal mapeamento é chamado de **representação**. Álgebras representadas sobre algum espaço são as ditas álgebras concretas, do contrário são abstratas.

Um espaço de Banach pode ser convertido em uma álgebra adicionando uma operação multiplicativa, se além disso, seus elementos satisfizerem: $\|A \cdot B\| = \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ esta é dita uma **álgebras de Banach**.

Em analogia à operação adjunto em espaços de produto interno, podemos definir a **involução** em álgebras da seguinte forma:

$$*: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad (2.1)$$

Com $A \in \mathbf{R}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ satisfazendo:

$$\begin{aligned} A^{**} &= A \\ (AB)^* &= B^* A^* \\ (\lambda A)^* &= \bar{\lambda} A^*. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Álgebras com esta operação são chamadas **álgebras-*** (álgebras estrela), se, além disso, for Banach ela recebe a denominação de Banach*-álgebras, ou somente **B*-álgebras**.

A analogia com a álgebra de operadores limitados em um espaço de Hilbert pode fornecer algumas estruturas interessantes, uma vez que $\langle \psi, A^* \phi \rangle = \langle A\psi, \phi \rangle$, onde a involução aqui representa a própria operação adjunta. A norma em tal álgebra é definida como o supremo sobre todos os vetores unitários da operação:

$$\|A\| = \sup_{\|\psi\|=1} \|A\psi\|. \quad (2.3)$$

Nessa álgebra concreta podemos concluir que $\|A^*A\| = \|A\|^2$. Inspirada nessa relação, denomina-se assim uma B^* -álgebra com a supracitada propriedade como uma C^* -álgebra (LANDSMAN, 1998).

O **comutante** de uma álgebra $\mathbf{R}$, que comumente é representado por $\mathbf{R}'$, é o subconjunto de $\mathbf{R}$ composto de todos os elementos que comutam com a própria álgebra. Claramente pode-se definir o comutante de um subconjunto da álgebra $\mathbf{A} \subset \mathbf{R}$ como todos os elementos da álgebra que comutam com este subconjunto inteiro: $\mathbf{A}'$.

Naturalmente é possível se questionar quanto ao comutante de um conjunto ou subconjunto composto de elementos que já são o comutante de outro conjunto ou subconjunto. Considere um dado conjunto $\mathbf{A}$ temos seu comutante $\mathbf{B} = \mathbf{A}'$, mas o que nos interessa é o comutante deste conjunto: $\mathbf{B}'$. A este conjunto damos o nome de **comutante duplo** e representa-se $\mathbf{A}''$.

Dado um subconjunto $\mathbf{N} \subset \mathbf{A}$ onde $\mathbf{A}$ é uma C^* -álgebra, diz-se que $\mathbf{N}$ é uma **álgebra de Von Neumann** se $\mathbf{N} = \mathbf{N}''$ (ARAKI, 1999).

A álgebra de Von Neumann é dita um **fator** se seu centro é trivial, ou seja, se ele é composto apenas de múltiplos da identidade. Aqui é importante ressaltar que um anel nem sempre é munido de uma unidade, no entanto é fácil adicionar uma unidade aos anéis explicitamente (LANDSMAN, 1998)(ANDERSON, 1973)(TAKESAKI, 2000).

Seguindo os desenvolvimentos de Murray e Von Neumann na classificação de fatores (NEUMANN, 1936), pode-se discriminar três tipos deles com respeito às projeções que neles habitam.

Tipo I: Consiste em fatores que possuem uma projeção mínima, isto é um $P \neq 0$ tal que $\nexists V \in \mathbf{N}$ satisfazendo $V < P$. Entende-se a relação de ordem entre as projeções como em (BRATTELI, 2002) e (HAAG, 1996).

Tipo II: Fatores contendo projeções com dimensão infinita (LANDSMAN, 1998).

Tipo III: Nenhuma projeção não trivial tem dimensão finita.

Cada um dos tipos de fatores podem ser ainda mais especificados, mas o que é relevante nesse contexto são apenas os refinamentos dos fatores de tipo III. Isso se deve ao fato de observáveis do nosso interesse serem todos do tipo III (YNGVASON, 2005a), (ARAKI, 1968).

2.2 Topologia dos espaços algébricos

Espaços normados são variedades lineares onde é possível definir uma norma. Existem também os **espaços localmente convexos** (ELC) que se tratam de variedades lineares onde são definidos sistemas de seminormas, isto é, um conjunto de "quase normas" definidas suprimindo a propriedade: $\phi(\psi) = 0 \Leftrightarrow \psi = 0$ com ψ na variedade linear. $\phi(\cdot)$ é a seminorma.

Espaços de Banach são espaços normados completos, analogamente **espaços de Fréchet** são ELC completos e seu sistema de seminormas é contável (BOGOLUBOV, 1987). Tais estruturas são responsáveis por fornecer topologias distintas para a álgebra de operadores definidas sobre elas.

A **topologia normada** é constituída pelos abertos definidos em um conjunto $\mathbf{A}$ munido de norma da seguinte forma.

$$\mathcal{A}_\epsilon = \{A \in \mathbf{A} : \|A\| \leq \epsilon\} \quad \epsilon \in \mathbb{R}^+. \quad (2.4)$$

Apesar da próxima topologia se chamar de **topologia forte** ela é mais fraca do que a topologia normada. Dito isso podemos definir os abertos na topologia forte como sendo:

$$\mathcal{A}_{\{\epsilon_i\}} = \{A \in \mathbf{A} : \|(A - A')\psi_i\| \leq \epsilon_i\} \quad \epsilon_i \in \mathbb{R}^+, A' \in \mathbf{A}. \quad (2.5)$$

Com ψ_i qualquer conjunto contável de vetores. A próxima topologia é dita **topologia fraca** e é necessário um conjunto de vetores ψ_i e um conjunto de seminormas ϕ_i , assim seus abertos são:

$$\mathcal{A}_{\{\epsilon_i\}} = \{A \in \mathbf{A} : \phi_i[(A - A')\psi_i] \leq \epsilon_i\} \quad \epsilon_i \in \mathbb{R}^+, A' \in \mathbf{A}. \quad (2.6)$$

σ -**forte** é a topologia descrita pelos abertos:

$$\mathcal{A}_{\{\epsilon_i\}} = \left\{ A \in \mathbf{A} : \left(\sum_i \|(A - A')\psi_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon_i \right\} \quad \epsilon_i \in \mathbb{R}^+, A' \in \mathbf{A}. \quad (2.7)$$

Existe também a topologia σ -**fraca**

$$\mathcal{A}_{\{\epsilon_i\}} = \left\{ A \in \mathbf{A} : \left| \sum_i \phi_i[(A - A')\psi_i] \right| \leq \epsilon_i \right\} \quad \epsilon_i \in \mathbb{R}^+, A' \in \mathbf{A}. \quad (2.8)$$

σ^* -**forte** é a topologia descrita pelos abertos:

$$\mathcal{A}_{\{\epsilon_i\}} = \left\{ A \in \mathbf{A} : \left(\sum_i \|(A - A')\psi_i + (A - A')^*\psi_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon_i \right\} \quad \epsilon_i \in \mathbb{R}^+, A' \in \mathbf{A}. \quad (2.9)$$

Aqui é importante mencionar algumas propriedades dessas topologias como a ordem de força delas. Isto é, sequências ou redes (*nets*) convergentes em topologias mais fortes automaticamente convergem em topologias mais fracas.

A ordem crescente de forças delas é a seguinte: fraca, σ -fraca, σ -forte, σ^* -forte, normada. A topologia forte é mais forte do que a fraca e mais fraca do que a σ -forte mas não tem relação com a σ -fraca (TAKESAKI, 2000).

$$\begin{cases} \text{fraca} < \sigma\text{-fraca} < \sigma\text{-forte} < \sigma^*\text{-forte} \\ \text{fraca} < \text{forte} < \sigma\text{-forte}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Relembrando que a álgebra de Von Neumann foi definida como sendo aquela que satisfaz $\mathbf{N} = \mathbf{N}''$, porém existe um teorema muito importante que pode melhorar a compreensão sobre as álgebras de Von Neumann.

Teorema do duplo comutante

Suponha $\mathbf{N}$ uma $*$ -álgebra de operadores em um espaço de Hilbert $\mathbf{H}$, se $\mathbf{N}$ é fechada na topologia σ^* -forte então:

(i) Existe uma máxima projeção E em $\mathbf{N}$, e é a projeção de $\mathbf{H}$ sobre $[\mathbf{NH}]$. Para todo $A \in \mathbf{N}$ teremos

$$A = EA = AE. \quad (2.11)$$

Isto é, E é uma identidade para $\mathbf{N}$ e $[\mathbf{NH}]$ é o espaço de todos os vetores do tipo $A\xi$ para $A \in \mathbf{N}$ e $\xi \in \mathbf{H}$

(ii) O comutante duplo $\mathbf{N}''$ de $\mathbf{N}$ é o conjunto $\{A + aE\}$ para $A \in \mathbf{N}$ e $a \in \mathbb{C}$. Assim se $\mathbf{N}$ for não degenerado, ele é uma álgebra de Von Neumann. (TAKESAKI, 2000)

□

Em um curso tradicional, alguns resultados deveriam antever este teorema, desse modo, para preservar a estrutura e acessibilidade deste trabalho uma prova no formato de tópicos parece mais razoável para depois justificar cada um deles.

Primeiramente aqueles que levam ao primeiro passo do teorema com $\mathbf{B}$ representando a bola unitária em $\mathbf{N}$:

(i)

1. $\mathbf{N}$ é σ^* -forte fechada $\Rightarrow$ $\mathbf{N}$ é fechada na topologia σ -fraca.
2. $\mathbf{B}$ tem um ponto de extremo.
3. $\mathbf{N}$ tem uma identidade: E .
4. a identidade é a máxima projeção em $\mathbf{N}$.

Denotando $\mathbf{N}|_E$ como o conjunto de todos os operadores em $\mathbf{N}$ com alcance restrito por E . Segue para o segundo resultado:

(ii)

1. $\mathbf{N}|_E'' = \mathbf{N}|_E$.
2. $(a - \lambda 1)|_E \in \mathbf{N}|_E$ para $a \in \mathbf{N}''$.
3. $a = b + \lambda 1$ para $b \in \mathbf{N}$.

agora prova-se individualmente:

(i)1. $\mathbf{N}$ é σ^* -forte fechada $\Rightarrow$ $\mathbf{N}$ é fechada na topologia σ -fraca.

Consequencia do fato de σ -fraca $<$ σ^* -forte onde redes ou sequências convergem devido a relação de força.

(i)2. $\mathbf{B}$ tem um ponto de extremo.

$\mathbf{B}$ é σ -fraca compacta, assim o Teorema de Krein-Milman([KANTOROVICH, 1982](#)), é aplicavel:

"todo compacto e convexo subconjunto de ELC é o casco convexo e fechado de seus pontos extremos"

Para abreviar a discussão, não se deseja entender todos os conceitos envolvidos no teorema, apenas ad admitir que $\mathbf{B}$ tem um ponto de extremo, ou seja, um ponto maior em temos de seminormas do que os outros.

(i)3. $\mathbf{N}$ tem uma identidade: E .

Se x é um ponto de extremo, então $p = x^*x$ e $q = xx^*$ são projeções, assim para $u \in (1 - q)S(1 - p)$:

$$\begin{aligned}
 \|x \pm u\|^2 &= \|(x \pm u)^*(x \pm u)\| \\
 &= \|p \pm u^*x \pm x^*u + u^*u\| \\
 &= \|p + (1 - p)u^*u(1 - p)\| = 1.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Conclui-se que $(1 - q)S(1 - p) = \{0\}$ e igualmente $u \in (1 - q)\mathbf{N}(1 - p) = \{0\}$. Agora seja e_i uma identidade aproximada, isto é, uma sequência de elementos em $\mathbf{N}$ que convergem para uma identidade (não necessariamente em $\mathbf{N}$), ela satisfaz.

$$(1 - q)e_i(1 - p) = 0. \tag{2.13}$$

Note que o limite de $e_i \rightarrow E$ converge para um elemento em $\mathbf{N}$ da feita que p e q estão dentro da álgebra

$$e_i = e_i p + q e_i - q e_i p. \quad (2.14)$$

(i)4. a identidade é a máxima projecção em $\mathbf{N}$, por óbvio.

Isso é o suficiente para provar a primeira parte do teorema, a saber "Existe uma máxima projecção E em $\mathbf{N}$ ". Agora parte-se para a segunda conclusão.

(ii)1. $\mathbf{N}''|_E = \mathbf{N}|_E$.

$\mathbf{N}|_E \cap S$ é compacto na topologia σ -fraca devido ao homeomorfismo $x \mapsto x|_E$. Isso quer dizer que $\mathbf{N}|_E$ é σ -fraco fechado, isso é o suficiente para afirma que $\mathbf{N}''|_E = \mathbf{N}|_E$.

(ii)2. $(a - \lambda 1)|_E \in \mathbf{N}|_E$ para $a \in \mathbf{N}''$.

Se considerar $\mathbf{N}|_{E^\perp}$ como a restrição de $\mathbf{N}$ ao complemento ortogonal do alcance de E , conclui-se que $\mathbf{N}|_{E^\perp} = \{0\}$, assim o primeiro comutante desta sub-álgebra será a totalidade da álgebra restrito ao alcance do complemento ortogonal de E , o que quer dizer que $(\mathbf{N}|_{E^\perp})'' = \{\lambda 1\}$. Assim sendo $a - \lambda 1$ se anula neste alcance ortogonal para $a \in \mathbf{N}''$ ou seja $(a - \lambda 1)|_E \in \mathbf{N}|_E$.

(ii)3. $a = b + \lambda 1$ para $b \in \mathbf{N}$.

Podemos dizer que existe um operador $b \in \mathbf{N}$ tal que $b|_E = (a - \lambda 1)_E$ em que ambos se anulam no alcance ortogonal, isso quer dizer que: $b = (a - \lambda 1)$ e logo $a = b + \lambda 1$.

Essa é a conclusão da segunda parte do teorema, mas ainda existe um adendo que precisa ser considerado: para tratar do caso em que $\mathbf{N}$ é não degenerado, isto é: $[\mathbf{N}\mathbf{H}] = \mathbf{H}$. Considera-se $\mathbf{H}_n$ como replicas de $\mathbf{H}$ assim sendo $\xi_n \in \mathbf{H}_n$ talque $\sum \|\xi_n\|^2 < \infty$ diz-se que $\xi = \oplus_n^\infty \xi_n \in \oplus_n^\infty \mathbf{H}_n$.

A álgebra de operadores $\tilde{\mathbf{N}}$ sobre $\oplus_n^\infty \mathbf{H}_n$, considerando $\mathbf{N}$ atuando em $\mathbf{H}$, é feita de elementos do tipo $U_i^* x U_j$ com $x \in \mathbf{N}$ e U_i uma isometria de $\mathbf{H}$ em $\mathbf{H}_i$. Nota-se que nessas condições $\tilde{\mathbf{N}}'' = \tilde{\mathbf{N}}''$. Tome $a \in \mathbf{N}''$ e deseja-se provar um passo intermediário:

$$\exists b \in \mathbf{N} \text{ tal que } \|(a - b)\xi\| < \epsilon \forall \epsilon > 0, \xi \in \mathbf{H}, a \in \mathbf{N}''$$

Seja p uma projeção em $[\mathbf{N}\xi]$, logo $p \in \mathbf{N}'$, temos que $[\mathbf{N}\xi]$ é invariante para $\mathbf{N}''$ então $[\mathbf{N}''\xi] \subset [\mathbf{N}\xi]$, Portanto pode-se aproximar a por b de forma forte.

Para o isomorfismo em questão: $\exists \tilde{b} \in \tilde{\mathbf{N}}$ tal que $\|(\tilde{a} - \tilde{b})\tilde{\xi}\| < \epsilon$ o que quer dizer que a pertence ao fecho σ -forte de $\mathbf{N}$ e isso conclui que $\mathbf{N} = \mathbf{N}''$.

■

Um dos maiores louros deste teorema é a compreensão que as álgebras de Von Neumann podem também ser vistas como uma $*$ -álgebra fechada na topologia fraca. Isso facilitará muitos teoremas doravante.

2.3 Construção GNS

A partir de agora todas as álgebras tratadas aqui serão consideradas como tendo unidade. Chamamos de **espectro de A** , para $A \in \mathbf{A}$ o conjunto de todos os $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que o elemento $1\lambda - A$ não tem inverso na álgebra $\mathbf{A}$ e denotamos como $\sigma(A)$ esse conjunto.

Quando $A = A^*$ sabe-se que seu espectro é real. Nessas condições, considera-se o conjunto $\mathbf{A}^+$ de elementos satisfazendo: $\sigma(A) \geq 0$, isto é, todos os valores no espectro são positivos. Tais elementos são ditos **positivos** e $\mathbf{A}^+$ é o conjunto deles.

Define-se um **estado** como um mapeamento linear da C^* -álgebra sobre os números complexos $\varphi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{C}$ sendo positivo e normalizado, ou seja:

$$\begin{aligned}\varphi(B + \lambda A) &= \varphi(B) + \lambda \varphi(A) \\ \varphi(P) &\geq 0 \\ \varphi(1) &= 1.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Onde $A, B \in \mathbf{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $P \in \mathbf{A}^+$. Para que uma representação π sobre um espaço de Hilbert $\mathbf{H}$ seja dita **cíclica**, deve existir um vetor Ω chamado de **vetor cíclico** de tal modo que $\overline{\pi(\mathbf{A})\Omega} = \mathbf{H}$. Isto é, o espaço feito de todos os elementos de $\mathbf{A}$ representados atuando no vetor Ω é denso no espaço de Hilbert.

Um **vetor separável** é aquele que separa a álgebra no seguinte sentido: seja $\pi(A)$ com $A \in \mathbf{A}$ ocorre que $\pi(A)\Omega = 0 \Leftrightarrow A = 0$ (KADISON, 2000). Agora é possível definir a principal ferramenta desta secção.

A **construção Gel'fand-Neumark-Segal (GNS)** é um triplete feito de um estado: φ , uma representação da álgebra em um espaço de Hilbert: π_φ e um vetor cíclico e separável: Ω_φ de modo que o produto interno é definido como:

$$\langle \pi_\varphi(A)\Omega_\varphi, \pi_\varphi(B)\Omega_\varphi \rangle := \varphi(A^*B).\tag{2.16}$$

A ideia é construir um espaço de Hilbert por meio da álgebra, sua representação e um estado. Com frequência pode-se encontrar também a seguinte equivalente forma:

$$\langle \Omega_\varphi, \pi_\varphi(A^*B) \Omega_\varphi \rangle := \varphi(A^*B). \quad (2.17)$$

Obviamente o desejo de estudar essas estruturas se justifica na busca pela descrição da álgebra de operadores da mecânica quântica. Um recurso para atender o entendimento da relatividade sobre a causalidade relacionada a pontos do espaço-tempo pode ser invocado na forma das **redes de Haag-Kastler** (HAAG, 1996).

As redes de Haag-Kastler indexam regiões do espaço-tempo permitindo ou proibindo que operadores sejam mensuráveis ao mesmo tempo. Seja $\mathcal{O}$ uma delas, a álgebra de operadores sobre ela será $\mathcal{N}(\mathcal{O})$ contendo todos os operadores associados a essa região. Em contraponto com $\mathcal{N}(\mathcal{O}')$ para $\mathcal{O}'$ espacialmente separado de $\mathcal{O}$ tem-se $\mathcal{N}(\mathcal{O}') = \mathcal{N}(\mathcal{O})'$.

Esse recurso faz com que operadores definidos para pontos espacialmente separados comutem, e assim sendo permitem a mensurabilidade simultânea. Do contrário, dois operadores na mesma região do espaço-tempo pertencem a mesma álgebra, assim não há garantia de comutatividade.

Sendo mais específico ao espaço que interessa à mecânica quântica, existe um resultado muito importante garantindo a existência deste vetor cíclico:

Teorema de Reeh-Schlieder

Considera-se aditividade fraca para um determinado estado φ invariante por transformação de Poincaré. Então o vetor Ω_φ , como definido anteriormente, é cíclico para $\pi_\varphi(\mathcal{N}(\mathcal{O}))$ e é separável para $\pi_\varphi(\mathcal{N}(\mathcal{O}))''$. Aqui $\mathcal{O}$ é uma região limitada (ARAKI, 1999)

□

Para provar o teorema a estratégia é achar um vetor ψ tal que $\psi \perp \pi_\varphi(\mathcal{N}(\mathcal{O})) \Omega_\varphi$ e então concluir que $\psi = 0$. Chame $L(x)$ o elemento do grupo de Poincaré referente ao deslocamento por x .

Se $x_1, \dots, x_n$ pertencerem a uma vizinhança de 0 suficientemente pequena pode-se identificar um subespaço $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$ tal que $\overline{\mathcal{O}_1} \subset \mathcal{O}$ e ainda assim:

$$\langle \psi, \pi_\varphi(L(x_1)A_1) \cdots \pi_\varphi(L(x_n)A_n) \Omega_\varphi \rangle = 0. \quad (2.18)$$

Onde $A_i \in \mathcal{N}(\mathcal{O})$. Existe uma operação unitária que implementa a transformação a cima:

$$\pi_\varphi(L(x_i)A_i) = T(x_i) \pi_\varphi(A_i) T(x_i)^*. \quad (2.19)$$

É possível representar o operador T em termos de sua decomposição espectral (NEUMANN, 1932):

$$T(x_i) = \int e^{i\langle x_i, p \rangle} E dp. \quad (2.20)$$

Onde E é a sua projeção espectral. Por ser uma transformação de Poincaré o suporte de E dever estar dentro do cone de luz frontal. Assim se definirmos y como um vetor complexo de parte imaginária no cone de luz frontal podemos descrever um operador contínuo na topologia forte :

$$T(y_i) := \int e^{i\langle y_i, p \rangle} E dp \quad (2.21)$$

e a função:

$$\langle \psi, T(y_1) \pi_\varphi(A_1) \cdots T(y_n) \pi_\varphi(A_n) \Omega_\varphi \rangle \quad (2.22)$$

É holomórfica em cada y , porém notemos que:

$$T(x_{i-1})^* T(x_i) = T(x_i - x_{i-1}). \quad (2.23)$$

Onde aqui x_i são todos reais e assim podemos dizer que para $y_1 = x_1, y_2 = x_2 - x_1 \cdots$ teremos com base na equação 2.18:

$$\begin{aligned} \langle \psi, T(y_1) \pi_\varphi(A_1) \cdots T(y_n) \pi_\varphi(A_n) \Omega_\varphi \rangle &= \\ &= \langle \psi, T(x_1) \pi_\varphi(A_1) T(x_2 - x_1) \cdots T(x_n - x_{n-1}) \pi_\varphi(A_n) \Omega_\varphi \rangle \\ &= \langle \psi, T(x_1) \pi_\varphi(A_1) T(x_1)^* \cdots T(x_n) \pi_\varphi(A_n) \Omega_\varphi \rangle \\ &= \langle \psi, T(x_1) \pi_\varphi(A_1) T(x_1)^* \cdots T(x_n) \pi_\varphi(A_n) T(x_n)^* \Omega_\varphi \rangle \\ &= \langle \psi, \pi_\varphi(L(x_1)A_1) \cdots \pi_\varphi(L(x_n)A_n) \Omega_\varphi \rangle \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Recorda-se que funções holomórficas só podem assumir o valor zero em infinitos pontos se ela for identicamente nula, isso justifica a afirmação anterior.

Chamemos a álgebra criada pelos elementos do tipo $\pi_\varphi(L(x_i)A_1) \cdots \pi_\varphi(L(x_i)A_n)$ e suas combinações lineares de $\mathbf{A}$. O que acabamos de ver é que $\psi \perp \mathbf{A}\Omega_\varphi$ mas pelas exigências da aditividade fraca temos que: $\overline{\mathbf{A}} = \pi(\mathbf{N})''$.

Aqui deve-se mencionar que na construção GNS, $\pi(\mathbf{N}(\mathcal{O}))\Omega_\varphi$ é densa no espaço de Hilbert, então igualmente $\mathbf{B}$ será, isto conclui a ciclicidade pois $\psi \perp \mathbf{B}\Omega_\varphi \Rightarrow \psi = 0$

É importante ressaltar que o teorema se trata de uma situação física e não mais puramente matemática. Isso pode ser exemplificado no caso mais comum de quando adotamos a álgebra referente ao espaço de funções de quadrado integrável com suporte em um domínio fechado $\mathcal{O}'$ espacialmente separado de $\mathcal{O}$. Isto é:

$$||x - y||^2 > 0 \forall x \in D, y \in D_1. \quad (2.25)$$

Nessas condições exigimos que $\mathbf{N}(\mathcal{O}) \subset \mathbf{N}(\mathcal{O}')$, como foi melhor explicado anteriormente.

A separabilidade do vetor decorre do fato que se $A\Omega_\varphi = B\Omega_\varphi$ para $A, B \in \mathbf{N}(\mathcal{O})$, suponha um $C \in \mathbf{N}(\mathcal{O}')$ teremos

$$AC\Omega_\varphi = BC\Omega_\varphi. \quad (2.26)$$

Nós já sabemos que Ω_φ é cíclico e por isso $A = B$ ■.

2.4 Teorema de Tomita-Takesaki

Todo operador linear limitado admite uma forma chamada de decomposição polar, onde dado A um operador limitado, definimos $|A| = \sqrt{A^*A}$ e $\langle A \rangle = \sqrt{AA^*}$ sua decomposição é:

$$\begin{cases} A = U|A| \\ A = \langle A \rangle U. \end{cases} \quad (2.27)$$

Com U um operador com as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} U^*A &= |A| \\ AU^* &= \langle A \rangle \\ \langle A \rangle &= U|A|U^* \\ |A| &= U\langle A \rangle U. \end{aligned} \quad (2.28)$$

De fato o operador U é o que se conhece como uma isometria parcial, isto é, uma isometria dentro de seu domínio e fora de seu kernel(GOBERG,).

Conforme o que foi mencionado na introdução deste trabalho, não é interessante restringir-se à um espaço de operadores limitados. A estratégia será sempre que possível realizar a decomposição polar em operadores não limitados mas restritos ao fechamento de seus domínios.

Esse é o caso do operador S definido como:

$$SA\Omega_\varphi = A^*\Omega_\varphi \quad \forall A \in \mathbf{N}(\mathcal{O}). \quad (2.29)$$

Este é um operador não limitado, fechavel e anti-linear de domínio $\pi_\varphi(\mathbf{N}(\mathcal{O}))\Omega_\varphi$, assim podemos determinar a sua decomposição polar:

$$S = J\Delta^{\frac{1}{2}}. \quad (2.30)$$

Aqui tais operadores J e Δ são, com vasta abrangência na literatura, denotados frequentemente desta forma, de modo que J (a involução modular) é a isometria parcial e Δ (o operador modular) pela própria decomposição: $\Delta = S^*S$. As propriedades desses operadores são de grande relevância para a álgebra, temos $J\pi_\varphi(\mathbf{N}(\mathcal{O}))J = \pi_\varphi(\mathbf{N}(\mathcal{O}))'$ por exemplo, mas o operador modular merece ainda mais atenção (BRUNETTI, 2015).

Antes de se aprofundar sobre o operador modular, devemos nos ater um pouco ao conceito de um grupo monoparamétrico de automorfismos (conhecido na literatura anglófona como *one parameter automorphism group*).

O nome já é bem explicativo, trata-se de um grupo feito de automorfismos parametrizados por um número real, isto é, um mapeamento contínuo dos reais nos automorfismos de determinado espaço.

Valendo-se do teoremas de Stones (NEUMANN, 1932) construímos o seguinte operador:

$$\begin{aligned} \Delta^\alpha &:= \int z^\alpha E(z) dz \\ &= e^{\alpha \ln \Delta}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Onde a equação acima só faz sentido em termos da decomposição espectral, com $E(z)$ a sua projeção e a segunda equação trata-se de uma notação mais minimalista. Existem algumas restrição impostas sobre α que não serão abordadas aqui, pois o nosso interesse é quando α é puramente imaginário. De modo geral:

$$\Delta^\alpha = \Delta^s \Delta^{it} \quad s, t \in \mathbb{R}. \quad (2.32)$$

Denotamos o domínio do operador da seguinte forma: $D(\Delta^\alpha)$, isto é o conjunto de todos os vetores no espaço de Hilbert nos quais a ação do operador está definida.

Teorema de Tomita-Takesaki

Seja $t \in \mathbb{R}$ então Δ^{it} é um grupo monoparamétrico de automorfismos para $\pi_\varphi(\mathbf{N}(\mathcal{O}))$ tal que para o operador: $R(A)$ produto esquerdo; definido como: $R(A)B = AB$ para $A, B \in \pi_\varphi(\mathbf{N}(\mathcal{O}))$; Temos (TAKESAKI, 1970):

$$R(\Delta^{it}A) = \Delta^{it}R(A)\Delta^{-it} \quad A \in \pi_\varphi(\mathbf{N}(\mathcal{O})). \quad (2.33)$$

□

Antes de mais nada estabeleçen-se algumas definições e deixa-se registrado que a álgebra das representações $\pi_\varphi(\mathbf{N}(\mathcal{O}))$ será tratada como $\mathbf{N}(\mathcal{O})$ para desonerar a notação. Seguem as definições:

- **H**: espaço de Hilbert feito dos elementos da álgebra cujo subespaço é $\mathbf{N}(\mathcal{O})$.
- O produto interno em **H** terá a mesma notação àquele do espaço de representação: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ficando clara a distinção no contexto.
- $A(0, \infty)$ é o conjunto de funções analíticas em uma vizinhança de $(0, \infty)$.
- projeção espectral de Δ : $E(x)$.
- $\mathbf{N}(\mathcal{O})^* = \{A \in \mathbf{N}(\mathcal{O})' \cap D(\Delta); \Delta A \in \mathbf{N}(\mathcal{O})'\}$.
- Resolvente de Δ : $R(x) = (\Delta - x)^{-1}$.
- para $\gamma > 1$ defina: $E_\gamma := \int_{\frac{1}{\gamma}}^\gamma E(x)dx$.

Sobre as definições apresentadas logo a cima, alguns fatos devem ser esclarecidos:

Para $\xi_i \in \mathbf{N}(\mathcal{O})$.

