



Universidade de Brasília

**Contando Geodésicas em Espaços
Simétricos Compactos**

Matheus de Freitas Souza

Orientador: Mauro Patrão

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Brasília, Março de 2025

Para Ruth.

Agradecimentos

Os primeiros agradecimentos vão à minha família que sempre foram meu mais importante apoio desde o início de minha vida e cuja força me foi fundamental para concluir este trabalho. Agradeço a todos os professores que me acompanharam em minha jornada até aqui desde o ensino básico até o ensino superior. Aos professores Cristina Teixeira, Pedro Caixeta e Harudgy Amano pelas conversas e aulas que me fizeram escolher o curso de matemática. Aos professores Guy Grebot, Mauro Patrão, Lucas Seco, Luciana Ávila, Leandro Cioletti, Martino Garonzzi e Raimundo Bastos por todos os ensinamentos e aulas que tanto inspiraram. Em especial, agradeço ao professor Mauro Patrão, que foi também meu orientador nesta dissertação e um importantíssimo apoio nesta difícil jornada.

Resumo

A teoria de espaços simétricos ultrapassa os limites da geometria. Apesar dos espaços simétricos serem variedades Riemannianas, os aspectos algébricos relacionados a eles são tão importantes quanto os geométricos. Descrevemos e provamos resultados sobre as álgebras ortogonais involutivas, suas decomposições e grupos de Weyl. Mostramos que a um espaço simétrico está associada, de forma natural, uma álgebra ortogonal involutiva e vice-versa. Caracterizamos a imagem inversa da exponencial Riemanniana em espaços simétricos compactos como união disjunta de órbitas focais, das quais calculamos as dimensões e contamos as componentes conexas usando o grupo de Weyl. A partir das simetrias de um espaço simétrico compacto descrevemos seus campos de Jacobi e o Locus Conjugado de um ponto. A partir de propriedades geométricas caracterizamos o Locus de Corte e, utilizando o grupo de Weyl, mostramos que o grupo fundamental é trivial se, e somente se, o Locus de corte e o Locus conjugado coincidem. Determinamos o grupo fundamental de um espaço simétrico compacto como quociente de reticulados num subespaço de Cartan da álgebra ortogonal involutiva associada. Mostramos ainda que, sob algumas hipóteses, grupos de Lie podem ser vistos como Espaços Simétricos e relacionamos os resultados apresentados ao contexto de grupos de Lie. Ao longo do texto, mostramosmos alguns exemplos para ilustrar a teoria apresentada.

Palavras-chave: Geometria Riemanniana, Espaços Simétricos, Espaços Homogêneos, Grupos de Lie, Álgebras de Lie, Topologia de Espaços Simétricos.

Abstract

The theory of symmetric spaces goes beyond the limits of geometry. Despite symmetric spaces being Riemannian manifolds, the algebraic features related to them are as important as the geometric ones. We describe and prove results about orthogonal involutive Lie algebras, their decompositions and Weyl groups. We show that an orthogonal involutive lie algebra is associated to a symmetric space in a natural way and the converse too. We describe the inverse image of the Riemannian exponential in compact symmetric spaces as the union of focal orbits, of which we calculate the dimension and count the connected components using the Weyl group. Using the symmetries of a symmetric space, we describe their Jacobi fields and calculate the conjugate locus of a point. From geometric properties, we characterize the cut locus of a point and, using the Weyl group, we show that a compact symmetric space is simply connected if and only if its Conjugate Locus and Cut Locus are identical. We calculate the fundamental group of a compact symmetric space as a quotient of lattices in a Cartan subspace of the associated orthogonal involutive Lie algebra. Moreover, we show that, under some hypothesis, a Lie group can be seen as a Symmetric Space and we transport the results to the context of Lie groups. throughout the text we show some examples to illustrate the theory.

Keywords: Riemannian Geometry, Symmetric Spaces, Homogeneous Spaces, Lie Groups, Lie Algebras, Topology of Symmetric Spaces.

Conteúdo

Introdução	1
1 Álgebras de Lie Ortogonais Involutivas	7
1.1 Álgebras e Grupos de Lie	7
1.2 Subálgebras de Cartan e Decomposição em espaços de raízes	15
1.3 Sistemas de Raízes e Grupo de Weyl	21
1.3.1 Reticulados e Grupo Fundamental	25
1.3.2 O grupo fundamental de $SO(4)$	29
1.3.3 Equivalentes Focais	31
1.4 Álgebras de Lie Ortogonais Involutivas	40
1.4.1 Raízes Restritas	47
1.4.2 Grupo de Weyl de $\Delta_\sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$	49
2 Espaços Simétricos Riemannianos	53
2.1 Variedades Riemannianas	53
2.2 Espaços Localmente Simétricos	58
2.3 Espaços Simétricos	64
2.4 Locus Conjugado	70
3 Espaços Simétricos Compactos	75
3.1 Preliminares	75
3.1.1 Construindo um Espaço Simétrico	75
3.1.2 Reticulados em Espaços Simétricos Compactos	76
3.1.3 Grupos de Lie e Espaços Simétricos	82
3.2 Grupo de Weyl	89
3.2.1 Recobrimento Universal de U	90
3.2.2 Recobrimento Universal de Klein de U/K	94
3.3 Imagem Inversa da Exponencial	99

3.3.1	Imagen Inversa da Exponencial na Esfera S^2	105
3.3.2	Imagen Inversa da Exponencial no Plano Projetivo \mathbb{RP}^2	109
3.3.3	Imagen Inversa da Exponencial em Grupos de Lie	113
3.4	Grupo Fundamental de Espaços Simétricos	117
3.5	Locus de Corte e Locus Conjugado	130
3.5.1	Locus Conjugado e de Corte na Esfera S^2	135
3.5.2	Locus Conjugado e de Corte no Plano Projetivo \mathbb{RP}^2	136
Apêndice A		139
A.1	Isometrias e conexão de Levi-Civitá	139
A.2	Campos de Vetores	145
A.3	Fibrados e Topologia	148
A.3.1	Grupo Fundamental e Deck Transformations	149
Apêndice B		151
B.1	Álgebras e Grupos de Lie	151
B.2	Complexificação	152
Bibliografia		155

Introdução

Os espaços simétricos são exemplos de variedades Riemannianas com muitas simetrias, como o nome já sugere. Por este motivo, há muita estrutura e ferramentas disponíveis para trabalhar com estes espaços. Para que uma variedade Riemanniana S seja um espaço simétrico, exige-se que esteja definida, para cada ponto de S , uma isometria involutiva que preserva as geodésicas passando por aquele ponto (Seção 2.3). Mais especificamente, se S é um espaço simétrico e $p \in S$, está definida a simetria geodésica $s_p : S \rightarrow S$, ela fixa p e, se γ é qualquer geodésica passando por $p = \gamma(0)$, s_p satisfaz

$$s_p(\gamma(t)) = \gamma(-t).$$

A composição de duas simetrias geodésicas gera uma isometria que chamamos de transvecção. Utilizando as transvecções, mostramos que qualquer espaço simétrico conexo é uma variedade Riemanniana homogênea (Teorema 2.3.8), ou seja, $S = G/K$, em que G é um grupo de Lie conexo que age transitivamente sobre S por isometrias e $K \leq G$ é um subgrupo fechado que consiste de isometrias que fixam algum ponto de S , que costumamos denotar por p . A ação de G sobre S se identifica com a ação de G sobre G/K por multiplicação à esquerda, então identificamos $p = 1K \in G/K$ (veja a Seção 2.1).

Seja \mathfrak{g} a álgebra de G e $\mathfrak{k} \leq \mathfrak{g}$ a álgebra de K . Podemos visualizar os elementos de \mathfrak{g} como campos de Killing em S (Proposição 2.3.9), dentre os quais os elementos de \mathfrak{k} são vistos como os campos de Killing que se anulam em p . A representação adjunta $\sigma = \text{Ad}(s_p) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é um automorfismo involutivo de \mathfrak{g} que tem decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ em autoespaços ± 1 (Teorema 2.3.11). A projeção natural $\pi : G \rightarrow G/K$ nos permite identificar $T_p S \approx \mathfrak{s}$, então, a partir da métrica de S , obtemos um produto interno B em \mathfrak{s} que pode ser estendido a um produto interno $\text{ad}(\mathfrak{k})$ -invariante e σ -invariante em \mathfrak{g} , ou seja, os elementos $\text{ad}(X)$, $X \in \mathfrak{k}$, são anti-simétricos e σ é uma isometria de \mathfrak{g} (veja a parte final da Seção 2.3). Estas condições tornam o par (\mathfrak{g}, σ) uma álgebra ortogonal involutiva com produto interno B (veja a Definição 1.4.4).

A estrutura de álgebra ortogonal involutiva nos fornece mais ferramentas com as quais podemos trabalhar para entender os espaços simétricos. O nosso foco principal foi estudar estas álgebras nos casos semi-simples não compacto e compacto, sendo que o caso compacto é o mais interessante para nós, uma vez que os resultados geométricos principais estão relacionados a espaços simétricos compactos, caso em que o grupo G é compacto e, portanto, \mathfrak{g} também é compacta. O que diferencia uma álgebra de Lie \mathfrak{g} de um simples espaço vetorial é o colchete de Lie, que funciona como uma espécie de produto em \mathfrak{g} , portanto, entender \mathfrak{g} se resume, principalmente, a entender as relações de colchete existentes (veja a Seção 1.1 para um resumo sobre o assunto de álgebras de Lie).

Se \mathfrak{g} tem dimensão finita, existe uma subálgebra \mathfrak{h} de \mathfrak{g} chamada de Subálgebra de Cartan, em termos da qual \mathfrak{g} se decompõe como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} \mathfrak{g}^\alpha.$$

em que \mathfrak{g}^α são autoespaços generalizados da família de operadores $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ e $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ é o conjunto das raízes de \mathfrak{g} com respeito a \mathfrak{h} (veja a Equação 1.2). Esta decomposição é importante por que a representação adjunta $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ de \mathfrak{g} é dada em termos do colchete, ou seja, $\text{ad}(X)Y = [X, Y]$ e, se $H \in \mathfrak{h}$ e $X \in \mathfrak{g}^\alpha$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\text{ad}(H) - \alpha(H))^n X = 0$. A decomposição é o primeiro passo para entender as relações de colchete. Se \mathfrak{g} é semi-simples, suas subálgebras de Cartan são abelianas e os autoespaços \mathfrak{g}^α são autoespaços usuais (veja o Exemplo 1.2.4). Caso \mathfrak{g} seja compacta, suas subálgebras de Cartan são subálgebras abelianas maximais e os operadores $\text{ad}(H)$, $H \in \mathfrak{h}$, são semi-simples, ou seja, diagonalizáveis sobre \mathbb{C} . Por este motivo, a decomposição de uma álgebra compacta se dá em termos de autoespaços generalizados (veja o Exemplo 1.2.6).

A partir das raízes de $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ podemos definir reticulados que nos fornecem maneiras de descrever o centro e o grupo fundamental de um grupo de Lie compacto e conexo G como um quociente de reticulados (Subseção 1.3.1). O conjunto Δ é um subconjunto do espaço dual \mathfrak{h}^* e forma o que chamamos de Sistema de Raízes. Podemos identificar \mathfrak{h} e \mathfrak{h}^* de forma natural e considerar, para cada $\alpha \in \Delta$, a reflexão r_α em torno do hiperplano $\alpha = 0$. Cada uma destas reflexões age sobre Δ via a ação coadjunta e o deixa invariante (veja a Proposição 1.3.1 e o Lema 1.3.7). O grupo gerado pelas reflexões r_α , $\alpha \in \Delta$, é chamado de grupo de Weyl, este grupo é fundamental em vários aspectos da teoria (Seção 1.3).

Neste mesmo espírito, estudamos uma álgebra ortogonal involutiva (\mathfrak{g}, σ) . Como a involução σ é relevante para nós, consideramos decomposições de \mathfrak{g} que levam em conta os autoespaços \mathfrak{k} e \mathfrak{s} , invariantes por σ . Em vez de considerar uma subálgebra de Cartan, consideramos o que chamamos aqui de subespaço de Cartan (segundo o exemplo de [1]).