1. O produto interno em **H** é tal que $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \langle \xi_1 \Omega, \xi_2 \Omega \rangle$

Para $\eta \in \mathbf{N}(\mathcal{O})^*$, $\xi \in \mathbf{N}(\mathcal{O})$ e Γ uma curva contornando o intervalo $(\frac{1}{\gamma}, \gamma)$ com $\gamma > 1$.

2. $E_\gamma \eta [f(\Delta)\xi] = \frac{i}{2\pi} \oint_\Gamma f(x^{-1}\Delta) [R(x) E_\gamma \eta] \xi dx$

Para $\alpha \in \mathbb{C}$

3. $\mathbf{N}(\mathcal{O})^* \cap D(\Delta^\alpha) = \mathbf{N}(\mathcal{O})^* \cap D(\Delta^{\bar{\alpha}})$ é denso em **H**

Denotando A^T como o transposto de um operador A

4. $E_\gamma^T = E_\gamma$

Considere a função: $f(z) = \left(\frac{z+\delta}{1+z\delta}\right)^\alpha$ para $\alpha \in \mathbb{C}$ e $0 \leq \delta \leq 1$. Assim ela é analítica exceto em $[-\frac{1}{\delta}, -\delta]$ e $f(z) \in A(0, \infty)$. Eleja um $\gamma > 1$ para $\eta_1, \eta_2 \in \mathbf{N}(\mathcal{O})^*$ e $\xi \in \mathbf{N}(\mathcal{O})$, segue que:

$$\begin{aligned}
\langle f(\Delta)\eta_1, (E_\gamma\xi)^* \eta_2 \rangle &= \langle E_\gamma\xi f(\Delta)\eta_1, \eta_2 \rangle \\
&= \frac{i}{2\pi} \oint_{\Gamma} \langle f(x^{-1}\Delta) R(x) E_\gamma\xi\eta_1, \eta_2 \rangle dx \\
&= \frac{i}{2\pi} \oint_{\Gamma} \langle R(x) E_\gamma\xi\eta_1, f(x^{-1}\Delta)^* \eta_2 \rangle dx.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

No limite em que $\delta \rightarrow 0$ a equação 2.34 se torna:

$$\begin{aligned}
\langle \Delta^\alpha \eta_1, (E_\gamma\xi)^* \eta_2 \rangle &= \frac{i}{2\pi} \oint_{\Gamma} \langle R(x) E_\gamma\xi\eta_1, (x^{-\alpha}\Delta^\alpha)^* \eta_2 \rangle dx \\
&= \frac{i}{2\pi} \oint_{\Gamma} \langle R(x) E_\gamma\xi\eta_1, x^{-\bar{\alpha}} \Delta^{\bar{\alpha}} \eta_2 \rangle dx \\
&= \frac{i}{2\pi} \oint_{\Gamma} \langle x^{-\alpha} R(x) E_\gamma\xi\eta_1, \Delta^{\bar{\alpha}} \eta_2 \rangle dx \\
&= \langle \Delta^{-\alpha} E_\gamma\xi\eta_1, \Delta^{\bar{\alpha}} \eta_2 \rangle.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Pela definição de E_γ e o operador S como implementador de involução nota-se:

$$\begin{aligned}
(E_\gamma\xi)^* &= S(E_\gamma\xi) \\
&= J\Delta^{\frac{1}{2}} E_\gamma\xi \\
&= J E_\gamma \Delta^{\frac{1}{2}} \xi \\
&= E_\gamma^T S\xi = E_\gamma\xi^*.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

então $(E_\gamma\xi)^* \mapsto \xi^*$ para $\gamma \rightarrow \infty$ portanto usando a combinação dos resultados em 2.34,2.35,2.36 chega-se em:

$$\begin{aligned}
\langle \Delta^{-\alpha} \xi\eta_1, \Delta^{\bar{\alpha}} \eta_2 \rangle &= \langle \Delta^\alpha \eta_1, \xi^* \eta_2 \rangle \\
&= \langle \xi \Delta^\alpha \eta_1, \eta_2 \rangle.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Sabendo que $\mathbf{N}(\mathcal{O})^* \cap D(\Delta^\alpha)$ é denso em $\mathbf{H}$ chegamos a conclusão que:

$$\Delta^\alpha (\Delta^{-\alpha} \xi) \eta = \xi (\Delta^\alpha \eta). \tag{2.38}$$

Para $\xi \in \mathbf{N}(\mathcal{O}) \cap D(\Delta^{-\alpha})$ e $\eta \in \mathbf{N}(\mathcal{O})' \cap D(\Delta^\alpha)$. Claramente devemos ter $(\Delta^{-\alpha} \xi) \eta \in D(\Delta^\alpha)$.

Dito isso conclui-se que $D(\Delta^{it}) = D(\Delta^{-it})$ e assim sendo:

$$\Delta^{it} A (\Delta^{-it} B) = (\Delta^{it} B) A \quad A \in \mathbf{N}(\mathcal{O}), B \in \mathbf{N}(\mathcal{O})'. \tag{2.39}$$

Isto é o suficiente para provar

$$R(\Delta^{it} A) = \Delta^{it} R(A) \Delta^{-it}. \quad \blacksquare \quad (2.40)$$

Este teorema é importante do ponto de vista físico porque nos proporciona um gerador de simetrias para o espaço em questão. Sem dúvidas o mais interessante sobre este teorema é a abrangência dele, isso quer dizer que poucas condições são exigidas para a álgebra dispor de tal simetria.

3 MECÂNICA QUÂNTICA DE CAMPOS AXIOMÁTICA

A matemática do capítulo anterior era, até certo ponto, abstrata, no sentido que não dependia de nenhuma motivação na realidade física para ser relevante. Agora serão retomados os pontos que fazem da matemática pura uma abordagem aplicada a esse campo de interesse.

3.1 Invariância relativística

A intuição da experiência cotidiana nos leva a crer que a dinâmica de uma trajetória no mundo em que vivemos é uma sucessão de pontos no espaço parametrizados pelo tempo. Com o advento da mecânica relativística esse entendimento teve de ser alterado.

No bojo da dita teoria da relatividade restrita, deve-se considerar apenas movimentos realizados no espaço-tempo M que respeitem uma certa simetria, qual seja, a transformação de Lorentz. Um quadrivetor é representado como: $\xi = (t, x, y, z)$ e pertence a esse espaço-tempo. Transformações de Lorentz são aquelas que preservam o produto: $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$.

Defina o produto escalar para $\xi = (t_1, x_1, y_1, z_1)$ e $\zeta = (t_2, x_2, y_2, z_2)$:

$$\langle \xi, \zeta \rangle = \xi^\mu \zeta_\mu = t_1 t_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2. \quad (3.1)$$

Assim a transformação de Lorentz pode ser entendida como um operador L no espaço-tempo tal que: $\langle L\xi, L\zeta \rangle = \langle \xi, \zeta \rangle$. O conjunto de todos esses operadores forma um grupo matricial chamado de Grupo de Lorentz representado por $O(3, 1)$.

O grupo de Lorentz não é o que se pode chamar de conexo, isso é, não é possível transitar continuamente por todos os elementos do grupo (HALL,). Também não é compacto, ou seja, não é possível encontrar um escalar positivo que seja maior do que todos os componentes de um elemento arbitrário do grupo (HALL,). Apesar de ter características pouco interessantes existe um subgrupo seu que acaba sendo mais útil, o grupo restrito de Lorentz $O(3, 1)_+$ caracterizado por elementos de $O(3, 1)$ de determinante igual a 1 e componente temporal positiva (STREATER, 1964).

O subgrupo restrito de Lorentz então representará o que há de físico neste objeto matemático abstrato, porém não há garantia de que ele é o mais completo representante desta realidade. Existe outro grupo que pode ser mapeado diretamente para $O(3, 1)_+$ e é, portanto, tão bom candidato quanto; este é o grupo especial das transformações lineares $SL(2, \mathbb{C})$.

$SL(2, \mathbb{C})$ formalmente é composto pelas matrizes complexas 2×2 de determinante igual a 1. Defina:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Isso é a base de $SL(2, \mathbb{C})$ e qualquer quadrivetor pode ser escrito como:

$$\xi_\mu = \frac{1}{2} \text{tr}(\chi \sigma_\mu). \quad (3.3)$$

onde χ é hermitiano. No sentido contrário determina-se:

$$\chi = \sum \xi_\mu \sigma_\mu. \quad (3.4)$$

Dito isso pode-se identificar o quadrivetor ξ com a matriz hermitiana χ e se questionar qual tipo de transformação preserva o produto em 3.1, que nesta representação assume a forma:

$$\det \chi = \xi^\mu \xi_\mu. \quad (3.5)$$

Ou se ζ_μ estiver relacionado com θ da mesma forma que ξ_μ está com χ conclui-se:

$$\frac{1}{2} (\det(\chi + \theta) - \det \chi - \det \theta) = \xi^\mu \zeta_\mu. \quad (3.6)$$

A resposta para a pergunta do parágrafo anterior está na seguinte simetria:

$$\chi \mapsto \Lambda \chi \Lambda^*. \quad (3.7)$$

para $\Lambda \in SL(2, \mathbb{C})$.

Proposição: $\Lambda \in SL(2, \mathbb{C})$ preserva o produto no espaço-tempo conforme descrito nos parágrafos anteriores.

□

Antes de seguir a proposição propriamente dita, destinar-se-á algumas linhas para provar o que foi apenas apresentado, primeiramente a representação de ξ_μ :

$$\begin{aligned} \xi_\mu &= \frac{1}{2} \text{tr}(\chi \sigma_\mu) \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} \left[\begin{pmatrix} a & u \\ u^* & b \end{pmatrix} \sigma_\mu \right] \rightarrow a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Perceba que para $a = t + z$, $b = t - z$ e $u = x + iy$ temos $\xi_\mu = (t, x, y, z)$. A próxima afirmação é a respeito do produto escalar:

$$\begin{aligned}\det \chi &= \det \begin{pmatrix} t+z & x+iy \\ x-iy & t-z \end{pmatrix} \\ &= t^2 - z^2 - x^2 - y^2 = \xi^\mu \xi_\mu.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Finalmente a proposição em si é fácil na medida em que $\Lambda \in SL(2, \mathbb{C})$ e portanto $\det \Lambda = 1$, logo:

$$\begin{aligned}\det \Lambda \chi \Lambda^* &= \det \Lambda \det \chi \det \Lambda^* \\ &= \det \chi.\end{aligned}\tag{3.10}$$

■

Note que a representação adjunta é contínua e portanto essa não pode ser uma identificação com o grupo de Lorentz inteiro e sim com o subgrupo restrito.

Agora a ideia é argumentar porque esse grupo é mais interessante do que as transformações restritas de Lorentz. O motivo deriva de uma propriedade chamada de cobertura, em termos de classificação de grupos, diz-se que $SL(2, \mathbb{C})$ é a cobertura universal de $O(3, 1)_+$. Basicamente o primeiro grupo tem o dobro da informação do segundo, pois cobre todos os casos presentes nele e mais.

Formalmente pode-se identificar dois operadores distintos Λ e $\Lambda' = -\Lambda$ em $SL(2, \mathbb{C})$ representados pelo mesmo operador L em $O(3, 1)_+$ (JOST, 1965). Segue a proposição.

Proposição: Se L e L' são elementos de $O(3, 1)_+$ advindos de Λ e Λ' em $SL(2, \mathbb{C})$ respectivamente, de modo que $L = L'$, então $\Lambda = \pm \Lambda'$ ao mesmo tempo que $\Lambda = \pm \Lambda' \Rightarrow L = L'$.

□

A prova envolve muitas equações e componentes, então será tratada apenas de forma abreviada. Basicamente o que se afirma na sentença:

$$\Lambda \chi \Lambda^* = \sum L_\nu^\mu \xi^\nu \sigma_\mu = \sum (L')_\nu^\mu \xi^\nu \sigma_\mu = \Lambda' \chi (\Lambda')^*.\tag{3.11}$$

Igualando as componentes e separando a dependência em t , x , y e z são geradas 16 equações. O resultado fornece que $\Lambda = \pm \Lambda'$. O caso contrário simplesmente satisfaz:

$$\Lambda \chi \Lambda^* = (-\Lambda') \chi (-\Lambda')^*.\tag{3.12}$$



Diante do exposto, o presente trabalho refere-se a simetrias relativísticas como sinônimo de invariância sobre o grupo $SL(2, \mathbb{C})$.

3.2 Relações canônicas de comutação

Recentemente, a abordagem onde as simetrias (vista em um contexto abstrato como grupos) são um objeto mais fundamental do que o espaço sobre o qual são representadas tem progressivamente ganhado mais destaque (YNGVASON, 2005b), (TAKESAKI, 2000). Assim sendo, uma representação dos grupos unitários da mecânica quântica faz-se bem vindo, porém uma particularidade da teoria deve ser levada em conta. Ao passo que na teoria tradicional de representações o que se tem:

$$U(s)U(t) = U(st). \quad (3.13)$$

onde $U(\cdot)$ é um operador no espaço de Hilbert e s, t são elementos do grupo, para o nosso caso teremos:

$$U(s)U(t) \propto U(st). \quad (3.14)$$

Isso porque sabidamente vetores no espaço de Hilbert não carregam a informação contida na teoria quântica, mas sim os raios por eles gerados (WEYL, 1927). A constante de proporcionalidade pode depender dos elementos do grupo, então digamos:

$$U(s)U(t) = \delta(s, t)U(st). \quad (3.15)$$

Recordemos novamente o teorema de Stones (NEUMANN, 1932) e os geradores do grupo são G_μ . Em termos de abrangência vamos substituir $s \rightarrow \sigma$ e $t \rightarrow \tau$ para tratar de uma variedade linear qualquer, assim podemos escrever:

$$U(\tau) = e^{i\tau^\mu G_\mu}. \quad (3.16)$$

Posteriormente mostraremos que no caso mais simples; isto é, quando se trata de um grupo comutativo; já se observam resultados interessantes. Então buscaremos restringir-nos aos geradores do tipo:

$$[G_\mu, G_\nu] = 0, \quad (3.17)$$

Porém novamente devemos relaxar essa condição por causa do entendimento de que os raios são os elementos fundamentais da teoria e não vetores. Assim sendo as relações de comutação devem adotar a forma(WEYL, 1927):

$$[G_\mu, G_\nu] = ig_{\mu\nu} \mathbf{1}. \quad (3.18)$$

Com $g_{\mu\nu}$ um sistema anti-simétrico de números reais. Agora considerando dois operadores arbitrários, que podem assumir a forma: $A = \sum_\mu \sigma_\mu G_\mu$ e $B = \sum_\nu \tau_\nu G_\nu$, nutrem a seguinte relação:

$$[A, B] = i \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \sigma_\mu \tau_\nu. \quad (3.19)$$

Claramente o somatório advindo desta relação de comutação pode motivar uma forma anti-simétrica em um espaço de Hilbert criado sobre a variedade linear de τ e σ , mas aqui preferimos definir um produto escalar: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para posteriormente identificar:

$$\Im \langle \sigma, \tau \rangle = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \sigma_\mu \tau_\nu. \quad (3.20)$$

e os motivos para isso ficarão claros quando chegarmos ao exemplo. Diante do exposto e com o auxílio da fórmula de Hausdorff-Campbel(REED, 1980) determinamos que:

$$U(\sigma + \tau) = e^{-\frac{i}{2} \Im \langle \sigma, \tau \rangle} U(\sigma) U(\tau). \quad (3.21)$$

Depois dessa construção podemos considerar, de forma abstrata, álgebras que satisfazem esse tipo de identidade e chama-las de **álgebra de Weyl**. Formalmente existem algumas condições a mais, porém tratemos disso após o exemplo

3.2.1 Mecânica quântica

Tomando como exemplo a teoria da mecânica quântica, a vantagem é a quantidade de conhecimento sobre a abordagem tradicional, que já é bem aceita em amplo espectro pela comunidade científica. No caso unidimensional determina-se respectivamente o espaço de Hilbert, o produto escalar e a norma:

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{R}) &= \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int |f(x)|^2 dx < \infty \right\} \\ \langle f, g \rangle &= \int f(x) \overline{g(x)} dx \\ \|f\| &= \left(\int |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Sabidamente existe uma base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$ na forma das funções de Hermite: $h_n(x)$. Não confunda com os polinômios normalizados de Hermite $H_n(x)$, pois a relação entre os dois pode ser dada como:

$$h_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x). \quad (3.23)$$

Os operadores posição Q e momento P nesse espaço são conhecidos pela literatura como sendo:

$$(Qf)(x) = xf(x) \quad (Pf)(x) = -i\partial_x f(x) \quad f \in L^2(\mathbb{R}). \quad (3.24)$$

Em posse das relações de recorrência das funções de Hermite:

$$xh_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{n}h_{n-1}(x) + \sqrt{n+1}h_{n+1}(x) \right). \quad (3.25)$$

Sabemos como os operadores atuam nesta base:

$$\begin{aligned} Qh_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{n}h_{n-1}(x) + \sqrt{n+1}h_{n+1}(x) \right) \\ Ph_n(x) &= \frac{1}{i\sqrt{2}} \left(\sqrt{n}h_{n-1}(x) - \sqrt{n+1}h_{n+1}(x) \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

De posse da atuação sobre os vetores da base, pode-se calcular o comutador dos dois operadores e como era de se esperar,

$$[Q, P] = i. \quad (3.27)$$

Utilizando cálculo espectral é possível determinar qual o resultado da exponenciação deles sobre um vetor qualquer $f \in L^2(\mathbb{R})$ (PETZ, 1989):

$$e^{itQ}f(x) = e^{itx}f(x) \quad e^{itP}f(x) = f(x+t). \quad (3.28)$$

Porém o objeto do nosso interesse, sobre o elemento do grupo comutativo $z = x + iy \in \mathbb{C}$ é:

$$U(z) := e^{i(xP+yQ)}. \quad (3.29)$$

Agora use a fórmula de Hausdorff-Campbel novamente para concluir que:

$$U(z)U(z') = U(z + z')e^{\frac{i}{2}\Im(\bar{z}z')}. \quad (3.30)$$

Recorda-se que no oscilador harmônico os polinômios de Hermite podem ser entendidos como uma gradação de estados, de modo que o polinômio de ordem zero é entendido como um limite inferior chamado vácuo. Da mesma forma para as funções de Hermite, entende-se h_0 como o vácuo e a atuação do dito operador unitário sobre ele pode ser calculada (PETZ, 1989):

$$U(z)h_0 = e^{-\frac{|z|^2}{2}}h_0. \quad (3.31)$$

Uma propriedade interessante a ser conferida ao vácuo na teoria quântica de campos é a ciclicidade, fazendo com que um operador seja bem definido sabendo apenas a sua ação no vácuo e suas relações de comutação. Em posse de todas essas informações percebe-se que as relações de comutação de P e Q acabam por ser resumidas nas condições impostas sobre as unitariedades de Weyl $U(z)$.

Agora a estratégia é formalizar tais objetos de modo que possam encapsular a contribuição das relações de comutação nas teorias de campos.

3.2.2 Unitariedades de Weyl

Seja $\mathbf{H}$ Um espaço de Hilbert complexo, a álgebra de weyl é uma C^* -álgebra de relações canônicas de comutação sobre os operadores em outro espaço $\mathcal{H}$ gerados por $\{W(f)|f \in \mathbf{H}\}$ que satisfazem

$$\begin{cases} W(-f) = W(f)^* \\ W(f)W(g) = e^{-\frac{i}{2}\Im\langle f, g \rangle} W(f + g). \end{cases} \quad (3.32)$$

Alguns detalhes merecem nota. Primeiramente é uma álgebra unital já que $W(0)W(f) = W(f)W(0) = W(f) \forall f \in \mathbf{H}$. Tratan-se de unitariedades pois:

$$\begin{aligned} W(f)W(f)^* &= W(f)W(-f) \\ &= e^{-\frac{i}{2}\Im\langle f, f \rangle} W(f - f) = W(0) \quad \forall f \in \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

A álgebra de Weyl como descrita aqui associada com um espaço $\mathbf{H}$ recebe a simbologia $\text{CCR}(\mathbf{H})$. Para que isso faça sentido o seguinte teorema segue

Teorema: $\text{CCR}(\mathbf{H})$ é único a menos de isomorfismos.

Estritamente, deve-se provar a existência e unicidade, para isso refere-se a (PETZ, 1989) pg 10, mas para efeito elucidativo as linhas gerais da prova de unicidade segue as seguintes ideias:

Defina:

$$(R(x)F)(y) = e^{\frac{i}{2}\Im\langle y, x \rangle} F(x+y), \quad (3.34)$$

para $F \in l^2(\mathbf{H})$, o espaço de sequências de quadrado somável, assim:

$$R(x)R(y) = e^{\frac{i}{2}\Im\langle x, y \rangle} R(x+y) \quad (3.35)$$

Considere a C^* -álgebra gerada por $\{\sum \lambda_i R(x_i) | \lambda_i \in \mathbf{C}, x_i \in \mathbf{H}\}$, então é possível construir um isomorfismo tal que $R(x) \mapsto W(x)$.

Note o isomorfismo de $l^2(\mathbf{H}, \mathcal{H}) \sim l^2(\mathbf{H}) \times \mathcal{H}$ com $\mathcal{H}$ podendo ser um espaço linear. Uma representação de CCR sobre o espaço $l^2(\mathbf{H}, \mathcal{H})$ segue:

$$\pi(y)(x \otimes f) = (x - y) \otimes W(y)f. \quad (3.36)$$

Essa representação é equivalente ao $R(\cdot)$. No mais, definindo uma unitariedade U como segue conclui-se que

$$U(x \otimes f) = x \otimes W(x)f \Rightarrow U\pi(y) = (R(y) \otimes 1)U. \quad (3.37)$$

Então a prova segue com o isomorfismo da C^* -álgebra gerada por $\{\pi(y) | y \in \mathbf{H}\}$ tal que para qualquer combinação linear:

$$\|\sum \lambda_i W(y_i)\| = \|\sum \lambda_i \pi(y_i)\|. \quad (3.38)$$

Falando sobre representações desta álgebra, considere π uma delas e seja $f \in \mathcal{S}(\mathbf{H})$ uma função de teste, então definimos um **operador de campo** com sendo $B(t)$ se:

$$\pi(W(tf)) = e^{itB(f)}. \quad (3.39)$$

Nesses casos a representação π é dita **regular**, pois operadores de campo $B(f)$ existem para toda função f no espaço de funções teste. Recordar-se a representação GNS discutida no capítulo anterior, se φ é o estado associado a esse procedimento e isso resulta em uma representação regular, então o estado φ é dito um estado regular. Considere

$$\varphi(W(f)) = e^{-\frac{i}{2}\Im\langle f, f \rangle}. \quad (3.40)$$

Este é um estado regular (PETZ, 1989) chamado de **estado de Fock**. No mais, uma representação correspondente a um estado de Fock é dita uma **representação de Fock** e o vetor cíclico Ω é o **vácuo**.

O motivo para se afirmar que as simetrias tem se tornado mais fundamentais do que o próprio espaço em que atuam (como dito no início desta secção) é devido ao desenvolvimento da teoria de representações. Com esse aporte é possível identificar todos os espaços representáveis por certos grupos, no entanto existem representações mais interessantes do que outras do ponto de vista da sua escolha, estamos falando de **representações irredutíveis**.

Uma representação é dita irredutível quando o subespaço criado por suas atuações não pode ser menor do que o espaço em que ele está imerso (exceto o subespaço nulo quando se atua sobre o vetor nulo). Isso ajuda a entender a importância do que segue:

Teorema: A representação de Fock é irredutível

□

Defina o subespaço $\mathcal{H}_1 = \{W(f)\eta | f \in \mathbf{H}\}$ onde $\eta \in \mathcal{H}$ é não nulo. Uma base para $\mathcal{H}$ pode ser (PETZ, 1989):

$$|f_{i_1}^{n_1} \dots f_{i_k}^{n_k}\rangle := \frac{1}{\sqrt{n_1! \dots n_k!}} A^\dagger(f_{i_1})^{n_1} \dots A^\dagger(f_{i_k})^{n_k} \Omega. \quad (3.41)$$

Onde $A^\dagger$ representa o operador de criação (tal qual na solução do oscilador harmônico). O operador:

$$A^\dagger(f_1)A(f_1) \dots A^\dagger(f_k)A(f_k). \quad (3.42)$$

Pertence à álgebra em questão e ele tem como autovetor:

$$|f_1^{n_1} \dots f_k^{n_k}\rangle. \quad (3.43)$$

Agora basta notar que para qualquer f :

$$A^\dagger(f)\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_1 \quad A(f)\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_1. \quad (3.44)$$

Isso é o suficiente para concluir que o subespaço $\mathcal{H}_1$ é na verdade o próprio espaço $\mathcal{H}$ inteiro.

■

3.3 Axiomas

Em geral, as maiores ambições teóricas se satisfazem na existência de um conjunto de axiomas que combinados geram teoremas, lemas e proposições capazes de explicar tudo o que determinada teoria se propõe a abranger.

Por isso um conjunto de axiomas deve ser estabelecido visando não só abranger toda a teoria quântica tradicional, como também corrigir os percalços mencionados posteriormente. No entanto esse conjunto não é unanimidade entre a comunidade científica.

Apesar desta insegurança existe um conjunto de axiomas bem aceito que pode servir como ponto de partida, são os chamados: Axiomas de Wightmann. Note como os resultados obtidos no capítulo anterior justificam a relevância de tais axiomas (HAAG, 1962).

1. Condição espectral

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável e $(a, \Lambda) \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ inomogêneo além de π ser uma representação contínua e unitária de $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ nos operadores de $\mathcal{H}$,

$$\pi : (a, \Lambda) \mapsto U(a, \Lambda). \quad (3.45)$$

Porque $U(a, I)$ é unitário existe um operador p^μ hermitiano guardando a seguinte relação $U(a, I) = e^{ip^\mu a_\mu}$, onde a igualdade deve ser entendida sob a luz do teorema espectral (NEUMANN, 1932). Dito isso, impõe-se que: $\sigma(p^\mu) \in V^+$ ou $\sigma(p^\mu) \in V^-$ onde V^+ e V^- são os cones de luz dianteiro e traseiro respectivamente.

2. Unicidade do vácuo

$\exists \Omega \in \mathcal{H}$ único a menos da fase tal que $U(a, \Lambda) \Omega = \Omega \quad \forall \quad (a, \Lambda) \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$.

3. Continuidade dos campos

Para cada função $f \in \mathcal{S}(\mathcal{M})$, o espaço de funções testes definidas no espaço-tempo $\mathcal{M}$, existe um conjunto de operadores $\varphi_1[f] \cdots \varphi_n[f]$ e seus adjuntos $\varphi_1^*[f] \cdots \varphi_n^*[f]$ definidos em um domínio denso em $\mathcal{H}$ e invariante por Poincaré $D \subset \mathcal{H}$, de modo que $\langle \xi, \varphi_i[f] \eta \rangle$ é uma distribuição temperada em termos de um funcional para f e $\xi, \eta \in D$.

4. Lei de transformação dos campos

Os campos se transformarão seguindo a lei

$$U(a, \Lambda) \varphi_i[f] U(a, \Lambda)^{-1} = \sum_j S(\Lambda^{-1}) \varphi_j[(a, \Lambda) f]. \quad (3.46)$$

Com a ação do grupo de Poincaré nas funções dada por:

$$(a, \Lambda) f(x) = f(\Lambda^{-1}(x - a)). \quad (3.47)$$

5. Causalidade microscópica

Se $\text{supp}(f_1)$ e $\text{supp}(f_2)$ são separados espacialmente, isto é $\|x_1 - x_2\|^2 < 0 \quad \forall \quad x_1 \in \text{supp}(f_1)$ e $x_2 \in \text{supp}(f_2)$. Então:

$$\varphi_i[f_1] \varphi_k[f_2] \pm \varphi_k[f_2] \varphi_i[f_1] = 0. \quad (3.48)$$

Com o sinal definido pela estatística do sistema.

6. Completude assintótica

Se houver um fenômeno de espalhamento e nomearmos $\mathcal{H}_r$ o espaço de Hilbert antes e $\mathcal{H}_e$ o espaço de Hilbert depois do espalhamento. Impõe-se que.

$$\mathcal{H}_r = \mathcal{H} = \mathcal{H}_e. \quad (3.49)$$

É interessante comentar algo sobre tais condições para se ter uma maior motivação física. Claramente o primeiro axioma, a condição espectral, se encarrega de adaptar a teoria à realidade relativística da natureza.

Sobre a unicidade do vácuo deve ser ressaltado o paralelo com o teorema de Reeh-Schlieder que garante a existência de tal vetor, pois ele é cíclico e separável. A continuidade dos campos se trata de uma exigência para o tradicional processo de quantização dos campos ou segunda quantização.

A lei de transformações é o paralelo com os resultados referentes ao calibre na mecânica quântica tradicional e a casualidade microscópica é o axioma que fornece a estatística de férmions e bósons.

Por fim consideremos a completude assintótica, que é uma consistência experimental, uma vez que processos de espalhamento podem ser realizados sem causar grandes transtornos ao aparato teórico.

4 SUBESPAÇO PADRÃO

A dinâmica do mundo (não só) qântico está descrita por meio de equações diferenciais parciais (E.D.P.). Um resultado muito conhecido da teoria das soluções de E.D.P. é o fato que as condições de contorno ou iniciais definem unicamente a solução.

Eis que surge o questionamento: por que, em detrimento da busca da solução geral de uma dada equação parcial, não se usar apenas as condições de Cauchy para identificar a teoria em uso? A sugestão aqui é a de evitar trabalhar no espaço completo da teoria e passar a analisar apenas a sua fronteira.

Essa é a ideia básica deste capítulo e para isso novas estruturas serão definidas ao longo desse caminho.

4.1 Teoria geral

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert complexo e separável. Introduza: $\mathcal{H}_s^n$ o seu n-produto simetrizado, essa definição serve para tornar o dito espaço de fock simétrico:

$$e^{\mathcal{H}} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_s^n. \quad (4.1)$$

Trata-se aqui do mesmo espaço de Fock encontrado em 3.41 onde os vetores do tipo $e^h := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{\sqrt{n!}}$ recebem o nome de coerentes, para $h^n \in \mathcal{H}_s^n$.

Teorema: $\{e^h\}_{h \in \mathcal{H}}$ é total em $e^{\mathcal{H}}$, isto é, qualquer elemento em $e^{\mathcal{H}}$ pode ser escrito como um limite indutivo do conjunto de vetores coerentes.