Trata-se de uma subálgebra \mathfrak{t} de \mathfrak{g} que é maximal abeliana e está contida em \mathfrak{s} . Para \mathfrak{g} semi-simples e não compacta consideramos o caso em que σ é uma involução de Cartan; este é o caso mais simples de se obter uma involução de Cartan, uma vez que $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$ consiste de uma família comutativa de operadores simétricos. Tem-se então a decomposição

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{t}) + \mathfrak{t} + \sum_{\alpha \in \Delta_{\sigma}} \mathfrak{g}_{\alpha},$$

em que $\Delta_{\sigma} = \Delta_{\sigma}(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ é chamado de conjunto das raízes restritas de \mathfrak{g} com respeito a \mathfrak{t} e os \mathfrak{g}_{α} são autoespaços no sentido usual (Teorema 1.4.3). Para \mathfrak{g} redutível, mostramos que sempre existe uma subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} contendo \mathfrak{t} . Usando que toda álgebra compacta é também redutível, aplicamos o que foi feito no caso compacto na Seção 1.2 para obter a decomposição de (\mathfrak{g}, σ) como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{t}) + \mathfrak{t} + \sum_{i\alpha \in \Delta_{\sigma}} \mathfrak{m}_{\alpha},$$

em que os \mathfrak{m}_{α} são espaços de raiz generalizados (Teorema 1.4.10).

Na Subseção 1.4.1, mostramos, nos casos compacto e semi-simples não compacto, que as raízes de uma álgebra ortogonal involutiva (\mathfrak{g}, σ) são restrições de raízes de \mathfrak{g} com respeito a alguma subálgebra de Cartan. Na Subseção 1.4.2, descrevemos o grupo de Weyl de Δ_{σ} e tratamos também das diferentes maneiras como ele pode ser visto. Este resultado é importante porque o grupo de Weyl de Δ_{σ} não age apenas em Δ_{σ} , mas também sobre o espaço simétrico associado (veja a Equação (3.16)). Além disso, mostramos que Δ_{σ} tem todas as propriedades relevantes para que os resultados da Subseção 1.3.3 sejam válidos. Este é um passo fundamental, pois nos permite demonstrar resultados importantíssimos no Capítulo 3. A Subseção 1.3.3 apresenta resultados de caráter mais técnico que, à primeira vista, podem parecer desconexos, mas, na verdade, são fundamentais na descrição do Locus de Corte e do Locus Conjugado de um espaço simétrico compacto e também na demonstração do fato que um espaço simétrico compacto é simplesmente conexo se, e somente se, seus Locus de Corte e Locus Conjugado coincidem (Teorema 3.5.8).

Para estudar o locus conjugado de um ponto em um espaço simétrico compacto, utilizamos a caracterização tensorial dos espaços localmente simétricos para obter coordenadas em que a equação de Jacobi se escreve de forma mais simples (Equação 2.3). Não atacamos diretamente o problema de calcular o locus conjugado de p em S , mas, sim, reduzimos o problema a calcular o locus conjugado em um flat maximal para depois estender este resultado a S . Os flats de S são subvariedades conexas, completas, totalmente geodésicas e com curvatura nula e são chamados de maximais se nenhum outro os contém. Identificando

$\mathfrak{s} = T_p S$, os flats maximais de S passando por p coincidem com as órbitas de p em S pela ação do grupo $T = \langle \exp(\mathfrak{t}) \rangle$, em que \mathfrak{t} é um subespaço de Cartan de (\mathfrak{g}, σ) (Corolário 2.4.4).

Inicialmente, mostramos que a curvatura de S pode ser calculada inteiramente em termos de colchetes de vetores e isto nos fornece uma maneira de escrever a equação de Jacobi em termos da representação adjunta de \mathfrak{t} . A decomposição em espaços de raízes de (\mathfrak{g}, σ) com respeito a \mathfrak{t} nos dá, então, a forma das soluções da equação de Jacobi e nos permite determinar precisamente o locus conjugado de p em um flat maximal $Tp = \langle \exp(\mathfrak{t}) \rangle p$. Como uma consequência de resultados algébricos, os flats maximais de S são todos conjugados pela ação da isotropia K e cobrem S (Teorema 2.4.5), de modo que o locus conjugado de p em S coincide com a imagem, pela ação de K , do locus conjugado de p em Tp (Teorema 2.4.6).

Em seguida, passamos a estudar o conjunto das geodésicas de S que ligam dois pontos arbitrários p e q . Para cada geodésica γ que conecta estes dois pontos, fixamos $p = \gamma(0)$ como o ponto inicial e identificamos γ com a condição inicial $H = \gamma'(0) \in \mathfrak{s}$. Deste modo, cada geodésica γ pode ser vista como um ponto $X \in \mathfrak{s} = T_p S$. Consideramos então o subgrupo K^q de K das isometrias que fixam ambos p e q , de modo que, para todo $k \in K^q$, $k\gamma$ é uma geodésica que conecta $p = 1K$ e q (veja o início da Seção 3.3).

Podemos escrever $\gamma(t) = \exp_p(tH) = \exp(tH)p$, em que \exp_p é a exponencial Riemanniana de S no ponto p . Como

$$k \exp(tH)p = k \exp(tH)k^{-1}p = \exp(t\text{Ad}(k)H)p,$$

podemos identificar a ação de K^q sobre as geodésicas com uma ação de K^q sobre \mathfrak{s} por meio da representação adjunta. A órbita $K^q H$ é denominada órbita focal de H e é denotada $\mathfrak{F}(H)$ (veja a Equação 3.17). Portanto, descrever as geodésicas que conectam p e q se reduz a descrever a imagem inversa de q pela exponencial \exp_p . Mostramos que $\exp_p^{-1}(q)$ consiste de uma união de órbitas focais (Teorema 3.3.2). Além disso, o grupo de Weyl nos fornece maneiras de contar as componentes conexas das órbitas focais (Teorema 3.3.6) e podemos determinar suas dimensões utilizando informações fornecidas pelo sistema de raízes $\Delta_\sigma(\mathfrak{u}, \mathfrak{t})$ (Teorema 3.3.7).