■

Seja $f(t) = e^{tx}$ para $x \in \mathcal{H}$, isto é,

$$f(t) = \left(1, tx, \frac{t^2 x^2}{\sqrt{2}}, \dots\right), x^n \in \mathcal{H}_s^n. \quad (4.2)$$

porém: $f^{(n)}(0) = \sqrt{n!}x^n$ e agora note:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} n! t^{-n} \left[f(t) - f(0) - t f'(0) - \frac{t^2}{2} f''(0) - \dots - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) \right] &= f^{(n)}(0) \\ &= \sqrt{n!} x^n. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Contudo, o conjunto $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é completo em $e^{\mathcal{H}}$ assim conclui-se que $\{e^h\}_{h \in \mathcal{H}}$ é total em $\mathcal{H}$ □

Alguns objetos podem se assemelhar bastante com outros definidos anteriormente no presente trabalho. Isso é proposital pois dessa forma não demoraremos muito nesta sessão. Assim sendo, defini-se e^A como um operador de segunda quantização, Onde A é um operador fechado e denso em $\mathcal{H}$.

Operadores de segunda quantização atuam sobre vetores coerentes, mas pelo último teorema sabemos que isso representa a sua atuação em $e^{\mathcal{H}}$. Então para $h \in \mathcal{H}$ e A, B operadores:

$$\begin{cases} e^A e^h = e^{Ah} \\ e^A e^B = e^{A \cdot B}. \end{cases} \quad (4.4)$$

Também temos as unitariedades de Weyl para $h, k \in \mathcal{H}$:

$$\begin{cases} W(h)e^0 = e^{\frac{\|h\|^2}{4}} e^{\frac{i}{\sqrt{2}}h} \\ W(h)W(k) = e^{-\frac{i}{2}\Im\langle h, k \rangle} W(h+k). \end{cases} \quad (4.5)$$

Depois do que já foi discutido sobre álgebras de Weyl, o interesse flagrante aqui é identificar o conjunto de operadores $\{W(k)\}_{k \in \mathcal{K}}$, para algum $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$, com uma álgebra de Von Neumann. Igualmente interessante seria o reconhecimento de e^0 como sendo o vetor cíclico e separável Ω .

A primeira questão é fácil de resolver, defina $\mathbf{R}(\mathcal{K}) = \{W(k) | k \in \mathcal{K}\}''$. Isso faz com que $\mathbf{R}(\mathcal{K})$ seja Von Neumann pois $\mathbf{A}'' = \mathbf{A}'''$ para qualquer álgebra $\mathbf{A}$.

O segundo ponto é mais complicado, a saber e^0 cíclico e separável. Quando isso acontece dizemos que $\mathbf{R}(\mathcal{K})$ está em formato padrão com respeito a e^0 . Para isso temos um teorema:

Teorema: $\mathbf{R}(\mathcal{K})$ está em formato padrão com respeito a e^0 se, e somente se

1. $\mathcal{K}$ é subespaço real e fechado de $\mathcal{H}$
2. $\mathcal{K} + i\mathcal{K}$ é denso em $\mathcal{H}$
3. $\mathcal{K} \cap i\mathcal{K} = \{0\}$.

■

No caso em que as três condições são satisfeitas, o teorema de Reeh-Schlieder 2.3 assegura o formato padrão da álgebra (ECKMANN, 1973)(ARAKI, 1963).

Resta provar que se $\mathbf{R}(\mathcal{K})$ está em formato padrão com respeito a e^0 , então as três assertivas são verdadeiras. nota-se que a adoção de $\mathcal{K}$ como um subespaço real não desmerece a generalidade da prova. Outro ponto a notar é que

$$\mathbf{R}(\mathcal{K}) = \mathbf{R}(\overline{\mathcal{K}}), \quad (4.6)$$

e assim a adoção de um subespaço fechado também não restringirá essa prova. Portanto coloca-se em dúvida a questão sobre se $\mathcal{K} + i\mathcal{K}$ é realmente denso em $\mathcal{H}$. Se não for, então

$$\mathbf{R}(\mathcal{K}) e^0. \quad (4.7)$$

Não pode ser denso também e a ciclicidade não se mantém (NEEB, 2017).

Por outro lado, se $\mathcal{K} \cap i\mathcal{K} \neq \emptyset$, então existe um $\psi \neq 0$, porém isso significa que em $\mathcal{R}(\mathbf{C}\psi) \subset \mathcal{R}(\mathcal{K})$ o vetor e^0 não seria separável.

□

Por causa desta propriedade distinta, subespaços satisfazendo as condições 1 a 3 do último teorema recebem o nome de subespaços padrões. Agora a estratégia será manipular subespaços padrões para obter resultados de interesse nos espaços de Fock.

Um bom exemplo disso é o operador definido como:

$$\begin{aligned} s &: \mathcal{K} + i\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K} + i\mathcal{K} \\ &: k + ik' \mapsto k - ik'. \end{aligned} \quad (4.8)$$

que se relaciona com o conhecido operador de Tomita-Takesaki 2.29 no espaço de Fock S por meio do seguinte teorema:

Teorema: $S = e^s$

■

Vamos investigar a atuação de e^s em $e^{\mathcal{H}}$ e na álgebra de Von Neumann.

$$\begin{aligned} e^s W(k) e^0 &= e^s e^{\frac{1}{4}\|k\|^2} e^{\frac{i}{\sqrt{2}}k} \\ &= e^{\frac{1}{4}\|k\|^2} e^{\frac{1}{\sqrt{2}}s(ik)} \\ &= e^{\frac{1}{4}\|-k\|^2} e^{\frac{-ik}{\sqrt{2}}} \\ &= W(-k) e^0 \\ &= W^*(k) e^0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

□

Tal qual feito no capítulo anterior podemos identificar o operador modular Δ e a isometria parcial J na decomposição polar de S . Agora introduzimos os operadores δ e j na decomposição polar de s e logo concluímos:

$$\begin{cases} s = j\delta^{\frac{1}{2}} \\ S = J\Delta^{\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J = e^j \\ \Delta = e^\delta. \end{cases} \quad (4.10)$$

Como dito anteriormente, o objetivo será investigar δ para entender melhor Δ . Na formulação independente do tempo da mecânica quântica, o espaço de Hilbert adotado se configura como: $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$, seja um aberto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$, o importante fato segue:

Proposição: A cobertura do subespaço $\left\{ \mu_m^{-\frac{1}{2}} f - i\mu_m^{\frac{1}{2}} g \mid f, g \in \Re \left[D \left(\mu_m^{\pm \frac{1}{2}} \right) \cap L^2(\mathcal{O}) \right] \right\}$ é padrão para $L^2(\mathbb{R}^3)$, onde $\widehat{\mu_m f}(p) := \sqrt{p^2 + m^2} \hat{f}(p)$ com o circunflexo identificando uma transformada de Fourier.

□

O conhecimento do resultado do trabalho de Segal e Goodman (SEGAL, 1965) é fundamental aqui, pois segundo os autores o operador μ_m^2 é anti-local.

Um operador é dito anti-local se, dado $f \in C^\infty$, então f e $\mu_m^2 f$ zeram conjuntamente em uma região qualquer somente se f é identicamente nulo.

Se: $\mathcal{K}_m(\mathcal{O}) = \left\{ \mu_m^{-\frac{1}{2}} f - i\mu_m^{\frac{1}{2}} g \mid \text{supp}(\text{Re}(f)), \text{supp}(\text{Re}(g)) \in \mathcal{O} \right\}$ podemos derivar a relação com $M(\mathcal{O}) := \{f \in C^\infty, \text{supp}(f) \subset \mathcal{O}\}$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_m(\mathcal{O}) + i\mathcal{K}_m(\mathcal{O}) &= \left\{ \mu_m^{-\frac{1}{2}} f_1 - i\mu_m^{\frac{1}{2}} g_1 + i\mu_m^{-\frac{1}{2}} f_2 + \mu_m^{\frac{1}{2}} g_2 \mid \text{supp}(\text{Re}(f_i)), \text{supp}(\text{Re}(g_i)) \in \mathcal{O} \right\} \\ &= \left\{ \mu_m^{-\frac{1}{2}} (f_1 + if_2) + \mu_m^{\frac{1}{2}} (g_2 - ig_1) \mid \text{supp}(\text{Re}(f_i)), \text{supp}(\text{Re}(g_i)) \in \mathcal{O} \right\} \\ &= \left\{ \mu_m^{-\frac{1}{2}} f + \mu_m^{\frac{1}{2}} g \mid \text{supp}(f), \text{supp}(g) \in \mathcal{O} \right\} \\ &= (\mu_m^2)^{-\frac{1}{4}} M(\mathcal{O}) + (\mu_m^2)^{\frac{1}{4}} M(\mathcal{O}). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ocorre que a soma desses espaços é densa em $L^2(\mathbb{R}^3)$. Para notar isso basta considerar $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ e perceber que se $f \perp (\mu_m^2)^\alpha M(\mathcal{O})$ ao mesmo tempo que $f \perp (\mu_m^2)^\beta M(\mathcal{O})$ para $\alpha - \beta \notin \mathbb{Z}$ então $f = 0$. Trata-se de mais um resutado de Segal e Goodman (SEGAL, 1965).

Para provar que $\mathcal{K}_m(\mathcal{O}) \cap i\mathcal{K}_m(\mathcal{O}) = \{0\}$, note que tomando f_i, g_i com $i = 1, 2$ pertencentes aos pedaços de $\mathcal{K}_m(\mathcal{O})$:

$$\begin{aligned} \mu_m^{-\frac{1}{2}} f_1 - i\mu_m^{\frac{1}{2}} g_1 &= i \left(\mu_m^{-\frac{1}{2}} f_2 - i\mu_m^{\frac{1}{2}} g_2 \right) \Rightarrow \\ \mu_m^{-\frac{1}{2}} (f_1 - if_2) &= \mu_m^{\frac{1}{2}} (g_2 + ig_1) \Rightarrow \mathbf{f} = \mu_m \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Onde agora f e g são quaisquer funções complexas com o suporte em $\mathcal{O}$, mas pela anti-localidade, isso só é possível se $f = g = 0$.

■

O operador definido anteriormente (μ_m) terá grande importância e por isso considera-se o espaço $H_m^\alpha := \overline{D(\mu_m^\alpha)} \subset L^2(\mathbb{R}^3)$ onde o fecho é tomado com respeito a norma $\|f\|_\alpha = \|\mu_m^\alpha f\|$. Trata-se de um espaço de Sobolev recorrente na literatura desta área, para mais detalhes conferir apêndice A. Assim sendo, segue que:

Proposição: $(H_m^\alpha)^* = H_m^{-\alpha}$.

□

Use o teorema S.4 em (REED, 1980) e o teorema de Plancherel para achar um $g \in L_2(\mathbb{R}^3)$ tal que para $\xi \in (H_m^\alpha)^*$ e $f \in H_m^\alpha$:

$$\begin{aligned} \xi(f) &= \int f(x) \bar{g}(x) dx \\ &= \int \hat{f}(p) \hat{g}(p) dp \\ &= \int (m^2 + p^2)^{\alpha/2} \hat{f}(p) (m^2 + p^2)^{-\alpha/2} \hat{g}(p) dp \\ &= \int \widehat{\mu_m^\alpha f}(p) (m^2 + p^2)^{-\alpha/2} \hat{g}(p) dp. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Aqui vamos introduzir uma notação bem sugestiva $\mu_m^{-\alpha} g := \widehat{(m^2 + p^2)^{-\alpha/2} \hat{g}}$ para depois notar que ela se reduz ao caso familiar, pois:

$$\begin{aligned} \xi(f) &= \int \widehat{\mu_m^\alpha f}(p) (m^2 + p^2)^{-\alpha/2} \hat{g}(p) dp \\ &= \int \mu_m^\alpha f(x) \mu_m^{-\alpha} \bar{g}(x) dx. \end{aligned} \quad (4.14)$$

deve convergir para ser parte do dual. Como $\mu_m^\alpha f(x) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ então também $\mu_m^{-\alpha} \bar{g}(x) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ assim podemos adotar uma sequência $g_n \in D(\mu_m^{-\alpha})$ convergindo na norma $\|\cdot\|_{-\alpha}$ para g e teremos:

$$\int |\mu_m^{-\alpha} \bar{g}(x)|^2 dx = \lim \int \mu_m^{-\alpha} \bar{g}_n(x) dx. \quad (4.15)$$

e recuperamos o sentido original dessa notação junto com a desigualdade:

$$\xi(f) = \int \mu_m^\alpha f(x) \mu_m^{-\alpha} \bar{g}(x) dx \leq \|f\|_\alpha \|\bar{g}\|_{-\alpha}. \quad (4.16)$$

■

Para $\sigma = \pm \frac{1}{2}$ considera-se o espaço: $H_m^\sigma(\mathcal{O}) = \overline{D(\mu_m^\sigma) \cap L^2(\mathcal{O})}$, com o fecho de mesmo sentido ao anterior. agora veja que $H_m^\sigma(\mathcal{O}) + H_m^\sigma(\mathcal{O}^c)$ é denso em $H_m^\sigma(\mathbb{R}^3)$. Na verdade isso ocorre em fronteiras do tipo C^1 (com vetores normais suaves em qualquer vizinhança de qualquer ponto na fronteira)(FIGLIOLINI, 1989).

Adote a notação $\mathcal{U}^\circ$ para identificar o conjunto polar de $\mathcal{U}$. Isso seria um subconjunto de $\mathcal{U}^*$ (os duais a $\mathcal{U}$), que para nossos propósitos consiste em todos os funcionais que zeram o espaço em questão.

Em verdade o conjunto polar é alvo de muitos desencontros formais. Há autores se referindo a ele como um subconjunto de $\mathcal{U}$ para o qual uma certa quantidade de funcionais restringem-se a um determinado resultado(BONNESEN, 1974), mas aqui adota-se o ponto de vista sobre os funcionais. Registra-se que $\mathcal{O}$ ao qual nos referimos será sempre um subconjunto com fronteira C^1 .

Proposição: $[H_m^\sigma(\mathcal{O})]^\circ = H_m^{-\sigma}(\mathcal{O}^c)$.

□

Seja $f \in [H_m^\sigma(\mathcal{O})]^\circ$, então: $f(g) = 0 \forall g \in H_m^\sigma(\mathcal{O})$. Mas isso só é possível se $\text{supp}(f) \not\subseteq \mathcal{O}$, e como foi observado anteriormente $f \in H_m^{-\sigma}(\mathbb{R})$. Juntando as duas condições temos $f \in H_m^{-\sigma}(\mathcal{O}^c)$ isso prova que $[H_m^\sigma(\mathcal{O})]^\circ \subset H_m^{-\sigma}(\mathcal{O}^c)$.

A situação inversa se justifica na medida em que $f \in H_m^{-\sigma}(\mathcal{O}^c)$ satisfaz $\langle f, g \rangle = 0 \forall g \in H_m^\sigma(\mathcal{O})$ por uma questão do suporte dos dois elementos.

■

Vale notar que há facilidade em confundir o conjunto polar: $[H_m^\sigma(\mathcal{O})]^\circ$ com o subconjunto ortogonal: $[H_m^\sigma(\mathcal{O})]^\perp$, contudo os dois, a princípio, não são os mesmos. Ocorre que formalmente os ortogonais são um subconjunto de algum espaço de Hilbert (o que não é o caso de $H_m^\sigma(\mathcal{O})$) ao passo que polares pertencem a $[H_m^\sigma(\mathcal{O})]^*$.

Os resultados anteriores possibilitam a definição de um operador denso similar a uma projeção em seu domínio de validade, $P_\sigma : H_m^\sigma(\mathcal{O}) + H_m^\sigma(\mathcal{O}^c) \rightarrow H_m^\sigma(\mathbb{R}^3)$

$$P_\sigma|_{H_m^\sigma(\mathcal{O})} := 1 \qquad P_\sigma|_{H_m^\sigma(\mathcal{O}^c)} := 0. \qquad (4.17)$$

Para ser preciso nas notações, se A é um operador em determinado espaço linear $\mathcal{A}$, denomina-se o transposto do operador: A^t um operador em $\mathcal{A}^*$, tal que $\xi(Af) = [A^t\xi](f) \forall f \in \mathcal{A}, \xi \in \mathcal{A}^*$. Dessa forma a seguinte relação pode ser estabelecida: $P_\sigma^t = P_{-\sigma}$.

Lema: $P_\sigma^t = P_{-\sigma}$.

□

Sejam $\xi \in D(P_\sigma^t)$, $f \in H_m^\sigma(\mathcal{O})$ e $f_c \in H_m^\sigma(\mathcal{O}^c)$. Segue que:

$$\begin{cases} [P_\sigma^t \xi](f_c) = \xi(P_\sigma f_c) = 0 \\ [(1 - P_\sigma^t) \xi](f) = \xi((1 - P_\sigma) f) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_\sigma^t \xi \in [H_m^\sigma(\mathcal{O}^c)]^\circ = H_m^{-\sigma}(\mathcal{O}) \\ (1 - P_\sigma^t) \xi \in [H_m^\sigma(\mathcal{O})]^\circ = H_m^{-\sigma}(\mathcal{O}^c). \end{cases} \quad (4.18)$$

Isso significa: $\xi \in H_m^{-\sigma}(\mathcal{O}) + H_m^{-\sigma}(\mathcal{O}^c)$. Assim sendo, se $\zeta + \zeta_c = \xi \in H_m^{-\sigma}(\mathcal{O}) + H_m^{-\sigma}(\mathcal{O}^c)$ da mesma forma que $f + f_c = \mathbf{f} \in H_m^\sigma(\mathcal{O}) + H_m^\sigma(\mathcal{O}^c)$:

$$\begin{aligned} \xi(P_\sigma \mathbf{f}) &= \xi(f) \\ &= \zeta(f) \\ &= \zeta(\mathbf{f}) = P_{-\sigma} \xi(\mathbf{f}). \end{aligned} \quad (4.19)$$

■

Como dito anteriormente $H_m^\sigma(\mathbb{R}^3)$ é um espaço de Banach munido com a norma:

$$\|f\|_\sigma^2 = \|\mu_m f\|_{L^2}^2. \quad (4.20)$$

No entanto, como $L^2(\mathbb{R}^3)$ é também um espaço de Hilbert munido de produto escalar $\langle, \rangle_{L^2}$ advindo de sua norma, define-se o produto escalar em $H_m^\sigma(\mathbb{R}^3)$:

$$\langle f, g \rangle_\sigma = \langle \mu_m^\sigma f, \mu_m^\sigma g \rangle_{L^2}, f, g \in H_m^\sigma(\mathbb{R}^3). \quad (4.21)$$

Um operador no espaço de Hilbert: T pode ter uma relação dual com operador dito adjunto: T^* . Esses são aqueles que satisfazem: $\langle f, Tg \rangle = \langle T^* f, g \rangle$. O motivo para se recorrer a notações como transposto e conjuntos polares pode parecer uma erudição vazia, no entanto a diferença entre adjunto de operadores deve ser enfatizada para o entendimento do seguinte lema:

Lema: Se $T : H_m^\sigma(\mathbb{R}^3) \rightarrow H_m^\sigma(\mathbb{R}^3)$ denso e fechado então: $D(T^*) = \mu_m^{-\sigma} D(T^t)$ e $T^* = \mu_m^{-\sigma} T^t \mu_m^\sigma$.

□

Antes de mais nada nota-se que a relação de dualidade funcional entre os espaços $H_m^\sigma(\mathbb{R}^3)$ pode ser lida como:

$$\xi(g) = \langle \xi, g \rangle, \quad \xi \in [H_m^\sigma(\mathbb{R}^3)]^* = H_m^\sigma(\mathbb{R}^3), g \in H_m^\sigma(\mathbb{R}^3). \quad (4.22)$$

Assim sendo, sejam $f, g \in H_m^\sigma(\mathbb{R}^3)$ e $f \in D(T^*)$:

$$\begin{aligned} \langle f, Tg \rangle_\sigma &= \langle \mu^\sigma f, Tg \rangle_{L^2} \\ &= [\mu_m^\sigma f](Tg) \\ &= [T^t \mu_m^\sigma f](g) \\ &= \langle T^t \mu_m^\sigma f, g \rangle \\ &= \langle \mu_m^{-\sigma} T^t \mu_m^\sigma f, g \rangle_\sigma. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Logo: $f \in \mu^{-\sigma} D(T^t)$.

■

O fato de saber o conjunto polar de $[H_m^\sigma(\mathcal{O})]^\circ = H_m^{-\sigma}(\mathcal{O}^c)$ nos revela a relação: $\mu_m^{-\sigma} H_m^{-\sigma}(\mathcal{O}^c) \perp \mu_m^\sigma H_m^\sigma(\mathcal{O})$. Agora define-se o seguinte operador, $A_\sigma := P_{-\sigma} \mu_m^{2\sigma}|_{H_m^{-\sigma}}$ de modo que o teorema a seguir determina o seu domínio e adjunto:

Teorema: A_σ é um operador denso e fechado em $H_m^\sigma(\mathcal{O})$ com imagem em $H_m^{-\sigma}(\mathcal{O})$, no mais:

$$A_\sigma^* = A_{-\sigma}. \quad (4.24)$$

□

A propriedade 4.24 decorre do lema passado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (P_{-\sigma} \mu_m^\sigma)^* &= (\mu_m^\sigma)^* P_{-\sigma}^* \\ &= \mu_m^{-\sigma} \mu_m^\sigma P_{-\sigma}^t \mu_m^{-\sigma} \\ &= P_\sigma \mu_m^{-\sigma}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Sobre o fechamento, registra-se que o operador denso P_σ em $[H_m^{-\sigma}]$ também o é, além de que $\mu_m^{2\sigma}$ é um operador unitário na restrição de imagem e domínio em $[H_m^{-\sigma}]$, já que nessas condições:

$$\langle \mu_m^\sigma f, \mu_m^\sigma g \rangle_{-\sigma} = \langle f, \mu_m^{2\sigma} g \rangle_\sigma \quad f, g \in H_m^\sigma. \quad (4.26)$$

O fato de ser denso decorre de o domínio: $D(P_{-\sigma}\mu_m^{2\sigma}) = \mu_m^{-2\sigma}D(P_{-\sigma})$ restrito a H_m^σ o ser. Para notar isso recorda-se a proposição passada: $\mu_m^{-\sigma}H_m^{-\sigma}(\mathcal{O}^c) \perp \mu_m^\sigma H_m^\sigma(\mathcal{O})$. Isso quer dizer que $\mu_m^\sigma H_m^\sigma(\mathcal{O})$ é denso em $\mu_m^{-\sigma}H_m^{-\sigma}(\mathcal{O})$ na restrição de $\mu_m^\sigma H_m^\sigma(\mathcal{O})$. Agora basta notar que as duas afirmações são equivalentes e isso prova o proposto.

■

Para o próximo teorema será necessário o entendimento do espaço de Hilbert do gráfico de determinado operador. Seja A um operador atuando no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ com o produto interno $\langle, \rangle$, é possível construir um novo espaço de Hilbert formado pelo mesmo conjunto de elementos presentes em $\mathcal{H}$ mas com outro produto interno: $\langle, \rangle_{g(A)}$.

$$\langle f, g \rangle_{g(A)} := \langle f, g \rangle + \langle Ag, Af \rangle, \quad f, g \in \mathcal{H}. \quad (4.27)$$

Esse novo espaço de Hilbert é dito o espaço dos gráficos de A . Incorpore essa notação à construção que estivemos fazendo até então para afirmar que:

Teorema:

$$\begin{aligned} T : H_m^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{O}) \oplus H_m^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O}) &\rightarrow (D(s), \|\cdot\|_{g(s)}) \\ : h^- \oplus h^+ &\mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mu_m^{-\frac{1}{2}} h^- - i\mu_m^{\frac{1}{2}} h^+ \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Um isomorfismo isométrico, onde $\|\cdot\|_{g(s)}$ representa o módulo no espaço dos gráficos de "s".

□

Primeiramente recobra-se que o operador já foi mencionado em 4.8 e assim nota-se que $D(s) = \mathcal{K}_m(\mathcal{O}) + i\mathcal{K}_m(\mathcal{O})$ pela definição de "s". Agora considere a atuação de "s" em $k_\pm \in \mu_m^{\pm\frac{1}{2}} H_m^{\pm\frac{1}{2}}(\mathcal{O})$:

$$\begin{aligned} s : k_+ &= \Re k_+ + i\Im k_+ \mapsto -\Re k_+ + i\Im k_+ \\ : k_- &= \Re k_- + i\Im k_- \mapsto \Re k_- - i\Im k_-. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Assim sendo, prova-se que $\langle k_+, k_- \rangle_{g(s)} = 0$, ou seja a separação $\mu_m^{\frac{1}{2}} H_m^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O}) + \mu_m^{-\frac{1}{2}} H_m^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{O})$ é ortogonal nesta norma:

$$\begin{aligned} \langle k_+, k_- \rangle_{g(s)} &= \langle k_+, k_- \rangle_{L^2} + \langle sk_-, sk_+ \rangle_{L^2} \\ &= \langle \Re k_+ + i\Im k_+, \Re k_- + i\Im k_- \rangle_{L^2} + \langle \Re k_- - i\Im k_-, -\Re k_+ + i\Im k_+ \rangle_{L^2} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Agora prova-se a isometria com $h_\sigma \in H_m^\sigma(\mathcal{O})$:

$$\begin{aligned} \|\mu_m^\sigma h_\sigma\|_{g(s)}^2 &= \langle \mu_m^\sigma h_\sigma, \mu_m^\sigma h_\sigma \rangle + \langle s(\mu_m^\sigma h_\sigma), s(\mu_m^\sigma h_\sigma) \rangle \\ &= 2\|h_\sigma\|_\sigma^2. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Então para $h_+ + h_- \in H_m^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O}) + H_m^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{O})$ ten-se:

$$\begin{aligned} \|T(h_+ + h_-)\|_{g(s)}^2 &= \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \mu_m^{\frac{1}{2}} h_+ \right\|_{g(s)}^2 + \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \mu_m^{-\frac{1}{2}} h_- \right\|_{g(s)}^2 \\ &= \|h_+\|_{\frac{1}{2}}^2 + \|h_-\|_{-\frac{1}{2}}^2. \end{aligned} \quad (4.32)$$

■

Recorda-se que $D(s) = \mathcal{K}_m(\mathcal{O}) + i\mathcal{K}_m(\mathcal{O})$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^3)$, assim um ajuste no produto escalar pode fornecer outro isomorfismo. Isso é o alvo da seguinte afirmação:

Proposição: $T : \left(H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{O}) \oplus H^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O}), \langle \cdot, N \cdot \rangle \right) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$.

Uma isometria densa com a forma quadrática $N = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i\mu_m \\ i\mu_m^{-1} & 1 \end{pmatrix}$.

□

$$\begin{aligned} \langle h_- \oplus h_+, N(h_- \oplus h_+) \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} h_- \oplus \frac{1}{\sqrt{2}} h_+, \frac{1}{\sqrt{2}} (h_- - i\mu_m h_+) \oplus \frac{1}{\sqrt{2}} (i\mu_m^{-1} h_- + h_+) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} h_-, \mu_m^{\frac{1}{2}} T(h_- \oplus h_+) \right\rangle_{-\frac{1}{2}} + \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} h_+, i\mu_m^{-\frac{1}{2}} T(h_- \oplus h_+) \right\rangle_{\frac{1}{2}} \\ &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \mu^{-\frac{1}{2}} h_-, T(h_- \oplus h_+) \right\rangle_{\frac{1}{2}} + \left\langle -\frac{i}{\sqrt{2}} \mu_m^{\frac{1}{2}} h_+, T(h_- \oplus h_+) \right\rangle_{-\frac{1}{2}} \\ &= \langle T(h_- \oplus h_+), T(h_- \oplus h_+) \rangle_{L^2}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

■

Defina o seguinte operador atuando de forma densa em $H_m^\sigma(\mathcal{O}) \oplus H_m^{-\sigma}(\mathcal{O})$.

$$B := \begin{pmatrix} 0 & iA_+ \\ -iA_- & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

Perceba a semelhança entre B e o operador definido no produto interno: N . Naturalmente $B - 1$ se parece um pouco com $-N$ e a pergunta que se deseja responder agora é se ele tem inverso.

Proposição: 1 não pertence ao espectro de B .

□

Suponha o contrário, isto é, $B(h_- \oplus h_+) - h_- \oplus h_+ = 0 \therefore$

$$\begin{cases} iA_+h_+ = h_- \\ -iA_-h_- = h_+ \end{cases} \Rightarrow A_+A_-h_- = h_- \therefore P_{-\sigma}\mu_m P_{\sigma}\mu_m^{-1}h_- = h_- \quad (4.35)$$

Dito de outra forma tem-se: $P_{-\sigma}\mu_m(1 - P_{\sigma})\mu_m^{-1}h_- = 0$ ou $h_- \in \ker[(1 - P_{\sigma})\mu_m^{-1}]$. Perceba que aqui chegamos a uma contradição, pois pela definição: $\sup h_- \subset \mathcal{O}$, mas os resultados que obtivemos nos levam a crer que $\sup \mu_m^{-1}h_- \subset \mathcal{O}$ e ambos ocorrem somente se $h_- = 0$ devido à antilocalidade do operador μ_m^{-1} . O mesmo vale para h_+

■

Vamos adotar a notação Q_{σ} para a projeção sobre o espaço $H_m^{\sigma}(\mathcal{O})$. Cabe mencionar aqui que o operador P_{σ} não se confunde com o operador Q_{σ} , isso porque recorda-se que P_{σ} é apenas denso em cujo domínio coincide com Q_{σ} .

Vale lembrar que tratamos da decomposição polar: $s = \delta^{\frac{1}{2}}j$ com $\delta = s^*s$. Agora pode-se tecer algumas considerações a respeito do operador δ :

Teorema: $\delta = \frac{B+1}{B-1}$.

□

A estratégia é a de usar a isometria densa definida em algumas proposições anteriores para caracterizar δ , mas antes é necessário projetar N para o domínio do operador.

Por isso ao invés de utilizar o produto escalar:

$$\langle \cdot, N \cdot \rangle \quad (4.36)$$

será utilizado o seguinte:

$$\langle \cdot, QNQ \cdot \rangle. \quad (4.37)$$

Aqui definimos o operador para o domínio de δ da seguinte forma:

$$Q := \begin{pmatrix} Q_- & 0 \\ 0 & Q_+ \end{pmatrix} \Rightarrow QNQ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -iQ_- \mu_m Q_+ \\ iQ_+ \mu_m^{-1} Q_- & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Agora defina $x = \mu_m^{-\frac{1}{2}} f - i\mu_m^{\frac{1}{2}} g$ com $f \in H_m^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{O})$ e $g \in H_m^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})$

$$\begin{aligned} \|f\|_{-\frac{1}{2}}^2 + \|g\|_{\frac{1}{2}}^2 &= \|x\|_{g(x)}^2 \\ &= \langle x, (1 + s^* s) x \rangle_{L^2} \\ &= \langle x, (1 + \delta) x \rangle_{L^2} \\ &= \langle f \oplus g, QNQ (1 + \delta) f \oplus g \rangle_{L^2}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Somos levados a concluir que $QNQ (1 + \delta) = 1$. Contudo note:

$$B(2QNQ - 1) = \begin{pmatrix} -A_+ Q_+ \mu_m^{-1} Q_- & 0 \\ 0 & -A_- Q_- \mu_m Q_+ \end{pmatrix}. \quad (4.40)$$

mas se f_1 e $f_2 \in H_m^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{O})$:

$$\begin{aligned} \langle f_1, A_+ Q_+ \mu_m^{-1} Q_- f_2 \rangle_{-\frac{1}{2}} &= \langle A_- f_1, \mu_m^{-1} f_2 \rangle_{\frac{1}{2}} \\ &= \langle P_+ \mu_m^{-1} f_1, f_2 \rangle_{L_2} \\ &= \langle f_1, f_2 \rangle_{-\frac{1}{2}} \Rightarrow A_+ Q_+ \mu_m^{-1} Q_- = 1|_{H_m^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{O})}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

igualmente para g_1 e $g_2 \in H_m^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})$:

$$\langle g_1, A_- Q_- \mu_m Q_+ g_2 \rangle_{\frac{1}{2}} = \langle g_1, g_2 \rangle_{\frac{1}{2}} \Rightarrow A_- Q_- \mu_m Q_+ = 1|_{H_m^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})}. \quad (4.42)$$

Portanto $B(2QNQ - 1) = -1$, assim como $(2QNQ - 1)B = -1$. Avalie o sistema de equações:

$$\begin{cases} QNQ (1 + \delta) = 1 \\ B(2QNQ - 1) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} QNQ = 1 - QNQ\delta \\ 2BQNQ = B - 1 \end{cases}. \quad (4.43)$$

Perceba que isso desemboca na seguinte equação: $B - 1 = 2B - (B - 1)\delta$, ou nos termos do teorema:

$$\delta = \frac{B + 1}{B - 1}. \quad (4.44)$$

■

A busca pelo operador δ é justificada na medida em que se deseja fazer dele o mapeador de simetrias do espaço em estudo. Assim sendo, o seu gerador infinitesimal: $\ln \delta$, será identificado

com o Hamiltoniano do sistema e isso seria o necessário para descrever a teoria de campos escalares localizada nesse determinado subespaço $\mathcal{O}$.

Apesar desses resultados serem muito bem conhecidos desde 1989, o caráter abstrato dos elementos tratados tornou a sua implementação dificultosa. A dificuldade referida pode ser avaliada pelos três casos emblemáticos de $\mathcal{O}$ em teoria axiomática de campos quânticos: a cunha, o cone de luz dianteiro e o cone duplo.

Será reservado um espaço adiante para tratar desses casos, mas o que se deseja destacar agora é que os três operadores advindos deles foram descritos por métodos muito particulares, sem se referir a essa teoria geral. Outro ponto que merece atenção é o da recente busca pelo caso massivo do cone duplo, o qual nos ateremos em seções posteriores.

4.2 Cone duplo sem massa

Esta secção será dedicada ao entendimento do operador δ com $m = 0$ para o caso em que $\mathcal{O}$ é a região do espaço-tempo conhecido como cone duplo, a ser definido brevemente. No caminho as regiões conhecidas como cunha e cone de luz dianteiros dianteiro terão a oportunidade de ser mencionados.

Começemos por definir a função de inversão radial: ρ que atua em $\mathbb{R}^4$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \rho : x \mapsto -x|x|^{-2} \quad & |x|^2 = x_0^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \quad , x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 \\ & = x_0^2 - |\vec{x}|^2 \quad , \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \quad (4.45)$$

Podemos também definir a função dada pela restrição da inversão radial à $\mathbb{R}_*^3 = \mathbb{R}^3 / \{0\}$ como $\rho_0 = \rho|_{\mathbb{R}_*^3}$. Assim

$$\rho_0 : \vec{x} \rightarrow \vec{x}|\vec{x}|^{-2}. \quad (4.46)$$

Ainda é possível definir a atuação de tais mapas em funções no espaço de Schwartz $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ ou $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_*^3)$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} f_\rho[x] := -|x|^{-6} f[\rho(x)] \\ f_{\rho_0}[\vec{x}] := |\vec{x}|^{-4} f[\rho(x)] \end{cases} \quad (4.47)$$

Para que essas definições não fiquem arbitrárias, consideramos o mapeamento: $f_\rho[x] := J(x) |x|^2 f[\rho(x)]$ onde $J(x)$ é o jacobiano da transformação de coordenadas. Usando este mapa como ponto de partida, as duas definições anteriores são mais coerentes.

Agora podemos tirar proveito de tais construções para se chegar em uma relação entre campos ϕ . Para isso definimos os conjuntos $\mathbf{T} = \{x, |x|^2 > 0\}$ dos vetores estritamente temporais e $\mathbf{E} = \{x, |x|^2 < 0\}$ estritamente espaciais, bem como o conjunto de funções de Schwartz

com suporte compacto em determinado conjunto $\mathbf{L}$ por exemplo: $\mathcal{S}(\mathbf{T} \cup \mathbf{E})$ e assim o operador U_ρ :

$$U_\rho \phi[f] \Omega := \phi[f_\rho] \Omega \quad f \in \mathcal{S}(\mathbf{T} \cup \mathbf{E}). \quad (4.48)$$

Reconhecemos os campos ϕ_0, ϕ_τ respectivamente como o campo de tempo zero e o campo da derivada no tempo em zero. Daí podemos ter um U_{ρ_0} tal qual definido anteriormente, mas atuando em ϕ_0 :

$$U_{\rho_0} \phi_0[f] \Omega := \phi_0[f_{\rho_0}] \Omega \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_*^3). \quad (4.49)$$

Lema: U_{ρ_0} estende-se para um operador unitário (LONGO, 1982).

■

U_{ρ_0} é densamente definido pela definição da transformada de Fourier em L^2 . No mais as funções de dois-pontos (*two-point function*) para o caso não massivo livre podem ser conferidas em: (VLADIMIROV, 1967). O que nos leva a:

$$\begin{aligned} \|U_{\rho_0} \phi_0[h] \Omega\|^2 &= \|\phi_0[h_{\rho_0}] \Omega\|^2 \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int \bar{h}_{\rho_0}(x) |x - y|^{-2} h_{\rho_0}(y) dx^4 dy^3 \\ &= \|\phi_0[h] \Omega\|^2. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Logo U_{ρ_0} é isométrico, o que significa que há uma extensão única à um operador unitário que será chamado de $\overline{U_{\rho_0}}$.

□

O subespaço linear $[\phi_0, \phi_\tau]$ gerado por $\phi_0[g] \Omega$ e $\phi_\tau[g] \Omega$ com $g \in \mathcal{S}(\mathcal{O})$ é denso em $H_0(B)$ para $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}_*^3$ um conjunto aberto não vazio, segundo (ARAKI, 1964)(RIEFFEL, 1974)

Lema: $\overline{U_{\rho_0}} = \overline{U_\rho}$ é unitário (LONGO, 1982).

■

$\sup f \subset D_f$ onde $D_f \subseteq \mathbf{T} \cup \mathbf{E}$. seja $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}_*^3$ um conjunto aberto não vazio tal que $D_f - \mathcal{O} \subset \mathbf{E}$. Note que $\rho(D_f - \mathcal{O}) \subset \mathbf{E}$ assim conferindo as funções de dois pontos novamente (VLADIMIROV, 1967):

$$\begin{aligned}
\langle \phi[f] \Omega, \phi_0[g] \Omega \rangle &= -\frac{1}{4\pi^2} \int \bar{f}(x) (x-y)^{-2} g(y) dx^4 dy^3 = \langle U_\rho \phi[f] \Omega, U_{\rho_0} \phi_0[g] \Omega \rangle \\
\langle \phi[f] \Omega, \pi_0[g] \Omega \rangle &= \frac{1}{2\pi^2} \int \bar{f}(x) x_0 (x-y)^{-4} g(y) dx^4 dy^3 = \langle U_\rho \phi[f] \Omega, U_{\rho_0} \pi_0[g] \Omega \rangle.
\end{aligned}
\tag{4.51}$$

Isso significa que: $U_{\rho_0}|_{[\phi_0, \phi_\tau]} \subset U_\rho^*$, logo $U_{\rho_0} = U_\rho^{**}$.

□

Vamos tentar contextualizar melhor os objetivos desta secção. As álgebras locais são álgebras de Von Neumann atuando no espaço de funções de suporte compacto em um determinado subconjunto do espaço-tempo: $\mathcal{O}$. As regiões de interesse para esse trabalho, já antecipadas, podem ser definidas como se segue:

- Cunha direita: W^+

Trata-se de todos os pontos do espaço-tempo onde uma componente espacial é maior em módulo à componente temporal. Fazemos uma escolha bem objetiva:

$$W^+ = \{x : x_3 > |x_0|\} \tag{4.52}$$

- Cone dianteiro: V^+

São todos os pontos localizados no futuro dada a origem $(0, 0, 0, 0)$:

$$V^+ = \{x : x_0 > |\vec{x}|\} \tag{4.53}$$

Há também o cone traseiro que são os pontos localizados no passado da origem:

$$V^- = \{x : -x_0 > |\vec{x}|\} \tag{4.54}$$

- Cone duplo: X

Esta região se forma pelos pontos comuns aos outros dois cones após uma translação temporal. Digamos que e_0 representa o vetor unitário na direção do futuro, então:

$$X = (V^+ - e_0) \cap (V^- + e_0) \tag{4.55}$$

Tendo essas regiões delimitadas, o que nos interessa é a álgebra local associada à elas. De forma geral escreve-se $\mathbf{N}(\mathcal{O})$ como a álgebra local associada a uma determinada região $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^4$. Parece salutar diferenciar a álgebra $\mathbf{N}(\mathcal{O})$ e aquela anteriormente definida como $\mathbf{R}(\mathcal{K})$.

A diferença reside no fato que, como dito anteriormente, o desenvolvimento que leva à $\mathbf{R}(\mathcal{K})$ é de difícil aplicação no caso concreto, assim o espaço de Hilbert real $\mathcal{K}$ não é facilmente determinado, ao passo que a região $\mathcal{O}$ é essencial para a caracterização da notação. Em tese pode-se dizer $\mathbf{N}(\mathcal{O}) = \mathbf{R}(\mathcal{K}_{\mathcal{O}})$ se o espaço de Hilbert associado à região $\mathcal{O}$ for descoberta como sendo $\mathcal{K}_{\mathcal{O}}$ nos moldes da seção anterior.

Assim temos a álgebra local da cunha direita: $\mathbf{N}(W^+)$, a álgebra local do cone dianteiro $\mathbf{N}(V^+)$ e a álgebra local do cone duplo: $\mathbf{N}(X)$

Os lemas anteriores são os responsáveis por unir os operadores definidos sobre a função de inversão radial e as álgebras locais na foma do teorema a seguir:

Teorema: U_{ρ} estende para um operador unitário em H_0 (LONGO, 1982).

■

Como discutido anteriormente, basta combinar os Lemas 1 e 2

□

Corolário: $\mathbf{N}(X)$, $\mathbf{N}(V^+)$ e $\mathbf{N}(W^+)$ são isomórficos com $T(-1/2)U_{\rho}T(-1)$ implementando o isomorfismo de $\mathbf{N}(X)$ para $\mathbf{N}(V^+)$ onde $T(t)$ é o uniparamétrico grupo unitário das translações temporais.

Em termos de física, interpreta-se este grupo uni-modular como uma translação finita em determinada simetria. Na decomposição espectral representamos:

$$\Delta^{it} = e^{itH} \quad (4.56)$$

Porém para a dinâmica da mecânica quântica o que é realmente relevante é a translação infinitesimal, o Hamiltoniano. Assim definimos o que se chama de Hamiltoniano modular como o gerador infinitesimal dessas simetrias, e acaba sendo representado como $\log \Delta$.

O objetivo é descrever a álgebra $\mathbf{N}(X)$, isso é, determinar seu operador modular que denotaremos como Δ_X^{-it} em referência à região X . As outras duas regiões são extremamente importantes nesse trabalho pois seus operadores modulares já são conhecidos na literatura científica.

No caso de Δ_W^{-it} é possível conferir os resultados dos estudos de Bisognano e Wichmann (BISOGNANO, 1976). Para esse trabalho o que usaremos é a referência de Buchholz (BUCHHOLZ, 1978) onde ele conclui que:

$$\Delta_V^{-it} = \mathcal{D}(2\pi t). \quad (4.57)$$

Onde $\mathcal{D}$ é conhecido como o grupo de dilatação global atuando da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(t) \phi[f] \Omega &= \phi[f_t] \Omega \\ f_t[x] &= e^{-3t} f[e^{-t}x]. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Para operadores de campo $\phi[f]$. A seguinte transformação nos será útil doravante

$$\zeta(z, t) = \frac{(1+z) + e^{-t}(1-z)}{(1+z) - e^{-t}(1-z)}. \quad (4.59)$$

O mapeamento a cima trata-se do grupo uniparamétrico de transformações conformes conjugado à e^t por $\tau(1)\rho\tau(1/2)$, onde a translação temporal em $\mathbb{R}^4$ é designada por $\tau(t)$. Chamando $u = x_0 + |\vec{x}|$, $v = x_0 - |\vec{x}|$ definimos também:

$$\gamma(u, v, t) = 2^6 [(1+u) + e^{-t}(1-u)]^{-3} [(1-v) + e^t(1+v)]^{-3}. \quad (4.60)$$

Por fim note o seguinte operador, onde estamos considerando Φ como uma solução da equação de Klein-Gordon:

$$V(t) \Phi(u, v) = \gamma(u, v, t) \Phi[\zeta(u, t), \zeta(v, t)]. \quad (4.61)$$

O nosso interesse nessas fórmulas é o fato de que na situação em que $t = i\pi$, chegamos em um resultado familiar:

$$\begin{aligned} \gamma(u, v, i\pi) &= u^{-3}v^{-3} \\ &= \left(\frac{1}{x_0 + |\vec{x}|}\right)^3 \left(\frac{1}{x_0 - |\vec{x}|}\right)^3 \\ &= |x|^{-6}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

E analisemos os argumentos da função Φ após a atuação de $V(i\pi)$:

$$\begin{aligned} \zeta(u, i\pi) &= \frac{1}{u} & \zeta(v, i\pi) &= \frac{1}{v} \\ \zeta(u, i\pi) &= \frac{1}{|x|^2} \frac{|x|^2}{u} & \zeta(v, i\pi) &= \frac{1}{|x|^2} \frac{|x|^2}{v} \\ \zeta(u, i\pi) &= \frac{1}{|x|^2} \frac{x_0^2 - |\vec{x}|^2}{x_0 + |\vec{x}|} & \zeta(v, i\pi) &= \frac{1}{|x|^2} \frac{x_0^2 - |\vec{x}|^2}{x_0 - |\vec{x}|} \\ \zeta(u, i\pi) &= \frac{1}{|x|^2} \frac{(x_0 + |\vec{x}|)(x_0 - |\vec{x}|)}{x_0 + |\vec{x}|} & \zeta(v, i\pi) &= \frac{1}{|x|^2} \frac{(x_0 + |\vec{x}|)(x_0 - |\vec{x}|)}{x_0 - |\vec{x}|} \\ \zeta(u, i\pi) &= \frac{1}{|x|^2} v & \zeta(v, i\pi) &= \frac{1}{|x|^2} u. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Ou seja temos:

$$V(i\pi) \Phi(u, v) = \Phi_\rho[u, v]. \quad (4.64)$$

A bola unitária em $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{B}$ é a base do cone duplo e por isso os operadores podem ser identificados(LONGO, 2021). Nessa perspectiva é que abordamos o próximo teorema. Antes de dar prosseguimento faremos uma última definição para descarregar nossa notação:

$$K_0 := \frac{d}{dt} V(t) |_{t=0}. \quad (4.65)$$

Teorema: O Hamiltoniano modular sem massa é dado por(LONGO, 1982):

$$\log \Delta_{\mathbf{B}} = -2\pi A_0. \quad (4.66)$$

Onde $A_0 = -i_0 K_0$.

■

Primeiramente determina-se o operador modular e depois teremos o seu gerador infinitesimal. Para isso usa-se a invariância do vácuo pelo operador $T(-1/2) U_\rho T(-1)$ de modo que:

$$\Delta_X^{it} = T(1) U_\rho T(1/2) \Delta_V^{it} T(-1/2) U_\rho T(-1). \quad (4.67)$$

Como: $\Delta_V^{-it} = \mathcal{D}(2\pi t)$ basta utilizar os artifícios discutidos nos últimos parágrafos para concluir que:

$$V(t) = T(1) U_\rho T(1/2) \mathcal{D}(t) T(-1/2) U_\rho T(-1). \quad (4.68)$$

Por isso temos o operador modular de funções com suporte em $\mathbf{B}$ e assim para achar seu gerador basta determinar sua derivada:

$$\log \Delta_{\mathbf{B}} = 2i_0 \pi K_0 = -2\pi A_0. \quad (4.69)$$

□

Retomando as definições da ultima seção aqui, temos a oportunidade de entender como elas se apresentam no caso concreto. $H_m^\alpha = \overline{D(\mu_m^\alpha)} \subset L^2(\mathbb{R}^3)$ mais especificamente como o espaço dos $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ que satisfazem:

$$\|f\|_\alpha^2 = \int (|f|^2 + m^2)^\alpha |\hat{f}(p)|^2 dp^3 < \infty. \quad (4.70)$$

Nesta secção m é sempre 0 e notavelmente vamos nos ater ao caso $\alpha = \pm 1/2$. Também conhecemos o espaço de funções $f \in H_m^\alpha$ com suporte em certa região $\text{supp } f \subset \mathcal{O}$ que é tratado como $H_m^\alpha(\mathcal{O})$. Por fim o subespaço padrão é $\mathcal{K}(\mathcal{O}) = \mu^{-\frac{1}{2}} H_m^{-\frac{1}{2}} + i\mu^{\frac{1}{2}} H_m^{\frac{1}{2}}$

Ocorre que o espaço de soluções de KG é identificado com $\mathbb{S}_{\mathbb{R}^4}$ ao passo que tudo o que foi construído até então está sobre $\mathbb{R}^3$. Por isso se identifica o conjunto dessas soluções com o espaço de suas condições de contorno $(\Phi|_{x_0=0}, \partial_0 \Phi|_{x_0=0}) \in \mathcal{S}^2(\mathbb{R}^3)$.

Assim definimos o espaço de Hilbert de uma partícula (*one particle hilbert space* em tradução livre) $\mathcal{H}_m$ como sendo a complexificação de $\mathcal{K}(\mathcal{O})$, onde i_m será a estrutura complexa em questão. Para facilitar a manipulação iremos tratar $(\Phi|_{x_0=0}, \partial_0 \Phi|_{x_0=0}) = (f, g)$ e assim uma solução Φ pode ser identificada com suas condições de Cauchy (f, g) , e um operador atuando nele com uma matriz 2×2 de operadores atuando em H_m^α .

Sobre essa representação do operador modular no conjunto de condições de Cauchy é que se refere o seguinte teorema:

Teorema: A representação do operador K_0 no espaço de Hilbert de uma partícula será:

$$K_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(1-r^2) \\ \frac{1}{2}(1-r^2)\nabla^2 - r\partial_r - 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.71)$$

(LONGO, 2021)

■

O desenvolvimento aqui é claro, atuar o operador K_0 , como descrito no teorema anterior, em uma solução $\Phi \sim (f, g)$ e identificar a evolução de $f \rightarrow f'$ e $g \rightarrow g'$ quando $K_0 \Phi \sim (f', g')$. Uma aplicação da regrada cadeia e cálculos diretos levam a:

$$\frac{d}{dt} [V(t)\Phi](u, v)|_{t=0} = \left[-\frac{1}{2}(u+v) + \frac{1}{2}(\partial_u + \partial_v) - \frac{1}{2}(u^2\partial_u + v^2\partial_v) \right] \Phi(u, v). \quad (4.72)$$

Sabemos que recordando que: $\partial_u = \frac{1}{2}(\partial_0 + \partial_r)$ $\partial_v = \frac{1}{2}(\partial_0 - \partial_r)$, onde adotamos $r = |\vec{x}|$ para simplificar, então o operador aplicado em coordenadas cartesianas assume a forma:

$$[K_0\Phi](x) = \frac{1}{2} [1 - (x_0^2 + r^2)] \partial_0 \Phi - x_0 (r\partial_r + 1) \Phi. \quad (4.73)$$

Agora basta tomar-lhe os valores iniciais no tempo e sua derivada, isso é:

$$[K_0\Phi](0, \vec{x}) = \frac{1}{2} (1 - r^2) \partial_0 \Phi|_{x_0=0}. \quad (4.74)$$

Note que isso é um mapeamento de $g = \partial_0 \Phi|_{x_0=0}$ em $f' = [K_0\Phi]_{x_0=0}$, o mesmo vale para a derivada, que vamos abreviar os cálculos:

$$\partial_0 [K_0\Phi](0, \vec{x}) = \frac{1}{2} (1 - r^2) \partial_0^2 \Phi|_{x_0=0} - (r\partial_r + 1) \Phi|_{x_0=0}. \quad (4.75)$$

O termo com a dupla derivada no tempo pode ser suprimido pela equação de Klein-Gordon como segue:

$$\partial_0 [K_0\Phi](0, \vec{x}) = \left[\frac{1}{2} (1 - r^2) \nabla^2 - r\partial_r - 1 \right] \Phi|_{x_0=0}. \quad (4.76)$$

Novamente nota-se um mapeamento, dessa vez de $f = \Phi|_{x_0=0}$ em $g' = \partial_0 [K_0\Phi]_{x_0=0}$. Isso é o suficiente para provar o teorema.

□

Um comentário feito anteriormente encontra aqui uma boa oportunidade para ser lembrado. Esse desenvolvimento não se valeu dos métodos desenvolvidos na seção anterior, apenas se restringiu em representar um resultado em outro espaço.

Isso é importante mencionar pois há uma diferença entre o caso $m = 0$ e $m \neq 0$ que impede de estender esse resultado. Algumas particularidades do caso massivo serão tratadas na próxima seção.

4.3 Cone duplo massivo

Um resultado pouco enfatizado aqui dos trabalhos de Figliolini e Guido dá conta que o operador δ é contínuo com respeito à massa, mesmo para $m=0$. Alguns detalhes devem ser esclarecidos a respeito dessa tal continuidade e como ela deve ser compreendida. Referindo-se os tipos de topologias tratados anteriormente, continuidade é justamente a propriedade do mapeamento que preserva a topologia dentro de sua imagem inversa.

Dito isso, a continuidade a que se referem os autores é tomada como continuidade forte, aquela que preserva a topologia forte. Para atestar essa conclusão segue o teorema:

Teorema: O operador δ é fortemente contínuo. (FIGLIOLINI, 1989)

■

Primeiramente prova-se que, como um operador de $H_m^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})$ em $H_m^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, o limite existe $\lim_{\lambda \rightarrow m} \frac{\mu_\lambda}{\mu_m} \rightarrow 1$ e para isso segue a desigualdade:

$$\begin{aligned} \left\| \left(1 - \frac{\mu_\lambda^{\frac{1}{2}}}{\mu_m^{\frac{1}{2}}} \right) f \right\|_{\frac{1}{2}, m}^2 &= \left\| \left(\mu_\lambda^{\frac{1}{2}} - \mu_m^{\frac{1}{2}} \right) f \right\|_{L^2}^2 \\ &\leq \left(\sqrt{m} - \sqrt{\lambda} \right)^2 \|f\|_{\frac{1}{2}}^2. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Onde $f \in H_m^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})$ e a última norma é tomada com respeito ao espaço $H_1^{\frac{1}{2}}(\mathcal{O})$. Agora conscientizemo-nos que o operador B^{-1} é contínuo em $L^2(\mathbb{R}^3)$ pois aplicando o que acabou de se verificar em 4.40:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & iQ_- \mu Q_+ \\ -iQ_+ \mu^{-1} Q_- & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.78)$$

Isso nos assegura que o mapeamento de um real positivo m em B^{-1} é fortemente contínuo. Pode-se escrever tal operador de outra forma, basta notar:

$$\begin{aligned} \frac{\delta_m - 1}{\delta_m + 1} &= \left(\frac{B_m + 1}{B_m - 1} - 1 \right) \left(\frac{B_m + 1}{B_m - 1} + 1 \right)^{-1} \\ &= \left(2 \frac{1}{B_m - 1} \right) \left(2 B_m \frac{1}{B_m - 1} \right)^{-1} \\ &= B^{-1}. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Acresce a isso o fato que, por cálculos diretos, temos a mesma igualdade: $1 - 2R(-1)$. Entenda $R(-1)$ o resolvente de δ em -1 , mas acontece que devido à continuidade já explicada $R(-1)$ e δ devem ser também contínuos (KATO, 1984).

□

Aqui, como é importante enfatizar a diferença do caso sem massa e do caso massivo, vamos indexar os operadores como: δ_m , B_m etc. O teorema logo acima é uma motivação para pressupor um *ansatz* do caso massivo como: $\delta_m = \delta_0 + m^2 \delta'$ de modo que $\lim_{m \rightarrow 0} m^2 \delta' \rightarrow 0$. Em certo nível, foi o caminho seguido por Longo e Morsella em (LONGO, 2021) para descreverem o caso massivo do duplo cone.

Contudo o operador descrito por eles falhou em ser auto-adjunto em relação ao produto escalar do espaço proposto. Isso foi observado por Bostelmann, Cadamuro e Minz em (BOSTELMANN, 2023) onde algumas estimativas foram tecidas a respeito do presente desafio.

No supracitado artigo, uma análise numérica é realizada sobre a qual devemos entrar em mais detalhes. Devido a resultados obtidos em (LONGO, 2020) podemos definir o dito projetor de corte atuando em $\mathcal{H}_m$ e com imagem em $\mathcal{K}_m$ como:

$$L_m = \left(1 + j_m \delta_m^{\frac{1}{2}}\right) (1 - \delta_m)^{-1}. \quad (4.80)$$

Isso nos leva à constatação que dentro do domínio relevante podemos definir um operador $\mathbf{X}_m$ tal que:

$$\mathbf{X}_m := L_m - i_m L_m i_m - 1 = \frac{1 + \delta_m}{1 - \delta_m}. \quad (4.81)$$

Mas isso no âmbito do cálculo espectral quer dizer:

$$\ln \delta_m = -2 \operatorname{arctgh}(\mathbf{X}_m). \quad (4.82)$$

Adotando um posicionamento semelhante ao caso do duplo cone sem massa, quando descreveu-se o operador em termos da sua atuação nas condições de Cauchy, deseja-se projetar esse resultado para o mesmo espaço. Para atingir tal fim, decompõe-se a projeção de corte como: $L_m = P_{\frac{1}{2}} \oplus P_{-\frac{1}{2}}$ e usa-se o mapeamento linear e unitário: $U = \mu_m^{\frac{1}{2}} \oplus \mu_m^{-\frac{1}{2}}$ de $\mathcal{H}$ em $L^2(\mathbb{R}^3) \oplus L^2(\mathbb{R}^3)$ no domínio, além de adotar a estrutura complexa:

$$i_m = \begin{pmatrix} 0 & \mu_m^{-1} \\ -\mu_m & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.83)$$

e o produto escalar:

$$\langle \xi, \zeta \rangle := \langle \xi, (\mu_m \oplus \mu_m^{-1}) \zeta \rangle_{\frac{1}{2} \oplus \frac{-1}{2}} + i \langle \xi, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \zeta \rangle_{\frac{1}{2} \oplus \frac{-1}{2}}. \quad (4.84)$$

Assim sendo a expressão 4.82 pode ser reescrita mais convenientemente para nossos interesses sob a forma:

$$\delta_m = 2i_m \begin{pmatrix} 0 & \mu_m^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arctgh}(X_m) \mu_m^{-\frac{1}{2}} \\ -\mu_m^{\frac{1}{2}} \operatorname{arctgh}(X_m) \mu_m^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.85)$$

Onde foi definido um novo operador dado como:

$$X_m := \mu_m^{\frac{1}{2}} P_{\frac{1}{2}} \mu_m^{-\frac{1}{2}} + \mu_m^{-\frac{1}{2}} P_{-\frac{1}{2}} \mu_m^{\frac{1}{2}} - 1. \quad (4.86)$$

Uma importante questão levantada por Longo em sua investigação malfadada foi a respeito da componente superior na diagonal secundária. Na ocasião havia bons argumentos para crer que ela não dependia da massa para o duplo cone e assim a exigência de ser auto-adjunto

fixaria a componente remanescente. Segundo os dados de (BOSTELMANN, 2023) isso seria uma hipótese descartada na análise numérica. Aliás suas investigações recaíram especificamente sobre essa componente, o argumento de que a única diferença entre as duas é o operador μ_m .

Para extrair valores numéricos dessa situação foi preciso discretizar o espaço, de modo que a região fosse subdividida em n caixas de uma certa espessura. Poupe os detalhes pois a discussão será comedida, mas a ideia é realizar essas subdivisões por meio de bases ortonormais localizadas de modo que a atuação de P_σ fosse trivial dentro das caixas.

Não basta aqui empregar a localização e comparar os resultados. Pontuemos que a convergência está sendo empregada no sentido de topologias fracas, portanto é preciso calcular o produto deste operador com funções teste. Gaussianas foram empregadas para esse fim.