Na Seção 3.4, foi calculado o grupo fundamental de espaços simétricos compactos. As construções desta Seção foram inspiradas no artigo [2], que deu o direcionamento necessário, e no capítulo 13 de [3], que calcula o grupo fundamental de grupos de Lie compactos. Assim como no caso de grupos de Lie conexos e com álgebra compacta, o grupo fundamental de um espaço simétrico compacto é um quociente de reticulados. Para demonstrar este resultado, foi definida a noção de elemento regular em S (algo similar ao conceito de regularidade em grupos de Lie compactos) e foi construído um recobrimento para o conjunto dos elementos regulares S_{reg} (veja a Equação (3.27)). Ocorre que ambos S e S_{reg} possuem

grupos fundamentais isomorfos, então pudemos realizar todas as construções relevantes na variedade mais amigável S_{reg} . Por fim, mostramos que há uma bijeção entre componentes conexas de uma órbita focal e classes de homotopia de curvas que conectam p e q (veja o Lema 3.4.21).

Ainda no capítulo 3, estabelecemos as condições necessárias para que um grupo de Lie possa ser um espaço simétrico (Subseção 3.1.3). Para que um grupo de Lie seja um espaço simétrico é necessário e suficiente que sua álgebra seja compacta e que admita uma métrica bi-invariante. Determinamos a decomposição da álgebra ortogonal involutiva e os reticulados associados a um grupo de Lie vendo-o tanto como espaço simétrico quanto como um grupo. Ao longo do corpo principal do texto mostramos alguns exemplos em grupos de Lie e em espaços simétricos que não são grupos para ilustrar a teoria apresentada. Mostramos ainda como os objetos da teoria desenvolvida no capítulo 3 devem ser interpretados no contexto de grupos de Lie (Subseção 3.3.3).

Nos Apêndices constam, de forma resumida, resultados relevantes que fogem ao escopo do texto principal. Para todos os resultados citados que não constam nos apêndices, foram citadas referências. O Apêndice A contém resultados de natureza mais geométrica e topológica, enquanto, no Apêndice B, há resultados de natureza algébrica.

Capítulo 1

Álgebras de Lie Ortogonais Involutivas

1.1 Álgebras e Grupos de Lie

Nesta seção, vamos estudar as álgebras de Lie. Apesar de ser um tema ligado à álgebra, é muito importante para o estudo dos espaços simétricos. Na primeira seção, estudaremos o tema de forma mais abrangente e, nas seguintes, restringiremos nossa atenção às partes do estudo que são mais importantes no estudo de espaços simétricos.

Uma *álgebra de Lie* \mathfrak{g} é um espaço vetorial munido com um produto bilinear denominado de *colchete de Lie* (ou simplesmente colchete) $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ que satisfaz as seguintes relações:

1. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$
2. $[X, Y] = -[Y, X]$

para $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. A primeira equação é chamada de identidade de Jacobi e a segunda retrata a anti-simetria do colchete. Para entender uma álgebra \mathfrak{g} é necessário, portanto, entender as relações que o colchete impõe sobre \mathfrak{g} . As álgebras mais simples possíveis são as abelianas, aquelas em que o colchete é identicamente nulo. Neste texto, todas as álgebras de Lie têm dimensão finita e estão definidas sobre \mathbb{R} a menos que seja dito o contrário.

Subálgebras, Ideais e Homomorfismos

Dado um subconjunto W de \mathfrak{g} , definimos $[W, W]$ como o subespaço de \mathfrak{g} gerado por elementos da forma $[X, Y]$ com $X, Y \in W$. Um subespaço vetorial \mathfrak{h} de \mathfrak{g} é chamado de *subálgebra* se for fechado pelo colchete, ou seja, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$; quando isto acontece, denotamos $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$. Uma subálgebra \mathfrak{h} será chamada de *ideal* de \mathfrak{g} se $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{h}$, denotamos $\mathfrak{h} \trianglelefteq \mathfrak{g}$. Um *homomorfismo*

de álgebras de Lie é uma aplicação linear $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ que satisfaz $\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$ para todos $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Proposição 1.1.1. Uma subálgebra de \mathfrak{g} é um ideal se, e só se, for núcleo de algum homomorfismo.

Demonastração. Se $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ é núcleo do homomorfismo ϕ e $X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{g}$, temos que $[X, Y] \in \mathfrak{h}$, pois $\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)] = [0, \phi(Y)] = 0$. Por outro lado, se \mathfrak{h} é um ideal de \mathfrak{g} , podemos dar ao espaço quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ uma estrutura natural de álgebra de Lie, definindo $[X + \mathfrak{h}, Y + \mathfrak{h}] = [X, Y] + \mathfrak{h}$. Para que esta seja uma boa definição, é essencial que \mathfrak{h} seja um ideal. A projeção $q : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ definida por $q(X) = X + \mathfrak{h}$ tem núcleo \mathfrak{h} e é um homomorfismo de álgebras de Lie:

$$q([X, Y]) = [X, Y] + \mathfrak{h} = [X + \mathfrak{h}, Y + \mathfrak{h}] = [q(X), q(Y)].$$

□

Uma álgebra não abeliana \mathfrak{g} é chamada de *simples* se qualquer homomorfismo não trivial com domínio \mathfrak{g} for injetivo, ou seja, qualquer ideal de \mathfrak{g} deve ser \mathfrak{g} ou $\{0\}$.

Uma representação de \mathfrak{g} em um espaço vetorial V é um homomorfismo de álgebras de lie $\mathfrak{g} \rightarrow gl(V)$, em que $gl(V)$ denota o espaço das transformações lineares $V \rightarrow V$. O colchete em $gl(V)$ é o comutador de transformações lineares $[T, L] = T \circ L - L \circ T$, onde \circ denota a composição e pode ser omitido quando o contexto for claro. Um homomorfismo especialmente interessante é a representação adjunta ad de \mathfrak{g} ; trata-se de uma representação de \mathfrak{g} em $gl(\mathfrak{g})$. Para cada $X \in \mathfrak{g}$, ad associa a transformação linear dada por $ad(X)Y := [X, Y]$. Usando a identidade de Jacobi, é fácil ver que ad é, de fato, um homomorfismo.

$$\begin{aligned} ad([X, Y])Z &= -[Z, [X, Y]] \\ &= [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] \\ &= ad(X)ad(Y)Z - ad(Y)ad(X)Z \\ &= [ad(X), ad(Y)]Z. \end{aligned}$$

A partir da representação adjunta de \mathfrak{g} obtemos representações $ad|_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \rightarrow gl(\mathfrak{g})$ das subálgebras de \mathfrak{h} de \mathfrak{g} . Para entender as relações de colchete em \mathfrak{g} , estudaremos com mais atenção as representações $ad|_{\mathfrak{h}}$ na próxima seção. Serão especialmente interessantes as representações de subálgebras nilpotentes de \mathfrak{g} , pois resultam em decomposições de \mathfrak{g} em subespaços mais simples do ponto de vista das relações de colchete.