Para efeito de elucidação do descrito, imagine que e_i são n bases ortonormais referentes a cada discretização e $g(x)$ uma Gaussiana localizada em x . Esquemáticamente o que foi calculado por Bostelmann, Cadamuro e Minz foi:

$$\langle g(x_1), \left[\sum_{i,j} |e_i\rangle \langle e_i| \ln \delta_m |e_j\rangle \langle e_j| \right] g(x_2) \rangle, \quad (4.87)$$

Entenda aqui por $\ln \delta_m$ como a supracitada componente. O que os dados obtidos mostraram foram restritos ao caso do cone duplo com massa (mesmo porque o cone sem massa tem forma analítica).

Como um operador denso no espaço de $L^2(\mathbb{R}^3)$, termos na diagonal principal devem ser entendidos como contribuições multiplicativas, ao passo que a diagonal secundária corresponde a contribuições diferenciais. Com isso em mente, pode-se destacar algo que é digno de nota: tudo indica que estamos falando de um operador puramente diagonal.

5 RESULTADOS ORIGINAIS

Após tudo o que foi explicado nas oportunidades anteriores, o leitor já está bem informado sobre a área de interesse deste trabalho. O presente capítulo se destina a apresentar os resultados originais obtidos durante a atuação no instituto.

Para entender a intencionalidade deste trabalho, há de se notar que poucas são as abordagens algébricas ao problema em questão. Como desenvolvido ao longo da dissertação, a literatura é bem vasta em termos analíticos, porém esta outra faceta da situação parece não gozar da mesma abundância. Portanto almeja-se enriquecer os métodos disponíveis apresentando um ferramental, pelo conhecimento do autor, inédito na área.

A classe de funções transcendentais conhecidas como funções de Meijer ou funções G-Meijer aparentemente são pouco conhecidas mesmo entre a comunidade de matemáticos (BEALS, 2013). Usando convoluções e transformadas de Mellin as funções de Meijer se tornam poderosas aliadas na solução de integrais e, no caso deste trabalho, a determinação de núcleos integrais de operadores. Para saber os detalhes necessários sobre os supracitados elementos confira o apêndice C.

Esses instrumentos foram cruciais para poder identificar propriedades do operador μ_m , que foram divididas entre os casos de dimensão $1 + 1$ e $3 + 1$. Ao fim, alguns comentários podem ser tecidos e, auxiliado com programação numérica em Python, levantar hipóteses sobre os operadores importantes mencionados ao longo deste trabalho.

5.1 O operador μ_m em dimensão $1+1$

Servindo não só como título de exemplo, mas também para compreender suas propriedades, pode-se identificar o núcleo integral do operador μ_m^{-1} ao recordar-se da definição:

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mu_m^{-1}f}(p) &= (p^2 + m^2)^{-\frac{1}{2}} \hat{f}(p) \therefore \\
 (\mu_m^{-1}f)(x) &= \widehat{\widehat{\mu_m^{-1}f}}(x) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{ipx} (p^2 + m^2)^{-\frac{1}{2}} \right) \hat{f}(p) dp \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ip(x-x')} (p^2 + m^2)^{-\frac{1}{2}} dp \right) f(x') dx' \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu_m^{-1}(x - x') f(x') dx' \\
 &= (\mu_m^{-1} \circ f)(x).
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Aqui, uma certa licença é aplicada no momento em que se identifica o operador μ_m^{-1} como o mesmo signo para o seu núcleo integral μ^{-1} . Para evitar carregar o termo normalizador da transformada podemos omiti-lo, considerando-o como parte da definição da convolução. Assim é possível calcular o núcleo integral desse operador como:

$$\begin{aligned}\mu_m^{-1} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} (p^2 + m^2)^{-\frac{1}{2}} dp \\ &= 2 \int_0^{\infty} \cos(px) (p^2 + m^2)^{-\frac{1}{2}} dp.\end{aligned}\quad (5.2)$$

Aplica-se então os métodos discutidos no apêndice C onde cada uma dessas funções a serem integradas são identificadas com uma função de Meijer.

$$\begin{aligned}\mu_m^{-1} &= 2 \int_0^{\infty} \left(\sqrt{\pi} G_{0,2}^{1,0} \left[\frac{p^2 x^2}{4} \middle| - - \right] \right) \left(\frac{m^{-1}}{\Gamma(\frac{1}{2})} G_{1,1}^{1,1} \left[\frac{p^2}{m^2} \middle| 1 - \frac{1}{2} \right] \right) dp \\ &= \frac{2}{m} \int_0^{\infty} G_{0,2}^{1,0} \left[\frac{p^2 x^2}{4} \middle| - - \right] G_{1,1}^{1,1} \left[\frac{p^2}{m^2} \middle| \frac{1}{2} \right] d \left(\frac{p^2 x^2}{4} \right) \frac{4}{x^2} \frac{1}{2p} \\ &= \frac{2}{mx} \int_0^{\infty} G_{0,2}^{1,0} \left[p \middle| - - \right] G_{1,1}^{1,1} \left[\frac{4}{x^2 m^2} p \middle| \frac{1}{2} \right] dp \\ &= \frac{2}{mx} G_{3,1}^{1,2} \left[\left(\frac{m^2 x^2}{4} \right)^{-1} \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right] \\ &= \frac{2}{mx} G_{1,3}^{2,1} \left[\frac{m^2 x^2}{4} \middle| 1 \right] \\ &= \frac{2}{mx} G_{0,2}^{2,0} \left[\frac{m^2 x^2}{4} \middle| - - \right].\end{aligned}\quad (5.3)$$

Não surpreendentemente esse resultado pode ser posto em termo da função modificada de Bessel de segunda espécie $K_\alpha(x)$ (PINZUL, a ser publicado).

$$\mu_m^{-1} = 2K_0(mx). \quad (5.4)$$

Apesar desse ser um resultado interessante, recorda-se que ao longo da dissertação o operador μ_m^{-1} não é aquele que define o espaço $H_m^{-\frac{1}{2}}$, mas sim $\mu_m^{-\frac{1}{2}}$. Para obter o mesmo para esse caso, os cálculos seguem muito similares.

$$\begin{aligned}\mu_m^{-\frac{1}{2}} &= 2 \int_0^{\infty} \cos(px) (p^2 + m^2)^{-\frac{1}{4}} dp \\ &= 2 \int_0^{\infty} \left(\sqrt{\pi} G_{0,2}^{1,0} \left[\frac{p^2 x^2}{4} \middle| - - \right] \right) \left(\frac{m^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{4})} G_{1,1}^{1,1} \left[\frac{p^2}{m^2} \middle| \frac{3}{4} \right] \right) dp \\ &= \frac{2m^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}}{x \Gamma(\frac{1}{4})} G_{0,2}^{2,0} \left[\frac{m^2 x^2}{4} \middle| - - \right].\end{aligned}\quad (5.5)$$

Ainda é possível representar esse resultado em termos de funções mais conhecidas dos métodos matemáticos mais tradicionais. Novamente, em termos das funções $K_\alpha(x)$:

$$\begin{aligned}\mu_m^{-\frac{1}{2}} &= \frac{\sqrt{m\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} G_{0,2}^{2,0} \left[\frac{m^2 x^2}{4} \middle| \begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \right. \\ &\quad \left. 0, -\frac{1}{4} \right] \\ &= 2^{\frac{5}{4}} \frac{\sqrt{m\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} (mx)^{-\frac{1}{4}} K_{\frac{1}{4}}(mx). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Os métodos aqui empregados também podem ser usados para determinar um suposto operador derivado, isso é, se existe algum operador $\mu'(m)$ tal que:

$$\mu(m) = \mu(m_0) + m\mu'(m_0) + \mathcal{O}(m^2). \quad (5.7)$$

Continuaremos a utilizar a notação de subíndices por conveniência, mas o interesse dessa busca é pela derivada do operador:

$$\frac{\mu_m}{\mu_0}. \quad (5.8)$$

Isso porque no trabalho de Figliolini e Guido esse operador foi descoberto como sendo contínuo, deseja-se provar que ele seria derivável agora. Os motivos por quê isso é tão relevante ficarão mais claros adiante. Conseguir-se-á o que deseja se o núcleo integral de

$$\frac{\mu_m}{\mu_0} - 1 \quad (5.9)$$

for bem definido, no caso estamos tratando $m_0 = 0$. Note que a conclusão da diferenciabilidade do operador não estaria prejudicada se for adotada a função $\frac{\mu_m}{\mu_0}$ no seu lugar. A decisão não só simplifica os cálculos, como também se alinha com o artigo de Figliolini e Guido. Aplicam-se novamente as mesmas técnicas desenvolvidas até agora:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mu_m^{\frac{1}{2}}}{\mu_0^{\frac{1}{2}}} - 1\right) f(p) &= \left[\left(\frac{p^2 + m^2}{p^2}\right)^{\frac{1}{4}} - 1\right] \hat{f}(p) \therefore \\
\left(\frac{\mu_m^{\frac{1}{2}}}{\mu_0^{\frac{1}{2}}} - 1\right) f(x) &= \left(\frac{\mu_m^{\frac{1}{2}}}{\mu_0^{\frac{1}{2}}} - 1\right) f(x) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{p^2 + m^2}{p^2}\right)^{\frac{1}{4}} - 1\right] \hat{f}(p) e^{ipx} dp \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{p^2 + m^2}{p^2}\right)^{\frac{1}{4}} - 1\right] e^{ip(x-x')} dp\right) f(x') dx' \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\mu_m^{\frac{1}{2}}}{\mu_0^{\frac{1}{2}}} - 1\right] (x - x') f(x') dx' \\
&= \left[\left(\frac{\mu_m^{\frac{1}{2}}}{\mu_0^{\frac{1}{2}}} - 1\right) \circ f\right](x). \tag{5.10}
\end{aligned}$$

Lembrando que decidiu-se nomear $\left(\frac{\mu_m^{\frac{1}{2}}}{\mu_0^{\frac{1}{2}}} - 1\right)$ como o núcleo integral igualmente como o operador formado por esse núcleo assim como a incorporação de $\frac{1}{2\pi}$ na definição da convolução. Agora seguem os cálculos dele como já feito para os outros:

$$\begin{aligned}
\frac{\mu_m^{\frac{1}{2}}}{\mu_0^{\frac{1}{2}}} - 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \left[\left(\frac{p^2 + m^2}{p^2}\right)^{\frac{1}{4}} - 1\right] dp \\
&= 2 \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{p^2 + m^2}{p^2}\right)^{\frac{1}{4}} - 1\right] \cos(px) dp \\
&= \frac{1}{m} \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{z+1}{z}\right)^{\frac{1}{4}} - 1\right] z^{-\frac{1}{2}} \cos(mx\sqrt{z}) dz. \tag{5.11}
\end{aligned}$$

Recorre-se aos métodos anteriores(PINZUL, a ser publicado):

$$\begin{aligned}
\frac{\mu_m^{\frac{1}{2}}}{\mu_0^{\frac{1}{2}}} - 1 &= \frac{1}{m} \int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{\Gamma(-\frac{1}{4})} G_{2,2}^{2,1} \left[z \left| \begin{matrix} -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}, -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}, -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \end{matrix} \right. \right]\right) \left(\sqrt{\pi} G_{0,2}^{1,0} \left[\frac{m^2 x^2 z}{4} \left| \begin{matrix} - \\ 0, \frac{1}{2} \end{matrix} \right. \right]\right) dz \\
&= -\frac{\sqrt{\pi}}{m\Gamma(-\frac{1}{4})} \int_0^{\infty} G_{2,2}^{2,1} \left[z \left| \begin{matrix} -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2} \end{matrix} \right. \right] G_{0,2}^{1,0} \left[\frac{m^2 x^2 z}{4} \left| \begin{matrix} - \\ 0, \frac{1}{2} \end{matrix} \right. \right] dz \\
&= -\frac{\sqrt{\pi}}{m\Gamma(-\frac{1}{4})} G_{2,4}^{2,2} \left[\frac{m^2 x^2}{4} \left| \begin{matrix} \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \end{matrix} \right. \right] \\
&= -\frac{\sqrt{\pi}}{m\Gamma(-\frac{1}{4})} G_{1,3}^{2,1} \left[\frac{m^2 x^2}{4} \left| \begin{matrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} \end{matrix} \right. \right]. \tag{5.12}
\end{aligned}$$

5.2 O operador μ_m em dimensão 3+1

A ideia dessa secção é reproduzir os resultados análogos àqueles encontrados no caso 1 + 1 dimensional. Novamente o núcleo integral de μ_m^{-1} pode ser determinado usando as mesmas técnicas, mas um pequeno adendo sobre notação. Aqui as variáveis em $\mathbb{R}^3$ serão denotados como os vetores $\vec{p}$ e $\vec{x}$ e as componentes radiais em coordenadas esféricas serão respectivamente p e x . Assim sendo:

$$\begin{aligned}
 \mu_m^{-1} &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} (p^2 + m^2)^{-\frac{1}{2}} d^3p \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{ipx \cos(\theta)} (p^2 + m^2)^{-\frac{1}{2}} p^2 dp d(\cos \theta) d\phi \\
 &= 2\pi \int_0^\infty (p^2 + m^2)^{-\frac{1}{2}} p^2 \left[\frac{e^{ipxu}}{ipx} \right]_{u=1}^{-1} dp \\
 &= -\frac{4\pi}{x} \int_0^\infty (p^2 + m^2)^{-\frac{1}{2}} p \sin(px) dp.
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Novamente recorre-se às funções de Meijer para poder efetuar a integração como no apêndice C. Antes de prosseguir, deve-se lembrar de que o símbolo μ_m^{-1} está representando, ao mesmo tempo, o operador e seu núcleo integral, como se convencionou na secção passada.

$$\begin{aligned}
 \mu_m^{-1} &= -\frac{4\pi}{x} \int_0^\infty \left(\frac{m^{1-1}}{\Gamma(\frac{1}{2})} G_{1,1}^{1,1} \left[\frac{p^2}{m^2} \middle| 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] \right) \left(\sqrt{\pi} G_{0,2}^{1,0} \left[\frac{p^2 x^2}{4} \middle| - - \right]_{\frac{1}{2}, 0} \right) dp \\
 &= -\frac{4\pi}{x} \int_0^\infty G_{1,1}^{1,1} \left[\frac{p^2}{m^2} \middle| \frac{1}{2} \right] G_{0,2}^{1,0} \left[\frac{p^2 x^2}{4} \middle| - - \right]_{\frac{1}{2}, 0} dp \\
 &= -\frac{4\pi}{x} \int_0^\infty G_{1,1}^{1,1} \left[\left(\frac{p^2 x^2}{4} \right) \frac{4}{x^2 m^2} \middle| \frac{1}{2} \right] G_{0,2}^{1,0} \left[\frac{p^2 x^2}{4} \middle| - - \right]_{\frac{1}{2}, 0} d \left(\frac{p^2 x^2}{4} \right) \frac{4}{x^2} \frac{1}{2p} \\
 &= -\frac{4\pi}{x^2} \int_0^\infty G_{1,1}^{1,1} \left[\frac{4}{p x^2 m^2} \middle| \frac{1}{2} \right] G_{0,2}^{1,0} \left[p \middle| - - \right]_{0, -\frac{1}{2}} dp \\
 &= -\frac{4\pi}{x^2} G_{3,1}^{1,2} \left[\frac{4}{x^2 m^2} \middle| 0, 1, \frac{1}{2} \right]_{\frac{1}{2}} \\
 &= -\frac{4\pi}{x^2} G_{1,3}^{2,1} \left[\frac{x^2 m^2}{4} \middle| \frac{1}{2} \right]_{1, 0, \frac{1}{2}} \\
 &= -\frac{4\pi}{x^2} G_{0,2}^{2,0} \left[\frac{x^2 m^2}{4} \middle| - - \right]_{1, 0}.
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Agora, para reconhecer essa como uma função de Bessel modificada novamente basta ajustar os índices:

$$\begin{aligned}
\mu_m^{-1} &= -m^2 \pi \frac{4}{m^2 x^2} G_{0,2}^{2,0} \left[\frac{x^2 m^2}{4} \middle| \begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \right]_{1,0} \\
&= -m^2 \pi G_{0,2}^{2,0} \left[\frac{x^2 m^2}{4} \middle| \begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \right]_{0,-1} \\
&= -m^2 \pi \frac{4K_1(mx)}{mx} \\
&= -\frac{4m\pi}{x} K_1(mx). \tag{5.15}
\end{aligned}$$

Passamos para a determinação do núcleo integral de $\mu_m^{-\frac{1}{2}}$.

$$\begin{aligned}
\mu_m^{-\frac{1}{2}} &= -\frac{4\pi}{x} \int_0^\infty p (p^2 + m^2)^{-\frac{1}{4}} \sin(px) dp \\
&= -\frac{4\pi}{x} \int_0^\infty \left(\frac{m^{1-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{4})} G_{1,1}^{1,1} \left[\frac{p^2}{m^2} \middle| \begin{matrix} 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \right] \right) \left(\sqrt{\pi} G_{0,2}^{1,0} \left[\frac{p^2 x^2}{4} \middle| \begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \right]_{\frac{1}{2},0} \right) dp \\
&= -\frac{4\pi^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}}}{x^2 \Gamma(\frac{1}{4})} G_{0,2}^{2,0} \left[\frac{x^2 m^2}{4} \middle| \begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \right]_{1, \frac{1}{4}}. \tag{5.16}
\end{aligned}$$

Ainda podemos identificar uma função modificada de Bessel para tornar o resultado mais familiar:

$$\begin{aligned}
\mu_m^{-\frac{1}{2}} &= -\frac{\pi^{\frac{3}{2}} m^{\frac{5}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{4})} \frac{4}{x^2 m^2} G_{0,2}^{2,0} \left[\frac{x^2 m^2}{4} \middle| \begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \right]_{1, \frac{1}{4}} \\
&= -\frac{\pi^{\frac{3}{2}} m^{\frac{5}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{4})} G_{0,2}^{2,0} \left[\frac{x^2 m^2}{4} \middle| \begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \right]_{0, -\frac{3}{4}} \\
&= -\frac{\pi^{\frac{3}{2}} m^{\frac{5}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{4})} 2^{\frac{7}{4}} \frac{K_{\frac{3}{4}}(mx)}{(mx)^{\frac{3}{4}}} \\
&= -(2m)^{\frac{7}{4}} \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{4}} \Gamma(\frac{1}{4})} K_{\frac{3}{4}}(mx). \tag{5.17}
\end{aligned}$$

Agora deseja-se provar novamente a existência de um operador derivada como na secção passada. Para isso, pequenas mudanças devem ser implementadas na determinação de seu núcleo integral.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mu_m^{\frac{1}{2}}}{\mu_0^{\frac{1}{2}}} - 1 \right) f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(\frac{m^2 + p^2}{p^2} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right] \hat{f}(p) e^{ip \cdot x} d^3 p \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(\frac{m^2 + p^2}{p^2} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right] e^{ip \cdot (x-x')} d^3 p \right) f(x') d^3 x'. \tag{5.18}
\end{aligned}$$

Ou seja:

$$\begin{aligned}
\frac{\mu_m^{\frac{1}{2}}}{\mu_0^{\frac{1}{2}}} - 1 &= \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(\frac{m^2 + p^2}{p^2} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right] e^{ip \cdot x} d^3p \\
&= 2\pi \int_0^\infty \left[\left(\frac{m^2 + p^2}{p^2} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right] \left[\frac{e^{ipxu}}{ipx} \right]_1^{-1} p^2 dp \\
&= -\frac{4\pi}{x} \int_0^\infty \left[\left(\frac{m^2 + p^2}{p^2} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right] p \sin(px) dp \\
&= -\frac{2\pi m^2}{x} \int_0^\infty \left[\left(\frac{1+z}{z} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right] \sin(mx\sqrt{z}) dz \\
&= -\frac{2\pi m^2}{x} \int_0^\infty z^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{1+z}{z} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right] z^{-\frac{1}{2}} \sin(mx\sqrt{z}) dz. \tag{5.19}
\end{aligned}$$

O motivo pelo qual se opta pela ultima equação da lista de igualdades fica claro na hora de apresentar as Funções de Meijer. Não há necessidade de introduzir nada além do que já foi utilizado anteriormente (PINZUL, a ser publicado):

$$\begin{aligned}
\dots &= -\frac{2\pi m^2}{x} \int_0^\infty z^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{\Gamma(-\frac{1}{4})} G_{2,2}^{2,1} \left[z \left| \begin{matrix} -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}, -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}, -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \end{matrix} \right. \right] \right) \left(\sqrt{\pi} G_{0,2}^{1,0} \left[\frac{m^2 x^2}{4} z \left| \begin{matrix} - \\ \frac{1}{2}, 0 \end{matrix} \right. \right] \right) dz \\
&= \frac{2\pi^{\frac{3}{2}} m^2}{x \Gamma(-\frac{1}{4})} \int_0^\infty z^{\frac{1}{2}} G_{2,2}^{2,1} \left[z \left| \begin{matrix} -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2} \end{matrix} \right. \right] G_{0,2}^{1,0} \left[\frac{m^2 x^2}{4} z \left| \begin{matrix} - \\ \frac{1}{2}, 0 \end{matrix} \right. \right] dz \\
&= \frac{2\pi^{\frac{3}{2}} m^2}{x \Gamma(-\frac{1}{4})} \int_0^\infty G_{2,2}^{2,1} \left[z \left| \begin{matrix} 0, 1 \\ -\frac{1}{4}, 0 \end{matrix} \right. \right] G_{0,2}^{1,0} \left[\frac{m^2 x^2}{4} z \left| \begin{matrix} - \\ \frac{1}{2}, 0 \end{matrix} \right. \right] dz \\
&= \frac{2\pi^{\frac{3}{2}} m^2}{x \Gamma(-\frac{1}{4})} G_{2,4}^{2,2} \left[\frac{m^2 x^2}{4} \left| \begin{matrix} \frac{1}{4}, 0 \\ 0, \frac{1}{2}, 0, -1 \end{matrix} \right. \right] \\
&= \frac{2\pi^{\frac{3}{2}} m^2}{x \Gamma(-\frac{1}{4})} G_{1,3}^{2,1} \left[\frac{m^2 x^2}{4} \left| \begin{matrix} \frac{1}{4} \\ 0, \frac{1}{2}, -1 \end{matrix} \right. \right]. \tag{5.20}
\end{aligned}$$

5.3 Análise numérica

Falou-se muito sobre os operadores μ e suas possíveis derivadas nas secções anteriores, porém algumas características sobre os operadores δ_m podem ser inferidas. Decidiu-se por traçar alguns gráficos da diferença entre os elementos de matriz: $\ln \delta_m - \ln \delta_0$ e o quadrado da massa. A intenção é vislumbrar como a derivada do operador, na forma de uma linha tangente à curva (mais especificamente o índice de sua inclinação), diverge com m indo para zero.

Mais algumas palavras serão necessárias aqui para entender como se fez para extrair os dados numéricos do operador apresentado. A ideia principal é devida aos desenvolvimentos de Bostelmann-Cadamuro-Minz e permita-se uma breve recapitulação do seu método.

Discretiza-se o espaço em termos de bases ortonormais como funções-caixas e_i onde se calculam os elementos de matriz. Para garantir a convergência fraca integramos sobre Gaussianas $g(x)$ e então pode-se comparar os resultados.

Esses dados são formalmente soluções de uma equação diferencial parcial na forma de funções modificadas de Bessel, isto é, na componente radial e decomposta em termos de harmônicos esféricos. O que de fato está sendo calculado é:

$$\langle g(x_1), \left[\sum_{i,j} |e_i\rangle \langle e_i| (\ln \delta_m - \ln \delta_0) |e_j\rangle \langle e_j| \right] g(x_2) \rangle. \quad (5.21)$$

Esses gráficos serão avaliados na diagonal: $x_1 = x_2 = 0$. Para o cálculo explícito dessas quantidades em todos os seus detalhes, devemos consultar o artigo original (BOSTELMANN, 2023). Entre as poucas mudanças que foram feitas no código original (em *Python*), vale mencionar o acréscimo no número de parâmetros de massa que foram incluídos com o intuito de deixar a curva mais suave (PINZUL, a ser publicado).

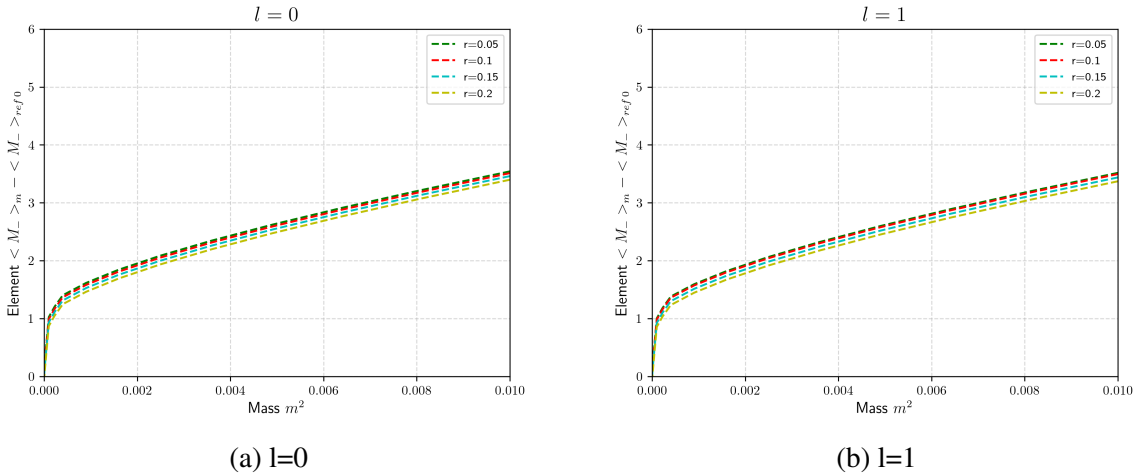


Figura 1 – não diferenciabilidade para m^2 indo à zero

Os subtítulos $l = 0$ e $l = 1$ são referentes à expansão harmônica em seus primeiro e segundo termos. $\langle M_- \rangle_m$ e $\langle M_- \rangle_{ref}$ são os componentes da matriz discretizada referidas na equação 5.21 onde a primeira é uma aproximação e a segunda para $m = 0$ (que é analítica).

O nosso objetivo em traçar esses gráficos foi profícuo na medida em que a reta tangente à curva, quando conduzida para valores de $m \rightarrow 0$ se aproxima da linha vertical. Essa é uma indicação que derivadas não convergem neste limite. O que este trabalho levanta é a possibilidade desse operador não ter derivada bem definida em $m = 0$.

Essa desconfiança tem raízes na forma de δ_m já que se adotar $h_m := \frac{\delta_m - 1}{\delta_m + 1}$, então pode-se argumentar que:

$$\begin{aligned} \frac{\delta_m - 1}{\delta_m + 1} &= \left(\frac{B_m + 1}{B_m - 1} - 1 \right) \left(\frac{B_m + 1}{B_m - 1} + 1 \right)^{-1} \\ &= \left(2 \frac{1}{B_m - 1} \right) \left(2 B_m \frac{1}{B_m - 1} \right)^{-1} \\ &= B^{-1}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Seguindo os mesmos passos:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2}{\delta_m + 1} &= \frac{(\delta_m + 1) - 2}{\delta_m + 1} \\ &= \frac{\delta_m - 1}{\delta_m + 1}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

O ponto que se deseja levantar é o fato de que se h_m não for derivável, tão pouco δ_m será. Agora apresenta-se os motivos para suspeitar da não diferenciabilidade de h_m .

Recorda-se de $Q_{\pm}$ como a projeção sobre $H_m^{\pm \frac{1}{2}}(\mathcal{O})$ em $H_m^{\pm \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Sabe-se que (FIGLIOLINI, 1989):

$$B_m^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & iQ_- \mu_m Q_+ \\ -iQ_+ \mu_m^{-1} Q_- & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

Sobre essa ótica, julguemos então o operador $h_m - h_0$

$$= \begin{pmatrix} 0 & i(Q_-(m) \mu_m Q_+(m) - Q_-(0) \mu_0 Q_+(0)) \\ -i(Q_+(m) \mu_m^{-1} Q_-(m) - Q_+(0) \mu_0^{-1} Q_-(0)) & 0 \end{pmatrix}.$$

Uma breve discussão sobre os operadores $Q_{\pm}(m)$ se faz necessária, pois como os espaços $H_m^{\pm \frac{1}{2}}(\mathcal{O})$ são equivalentes para qualquer valor de massa (inclusive zero) (FIGLIOLINI, 1989) essas projeções devem projetar para os mesmos subespaços em $H_m^{\pm \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Porém, em geral, $H_m^{\pm \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3) \approx H_0^{\pm \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ para valores não nulos de m

Esse descompasso gera um cenário curioso em que $Q_{\pm}(m) = \text{cte.}$ para qualquer outro valor de m que não seja zero. A diferenciabilidade desse operador para qualquer outro valor de $m \neq 0$ se torna óbvia, mas o detalhe é que essa fonte de descontinuidade só poderia ser corrigido pelo comportamento de μ_m , como pode se ver, ele restou como o único elemento que depende de m . Porém ele já se mostrou não tendo o formato necessário, portanto não há nada mais capaz de suavizar a descontinuidade na passagem de $m \rightarrow 0$.

Um fato, pouco provável mas que merece ser citado, é a possibilidade da descontinuidade ser negligenciável, isso é, esse operador ainda ser definido em um subespaço denso. O motivo que leva essa possibilidade a ser pouco provável é que para o regime de energias infravermelhas, o conjunto de funções convergentes para $m = 0$ tem que ser menor do que para qualquer m finito na escala de pelo menos uma potência.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o objetivo de enriquecer os métodos práticos de obtenção de resultados na área da mecânica quântica de campos axiomática é que esse trabalho foi proposto.

Tendo em mente a abordagem introduzida pela teoria de Tomita-Takesaki explanada no capítulo [2] e sua relação com a mecânica quântica de campos axiomática descrita no capítulo [3], esse método consiste em facilitar certas integrações. Os resultados do capítulo [4] ajudam a entender como essas integrais surgem e porque são tão importantes dentro do ambiente conhecido como subespaço padrão de Hilbert.

O capítulo [5] é o responsável por apresentar as transformadas de Mellin e a principal ferramenta da dissertação, a função G de Meijer. A utilização do homomorfismo grupal da transformada com as propriedades da função G proporcionaram resultados na integração de termos associados ao operador μ_m . Os dados obtidos serão apresentados aqui, seguidos de um prognóstico.

6.1 Conclusões

Sem dúvidas, os maiores louros desse trabalho foram os métodos algébricos encontrados para enriquecer o campo da Mecânica Quântica Axiomática, mais especificamente, na abordagem dos operadores de Tomita e Subespaços Padrões. A determinação da representação em termos das funções de Meijer dos operadores μ são uma espécie de demonstração de sua praticidade.