Um homomorfismo $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é chamado de *automorfismo* se for bijetivo. Os automorfismos de \mathfrak{g} formam um grupo denotado por $\text{Aut}(\mathfrak{g})$. Uma *derivação* de \mathfrak{g} é uma aplicação linear $D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ que satisfaz

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY]$$

Denotamos por $\text{Der}(\mathfrak{g})$ o conjunto das derivações de \mathfrak{g} . Usando a identidade de Jacobi, é fácil ver que, para cada $X \in \mathfrak{g}$, $\text{ad}(X)$ é uma derivação, logo, $\text{ad}(\mathfrak{g}) \subseteq \text{Der}(\mathfrak{g})$.

Centralizadores e Normalizadores

Seja W um subconjunto de \mathfrak{g} , definimos o *centralizador* de W em \mathfrak{g} como o conjunto

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(W) = \{X \in \mathfrak{g} : \text{ad}(X)W = 0\}.$$

O centro de \mathfrak{g} é o centralizador de \mathfrak{g} em \mathfrak{g} e será denotado simplesmente por $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. O *normalizador* de W em \mathfrak{g} é definido por

$$\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(W) = \{X \in \mathfrak{g} : \text{ad}(X)W \subseteq W\}.$$

Uma subálgebra $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ será um ideal se, e somente se, $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Além disso, uma subálgebra \mathfrak{h} será chamada de *autonormalizante* se $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$; observe que este é o completo oposto de ser um ideal.

Álgebras nilpotentes, solúveis e semi-simples

Denote $C^1(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ e defina indutivamente

$$C^{n+1}(\mathfrak{h}) = [\mathfrak{h}, C^n(\mathfrak{h})].$$

A álgebra \mathfrak{h} é chamada de *nilpotente* se existir algum n para o qual $C^n(\mathfrak{h}) = \{0\}$. Em particular, toda álgebra abeliana é nilpotente. De forma similar, escreva $D^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ e defina, para cada n ,

$$D^n(\mathfrak{h}) = [D^{n-1}(\mathfrak{h}), D^{n-1}(\mathfrak{h})].$$

Chamaremos \mathfrak{h} de *solúvel* se existir algum n tal que $D^n(\mathfrak{h}) = 0$. É possível mostrar por indução que $D^n(\mathfrak{h}) \subseteq C^{n+1}(\mathfrak{h})$ e isto implica que toda álgebra nilpotente é solúvel. A soma de ideais solúveis de uma álgebra \mathfrak{g} é também solúvel (veja a Proposição 5.4.3 de [4]); isto

implica que, em toda álgebra de Lie de dimensão finita, há um ideal solúvel maximal, o qual é denotado $\text{rad}(\mathfrak{h})$ (veja a Definição 5.4.5 de [4]).

Sejam \mathfrak{g} e \mathfrak{h} álgebras de Lie. Diremos que a soma direta de espaços vetoriais $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ (ou seja, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{h} = 0$) é uma *soma direta de álgebras de Lie* se $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = 0$. Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é chamada de *semi-simples* se puder ser escrita como a soma direta

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$$

de ideais simples \mathfrak{g}_j , em particular toda álgebra simples é semi-simples. O centro da álgebra é sempre um ideal, mas não é simples por definição, então uma álgebra semi-simples tem centro nulo. Segue desta definição que qualquer ideal de \mathfrak{g} é da forma $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{i_k}$, pois a intercessão $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_j$ é um ideal de \mathfrak{g}_j para qualquer j , então é nula ou coincide com \mathfrak{g}_j . Pelo Teorema 5.6.6 de [4] (Teorema de Levi), qualquer álgebra de Lie \mathfrak{g} de dimensão finita pode ser escrita como $\text{rad}(\mathfrak{g}) \rtimes \mathfrak{s}$ em que \mathfrak{s} é semi-simples e recebe o nome de Complemento de Levi. O símbolo \rtimes denota a soma semi-direta de álgebras de Lie, trata-se de uma soma direta de espaços vetoriais que também são álgebras de Lie, em que um dos fatores é um ideal.

Uma álgebra \mathfrak{g} é chamada de *redutível* se $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ com $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ semi-simples. Temos que \mathfrak{g} é redutível se, e somente se, para cada ideal \mathfrak{h} em \mathfrak{g} , existe um outro ideal \mathfrak{k} tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}$. Segue que uma álgebra redutível é semi-simples se, e só se, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ e, neste caso, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ (para mais detalhes, veja a Seção 5.7 de [4]).

Formas bilineares ad-invariantes

Uma forma bilinear $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de ad-invariante se satisfizer

$$B(\text{ad}(H)X, Y) + B(X, \text{ad}(H)Y) = 0$$

para todos $X, Y, H \in \mathfrak{g}$. Se \mathfrak{h} é um subespaço de \mathfrak{g} , o seu complemento ortogonal com relação a B (em \mathfrak{g}) é definido por

$$\mathfrak{h}^{\perp, B} = \{X \in \mathfrak{g} : B(X, Y) = 0 \text{ para todo } Y \in \mathfrak{h}\}$$

A condição acima também pode ser denotada de forma mais sucinta por $B(X, \mathfrak{h}) = 0$.

Proposição 1.1.2. Seja \mathfrak{h} um ideal de \mathfrak{g} . O complemento ortogonal de \mathfrak{h} com relação a B é também um ideal de \mathfrak{g} .