Em linhas gerais, trata-se da representação dos núcleos integrais de um operador como funções de Meijer. A integração nessas condições se torna simples na medida em que não é nada mais do que uma convolução de duas transformadas de Mellin, pela própria definição da função de Meijer. Em um primeiro momento, dividiu-se os resultados em 1+1, e 3+1 dimensões, isto é, uma ou três dimensões espaciais e uma dimensão temporal.

Sobre os resultados para 1+1 dimensões, foram calculados os núcleos integrais dos operadores μ_m^{-1} , $\mu_m^{-\frac{1}{2}}$ e conclui-se que (PINZUL, a ser publicado):

$$\begin{aligned}\mu_m^{-1} &= \frac{2}{mx} G_{0,2}^{2,0} \left[\frac{m^2 x^2}{4} \middle| \begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \right]_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = 2K_0(mx) \\ \mu_m^{-\frac{1}{2}} &= \frac{2\sqrt{m\pi}}{x\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} G_{0,2}^{2,0} \left[\frac{m^2 x^2}{4} \middle| \begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \right]_{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}} = 2^{\frac{5}{4}} \frac{\sqrt{m\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} (mx)^{-\frac{1}{4}} K_{\frac{1}{4}}(mx).\end{aligned}\tag{6.1}$$

$K_\alpha(x)$ trata-se da função modificada de Bessel de segunda espécie. Importante mencionar que os símbolos μ_m^{-1} e $\mu_m^{-\frac{1}{2}}$ no cálculo acima, não estão representando os operadores, um pequeno abuso de notação foi utilizado para simplificar a representação desses núcleos integrais.

Sabendo que o operador é contínuo em $m = 0$ pelo artigo de Figliolini e Guido (FIGLIOLINI, 1989) a fração $\frac{\mu_m}{\mu_0} = 1$ em $m = 0$. Assim sendo, um operador derivada em $m = 0$ dessa fração seria proporcional à massa do seguinte cálculo:

$$\frac{\mu_m^{\frac{1}{2}}}{\mu_0^{\frac{1}{2}}} - 1 = -\frac{\sqrt{\pi}}{m\Gamma(-\frac{1}{4})} G_{1,3}^{2,1} \left[\frac{m^2 x^2}{4} \middle| \frac{3}{4}, 0, -\frac{1}{2} \right]. \quad (6.2)$$

Esse resultado é importante pois indica a existência do operador derivada em $m = 0$, as repercussões disso serão consideradas mais adiante.

Indo para o caso 1+3 dimensional, os mesmos cálculos podem ser realizados chegando à conclusão que:

$$\begin{aligned} \mu_m^{-1} &= -\frac{4\pi}{x^2} G_{0,2}^{2,0} \left[\frac{x^2 m^2}{4} \middle| - - \right]_{1,0} = -\frac{4m\pi}{x} K_1(mx) \\ \mu_m^{-\frac{1}{2}} &= -\frac{4\pi^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}}}{x^2 \Gamma(\frac{1}{4})} G_{0,2}^{2,0} \left[\frac{x^2 m^2}{4} \middle| - - \right]_{1, \frac{1}{4}} = -(2m)^{\frac{7}{4}} \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{4}} \Gamma(\frac{1}{4})} K_{\frac{3}{4}}(mx). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Do mesmo modo com feito anteriormente, também tem-se:

$$\frac{\mu_m^{\frac{1}{2}}}{\mu_0^{\frac{1}{2}}} - 1 = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}} m^2}{x\Gamma(-\frac{1}{4})} G_{1,3}^{2,1} \left[\frac{m^2 x^2}{4} \middle| 0, \frac{1}{2}, -1 \right]. \quad (6.4)$$

Em um segundo momento, alguns comentários e suspeições foram feitos a respeito da derivada do operador δ_m . Relembra que trata-se de um operador contínuo e por isso a pergunta quanto a sua diferenciabilidade parece natural. Uma breve noção pode ser dada a partir dos gráficos gerados por Python advindos da figura 2.

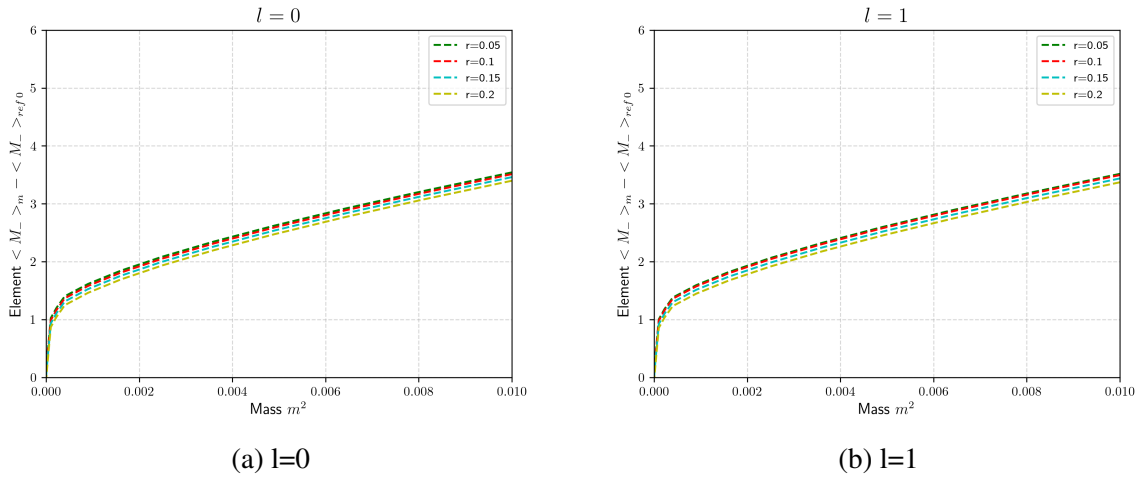


Figura 2 – não diferenciabilidade para m^2 indo à zero

Os subtítulos $l = 0$ e $l = 1$ são referentes à expansão harmônica em seus primeiro e segundo termos. $\langle M_- \rangle_m$ e $\langle M_- \rangle_{\text{ref}}$ são os componentes da matriz discretizada presente em (BOSTELMANN, 2023).

A análise da reta tangente à curva leva a crer que em $m = 0$ ela seria vertical, o que significaria uma derivada inexistente. Outra forma de encarar isso é como a diferenciabilidade do operador $\frac{\mu_m^{\frac{1}{2}}}{\mu_0^{\frac{1}{2}}}$ torna muito improvável que δ_m seja, pelos motivos já explanados anteriormente.

6.2 Perspectivas futuras

O conhecimento e a divulgação maior sobre as funções de Meijer podem figurar como uma importante peça sobre o quebra-cabeças a respeito da dificuldade em traduzir os resultados de Figliolini e Guido para o campo prático. De certa forma, o único elemento que falta para tornar esse trabalho completamente aplicável está na projeção Q_m , especificamente na projeção Q_0 .

Por mais que os resultados a respeito de μ_m^{-1} e $\mu_m^{-\frac{1}{2}}$ sejam interessantes, o núcleo integral de μ_m e $\mu_m^{\frac{1}{2}}$ não pode ser determinado unicamente pelo desconhecimento de uma representação em funções de Meijer para $(p^2 + m^2)^{\frac{\alpha}{2}}$ com $\alpha > 0$. Sobre isso, mais investigações merecem ser dedicadas.

Outro ponto desagradável nas conclusões do projeto é a incógnita a respeito de uma representação de $\frac{\mu_m^{\frac{1}{2}}}{\mu_0^{\frac{1}{2}}} - 1$ em termos de funções de Bessel. A suspeição é natural, pois os outros termos puderam ser assim descrito, mas também devido ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty J_\alpha(xp) \frac{dp}{\sqrt{p^2 + m^2}} &= \frac{1}{m\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty G_{0,2}^{1,0} \left[\frac{p^2 x^2}{4} \middle| \frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2} \right] G_{1,1}^{1,1} \left[\frac{p^2}{m^2} \middle| \frac{1}{2} \right] dp \\
&= \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} G_{1,3}^{2,1} \left[\frac{x^2 m^2}{4} \middle| 0, \frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2} \right]
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Isso é o desenvolvimento de uma identidade sobre as funções de Bessel já bem conhecida (GRADSHTEYN, 2007), podendo então fazer a seguinte associação:

$$\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} G_{1,3}^{2,1} \left[\frac{x^2 m^2}{4} \middle| 0, \frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2} \right] = I_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{1}{2} mx \right) K_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{1}{2} mx \right) \tag{6.6}$$

a diferença nos índices é bem sutil com respeito aos casos 1+1 e 1+3 dimensional:

$$G_{1,3}^{2,1} \left[\frac{m^2 x^2}{4} \middle| 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right] \qquad G_{1,3}^{2,1} \left[\frac{m^2 x^2}{4} \middle| 0, \frac{1}{2}, -1 \right] \tag{6.7}$$

Após a determinação da forma explícita do operador de Tomita sem massa para o caso localizado em um duplo cone, há também a informação de que ele seria contínuo com respeito a esse parâmetro. Mas a possível falta de diferenciabilidade pode restringir ainda mais a busca desse operador.

Talvez haveria a tentação de se questionar a respeito da forma do operador de massa infinitesimal e acabar por se deparar com a proposta:

$$\Delta_m = \Delta_0 + m^2 \Delta' + \dots \tag{6.8}$$

A investigação do comportamento da derivada de δ_m indica que essa aproximação estaria sob forte dúvida, uma vez que se a derivada em $m = 0$ realmente não existir, esse tipo de argumento está descartado. Para efeitos práticos, se as suspeições levantadas aqui estiverem corretas uma aproximação perturbativa em $m = 0$ não estaria formalmente definida.

REFERÊNCIAS

- ANDERSON, F. W. *Rings and Categories of Modules*. New York: Springer Science+Business Media, 1973. v. 13. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- ARAKI, H. A lattice of von neumann algebras associated with the quantum theory of a free bose field. *J. Math. Phys.*, v. 4, n. 11, p. 1343—1362, 1963. Citado na página 42.
- ARAKI, H. Von neumann algebras of local observables for free scalar field. *J. Math. Phys.*, v. 5, p. 1—13, 1964. Citado na página 54.
- ARAKI, H. A classification of factors. *Publ. RIMS, Kyoto Univ. Ser. A*, v. 3, p. 51—130, 1968. Citado na página 17.
- ARAKI, H. *Mathematical Theory of Quantum Fields*. Great Britain: Oxford University Press, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 23.
- BEALS, R. *Meijer G-Functions: A Gentle Introduction*. 2013. Citado 2 vezes nas páginas 64 e 94.
- BISOGNANO, J. J. On the duality condition for a hermitian scalar field. *J. Math. Phys.*, v. 16, n. 4, p. 985, 1975. Citado na página 14.
- BISOGNANO, J. J. On the duality condition for quantum fields. *J. Math. Phys.*, v. 17, n. 3, p. 303—321, 1976. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 56.
- BOGOLUBOV, N. N. *General principles of quantum field theory*. London: Kluwer Academic Publishers, 1987. v. 10. Citado na página 18.
- BONNESEN, T. *Theorie der konvexen körper*. Berlin: Springer, 1974. Citado na página 46.
- BOSTELMANN, H. On the mass dependence of the modular operator for a double cone. *Annales Henri Poincaré*, v. 24, p. 3031—3054, 2023. Citado 5 vezes nas páginas 15, 61, 63, 71 e 76.
- BRATTELI, O. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1*. 2nd ed. ed. Berlin Heidelberg New York: Springer, 2002. v. 1. Citado na página 17.
- BRUNETTI, R. *Advances in Algebraic Quantum Field Theory*. [S.l.]: Springer International Publishing, 2015. Citado na página 26.
- BUCHHOLZ, D. On the structure of local quantum fields with non-trivial interaction. *Proc. of Int. Conf. on Operator Algebras, Ideals and their Application in Theoretical Physics*, p. 146—153, 1978. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 56.
- ECKMANN, J.-P. An application of tomita's theory of modular hilbert algebras: Duality for free bose fields. *Journal of Functional analysis*, n. 37, p. 1—12, 1973. Citado na página 42.
- ERDÉLYI, A. *Higher transcendental functions*: Bateman manuscript project. California: California Institute of Technology, 1974. v. 3. Citado na página 94.
- FIGLIOLINI, F. The tomita operator for the free scalar field. *Annales Herri Poincaré*, Gauthier-Villars, v. 51, n. 4, p. 419—435, 1989. Citado 5 vezes nas páginas 14, 46, 60, 72 e 75.

GOHBERG, K. *Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators in Hilbert Space*. Moskow: AMS. Citado na página 25.

GRADSHTEYN, I. *Table of integrals, series, and products*. Elsevier. California: Academic Press, 2007. v. 1. Citado 4 vezes nas páginas 77, 94, 103 e 105.

HAAG, R. Postulates of quantum field theory. *J. Math. Phys.*, v. 3, n. 2, p. 248, 1962. Citado na página 39.

HAAG, R. *Local Quantum Physics: Fields, particles, algebras*. [S.l.]: Springer, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 23.

HALL, B. C. *Lie groups, Lie algebras, and representations*. USA: Springer. Citado na página 30.

JOST, R. *the general theory of quantized fields*. USA: American mathematical society, 1965. Citado na página 32.

KADISON, R. V. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*. California,: American Mathematical Society, 2000. v. 1. Citado na página 22.

KANTOROVICH, L. V. *Functional Analysis*. Second edition. Oxford: Pergamon Press, 1982. Citado na página 20.

KATO, T. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Berlin: Springer-Verlag, 1984. Citado na página 61.

KINNUNEN, J. *Sobolev Spaces*. Aalto: [s.n.], 2023. Citado 2 vezes nas páginas 91 e 93.

KOLMOGOROV, A. N. *Measure, Lebesgue integral and Hilbert Space*. London: Academic Press Inc, 1960. Citado na página 90.

LANDSMAN, N. *Lecture Notes on C^* -Algebras, Hilbert C^* -modules, and Quantum Mechanics*. 1998. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 17.

LONGO, R. Modular structure of the local algebras associated with the free massless scalar field theory. *Comm. Math. Phys.*, n. 84, p. 71–85, 1982. Citado 4 vezes nas páginas 14, 54, 56 e 58.

LONGO, R. The information in a wave. *Comm. Math. Phys.*, p. 979–1000, 2020. Citado na página 61.

LONGO, R. *The massive modular Hamiltonian*. 2021. Citado 4 vezes nas páginas 15, 58, 59 e 61.

MAZ'JA, V. G. *Sobolev Spaces*. 1. ed. Leningrad, USSR: Springer, 1980. Citado 2 vezes nas páginas 91 e 93.

NEEB, K.-H. *Antiunitary representations and modular theory*. 2017. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1704.01336>. Citado 3 vezes nas páginas 43, 82 e 83.

NEEB, K.-H. Kms conditions, standard real subspaces and reflection positivity on the circle group. *Pacific Journal of Mathematics*, Mathematical Sciences Publishers, v. 299, n. 1, p. 117–169, apr 2019. Citado 2 vezes nas páginas 86 e 87.

NEUMANN, J. von. Über einen satz von herrn m. h. stone. *Annals of Mathematics, Second Series*, v. 33, n. 3, p. 567–573, 1932. Citado 4 vezes nas páginas 24, 26, 33 e 39.

- NEUMANN, J. von. On rings of operators. *Annals of Mathematics*, v. 37, p. 116–229, 1936. Citado na página 17.
- PETZ, D. An invitation to the algebra of canonical commutation relations. *Leuven Notes in Mathematical and Theoretical Physics*, v. 2, p. 108, 1989. Citado 3 vezes nas páginas 35, 36 e 38.
- PINZUL, A. On some analytical properties of tomita-takesaki theory and meijer's g-function. a ser publicado. Citado 5 vezes nas páginas 65, 67, 70, 71 e 74.
- REED, M. *Methods of modern mathematical physics: Functional analysis*. California: Academic Press, 1980. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 45.
- RIEFFEL, M. A. A commutation theorem and duality for free bose fields. *Commun. Math. Phys.*, n. 39, p. 153–164, 1974. Citado na página 54.
- ROGERS, C. A. *Hausdorff Measures*. Cambridge: Cambridge University Press, 1970. Citado na página 90.
- SALAMON, D. A. *Measure and integration*. Zürich: [s.n.], 2020. Citado na página 90.
- SEGAL, I. E. Anti-locality of certain lorentz-invariant operators. *Journal of Mathematics and Mechanics*, JSTOR, v. 14, n. 4, p. 629–38, 1965. Citado na página 44.
- STALDER, Y. Le lemme de schur pour les représentations orthogonales. *Expositiones Mathematicae*, v. 20, n. 3, p. 279–285, 2002. ISSN 0723-0869. Citado na página 84.
- STREATER, R. F. *PCT, Spin and statistics, an all taht*. USA: Cambridge University Press, 1964. Citado na página 30.
- TAKESAKI, M. *Tomita's Theory of Modular Hilbert Algebras and its Applications*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1970. Citado na página 26.
- TAKESAKI, M. *Theory of Operator Algebras I*. USA: Springer, 2000. v. 124. Citado 3 vezes nas páginas 17, 19 e 33.
- VLADIMIROV, V. S. *Les fonctions de plusieurs variables complexes et leur application á la théorie quantique des champs*. Paris: Springer, 1967. Citado na página 54.
- WEBER, J. *Introduction to Sobolev Spaces: Lecture notes*. Unicamp: [s.n.], 2018. Citado 2 vezes nas páginas 91 e 93.
- WEYL, H. Quantenmechanik und gruppentheorie. *Zeitschrift für Physik*, n. 1, p. 46, 1927. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.
- YNGVASON, J. The role of type iii factors in quantum field theory. *Reports on Mathematical Physics*, v. 55, n. 1, p. 135, 2005. Citado na página 17.
- YNGVASON, J. The role of type iii factors in quantum field theory. *Reports on Mathematical Physics*, v. 55, n. 1, p. 135–147, 2005. Citado na página 33.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Subespaços padrões de Hilbert e teoria de Tomita-Takesaki

O presente apêndice se destina a estabelecer as relações entre essas duas abordagens de forma mais clara. Além disso, há também razões mais contundentes para se enveredar por essas práticas no tratamento da Teoria Quântica de Campos.

O fato é que a Teoria Quântica de campos se fundamenta não sobre vetores em um determinado espaço de Hilbert, mas sobre seus raios. Isso quer dizer que a única coisa relevante no tratamento quântico é a direção e sentido desses vetores, e é assim que se definem os estados quânticos: como classes de equivalência sobre todos os vetores que se diferenciam por um escalar.

Estados como os descritos anteriormente são elementos dentro de um espaço denominado de Espaço projetivo de Hilbert e se $\mathcal{H}$ é o espaço de Hilbert original, denota-se $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ esse espaço. Então se dois vetores $v, w \in \mathcal{H}$ dizemos que $[v], [w] \in \mathbb{P}(\mathcal{H})$ para representar suas classes de equivalência e assim pode-se definir a transição de probabilidade entre dois estados como:

$$\tau([v], [w]) := \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{|v|^2 |w|^2}. \quad (\text{A.1})$$

A transição de probabilidades entre dois estados é uma quantidade muito ligada aos interesses da física, mas ela pode ser usada para fornecer uma métrica ao espaço projetivo na forma da métrica de estudo de Fubini

$$d([v], [w]) = \arccos \sqrt{\tau([v], [w])}. \quad (\text{A.2})$$

Essa, na verdade, é uma métrica riemanniana e isso dá ao espaço projetivo o que é necessário para se tornar uma variedade de Riemann-Hilbert. Isso quer dizer que a Teoria Quântica deve satisfazer simetrias visando preservar essa estrutura. O teorema de Wigner responde à pergunta sobre quais são os automorfismos de $(\mathbb{P}(\mathcal{H}), d)$ e conclui que são as bijeções induzidas no espaço projetivo por operadores antiunitários em $\mathcal{H}$ (NEEB, 2017). Esse resultado pode ser representado como:

$$\text{Aut}(\mathbb{P}(\mathcal{H}), d) \sim \text{AU}(\mathcal{H}) / \mathbb{T}. \quad (\text{A.3})$$

Leia $\text{Aut}(\mathbb{P}(\mathcal{H}), d)$ como o grupo de automorfismos, $\text{AU}(\mathcal{H})$ é o grupo de operadores antiunitários e $\mathbb{T}$ o grupo circular, identificando os vetores em $\mathcal{H}$ com suas respectivas classes de equivalência. $\text{PAU}(\mathcal{H}) = \text{AU}(\mathcal{H}) / \mathbb{T}$ é o grupo das projeções anti-unitárias, então um homomorfismo com esse grupo encerra as possibilidades de simetrias quânticas.

O interessante é saber qual é o correspondente no nível do espaço de Hilbert e não das projeções. Para isso considera-se G um grupo topológico com duas componentes conexas. Denominamos representação antiunitária de G , um homomorfismo contínuo $\pi : G \rightarrow AU(\mathcal{H})$, se uma das suas componentes é igual à $\ker \pi$.

Seja G_1 uma das componentes conexas do grupo topológico G (isto é $G/G_1 \sim \mathbb{Z}_2$) e U uma representação unitária no espaço dos operadores limitados de $\mathcal{H}$, ou seja, $U : G_1 \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Pode-se construir sua contraparte funcional $U^* : G_1 \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}^*)$ atuando de acordo com a representação de Riez.

Aqui é importante mencionar o mapa de G_1 para G_1 apresentado como τ

$$\tau : g \mapsto rgr^{-1} \quad r \in G - G_1. \quad (\text{A.4})$$

Ele atua sobre um subgrupo normal que é G_1 . Mas se (G, G_1) são tais que r é um elemento satisfazendo $r^2 \in \text{Cen}(G_1)$, então são denominados um par de grupos involutivos e aplica-se o lema à baixo:

Lema: U tem uma extensão para uma representação antiunitária de G (NEEB, 2017)

□

Basta notar que $V := U \oplus U^* \circ \tau$ é a extensão que se procura, com $\tau(g) := rgr^{-1}$ e $r \in G - G_1$. Isso porque se:

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H}^* \\ v &\mapsto \langle v, \cdot \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Então $U_g^* \circ \phi = \phi \circ U_g$ com $g \in G_1$. Assim, considerando:

$$\begin{aligned} J : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^* &\rightarrow \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^* \\ (v, \lambda) &\mapsto (\phi^{-1}\lambda, \phi U_{r^2}v), \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Conclui-se que $J^2(v, \lambda) = (U_{r^2}v, U_{r^2}^*\lambda)$ e $JV_gJ^{-1} = V_{\tau(g)}$. Daí $V_{gr} := V_gJ$ é uma representação antiunitária. ■

O resultado à baixo é bem abrangente, mas para não perder o foco do que se está disposto a investigar usaremos as notações já introduzidas. Denotaremos U_G , uma representação

antiunitária de G criada como a extensão descrita no lema anterior. Representações e seus espaços de atuação serão descritos como $(U_G, \mathcal{H})$.

Aqui vale recordar e reiterar a adoção da notação U'_G como o comutante, se referindo aos elementos dentro do espaço de representação que comutam com todos os elementos em $U_G(G)$. Assim chega-se ao resultado do teorema a seguir.

Teorema: $(U_G, \mathcal{H})$ é uma representação irredutível se, e somente se $U'_G \sim \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

□

Um subespaço real, tomado como $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$, tem um subespaço invariante pela ação de $\mathbb{T} \cdot U_G$. Esse é o mesmo subespaço complexo invariante por U_G , assim sendo $(U_G, \mathcal{H})$ é irredutível se, e somente se, $(\mathbb{T} \cdot U_G, \mathcal{H}_{\mathbb{R}})$ também for.

Um resultado em (STALDER, 2002) garante que isso só é possível se $(\mathbb{T} \cdot U_G)' \sim \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, dito em outras palavras: $U'_G \sim \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ■

Outro detalhe sobre essas representações envolve o lema a seguir:

Lema: Se $U \circ \tau \sim U^*$ então $\exists J \in AU(\mathcal{H})$ tal que $J^4 = 1$ e $JU_gJ^{-1} = U_{\tau(g)}$

□

O fato de $U \circ \tau \sim U^*$ acarreta na existência de algum J tal que $JU_gJ^{-1} = U_{\tau(g)}$ para $g \in G_1$. Como um mapa de G_1 em G_1 o seguinte operador pode ser entendido como uma identidade: τ^2 . Ou seja $J^2 \in U'$.

Chame então $\mathcal{H}_- := \ker(J^2 + 1)$ e então $\mathcal{H} = \mathcal{H}_- + \mathcal{H}_-^\perp$, assim existe um $A \in U'$ tal que:

$$\begin{cases} JAJ = A \\ A^2 = J^2 \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Assim sendo $(A^{-1}J)^2 = 1$ ■

Quando (G, G_1) são grupos de Lie, chamam-se de par de grupos de Lie involutivos e suas representações são contínuas. Devido aos resultados do último teorema, em uma dimensão, exis-

tem apenas três possibilidades relacionadas com as três possíveis comutantes das representações irredutíveis contínuas.

A mais simples dessas possibilidades está relacionada com grupos isomórficos à $(\mathbb{R}^\times, \mathbb{R}_+^\times)$, o grupo dos números reais sem o zero. Nesse contexto a representação unitária em $\mathbb{R}_+^\times$ pode ser estendida para uma representação antiunitária em $\mathbb{R}^\times$ como descrito no primeiro lema.

O fato é que essa representação acaba obedecendo os critério do lema provado à cima e por isso com a definição de quem seria U_{-1} pode-se chegar no resultado seguinte:

Lema: Define-se $U_{-1} = J$ e $U_{e^t} = e^{itH}$ para H um gerador infinitesimal do operador Δ , então $J\Delta J = \Delta^{-1}$ e essa é conhecida como a relação modular.

□

Por ser antiunitário:

$$JU_\xi J = U_\xi \quad (\text{A.8})$$

Mas isso é o mesmo que:

$$JHJ = -H \Rightarrow J\Delta J = \Delta^{-1} \blacksquare \quad (\text{A.9})$$

Até agora tratou-se muito enfaticamente das representações desse tipo de simetria que deriva diretamente do teorema de Wigner. Vamos transferir a atenção para espaços de Hilbert reais denotados como $\mathcal{H}_\mathbb{R}$.

Essa notação já foi usada anteriormente, mas é interessante desvencilhar, por um momento, o entendimento anterior e considera-la apenas um espaço de Hilbert real, o motivo para reciclar esse símbolo ficará mais claro futuramente.

Defina em $\mathcal{H}_\mathbb{R}$ um operador anti-simétrico C .

$$\langle v, Cw \rangle = -\langle Cv, w \rangle \quad v, w \in \mathcal{H}_\mathbb{R} \quad (\text{A.10})$$

Defina também o subespaço dentro de $\mathcal{H}_\mathbb{C} := \mathcal{H}_\mathbb{R} + i\mathcal{H}_\mathbb{R}$ como sendo: $V_\mathbb{C} := (1 + iC) \mathcal{H}_\mathbb{R}$. Algumas afirmações serão tecidas sobre esses espaços até que se possa entender como isso se relaciona com o início do apêndice.

Proposição: Se C é anti-simétrico em $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$, são equivalentes os pontos (NEEB, 2019):

- $(C^2 + 1)$ é injetivo
- $\|Cv\| \leq \|v\|$ para $v \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$
- $\langle Cv, w \rangle \leq \|v\| \cdot \|w\|$ para $v, w \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$
- $V_{\mathbb{C}} \cap iV_{\mathbb{C}} = \{0\}$
- $(1 \pm iC)$ é injetivo em $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$
- $\overline{V_{\mathbb{C}} + iV_{\mathbb{C}}} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$

□

Injetividade significa dizer que se $(C^2 + 1)v = 0$ então $v = 0$. Junte-se a isso a positividade do operador e o fato de que:

$$\langle (C^2 + 1)v, v \rangle = \|v\|^2 - \|Cv\|^2. \quad (\text{A.11})$$

Ainda pode-se considerar um w tal que $\|w\| \leq 1$ e então $\text{Max} \langle Cw, v \rangle = \|Cv\|$. Esses argumentos justificam a equivalência dos três primeiros pontos. Sobre o quarto ponto, imagine que:

$$(1 + iC)v = i(1 + iC)w \quad \text{ou} \quad (1 + iC)(v + iw) = 0 \therefore$$

$$v = -Cw \quad Cv = w, \quad (\text{A.12})$$

mas isso é o mesmo que dizer: $(1 + C^2)v = 0$ e isso prova o quarto ponto. Para o quinto ponto basta notar que injetividade de $(1 + iC)$ já foi provada e como $(1 + C^2) = (1 + iC)(1 - iC)$ então $(1 - iC)$ também tem que ser injetivo.

O último ponto é uma exigência a respeito de $V_{\mathbb{C}} + iV_{\mathbb{C}} = (1 + iC)\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$. Portanto a injetividade de $(1 + iC)$ garante a densidade desse subespaço.

■

O que mais interessa nessa proposição é que os pontos 4 e 6 estão determinando um subespaço padrão para $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, da forma que foi definida no capítulo 4. Então essas outras afirmações podem ser vistas como propriedades de um subespaço padrão de Hilbert, além de apresentar uma definição alternativa. Nessa nova perspectiva, vetores em $V_{\mathbb{C}}$ são simplesmente aqueles que podem ser escritos como $(1 + iC)v$ com $v \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ e C um operador anti-simétrico.

Recorda-se que operadores modulares são aqueles advindos da decomposição polar de S definido como o operador responsável por induzir a conjugação em álgebras de Von Neumann sobre vetores cíclicos e separáveis.

$$SA\Omega = A^*\Omega. \quad (\text{A.13})$$

No entanto não há qualquer referência a álgebras de Von Neumann nesta parte do trabalho e a ideia é evitar utilizar a linguagem já usada no corpo do texto. Mas o conceito de objetos modulares pode ser definido sem apelar para as álgebras abstratas, apenas definindo pares de operadores respeitando a relação modular:

$$J\Delta J = \Delta^{-1} \quad (\text{A.14})$$

Para J um operador anti-linear, Δ auto-adjunto e positivo definido. Se A for um operador em algum espaço de Hilbert, denotemos $\text{FIX}(A)$, o subconjunto de todos os vetores v tal que $Av = v$, ou seja, o espaço dos vetores fixos com respeito a A .