Demonstração. Seja $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{h}$ e $Z \in \mathfrak{h}^\perp$. Temos que $B(Z, \mathfrak{h}) = 0$ por hipótese, devemos mostrar que $[X, Z] \in \mathfrak{h}^\perp$. Isto segue da invariância de B , uma vez que

$$B([X, Z], Y) = -B(Z, [X, Y]) = 0.$$

□

Dentre as formas definidas em \mathfrak{g} , há uma que merece atenção especial, trata-se da forma bilinear simétrica $\beta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\beta(X, Y) = \text{tr}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y)),$$

em que tr denota o traço. Ela é chamada de *forma de Cartan-Killing* de \mathfrak{g} . A simetria de β segue das propriedades do traço, i.e., $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ para A e B transformações lineares. Um cálculo simples mostra que β é ad -invariante, logo, vale a Proposição 1.1.2 para β e, além disso, quaisquer dois ideais \mathfrak{n} e \mathfrak{j} de \mathfrak{g} se interceptam em 0 são ortogonais com relação a β , pois, se $Z \in \mathfrak{g}$, $X \in \mathfrak{n}$ e $Y \in \mathfrak{j}$, temos que $\text{ad}(Y)Z \in \mathfrak{j}$ e, portanto, $\text{ad}(X)\text{ad}(Y)Z \in \mathfrak{n} \cap \mathfrak{j} = \{0\}$. Em particular, os ideais simples de uma álgebra semi-simples são dois a dois ortogonais.

O complemento ortogonal de \mathfrak{h} com relação a β será denotado simplesmente por \mathfrak{h}^\perp . Observe que o ideal $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp \trianglelefteq \mathfrak{g}$ nem sempre é nulo, uma vez que $\mathfrak{g}^\perp \subseteq \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp$. Uma forma bilinear simétrica é chamada de *não degenerada* se $\mathfrak{g}^\perp = \{0\}$.

Teorema 1.1.3 (Critério de Cartan para álgebras semi-simples). *Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é semi-simples se, e só se, sua forma de Cartan-Killing é não degenerada.*

Demonstração. Suponha que \mathfrak{g} é semi-simples, devemos mostrar que não existe $X \in \mathfrak{g}$ tal que $\beta(X, \mathfrak{g}) = 0$. Podemos supor que \mathfrak{g} é simples, já que seus ideais simples são dois a dois ortogonais. Observe que \mathfrak{g} é ideal de \mathfrak{g} ; se existe um tal X , temos que $\mathfrak{g}^\perp \neq 0$ é ideal de \mathfrak{g} . Mas isto é um absurdo, pois $\mathfrak{g}^\perp \neq \mathfrak{g}$, já que $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}^\perp$ é uma álgebra solúvel (Lema 5.5.8 de [4]).

Suponha agora que β é não degenerada. Se \mathfrak{g} é simples, o Teorema é válido, caso contrário, seja $\mathfrak{h} \neq 0$ um ideal de \mathfrak{g} que não coincide com \mathfrak{g} . Podemos escrever $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^\perp$ como soma de ideais que se interceptam em $\{0\}$ (Lema 5.5.8 de [4]). A restrição de β a \mathfrak{h} e a \mathfrak{h}^\perp é também não degenerada. Por indução sobre a dimensão, aplicando este argumento a \mathfrak{h} e \mathfrak{h}^\perp concluimos que \mathfrak{g} é soma direta de ideais simples. □

Álgebras Compactas

A classe de álgebras mais importante para nós será a das álgebras compactas. Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é *compacta* se existir algum produto interno ad -invariante em \mathfrak{g} . Qualquer subálgebra

de uma álgebra compacta é compacta, pois a restrição do produto interno ad-invariante de \mathfrak{g} a uma subálgebra $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$, é um produto interno ad-invariante em \mathfrak{h} . Se $\mathfrak{h} \trianglelefteq \mathfrak{g}$, denote por \mathfrak{h}' o ideal complemento ortogonal de \mathfrak{h} com relação a este produto interno; temos que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}'^\perp$, em que $\mathfrak{h}' \neq 0$ se $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}' = \{0\}$, pois um produto interno é não degenerado e sua restrição a qualquer subespaço é ainda um produto interno. Segue que \mathfrak{g} é redutível.

Proposição 1.1.4. Seja \mathfrak{g} uma álgebra compacta. Existe um grupo de Lie compacto com álgebra \mathfrak{g} .

Demonastração. Sendo \mathfrak{g} redutível, escreva $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Como $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ é abeliana, é isomorfa à álgebra de um toro T , que é um grupo de Lie compacto. Observe que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é semi-simples e compacta, então qualquer grupo de Lie conexo G' com álgebra $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ será compacto pelo Teorema 1.3 do cap. V de [5]. Portanto, \mathfrak{g} pode ser vista como a álgebra do grupo $T \times G'$. \square

A recíproca desta Proposição é verdadeira, como mostra a Proposição 2.1.4 de [4]. O seguinte Lema nos será útil mais adiante.

Lema 1.1.5. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie compacta e $X \in \mathfrak{g}$, então $\text{ad}(X) \in gl(\mathfrak{g})$ tem autovalores puramente imaginários.

Demonastração. Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno ad-invariante em \mathfrak{g} . A equação $\langle \text{ad}(X)Y, Z \rangle + \langle Y, \text{ad}(X)Z \rangle = 0$ mostra que $\text{ad}(X)$ é anti-simétrica em relação a esse produto interno, ou seja, seus autovalores devem ser puramente imaginários. \square

Observação 1.1.6. Usando este Lema e a Proposição B.2.1, é possível mostrar que a forma de Cartan-Killing de uma álgebra compacta é negativa semi-definida, ou seja, $\beta(X, X) \leq 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, sendo que $\beta(X, X) = 0$ ocorre apenas se $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. De fato, como $\text{ad}(X)$ tem autovalores puramente imaginários, deve haver uma base $\{Y_1, Z_1, \dots, Y_k, Z_k, W\}$ (com $W = 0$ se a dimensão de \mathfrak{g} for par) tal que $\text{ad}(X)Y_j = b_j Z_j$ e $\text{ad}(X)Z_j = -b_j Y_j$, com $b_j \in \mathbb{R}$ e $\text{ad}(X)W = 0$. Deste modo, $\text{ad}(X)^2 Y_j = -b_j^2 Y_j$ e $\text{ad}(X)^2 Z_j = -b_j^2 Z_j$ e temos que $\beta(X, X) = \text{tr}(\text{ad}(X)^2) = -\sum b_j^2 \leq 0$. Se $\beta(X, X) = 0$, devemos ter $b_j = 0$ para todo j , ou seja, $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, pois comuta com uma base de \mathfrak{g} . Se \mathfrak{g} for, além de tudo, semi-simples, então β é negativa definida.