Mais uma vez, algumas notações serão recicladas aqui, o mesmo aviso se aplica: essa ambiguidade será explicada a posteriori. Assim segue que:

Proposição: Defina $J : a + ib \mapsto a - ib$ onde $a, b \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ e $\Delta^{\frac{1}{2}} := \frac{1-iC}{1+iC}$, eles são objetos modulares de $V_{\mathbb{R}} := (1 + iC) \text{FIX}(J)$ (NEEB, 2019)

□

Para todos os efeitos, Δ é positivo definido pelas últimas propriedades e sobre seu adjunto:

$$\left(\frac{1 - iC}{1 + iC} \right)^* = \frac{1 - iC}{1 + iC}. \quad (\text{A.15})$$

Devido à anti-simetria de C . J é anti-linear por óbvio e avaliando a relação modular, conclui-se que:

$$J \frac{1-iC}{1+iC} = \frac{1+iC}{1-iC} J. \quad (\text{A.16})$$

Tome $\xi = (1+iC)v$, onde $v \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. Pelos argumentos da última proposição, estamos simplesmente falando de um elemento em um subespaço denso de $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. Agora, para provar que esse subespaço é fechado nota-se que:

$$\begin{aligned} J \frac{1-iC}{1+iC} \xi &= J (1-iC) v \\ &= (1+iC) J(v). \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

O que significa que $\xi \in \text{FIX}(J \frac{1-iC}{1+iC}) \Leftrightarrow J(v) = v \quad \therefore \quad \xi \in V_{\mathbb{R}}$ ■

A analogia com o tratamento baseado nas álgebras de Von Neumann não vem da identificação de $J \frac{1-iC}{1+iC} = S$, mas sim com $J \frac{1-iC}{1+iC} = s$ um operador definido como $e^s = S$ no contexto de segunda quantização como em 4.9. Agora começemos a correlacionar os lemas e teoremas iniciais com essas proposições finais do apêndice.

Em um ponto de vista fisicamente motivado, a satisfação do teorema de Wigner leva naturalmente aos operadores modulares sobre um determinado espaço de representações. Para interesses puramente matemáticos é mais razoável partir do estudo de operadores anti-simétricos sobre espaços de Hilbert e achar estruturas que, por acaso, acabam resolvendo os problemas levantados diante do teorema de wigner.

O ponto de interesse dessa divagação é que o espaço $\mathcal{H}$, descrito como o espaço de representação subjacente ao espaço projetivo de Hilbert dos primeiros parágrafos, é entendido como o espaço de Fock, ou ao menso para uma partícula. Aquele posteriormente denotado como $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ só estabelece uma relação com este a partir do momento em que a segunda quantização entra em cena $S = e^s$.

No corpo do texto, o subespaço padrão é descrito apenas vagamente, obedecendo os critérios de formato padrão do vácuo e^0 . Após essas últimas proposições pode-se entender que ele tem uma forma bem clara: $V_{\mathbb{R}} = (1+iC) \text{FIX}(J)$ para C um operador anti-simétrico, inclusive podendo ser representado como um subespaço do domínio do operador J ou como $(1+iC) \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ (note que da forma que foram definidos $V_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{R}}$, mas essa é uma conclusão posterior às proposições).

Então considere esse espaço $V_{\mathbb{R}} = (1 + iC) \text{FIX}(J)$ com todas as suas propriedades, por que seria interessante dar-lhe um nome especial como o de "subespaço padrão"?

Alguém pouco familiarizado com a teoria de Tomita-Takesaki pode estar ciente do primeiro teorema presente no capítulo 4, em que vetores coerentes são descobertos um conjunto total no espaço de Fock. Esse alguém entenderá que operadores de segunda quantização são fundamentais para o entendimento da mecânica quântica:

$$e^A e^h = e^{Ah} e^A e^B = e^{AB} \quad (\text{A.18})$$

Para obedecer o teorema de Wigner será preciso percorrer os teoremas e lemas que desencadeiam a definição do operador modular e recaem sobre a teoria de Tomita-Takesaki, como na equação A.9. No entanto, o interesse deste alguém está voltado sobre os vetores coerentes, e na busca por traduzir todos esses resultados na linguagem desejada acaba-se chegando no conceito de subespaços padrões por meio das proposições e da identificação:

$$e^s = S \quad (\text{A.19})$$

Assim, a abordagem baseada em subespaços padrões não se trata de um mero rebuscamento matemático vazio, e sim uma forma de trazer as consequências do teorema de Wigner para o âmbito dos vetores coerentes

APÊNDICE B – Espaços de Sobolev

A intenção deste apêndice é apresentar o conceito formal de espaços de Sobolev, que comumente são utilizados na física de forma muito particular. Deixa-se aqui registrado que as notações utilizadas neste segmento serão empregadas neste restrito contexto.

Entender-se-á doravante o conceito de funções mensuráveis como sendo sinônimo de Lebesgue-mensuráveis. Para não demorar-se muito nesse ponto, entende-se vagamente funções mensuráveis $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ com $n \in \mathbb{N}$, como sendo um mapeamento passível de integração pela medida $\mu(x)$. Para um conceito mais rigoroso conferir: (KOLMOGOROV, 1960), (ROGERS, 1970) ou uma referência mais recente (SALAMON, 2020).

O conjunto das funções mensuráveis de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}$ será denotada como: $\mathcal{M}^n$ e um subconjunto aberto como $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. O conjunto das Distribuições sobre Ω será representado por $\mathcal{S}'(\Omega)$.

Por questões de conveniência introduza a definição:

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f(x). \quad (\text{B.1})$$

Onde entende-se $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ com a norma: $|\alpha| := \sum_i \alpha_i$. A título de lembrete:

$$\mathcal{L}^p(\Omega) := \left\{ f \in \mathcal{M}^n : \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p d\mu(x) \right]^{\frac{1}{p}} =: \|f\|_p < \infty; \text{supp}(f) \subset \Omega \right\} \quad (\text{B.2})$$

Um detalhe importante de mencionar diz respeito à propriedade de não-degeneração do espaço $\mathcal{L}^p(\Omega)$, pois formalmente esse espaço, com relação a sua norma $\|\cdot\|_p$, não a satisfaz. Porém é comum adotar essa mesma notação para o espaço de suas classes de equivalência, tornando-o não-degenerado, e essa prática será seguida aqui.

Assim, define-se:

$$\mathcal{L}_{loc}^p(\Omega) := \{f \in \mathcal{M}^n : \chi_Q(x)f(x) \in \mathcal{L}^p(\Omega), \forall Q \Subset \Omega\} \quad (\text{B.3})$$

Onde $\chi_Q(x)$ trata-se da função característica de $Q \in \mathbb{R}^n$

$$\chi_Q(x) := \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \notin Q \end{cases}, \quad (\text{B.4})$$

e $Q \Subset \Omega$ significa um subconjunto pré-compacto, ou seja, um aberto em Ω tal que o fecho $\overline{Q} \subset \Omega$ é compacto.

Um importante conceito para espaços de Sobolev é o de derivadas fracas (tradução livre do termo em inglês "weak derivatives"). Seja $f \in \mathcal{L}_{loc}^1(\Omega)$, ela admite uma derivada fraca de ordem $\alpha \in \mathbb{N}^n$ se existir $f_\alpha \in \mathcal{L}_{loc}^1(\Omega)$ tal que:

$$\int_{\Omega} f(x) D^\alpha \phi(x) d\mu(x) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f_\alpha(x) \phi(x) d\mu(x) \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \quad (\text{B.5})$$

Aqui reconheça $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ o conjunto de funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω . Nesse contexto f_α recebe o nome de derivada fraca de f (WEBER, 2018).

Um bom exemplo de derivada fraca não trivial; isso é, uma derivada fraca que não se confunde com uma derivada tradicional; $f(x) = |x|$ no caso $x \in \mathbb{R}$ (KINNUNEN, 2023). Essa função sabidamente não é diferenciável em todo $\mathbb{R}$, porém tem derivada fraca para todo x , pois note:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |x| \frac{d}{dx} \phi(x) d\mu(x) = \\ &= \int_{-\infty}^0 -x \frac{d}{dx} \phi(x) d\mu(x) + \int_0^{\infty} x \frac{d}{dx} \phi(x) d\mu(x) \\ &= \int_{-\infty}^0 \left[\frac{d}{dx} (-x\phi(x)) - \frac{d}{dx} (-x)\phi(x) \right] d\mu(x) + \int_0^{\infty} \left[\frac{d}{dx} (x\phi(x)) - \frac{d}{dx} x\phi(x) \right] d\mu(x) \\ &= -[x\phi(x)]_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 \phi(x) d\mu(x) + [x\phi(x)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \phi(x) d\mu(x) \\ &= - \left[\int_0^{\infty} \phi(x) d\mu(x) - \int_{-\infty}^0 \phi(x) d\mu(x) \right] = (-1)^1 \int_{\Omega} \text{sig}(x) \phi(x) d\mu(x) \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \quad (\text{B.6}) \end{aligned}$$

Na notação introduzida anteriormente isso significa: $(|x|)_{\alpha=1} = \text{sig}(x)$. Segue um importante lema:

Lema: derivadas fracas são únicas quase em todo lugar. (MAZ'JA, 1980)

□

Aqui é importante enfatizar que o termo "quase em todo lugar", ao contrário do que possa parecer, está bem definido matematicamente (tradução livre da expressão inglesa "almost everywhere"). Ele significa que os intervalos no domínio da função correspondente a medida (de Lebesgue) igual a zero são os únicos possíveis de se encontrar diferenças nas derivadas fracas.

A prova segue com o a suposição de haver duas derivadas fracas de alguma ordem: $g(x)$ e $\tilde{g}(x)$ para algum $f(x)$, logo:

$$\int_{\Omega} f(x) D^\alpha \phi(x) d\mu(x) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g(x) \phi(x) d\mu(x) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \tilde{g}(x) \phi(x) d\mu(x) \quad (\text{B.7})$$

Chega-se à conclusão que $\exists \{\varphi_i(x)\} \in \mathcal{C}_0^\infty(Q)$ com $Q \Subset \Omega$ tal que $\lim_i \varphi_i(x) \rightarrow \text{sig}(g(x) - \tilde{g}(x))$ quase em todo lugar. Ou seja:

$$\begin{aligned}
\int_Q (g(x) - \tilde{g}(x)) \lim_i \varphi(x) d\mu(x) &= \int_Q \text{sig}(g(x) - \tilde{g}(x)) (g(x) - \tilde{g}(x)) d\mu(x) \\
&= \int_Q \text{sig}|g(x) - \tilde{g}(x)| d\mu(x) = 0
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Temos então $g(x) = \tilde{g}(x)$ quase em todo lugar em Q , mas isso vale para qualquer $Q \subseteq \Omega$ então dizemos que $g(x) = \tilde{g}(x)$ quase em todo lugar em Ω .

■

Parte da confusão referente a esse tema vem do fato de que existem 3 diferentes espaços que recebem o nome de Sobolev. Primeiramente definimos o **Espaço de Sobolev** propriamente dito:

$$W^{k,p}(\Omega) := \{f \in L^1_{loc}(\Omega) : f_\alpha \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k\} \tag{B.9}$$

Esse espaço pode estar munido de uma norma construída da seguinte forma:

$$\|f\|_{k,p} := \left[\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq k} |f_\alpha|^p d\mu(x) \right]^{\frac{1}{p}}. \tag{B.10}$$

Em termos dessa norma, faz sentido falar em convergência de seqüências e também do fecho com respeito a ela, denotado como $\overline{\mathcal{C}}^{k,p}$ para um determinado conjunto de funções $\mathcal{C}$. Assim, nomeia-se o segundo espaço daqueles 3 a que se referia anteriormente como: **Espaço de Sobolev de suporte compacto**

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}^{k,p}. \tag{B.11}$$

Por fim, recorda-se que todos esses objetos são definidos na classe de equivalência em $\mathcal{L}^p(\Omega)$ que torna esse espaço não degenerado. Denotamos a classe de equivalência referente ao representativo f como sendo $[f]$ e assim o terceiro espaço a que nos referíamos mais cedo recebe o nome de: **Espaços de Sobolev locais**

$$W_{loc}^{k,p}(\Omega) := \{[f] \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega) : \forall Q \subseteq \Omega; [f|_Q] \in W^{k,p}(Q)\}. \tag{B.12}$$

Um entendimento melhor sobre o que são esses Espaços de Sobolev pode ser adquirido com o exemplo anterior explorado anteriormente. No caso da função módulo em $\mathbb{R}$ sabe-se que $|x| \in W^{1,p}(\Omega)$ para algum aberto $\Omega \in \mathbb{R}$, mas agora a pergunta é $|x| \in W^{2,p}(\Omega)$?

$$\nexists g \in \mathcal{L}_{loc}^1(\Omega) \Rightarrow \int_{\Omega} \text{sig}(x) \frac{d}{dx} \phi(x) d\mu(x) = \int_{\Omega} g(x) \phi(x) d\mu(x) \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega). \quad (\text{B.13})$$

Por isso diz-se $|x| \in W^{1,p}(\Omega)$, mas $|x| \notin W^{2,p}(\Omega)$. Entende-se por um espaço reflexivo: $\mathcal{G}^{**} \simeq \mathcal{G}$ onde os asteriscos representam seu dual.

O teorema a baixo pode ser provado basicamente pelo fato de Espaços de Sobolev serem subespaços fechados de um espaço de banach. Segue assim:

Teorema: seja $k \geq 0$ então

1. $W^{k,p}(\Omega)$ é um Espaço de Banach
2. $W^{k,p}(\Omega)$ é separável
3. $W^{k,p}(\Omega)$ é reflexivo ($p \neq 1$)
4. $\mathcal{C}^\infty(\Omega') \subset W^{k,p}(\Omega)$

□

A norma $\|\cdot\|_{k,p}$ torna $W^{k,p}(\Omega)$ um subespaço fechado em $\mathcal{L}^p(\Omega \times \cdots \times \Omega)$. ■

O último ítem do teorema em realidade é mais restrito, onde Ω' quer dizer que funções diferenciáveis em Ω se estendem para $\bar{\Omega}$ que deve ser um domínio de Lipschitz, conceito muito mais sutil do que as pretensões desse pequeno resumo. Para mais detalhes(WEBER, 2018),(KINNUNEN, 2023) e (MAZ'JA, 1980).

O que pode ser interessante notar é a sequência de inclusões $\mathcal{C}^\infty(\Omega') \subset W^{k,p}(\Omega) \subset \mathcal{L}^p(\Omega)$. Tais subespaços são densos em seus respectivos superespaço. De modo resumido, é interessante levar consigo a ideia informal de que Espaços de Sobolev são estruturas intermediárias entre o espaço de funções infinitamente diferenciáveis e p-integráveis.

Essa posição é particularmente vantajosa no tratamento de equações diferenciais pois não é tão restrita pela ∞ -diferenciabilidade ao passo que não abandona as propriedades diferenciais como as funções p-integráveis.

APÊNDICE C – Função de Meijer

Uma ferramenta muito utilizada no corpo do texto é uma classe de funções conhecidas como Funções de Meijer (ERDÉLYI, 1974)(GRADSHTEYN, 2007). Elas podem ser definidas como:

$$G_{l,k}^{n,m} \left[x \middle| \begin{matrix} a_1 \cdots a_l \\ b_1 \cdots b_k \end{matrix} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{[\prod_{i=0}^n \Gamma(b_i - s)] [\prod_{i=0}^m \Gamma(1 - a_i + s)]}{[\prod_{i=n+1}^k \Gamma(1 - b_i + s)] [\prod_{i=m+1}^l \Gamma(a_i - s)]} x^s ds \quad (C.1)$$

Uma atenção especial deve ser dada à curva de integração γ . Como a função $\Gamma(s)$ tem polos em $s = -n$ para $n \in \mathbb{N}$ o grupo de funções gamma no numerador do tipo $\Gamma(b_i - s)$ e aquelas do tipo $\Gamma(1 - a_i + s)$ devem ter um conjunto de polos delimitando duas regiões que não se intersectam.

A curva γ pode então ser definida de três formas diferentes não interferindo no resultado da integração:

1. γ é uma reta vertical no plano complexo indo de $-i\infty$ à $i\infty$
2. γ é um circuito fechado no infinito real do plano complexo, envolvendo todos os polos do grupo de funções $\Gamma(b_i - s)$ e deixando aqueles do grupo de funções $\Gamma(1 - a_i + s)$ de fora
3. γ é um circuito fechado no infinito negativo real do plano complexo, envolvendo todos os polos do grupo de funções $\Gamma(1 - a_i + s)$ e deixando aqueles do grupo de funções $\Gamma(b_i - s)$ de fora

A importância dessa classe de funções fica evidente quando se entende que um universo bem abrangente de funções especiais e seus produtos podem ser representadas nesse formato (BEALS, 2013). Isso é particularmente útil no contexto de mapeamentos que preservam a convolução em um grupo multiplicativo:

$$(f * g)(x) := \int f(y) f(x \cdot y^{-1}) y^{-1} dy. \quad (C.2)$$

Em outras palavras:

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}. \quad (C.3)$$

Naturalmente a transformada de Fourier é o mapeamento mais conhecido para o grupo $(\mathbb{R}, +)$, mas para o grupo $(\mathbb{R}_+, \cdot)$, esse isomorfismo é garantido pela chamada transformada de Mellin:

$$\hat{f}(y) := \int_0^\infty f(x) x^{-y} \frac{dx}{x}. \quad (\text{C.4})$$

Neste apêndice, e somente neste apêndice, o sinal $\hat{f}$ será usado para representar a transformada de Mellin. O inverso desta transformação será denotado pelo mesmo sinal, onde o contexto será suficiente para eliminar qualquer ambiguidade:

$$\hat{\hat{f}}(x) := \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \hat{f}(y) x^y dy = f(x). \quad (\text{C.5})$$

Ainda falando sobre as funções de Meijer, nota-se que ela é dada explicitamente por uma transformada de Mellin (uma transformada inversa, no caso), o que significa:

$$\widehat{G_{l,k}^{n,m}} \left[x \left| \begin{matrix} a_1 \cdots a_l \\ b_1 \cdots b_k \end{matrix} \right. \right] = \frac{[\prod_{i=0}^n \Gamma(b_i - s)] [\prod_{i=0}^m \Gamma(1 - a_i + s)]}{[\prod_{i=n+1}^k \Gamma(1 - b_i + s)] [\prod_{i=m+1}^l \Gamma(a_i - s)]}. \quad (\text{C.6})$$

Ou seja, se $f(x)$ e $g(x)$ forem representadas por funções de Meijer, sua convolução também será, a menos das condições sobre os polos dos Γ 's, pois:

$$\widehat{\widehat{f * g}} = \widehat{\hat{f} \cdot \hat{g}}. \quad (\text{C.7})$$

Para aprofundar o entendimento da importância desse tipo de resultado, pode-se provar que a integração de duas funções como essas é facilmente determinada apenas arranjando seus índices. Essa é a principal estratégia usada nesse trabalho, mas, até lá, uma série de propriedades serão derivadas e usadas para habituar-se à manipulação típica desses objetos. Convencionou-se que $\bar{a}_{m+1,l} = a_{m+1} \cdots a_l$ será representado como uma sequência de comprimento $l - m$ e quando $m = 0$ denota-se apenas $\bar{a}_l$.

Proposição: Quando as funções de Meijer estão bem definidas

$$x^\alpha G_{l,k}^{n,m} \left[x \left| \begin{matrix} \bar{a}_l \\ \bar{b}_k \end{matrix} \right. \right] = G_{l,k}^{n,m} \left[x \left| \begin{matrix} \bar{a}_l + \alpha \\ \bar{b}_k + \alpha \end{matrix} \right. \right]. \quad (\text{C.8})$$

□

Pela simples uso da definição da Função de Meijer e algumas poucas manipulações integrais.

$$\begin{aligned}
x^\alpha G_{l,k}^{n,m} \left[x \left| \begin{matrix} \bar{a}_l \\ \bar{b}_k \end{matrix} \right. \right] &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{[\prod_{i=0}^n \Gamma(b_i - s)] [\prod_{i=0}^m \Gamma(1 - a_i + s)]}{[\prod_{i=n+1}^k \Gamma(1 - b_i + s)] [\prod_{i=m+1}^l \Gamma(a_i - s)]} x^{s+\alpha} ds \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{[\prod_{i=0}^n \Gamma(b_i + \alpha - \sigma)] [\prod_{i=0}^m \Gamma(1 - a_i - \alpha + \sigma)]}{[\prod_{i=n+1}^k \Gamma(1 - b_i - \alpha + \sigma)] [\prod_{i=m+1}^l \Gamma(a_i + \alpha - \sigma)]} x^\sigma d\sigma \\
&= G_{l,k}^{n,m} \left[x \left| \begin{matrix} \bar{a}_l + \alpha \\ \bar{b}_k + \alpha \end{matrix} \right. \right].
\end{aligned} \tag{C.9}$$

■

Então funções de Meijer são mais abrangentes do que polinômios, já que qualquer polinômio também pertence a essa categoria. Também é possível inverter o argumento da função como segue.

Proposição: Quando as funções de Meijer estão bem definidas

$$G_{l,k}^{n,m} \left[x^{-1} \left| \begin{matrix} \bar{a}_l \\ \bar{b}_k \end{matrix} \right. \right] = G_{k,l}^{m,n} \left[x \left| \begin{matrix} 1 - \bar{b}_k \\ 1 - \bar{a}_l \end{matrix} \right. \right]. \tag{C.10}$$

□

Pela definição novamente

$$\begin{aligned}
G_{l,k}^{n,m} \left[x^{-1} \left| \begin{matrix} \bar{a}_l \\ \bar{b}_k \end{matrix} \right. \right] &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{[\prod_{i=0}^n \Gamma(b_i - s)] [\prod_{i=0}^m \Gamma(1 - a_i + s)]}{[\prod_{i=n+1}^k \Gamma(1 - b_i + s)] [\prod_{i=m+1}^l \Gamma(a_i - s)]} x^{-s} ds \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{[\prod_{i=0}^n \Gamma(1 - (b_i + 1) + \sigma)] [\prod_{i=0}^m \Gamma(1 - a_i - \sigma)]}{[\prod_{i=n+1}^k \Gamma(1 - b_i - \sigma)] [\prod_{i=m+1}^l \Gamma(1 - (a_i + 1) + \sigma)]} x^\sigma d\sigma \\
&= G_{k,l}^{m,n} \left[x \left| \begin{matrix} 1 - \bar{b}_k \\ 1 - \bar{a}_l \end{matrix} \right. \right].
\end{aligned} \tag{C.11}$$

Um detalhe importe de mencionar na substituição $\sigma = -s$ é de que ela inverte a orientação de γ . Pelo teorema dos resíduos isso significa que a integração ganha um sinal de menos, mas pela diferenciação $ds = -d\sigma$ esse sinal some. ■

O resultado que torna sua aplicação tão interessante segue agora como já fora citado anteriormente:

Proposição: Quando as funções de Meijer estão bem definidas

$$\int_0^\infty G_{l,k}^{n,m} \left[\alpha x \left| \begin{matrix} \bar{a}_l \\ \bar{b}_k \end{matrix} \right. \right] G_{r,s}^{p,q} \left[\beta x \left| \begin{matrix} \bar{c}_r \\ \bar{d}_s \end{matrix} \right. \right] dx = \frac{1}{\alpha} G_{k+r,l+s}^{m+p,n+q} \left[\frac{\beta}{\alpha} \left| \begin{matrix} -\bar{b}_n, \bar{c}_r, -\bar{b}_{n+1,k} \\ -\bar{a}_m, \bar{d}_s, -\bar{a}_{m+1,l} \end{matrix} \right. \right]. \quad (\text{C.12})$$

□

Começa-se notando que o produto de duas funções de Meijer podem ser escritos como uma convolução (ou quase):

$$\begin{aligned} G_{l,k}^{n,m} \left[\alpha x \left| \begin{matrix} \bar{a}_l \\ \bar{b}_k \end{matrix} \right. \right] G_{r,s}^{p,q} \left[\beta x \left| \begin{matrix} \bar{c}_r \\ \bar{d}_s \end{matrix} \right. \right] &= \alpha x G_{l,k}^{n,m} \left[\alpha x \left| \begin{matrix} \bar{a}_l \\ \bar{b}_k \end{matrix} \right. \right] G_{r,s}^{p,q} \left[\left(\frac{1}{\beta x} \right)^{-1} \left| \begin{matrix} \bar{c}_r \\ \bar{d}_s \end{matrix} \right. \right] \frac{1}{\alpha x} \\ &= G_{l,k}^{n,m} \left[\alpha x \left| \begin{matrix} \bar{a}_l + 1 \\ \bar{b}_k + 1 \end{matrix} \right. \right] G_{s,r}^{q,p} \left[(\beta x)^{-1} \left| \begin{matrix} 1 - \bar{d}_s \\ 1 - \bar{c}_r \end{matrix} \right. \right] \frac{1}{\alpha x}. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

O que falta aqui é integra-lo, isso significa reescrever uma convolução C.3. Então usufrui-se das propriedades que um homomorfismo entres os grupos de funções e $\mathbb{R}_+$ proporciona:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty G_{l,k}^{n,m} \left[\alpha x \left| \begin{matrix} \bar{a}_l \\ \bar{b}_k \end{matrix} \right. \right] G_{r,s}^{p,q} \left[\beta x \left| \begin{matrix} \bar{c}_r \\ \bar{d}_s \end{matrix} \right. \right] dx &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty G_{l,k}^{n,m} \left[(\alpha x) \left| \begin{matrix} \bar{a}_l + 1 \\ \bar{b}_k + 1 \end{matrix} \right. \right] G_{s,r}^{q,p} \left[\frac{\alpha}{\beta} (\alpha x)^{-1} \left| \begin{matrix} 1 - \bar{d}_s \\ 1 - \bar{c}_r \end{matrix} \right. \right] \frac{d(\alpha x)}{(\alpha x)} \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(G_{l,k}^{n,m} \left[- \left| \begin{matrix} \bar{a}_l + 1 \\ \bar{b}_k + 1 \end{matrix} \right. \right] * G_{s,r}^{q,p} \left[- \left| \begin{matrix} 1 - \bar{d}_s \\ 1 - \bar{c}_r \end{matrix} \right. \right] \right) \left(\frac{\alpha}{\beta} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Eis aqui a vantagem das transformações de Mellin, pois pela observação em C.7, a integral pode ser reduzida a:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty G_{l,k}^{n,m} \left[\alpha x \left| \begin{matrix} \bar{a}_l \\ \bar{b}_k \end{matrix} \right. \right] G_{r,s}^{p,q} \left[\beta x \left| \begin{matrix} \bar{c}_r \\ \bar{d}_s \end{matrix} \right. \right] dx &= \frac{1}{\alpha} \left(\widehat{G_{l,k}^{n,m} \left[- \left| \begin{matrix} \bar{a}_l + 1 \\ \bar{b}_k + 1 \end{matrix} \right. \right]} \cdot \widehat{G_{s,r}^{q,p} \left[- \left| \begin{matrix} 1 - \bar{d}_s \\ 1 - \bar{c}_r \end{matrix} \right. \right]} \right) \left(\frac{\alpha}{\beta} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Como já foi mencionado em C.6, as funções de Meijer já são explicitamente transformadas de Mellin, o que simplifica os desenvolvimentos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty G_{l,k}^{n,m} \left[\alpha x \left| \begin{matrix} \bar{a}_l \\ \bar{b}_k \end{matrix} \right. \right] G_{r,s}^{p,q} \left[\beta x \left| \begin{matrix} \bar{c}_r \\ \bar{d}_s \end{matrix} \right. \right] dx = \\
= \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \frac{\prod_{i=0}^n \Gamma(1+b_i-\sigma) \prod_{i=0}^m \Gamma(-a_i+\sigma)}{\prod_{i=n+1}^k \Gamma(-b_i+\sigma) \prod_{i=m+1}^l \Gamma(1+a_i-\sigma)} \times \\
\times \frac{1}{2\pi i} \frac{\prod_{i=0}^q \Gamma(1-c_i-\sigma) \prod_{i=0}^p \Gamma(d_i+\sigma)}{\prod_{i=q+1}^r \Gamma(c_i+\sigma) \prod_{i=p+1}^s \Gamma(1-d_i-\sigma)} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^\sigma d\sigma. \quad (C.16)
\end{aligned}$$

Agora basta conferir corretamente os índices e comparar com a definição da função para concluir que:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty G_{l,k}^{n,m} \left[\alpha x \left| \begin{matrix} \bar{a}_l \\ \bar{b}_k \end{matrix} \right. \right] G_{r,s}^{p,q} \left[\beta x \left| \begin{matrix} \bar{c}_r \\ \bar{d}_s \end{matrix} \right. \right] dx &= \frac{1}{\alpha} G_{l+s,k+r}^{m+q,m+p} \left[\frac{\alpha}{\beta} \left| \begin{matrix} \bar{a}_m+1, 1-\bar{d}_s, \bar{a}_{m+1,l}+1 \\ \bar{b}_n+1, 1-\bar{c}_r, \bar{b}_{n+1,k}+1 \end{matrix} \right. \right] \\
&= \frac{1}{\alpha} G_{k+r,l+s}^{m+p,n+q} \left[\frac{\beta}{\alpha} \left| \begin{matrix} -\bar{b}_n, \bar{c}_r, -\bar{b}_{n+1,k} \\ -\bar{a}_m, \bar{d}_s, -\bar{a}_{m+1,l} \end{matrix} \right. \right]. \quad (C.17)
\end{aligned}$$

A ultima proposição foi usada para inverter o argumento e deixar no formato apresentado no enunciado. ■

As proposições à cima são muito importantes para integração das funções de Meijer, resta mostrar como várias funções conhecidas podem ser representadas nessa forma.