Exponencial e Homomorfismos

O grupo $GL(V)$ consiste dos operadores invertíveis de um espaço vetorial de dimensão finita V . É possível mostrar que se trata de um grupo de Lie e que sua álgebra é $gl(V)$. A

exponencial de matrizes $e : gl(V) \rightarrow GL(V)$, dada por

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

é um homomorfismo que nos permite associar propriedades de $gl(V)$ com propriedades de $GL(V)$. Isto vale em geral para qualquer *grupo de Lie linear* $G \leq GL(V)$. Podemos estender a ideia de exponencial para grupos de Lie quaisquer (não necessariamente lineares), veja a Seção 5.3 de [6]. Se a álgebra de G é \mathfrak{g} , denotamos sua exponencial por $\exp_G : \mathfrak{g} \rightarrow G$, ou, caso não gere confusão, denotamos apenas \exp .

Se G e H são grupos de Lie com álgebras \mathfrak{g} e \mathfrak{h} , respectivamente, e $\phi : G \rightarrow H$ é um homomorfismo diferenciável, então a derivada $d\phi_1$ na identidade é um homomorfismo de álgebras de Lie $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ (veja a Proposição 5.16 de [6]). Em particular, se ϕ for um isomorfismo, $d\phi_1$ também será um isomorfismo. Além disso, para qualquer $X \in \mathfrak{g}$, temos que

$$\phi(\exp_G(X)) = \exp_H(d\phi_1 X), \quad (1.1)$$

pela Proposição 5.15 de [6].

Uma forma de obter automorfismos de \mathfrak{g} é considerando a *representação adjunta de G em \mathfrak{g}* , $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$. Para cada $g \in G$, associamos um automorfismo $\text{Ad}(g)$ de \mathfrak{g} definido por $\text{Ad}(g)X = (d/dt)g \exp(tX)g^{-1}|_{t=0}$ para $X \in \mathfrak{g}$. O operador linear $\text{Ad}(g)$ é um homomorfismo de álgebras de Lie porque é a derivada do homomorfismo de G dado pela conjugação por g . Quando o contexto estiver claro, podemos usar a notação simplificada $gX = \text{Ad}(g)X$. Para quaisquer $X \in \mathfrak{g}$ e $g \in G$, temos que

$$g \exp(X)g^{-1} = \exp(\text{Ad}(g)X) = \exp(gX).$$

Outra forma de obter automorfismos de \mathfrak{g} é considerando a restrição da exponencial $e : gl(\mathfrak{g}) \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ à subálgebra $\text{ad}(\mathfrak{g}) \leq gl(\mathfrak{g})$. O grupo gerado pelos elementos $e^{\text{ad} X}, X \in \mathfrak{g}$, é chamado de *grupo dos automorfismos internos* e denotado $\text{Inn}(\mathfrak{g}) = \langle e^{\text{ad}(\mathfrak{g})} \rangle$. Aqui, e denota a exponencial de matrizes, enxergando $\text{ad}(X)$ como operador de $gl(\mathfrak{g})$. Temos ainda que $e^{\text{ad}(X)} = \text{Ad}(\exp(X))$ pela equação (1.1).

Os automorfismos de uma álgebra de Lie que não são internos, são chamados de externos. Observe que, se $s \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$, temos que $\text{ad}(sX) = s\text{ad}(X)s^{-1}$, isto implica que a forma de Cartan-Killing é invariante por automorfismos, ou seja, $\beta(sX, sY) = \beta(X, Y)$ para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Subálgebras e Subgrupos gerados

Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie \mathfrak{g} . Se $V \subseteq \mathfrak{g}$ é um subconjunto qualquer, denotamos por $\langle V \rangle$ a *álgebra de Lie gerada por V* . Para definir esta subálgebra, defina $V^1 = V$ e, indutivamente, defina $V^n = [V, V^{n-1}]$. Por exemplo, $V^2 = [V, V]$ é o subespaço de \mathfrak{g} gerado por todos os elementos $[X, Y]$ com $X, Y \in V$. Então definimos $\langle V \rangle = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$. Fica claro, pela definição dos V^n que $\langle V \rangle$ é uma subálgebra de \mathfrak{g} .

De maneira semelhante, seja $C \subseteq G$ um subconjunto que contém a identidade de G e satisfaz $C^{-1} = \{c^{-1} : c \in C\} \subseteq C$. Se os inversos de C estão em C , então $C \subseteq C^{-1}$. O *subgrupo (álgebraico) de G gerado por C* é denotado $\langle C \rangle$. Para defini-lo, denote por $p : G \times G \rightarrow G$ o produto de G , defina $C^1 = C$ e, indutivamente, $C^n = p(C, C^{n-1})$. Por exemplo, $C^2 = \{c_1 c_2 : c_1, c_2 \in C\}$. Definimos então $\langle C \rangle = \bigcup_{n=1}^{\infty} C^n$ e, pela definição dos C^n , temos que $\langle C \rangle$ é um grupo.

Suponha, adicionalmente, que C seja *conexo por caminhos*, ou seja, quaisquer dois elementos de C podem ser conectados por um caminho diferenciável contido em C . Para que esta hipótese seja válida, basta verificar uma condição mais fraca, qual seja, que a identidade pode ser conectada a qualquer elemento de C por um caminho contido em C . Se $c, c' \in C$ e existem caminhos α e α' (em C) conectando, respectivamente, c e 1 e 1 e c' (nesta ordem), então a concatenação de α e α' é um caminho de c a c' . Sendo $c_1, \dots, c_n \in C$, temos que, para cada $c_i \in C$, existe, um caminho $\alpha_i : [0, 1] \rightarrow C$ tal que $\alpha_i(0) = 1$ e $\alpha_i(1) = c_i$. Portanto, $\langle C \rangle$ deve ser também conexo por caminhos, uma vez que o produto de caminhos $\alpha_1(t) \cdots \alpha_n(t)$ é um caminho contido em $\langle C \rangle$ de 1 a $c_1 \cdots c_n$. Segue do Teorema 6.19 de [6] que $\langle C \rangle$ é um subgrupo de Lie conexo de G .