Proposição: Para $\alpha < 0$ tem-se

$$(p^2 + m^2)^{\frac{\alpha}{2}} = \frac{m^\alpha}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})} G_{1,1}^{1,1} \left[\frac{p^2}{m^2} \left| \begin{matrix} 1 + \frac{\alpha}{2} \\ 0 \end{matrix} \right. \right]. \quad (C.18)$$

□

A estratégia é expandir a potência em termos do teorema binomial e encontrar a integração que resultará na série desejada. Para isso é preciso considerar dois regimes, aquele em que $p > m$ e aquele em que $p < m$. Começemos pela situação em que p é menor do que m :

$$\begin{aligned}
(p^2 + m^2)^{\frac{\alpha}{2}} &= m^\alpha \left(\frac{p^2}{m^2} + 1 \right)^{\frac{\alpha}{2}} \\
&= m^\alpha \sum_n^{\infty} \frac{\left(\frac{\alpha}{2} \right)_n}{n!} \left(\frac{p^2}{m^2} \right)^n
\end{aligned} \quad (C.19)$$

Destaca-se aqui a presença do símbolo de Pochhammer que pode ser definido como:

$$(\alpha)_n = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1) = \binom{\alpha}{n} n! \quad (\text{C.20})$$

Para simplificar as notações adotemos $\frac{p^2}{m^2} = x$ e substitui-se ao final.

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)_n}{n!} x^n &= \sum_n \frac{\frac{\alpha}{2} \cdots \left(\frac{\alpha}{2} - n + 1\right)}{n!} x^n \\ &= \sum_n \frac{\frac{-\alpha}{2} \cdots \left(\frac{-\alpha}{2} + n - 1\right)}{n!} (-1)^n x^n \\ &= \sum_n \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\left(n - \frac{\alpha}{2} - 1\right) \cdot \left(n - \frac{\alpha}{2} - 2\right) \cdots}{\left(-\frac{\alpha}{2} - 1\right) \cdot \left(-\frac{\alpha}{2} - 2\right) \cdots} x^n = \sum_n \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2} + n\right)}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)} x^n \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Sabendo que $\frac{(-1)^n}{n!}$ são os resíduos de $\Gamma(s)$ para os polos $s = -n$ então é possível reescrever o teorema binomial como uma soma de resíduos de $\Gamma(s)$.

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)_n}{n!} x^n &= \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \Gamma(s) \Gamma\left(-\frac{\alpha}{2} - s\right) x^{-s} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)} G_{1,1}^{1,1} \left[x^{-1} \middle| \begin{matrix} 1 \\ -\frac{\alpha}{2} \end{matrix} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Por fim, ajustam-se os índices com as proposições passadas.

$$\frac{m^\alpha}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)} G_{1,1}^{1,1} \left[x^{-1} \middle| \begin{matrix} 1 \\ -\frac{\alpha}{2} \end{matrix} \right] = \frac{m^\alpha}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)} G_{1,1}^{1,1} \left[x \middle| \begin{matrix} 1 + \frac{\alpha}{2} \\ 0 \end{matrix} \right]. \quad (\text{C.23})$$

Naturalmente é preciso fazer a mesma expansão para valores de $p > m$ que terá cálculos muito similares. Ao em vez disso, far-se-á a avaliação da função de Meijer considerando os polos da função gama que ficam à esquerda, assim aplicando o teorema do resíduo a eles teremos o outro regime.

$$\begin{aligned} \frac{m^\alpha}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)} G_{1,1}^{1,1} \left[x \middle| \begin{matrix} 1 + \frac{\alpha}{2} \\ 0 \end{matrix} \right] &= \frac{m^\alpha}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \Gamma\left(-\frac{\alpha}{2} + s\right) \Gamma(-s) x^s ds \\ &= \frac{m^\alpha}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)} \sum_n \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma\left(n - \frac{\alpha}{2}\right) x^{-n + \frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{m^\alpha}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)} \sum_n \frac{(-1)^n}{n!} \left(n - \frac{\alpha}{2} - 1\right) \cdot \left(n - \frac{\alpha}{2} - 2\right) \cdots \left(\frac{-\alpha}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right) x^{-n + \frac{\alpha}{2}} \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

Agrupando os produtos, cada um para um sinal negativo, os símbolos de Pochhammer podem ser identificados e o teorema binomial aplicado.

$$\begin{aligned} \frac{m^\alpha}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})} G_{1,1}^{1,1} \left[x \middle| 1 + \frac{\alpha}{2} \right] &= m^\alpha x^{\frac{\alpha}{2}} \sum_n \frac{1}{n!} \frac{\alpha}{2} \cdots \left(\frac{\alpha}{2} - n + 1 \right) x^{-n} \\ &= m^\alpha x^{\frac{\alpha}{2}} \sum_n \frac{\left(\frac{\alpha}{2} \right)_n}{n!} x^{-n} = m^\alpha x^{\frac{\alpha}{2}} (x^{-1} + 1)^{\frac{\alpha}{2}} \end{aligned} \quad (C.25)$$

Um detalhe deve ser ressaltado, como esperado o teorema binomial deve ser aplicado apenas no caso em que $x^{-1} = \frac{m^2}{p^2} < 1$ e portanto $p > m$:

$$\frac{m^\alpha}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})} G_{1,1}^{1,1} \left[x \middle| 1 + \frac{\alpha}{2} \right] = m^\alpha (1 + x)^{\frac{\alpha}{2}} = (m^2 + p^2)^{\frac{\alpha}{2}}. \quad (C.26)$$

Sobre a exigência $\alpha < 0$, nota-se que as duas funções gama na integral teriam curvas que fecham seus polos intersectantes se $\alpha \geq 0$ ■

Esse resultado deve ser entendido em um espectro mais amplo, pois é possível representar outras funções usando as proposições passadas como:

$$\begin{aligned} p^\beta (m^2 + p^2)^{\frac{\alpha}{2}} &= p^\beta \frac{m^\alpha}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})} G_{1,1}^{1,1} \left[\frac{p^2}{m^2} \middle| 1 + \frac{\alpha}{2} \right] \\ &= \frac{m^{\alpha+\beta}}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})} \left(\frac{p^2}{m^2} \right)^{\frac{\beta}{2}} G_{1,1}^{1,1} \left[\frac{p^2}{m^2} \middle| 1 + \frac{\alpha}{2} \right] \\ &= \frac{m^{\alpha+\beta}}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})} G_{1,1}^{1,1} \left[\frac{p^2}{m^2} \middle| 1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right]. \end{aligned} \quad (C.27)$$

Um dos principais resultados desse trabalho está relacionado com a determinação da representação em termos de uma função de Meijer de uma função específica. Um pouco mais sobre isso será dito após a proposição:

Proposição: Se $|\arg z| < \pi$ e $\alpha > -1$ então:

$$z^{\beta-\frac{1}{2}} [(z+1)^{-\alpha} - z^{-\alpha}] = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} G_{2,2}^{2,1} \left[z \middle| \begin{matrix} \beta - \alpha - \frac{1}{2}, \beta - \alpha + \frac{1}{2} \\ \beta - \frac{1}{2}, \beta - \alpha - \frac{1}{2} \end{matrix} \right]. \quad (C.28)$$

□

Pelos índices superiores, sabe-se que há dois conjuntos de polos à direita e um à esquerda. Faça-se o seguinte: integre primeiro os polos da esquerda e depois os da direita.

$$\begin{aligned}
& G_{2,2}^{2,1} \left[z \left| \begin{matrix} \beta - \alpha - \frac{1}{2}, \beta - \alpha + \frac{1}{2} \\ \beta - \frac{1}{2}, \beta - \alpha - \frac{1}{2} \end{matrix} \right. \right] \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Gamma(\beta - \frac{1}{2} - s) \Gamma(\beta - \alpha - \frac{1}{2} - s) \Gamma(1 - \beta + \alpha + \frac{1}{2} + s)}{\Gamma(\beta - \alpha + \frac{1}{2} - s)} z^s ds \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(\beta - \frac{1}{2} - (-n - \frac{3}{2} + \beta - \alpha)) \Gamma(\beta - \alpha - \frac{1}{2} - (-n - \frac{3}{2} + \beta - \alpha))}{\Gamma(\beta - \alpha + \frac{1}{2} - (-n - \frac{3}{2} + \beta - \alpha))} z^{(-n - \frac{3}{2} + \beta - \alpha)} \\
&= z^{(\beta - \frac{1}{2} - \alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(1 + \alpha + n) \Gamma(1 + n)}{\Gamma(2 + n)} z^{-(n+1)} \\
&= z^{(\beta - \frac{1}{2} - \alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(\alpha + n) \cdot (\alpha + n - 1) \cdots \alpha \Gamma(\alpha)}{(1 + n)} z^{-(n+1)} \\
&= -z^{(\beta - \frac{1}{2} - \alpha)} \Gamma(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha) \cdot (-\alpha - 1) \cdots (-\alpha - n)}{(n + 1)!} z^{-(n+1)} \\
&= -z^{(\beta - \frac{1}{2} - \alpha)} \Gamma(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_{n+1}}{(n + 1)!} z^{-(n+1)} \\
&= -z^{(\beta - \frac{1}{2} - \alpha)} \Gamma(\alpha) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_n}{n!} z^{-n} - 1 \right] \\
&= -z^{(\beta - \frac{1}{2} - \alpha)} \Gamma(\alpha) \left[(1 + z^{-1})^{-\alpha} - 1 \right] \\
&= -\Gamma(\alpha) z^{(\beta - \frac{1}{2})} [(z + 1)^{-\alpha} - z^{-\alpha}]
\end{aligned} \tag{C.29}$$

Um comentário que deve ser feito sobre esse desenvolvimento é que o teorema binomial só pode ser aplicado para o caso $z^{-1} < 1$. Isso não é um problema, pois integrando sobre os outros polos encontramos o caso oposto:

$$\begin{aligned}
& G_{2,2}^{2,1} \left[z \left| \begin{matrix} \beta - \alpha - \frac{1}{2}, \beta - \alpha + \frac{1}{2} \\ \beta - \frac{1}{2}, \beta - \alpha - \frac{1}{2} \end{matrix} \right. \right] \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Gamma(\beta - \frac{1}{2} - s) \Gamma(\beta - \alpha - \frac{1}{2} - s) \Gamma(1 - \beta + \alpha + \frac{1}{2} + s)}{\Gamma(\beta - \alpha + \frac{1}{2} - s)} z^s ds
\end{aligned} \tag{C.30}$$

Como a integração envolve os polos à direita, que constituem dois conjuntos, separemos a soma dos resíduos.

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma\left(\beta - \alpha - \frac{1}{2} - \left(n - \frac{1}{2} + \beta\right)\right) \Gamma\left(1 - \beta + \alpha + \frac{1}{2} + \left(n - \frac{1}{2} + \beta\right)\right)}{\Gamma\left(\beta - \alpha + \frac{1}{2} - \left(n - \frac{1}{2} + \beta\right)\right)} z^{(n-\frac{1}{2}+\beta)} + \\
& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma\left(\beta - \frac{1}{2} - \left(n + \beta - \alpha - \frac{1}{2}\right)\right) \Gamma\left(1 - \beta + \alpha + \frac{1}{2} + \left(n + \beta - \alpha - \frac{1}{2}\right)\right)}{\Gamma\left(\beta - \alpha + \frac{1}{2} - \left(n + \beta - \alpha - \frac{1}{2}\right)\right)} z^{(n+\beta-\alpha-\frac{1}{2})}
\end{aligned} \tag{C.31}$$

Cada somatório é referente aos resíduos de uma das duas funções gama em questão. Juntando os termos, a função de Meijer em questão será:

$$\begin{aligned}
& z^{\beta-\frac{1}{2}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(-\alpha - n) \Gamma(1 + \alpha + n)}{\Gamma(1 - \alpha - n)} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(-n + \alpha) \Gamma(1 + n)}{\Gamma(1 - n)} z^{(n-\alpha)} \right] \\
& = z^{\beta-\frac{1}{2}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(1 + \alpha + n)}{(-\alpha - n)} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(-n + \alpha) \Gamma(1 + n)}{\Gamma(1 - n)} z^{(n-\alpha)} \right] \\
& = z^{\beta-\frac{1}{2}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(\alpha + n) \cdot (\alpha + n - 1) \cdots \alpha \Gamma(\alpha)}{(-\alpha - n)} z^n + \Gamma(\alpha) z^{-\alpha} \right]
\end{aligned} \tag{C.32}$$

Aqui usou-se o fato de que os polos da função gama estão localizados nos inteiros negativos, assim sendo, o inverso gama se anula nesses pontos. No caso do segundo somatório, a função gama no denominador gerará valores nulos para todos os índices de n , exceto $n = 0$ e isso trunca a série.

$$\begin{aligned}
& z^{\beta-\frac{1}{2}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(\alpha + n) \cdot (\alpha + n - 1) \cdots \alpha \Gamma(\alpha)}{(-\alpha - n)} z^n + \Gamma(\alpha) z^{-\alpha} \right] \\
& = \Gamma(\alpha) z^{\beta-\frac{1}{2}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha) \cdot (-\alpha - 1) \cdots (-\alpha - n + 1)}{n!} \frac{(\alpha + n)}{(-\alpha - n)} z^n + z^{-\alpha} \right] \\
& = \Gamma(\alpha) z^{\beta-\frac{1}{2}} \left[- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_n}{n!} z^n + z^{-\alpha} \right] \\
& = - \Gamma(\alpha) z^{\beta-\frac{1}{2}} \left[(1 + z)^{-\alpha} - z^{-\alpha} \right]
\end{aligned} \tag{C.33}$$

Observa-se novamente a aplicação do teorema binomial, mas desta vez com $z < 1$ cobrindo os casos faltantes. ■

A relevância desta representação em específico se revela, ao menos para esse trabalho, na medida em que se trata de um caso geral para os cálculos do operador investigado no corpo do texto. Mais especificamente refere-se à:

$$z^{\beta-\frac{1}{2}} [(z+1)^{-\alpha} - z^{-\alpha}] \propto \left[\left(\frac{p^2 + m^2}{p^2} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right] p^{-1} \quad (\text{C.34})$$

quando $\Re(z) = \frac{p^2}{m^2}$ e $\beta = \alpha = -\frac{1}{4}$.

As funções trigonométricas também são muito importantes para os desenvolvimentos dos cálculos feitos ao longo do estudo. Por isso será explanado também a forma de obter suas representações em termos de funções de Meijer:

Proposição:

$$\sin(x) = \sqrt{\pi} G_{0,2}^{1,0} \left[\frac{x^2}{4} \middle| \begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \right]_{\frac{1}{2}, 0} \quad \cos(x) = \sqrt{\pi} G_{0,2}^{1,0} \left[\frac{x^2}{4} \middle| \begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \right]_{0, \frac{1}{2}}. \quad (\text{C.35})$$

□

A simples expansão em série de potências de Taylor das funções pode revelar o que se deseja, a começar pelo seno:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sum_n^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= \sum_n^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(2n+2)} x^{2n+1} \\ &= \sum_n^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1} \sqrt{\pi^{-1}} \Gamma(n+1) \Gamma(n+\frac{3}{2})} x^{2n+1} \end{aligned} \quad (\text{C.36})$$

A fórmula de duplicação de Legendre foi utilizada nessa última linha, uma forma particular do teorema da multiplicação: $\Gamma(2n+2) = 2^{2n+1} \sqrt{\pi^{-1}} \Gamma(n+1) \Gamma(n+\frac{3}{2})$ (GRADSHTEYN, 2007)

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sqrt{\pi} \sum_n^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(\frac{3}{2}+s)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+1} ds \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{\Gamma(1+s)} \left(\frac{x^2}{4}\right)^s ds \\ &= \sqrt{\pi} G_{0,2}^{1,0} \left[\frac{x^2}{4} \middle| \begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \right]_{\frac{1}{2}, 0}. \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

O mesmo processo é feito para o cosseno.

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \sum_n^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \\
&= \sum_n^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(2n+1)} x^{2n} \\
&= \sum_n^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} \sqrt{\pi^{-1}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma(n+1)} x^{2n}.
\end{aligned} \tag{C.38}$$

A fórmula de Legendre assumiu a forma: $\Gamma(2n+1) = 2^{2n} \sqrt{\pi^{-1}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma(n+1)$.
Segue-se que:

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \sqrt{\pi} \sum_n^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x^2}{4}\right)^n \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x^2}{4}\right)^s \\
&= \sqrt{\pi} G_{0,2}^{1,0} \left[\frac{x^2}{4} \middle| - - \right]_{0, \frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{C.39}$$

■

Algumas outras funções transcendentais podem ser representadas como funções de Meijer, entre as mais tradicionais estão as Funções de Bessel. Uma breve recordação: elas são soluções das equações diferenciais de segunda ordem conhecidas como equações de Bessel

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right) \right] F_{\alpha}(x) = 0. \tag{C.40}$$

Como uma equação de segunda ordem, existem duas soluções ortogonais, essas são as funções de Bessel de primeira espécie, $J_{\alpha}(x)$ e as funções de Bessel de segunda espécie, $Y_{\alpha}(x)$. A sua representação em termos de funções de Meijer vem na forma da proposição:

Proposição:

$$J_{\alpha}(x) = G_{0,2}^{1,0} \left[\frac{x^2}{4} \middle| - - \right]_{\frac{1}{2}\alpha, -\frac{1}{2}\alpha} \quad Y_{\alpha}(x) = G_{1,3}^{2,0} \left[\frac{x^2}{4} \middle| -\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2} \right]_{-\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\alpha, -\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}}. \tag{C.41}$$

□

A avaliação direta dessas funções leva ao resultado:

$$\begin{aligned}
G_{0,2}^{1,0} \left[\frac{x^2}{4} \middle| \begin{matrix} - \\ \frac{1}{2}\alpha, -\frac{1}{2}\alpha \end{matrix} \right] &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}\alpha - s)}{\Gamma(1 + \frac{1}{2}\alpha + s)} \left(\frac{x^2}{4}\right)^s ds \\
&= \sum_n^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha + n)} \left(\frac{x^2}{4}\right)^{n+\frac{\alpha}{2}}.
\end{aligned} \tag{C.42}$$

Mas essa é exatamente a definição da função de Bessel de primeira espécie em termos de séries de potência. O mesmo processo é usado para a função de segunda espécie:

$$\begin{aligned}
G_{1,3}^{2,0} \left[\frac{x^2}{4} \middle| \begin{matrix} -\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\alpha, -\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2} \end{matrix} \right] &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}\alpha - s) \Gamma(-\frac{1}{2}\alpha - s)}{\Gamma(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha - s) \Gamma(1 - (-\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}) + s)} \left(\frac{x^2}{4}\right)^s ds \\
&= \sum_n^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(\alpha - n)}{\Gamma(-\frac{1}{2} - n) \Gamma(\frac{3}{2} + n)} \left(\frac{x^2}{4}\right)^{n-\frac{\alpha}{2}} + \\
&\quad + \sum_n^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(-\alpha - n)}{\Gamma(-\alpha - \frac{1}{2} - n) \Gamma(\frac{3}{2} + \alpha + n)} \left(\frac{x^2}{4}\right)^{n+\frac{\alpha}{2}}.
\end{aligned}$$

Avalia-se somente o primeiro somatório no momento. Com o auxílio das propriedades da função gama como([GRADSHTEYN, 2007](#)):

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha\right) &= \frac{\pi}{\cos(\pi\alpha)} \\
\Gamma(\alpha) \Gamma(1 - \alpha) &= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)},
\end{aligned} \tag{C.43}$$

nota-se que:

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha - n) \Gamma(1 - \alpha + n) &= \frac{\Gamma(\alpha)}{(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n)} \Gamma(1 - \alpha) \cdot (-\alpha + 1) \cdots (-\alpha + n) \\
&= \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(1 - \alpha)}{(-1)^n} \\
&= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \cdot \frac{-1}{\cos(\pi(1 + n))} \\
&= \frac{-\Gamma(-\frac{1}{2} - n) \Gamma(\frac{3}{2} + n)}{\sin(\pi\alpha)}.
\end{aligned} \tag{C.44}$$

Usando no somatório supracitado chega-se em:

$$\begin{aligned}
&\sum_n^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(\alpha - n)}{\Gamma(-\frac{1}{2} - n) \Gamma(\frac{3}{2} + n)} \left(\frac{x^2}{4}\right)^{n-\frac{\alpha}{2}} \\
&= \sum_n^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha + n)} \left(\frac{x^2}{4}\right)^{n-\frac{\alpha}{2}} \right] \frac{\Gamma(\alpha - n) \Gamma(1 - \alpha + n)}{\Gamma(-\frac{1}{2} - n) \Gamma(\frac{3}{2} + n)} \\
&= \frac{-1}{\sin(\pi\alpha)} J_{-\alpha}(x).
\end{aligned} \tag{C.45}$$

Algo muito semelhante é feito com o somatório restante:

$$\begin{aligned}
 & \sum_n^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(-\alpha - n)}{\Gamma(-\alpha - \frac{1}{2} - n) \Gamma(\frac{3}{2} + \alpha + n)} \left(\frac{x^2}{4}\right)^{n+\frac{\alpha}{2}} \\
 &= \sum_n^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha + n)} \left(\frac{x^2}{4}\right)^{n+\frac{\alpha}{2}} \right] \frac{\Gamma(-\alpha - n) \Gamma(1 + \alpha + n)}{\Gamma(-\alpha - \frac{1}{2} - n) \Gamma(\frac{3}{2} + \alpha + n)} \\
 &= \sum_n^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha + n)} \left(\frac{x^2}{4}\right)^{n+\frac{\alpha}{2}} \right] \frac{\cos[\pi(1 + n + \alpha)]}{\pi} (-1)^{n+1} \Gamma(\alpha) \Gamma(1 - \alpha) \\
 &= \frac{\cos(\alpha\pi)}{\sin(\alpha\pi)} J_{\alpha}(x)
 \end{aligned} \tag{C.46}$$

Agora basta unir os dois somatórios que compõem essa proposição para finalmente:

$$G_{1,3}^{2,0} \left[\frac{x^2}{4} \middle| \begin{matrix} -\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\alpha, -\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2} \end{matrix} \right] = \frac{1}{\sin(\pi\alpha)} [\cos(\pi\alpha) J_{\alpha}(x) - J_{-\alpha}(x)]. \tag{C.47}$$

Chegou-se então na definição da função de Bessel de segunda espécie ■

Em se tratando das funções modificadas de Bessel, pela definição:

$$\begin{aligned}
 I_{\alpha}(x) &= e^{-\frac{\pi}{2}\alpha i} J_{\alpha}(e^{\frac{\pi}{2}i}x) \\
 K_{\alpha}(x) &= \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\alpha}(x) - I_{\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}
 \end{aligned} \tag{C.48}$$

Talvez a forma mais conveniente de representar a função modificada de Bessel de primeira espécie seria usando sua representação em série de potências.

$$I_{\alpha}(x) = \sum_n^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha + n)} \left(\frac{x^2}{4}\right)^{n+\frac{1}{2}\alpha}. \tag{C.49}$$

Assim, um cálculo muito semelhante aos anteriores pode ser desenvolvido na tentativa de representa-lo em termos de funções de Meijer:

$$\begin{aligned}
& \sum_n \frac{1}{n!} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha+n)} \left(\frac{x^2}{4}\right)^{n+\frac{1}{2}\alpha} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_n \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(-1)^n}{(\alpha+n)\cdots(\alpha+1)} \left(\frac{x^2}{4}\right)^{n+\frac{1}{2}\alpha} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha)} \sum_n \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma(-\alpha-n) \left(\frac{x^2}{4}\right)^{n+\frac{1}{2}\alpha} \\
&= \frac{\sin(-\alpha\pi)}{\pi} \sum_n \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma(-\alpha-n) \left(\frac{x^2}{4}\right)^{n+\frac{1}{2}\alpha}. \tag{C.50}
\end{aligned}$$

Naturalmente a forma sugerida para essa função seria como:

$$-\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \Gamma\left(\frac{1}{2}\alpha - s\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2}\alpha - s\right) \left(\frac{x^2}{4}\right)^s ds \tag{C.51}$$

Porém o caminho γ capaz de gerar $I_{\alpha}(x)$ na integração não caracteriza uma função de Meijer, isso porque ele não inclui todos os polos à direita para os gamas. No entanto, ao olhar a definição das funções modificadas é possível concluir algo sobre a função de segunda espécie:

Proposição:

$$K_{\alpha}(x) = \frac{1}{2} G_{0,2}^{2,0} \left[\frac{x^2}{4} \middle| \frac{1}{2}\alpha, -\frac{1}{2}\alpha \right]. \tag{C.52}$$

□

A primeira coisa a se notar é que a proposição versa sobre a integração de C.51 adotando o caminho γ da forma definida para estabelecer uma função de Meijer (envolvendo todos os polos do integrando). A segunda é que se a definição de $I_{\alpha}(x)$ envolve a metade dos polos desse γ então $I_{-\alpha}(x)$ envolve os outros, devido a assimetria nos argumentos dos gamas.

Resta acertar o sinal de α no seno, assim sendo, é possível escrever $K_{\alpha}(x)$ usando a paridade de $\sin(\pi\alpha)$ e trocando o sinal de alfa.

$$\begin{aligned}
& -\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \Gamma\left(\frac{1}{2}\alpha - s\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2}\alpha - s\right) x^s ds \\
& - \frac{\sin(-\alpha\pi)}{\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\alpha - s\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2}\alpha - s\right) x^s ds = I_{-\alpha}(x) - I_{\alpha}(x)
\end{aligned}$$

Aqui γ_1 representa os polos do primeiro gama e γ_2 os polos do segundo. Como observado, a diferença entre os dois termos é o sinal de α , ou seja:

$$\begin{aligned}
2K_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \Gamma\left(\frac{1}{2}\alpha - s\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2}\alpha - s\right) x^s ds \\
+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\alpha - s\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2}\alpha - s\right) x^s ds.
\end{aligned} \quad (C.53)$$

Mas essa é exatamente o que diz a proposição. ■

Mais alguns fatos sobre as Funções de Meijer parecem relevantes de serem mencionados. A começar sobre um óbvio, mas deve ser pontuado. Os índices referentes ao mesmo grupo de funções gama são comutativos, gerando a mesma representação.

Para além disso, elas não são unicamente determinadas, isso é, pode existir mais de uma representação para a mesma função. Isso acontece, dentre outros motivos, porque sempre é possível acrescentar uma função gama à integração se sua inversa for igualmente considerada.

Esse fenômeno leva a uma forma de otimização de índices, anulando gamas em excesso desnecessariamente. Tomando um exemplo:

$$\begin{aligned}
G_{2,2}^{2,1} \left[x \middle| 1 + \frac{\alpha}{2}, a \right]_{0, a} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(a-s)\Gamma(\frac{\alpha}{2}+s)}{\Gamma(a-s)} x^s ds \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \Gamma(-s)\Gamma(\frac{\alpha}{2}+s) x^s ds = G_{1,1}^{1,1} \left[x \middle| 1 + \frac{\alpha}{2} \right]_0.
\end{aligned} \quad (C.54)$$

Uma forma de produzir outras representações de uma já conhecida é usando a propriedade fatorial das funções gama. Ao multiplicar uma Função de Meijer por um termo: $(b-a)$ ele pode ser entendido também como $(b+s-a-s)$ ou afins, em que "s" é a variável de integração. Assim algumas funções gama podem ser simplificadas se os termos escolhidos forem compatíveis. A título de exemplo tem-se:

$$\begin{aligned}
(b-a)G_{2,2}^{2,1} \left[x \middle| a, b \right]_{c, d} \\
= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} [(1-a+s) + (b-s-1)] \frac{\Gamma(c-s)\Gamma(d-s)\Gamma(1-a+s)}{\Gamma(b-s)} x^s ds
\end{aligned} \quad (C.55)$$

Separando-se os termos em dois casos convenientes para a aplicação das propriedades das funções gama:

$$\begin{aligned}
(b-a)G_{2,2}^{2,1} \left[x \middle| \begin{matrix} a, b \\ c, d \end{matrix} \right] &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Gamma(c-s)\Gamma(d-s) [(1-a+s)\Gamma(1-a+s)]}{\Gamma(b-s)} x^s ds \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (b-s-1) \frac{\Gamma(c-s)\Gamma(d-s)\Gamma(1-a+s)}{(b-s-1)\Gamma(b-s-1)} x^s ds \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Gamma(c-s)\Gamma(d-s)\Gamma(-a+s)}{\Gamma(b-s)} x^s ds \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Gamma(c-s)\Gamma(d-s)\Gamma(1-a+s)}{\Gamma(b-s-1)} x^s ds \\
&= G_{2,2}^{2,1} \left[x \middle| \begin{matrix} a-1, b \\ c, d \end{matrix} \right] + G_{2,2}^{2,1} \left[x \middle| \begin{matrix} a, b-1 \\ c, d \end{matrix} \right]. \tag{C.56}
\end{aligned}$$

Ou ainda:

$$\begin{aligned}
(c-a+1)G_{2,2}^{2,1} \left[x \middle| \begin{matrix} a, b \\ c, d \end{matrix} \right] &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} [(1-a+s) + (c-s)] \frac{\Gamma(c-s)\Gamma(d-s)\Gamma(1-a+s)}{\Gamma(b-s)} x^s ds \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Gamma(c-s)\Gamma(d-s) [(1-a+s)\Gamma(1-a+s)]}{\Gamma(b-s)} x^s ds \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{[(c-s)\Gamma(c-s)] \Gamma(d-s)\Gamma(1-a+s)}{(b-s-1)\Gamma(b-s-1)} x^s ds \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Gamma(c-s)\Gamma(d-s)\Gamma(-a+s)}{\Gamma(b-s)} x^s ds \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Gamma(c+1-s)\Gamma(d-s)\Gamma(1-a+s)}{\Gamma(b-s-1)} x^s ds \\
&= G_{2,2}^{2,1} \left[x \middle| \begin{matrix} a-1, b \\ c, d \end{matrix} \right] + G_{2,2}^{2,1} \left[x \middle| \begin{matrix} a, b \\ c+1, d \end{matrix} \right]. \tag{C.57}
\end{aligned}$$

Em termos práticos, esses desenvolvimentos são bastante relevantes no cálculo de operadores em espaços de funções. Isso porque para $f \in L(\mathbb{R}^n)$, um operador " A " atua sobre " f " de diversos modos, mas sempre pode ser posto na forma:

$$[Af](x) = \int A(x-x')f(x')d^n x' = (A \circ f)(x). \tag{C.58}$$

A diferença deve ser pontuada, " A " no lado direito da equação é um operador em $L(\mathbb{R}^n)$ ao passo que os outros " $A(x)$ " são funções. Funções " $A(x)$ " são conhecidas como o núcleo integral do operador " A " e sua determinação implica o conhecimento total do operador.

Essa é a principal aplicação das Funções de Meijer neste trabalho, pois usando as regras de integração juntamente com propriedades descritas nesse apêndice constrói-se um poderoso ferramental para lidar com esses núcleos.