Um caso especial de subgrupo gerado que nos interessa é o seguinte. Seja $W \subseteq \mathfrak{g}$ um subconjunto, então denotamos por $\langle \exp(W) \rangle \leq G$ o subgrupo gerado por exponenciais de elementos de W . Caso W seja um subespaço de \mathfrak{g} , $\langle \exp(W) \rangle$ será um subgrupo de Lie de G conexo por caminhos, uma vez que todo ponto de $\exp(W)$ pode ser conectado a $1 = \exp(0)$ via um caminho contido em $\exp(W)$. Para ver isto, considere $w \in W$, então $\exp(tw)$ é um caminho de 1 a $\exp(w)$ contido em $\exp(W)$, uma vez que $tw \in W$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se W for uma subálgebra, ou seja, $W = \mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$, a álgebra de $\langle \exp(\mathfrak{h}) \rangle$ coincide com \mathfrak{h} , mas, se W for apenas um subespaço, a álgebra de $\langle \exp(W) \rangle$ não é, em geral, igual a W .

1.2 Subálgebras de Cartan e Decomposição em espaços de raízes

Uma transformação linear $T : V \rightarrow V$, em que V é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} ou \mathbb{C} , é chamada *split* se o seu polinômio minimal se fatora em fatores lineares sobre o respectivo corpo de escalares. Se o corpo é \mathbb{C} , toda transformação é split. Nos concentraremos daqui em diante no caso real. Suponha que T é split, então V se decompõe na soma

$$V = V^{\lambda_1}(T) + \cdots + V^{\lambda_k}(T)$$

em que

$$V^\lambda(T) := \{v \in V : \exists n \in \mathbb{N}, (T - \lambda \text{id})^n v = 0\},$$

é chamado de autoespaço generalizado. Denotamos por id o operador identidade de V . Os autoespaços no sentido usual são denotados

$$V_\lambda = \{v \in V : T v = \lambda v\}.$$

Seja π uma representação da álgebra \mathfrak{h} em V . Dado um funcional linear $\lambda : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{R}$, definimos *espaços de peso*

$$V^\lambda(\mathfrak{h}) = \bigcap_{x \in \mathfrak{h}} V^{\lambda(x)}(\pi(x)) \quad \text{e} \quad V_\lambda(\mathfrak{h}) = \bigcap_{x \in \mathfrak{h}} V_{\lambda(x)}(\pi(x)).$$

Dizemos que λ é um peso da representação π se $V^\lambda(\mathfrak{h}) \neq 0$. Quando a álgebra \mathfrak{h} estiver clara pelo contexto, poderemos omití-la na notação e escrever apenas V^λ .

Lema 1.2.1 (Lema 6.1.3 de [4]). Seja $\pi : \mathfrak{h} \rightarrow gl(V)$ uma representação da álgebra nilpotente \mathfrak{h} no espaço vetorial de dimensão finita V tal que $\pi(x)$ é split para cada $x \in \mathfrak{h}$. Então V se decompõe como

$$V = \bigoplus_{\lambda} V^\lambda(\mathfrak{h})$$

em que a soma é tomada sobre os pesos de π . Cada um dos $V^\lambda(\mathfrak{h})$ é \mathfrak{h} -invariante.

Fazendo $V = \mathfrak{g}$, $\pi = \text{ad}|_{\mathfrak{h}}$, sendo \mathfrak{h} uma subálgebra nilpotente de \mathfrak{g} , temos

$$\mathfrak{g}^\lambda := \mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X \in \mathfrak{g} : (\text{ad}(H) - \lambda(H))^n X = 0, H \in \mathfrak{h}\}.$$

Se $\mathfrak{g}^\lambda \neq 0$ e $\lambda \neq 0$, o peso λ é chamado de *raiz* de \mathfrak{g} com respeito a \mathfrak{h} . O conjunto das raízes é denotado $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ e os subespaços \mathfrak{g}^λ são chamados de espaços de raízes. A decomposição do Lema 1.2.1 se escreve

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda} \mathfrak{g}^\lambda.$$

Entender uma álgebra é, de maneira simples, entender as relações de colchete existentes nesta álgebra, então a importância desta decomposição começa a se mostrar na seguinte proposição, cuja demonstração pode ser encontrada em [4].

Proposição 1.2.2 (Proposição 6.1.5 de [4]). Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie de dimensão finita e $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ uma subálgebra nilpotente, então

1. $[\mathfrak{g}^\lambda, \mathfrak{g}^\mu] \subseteq \mathfrak{g}^{\lambda+\mu}$, $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$
2. \mathfrak{g}^0 é uma subálgebra de \mathfrak{g} .

Da hipótese de nilpotência de \mathfrak{h} , temos que $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$. Para nossos propósitos, é interessante escolher \mathfrak{h} de modo que \mathfrak{g}^0 seja o menor possível para que tenhamos mais informação sobre \mathfrak{g} .

Proposição 1.2.3. Se \mathfrak{h} é uma subálgebra nilpotente autonormalizante de \mathfrak{g} , então $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser encontrada na Proposição 6.1.6 de [4]. \square

Uma subálgebra nilpotente de \mathfrak{g} é chamada de *subálgebra de Cartan* se for autonormalizante. Seja \mathfrak{h} uma subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} tal que $\text{ad}(H)$ é split para cada $H \in \mathfrak{h}$ (dizemos simplesmente que \mathfrak{h} é split). Pelo item (i) do Teorema 6.1.18 e pelo item (ii) do Lema 6.1.15 de [4], toda álgebra com dimensão finita contém uma subálgebra de Cartan. Pelo Lema 1.2.1 e pela Proposição 1.2.3, temos que \mathfrak{g} se decompõe em espaço de raízes da seguinte forma.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} \mathfrak{g}^\alpha. \quad (1.2)$$

Se $\text{ad}(H)$ é diagonalizável para todo $H \in \mathfrak{h}$, \mathfrak{h} é chamada de subálgebra de Cartan *toral*. Neste caso, $\mathfrak{g}^\alpha = \mathfrak{g}_\alpha$ e, em particular, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}_0$ deve ser abeliana.

No caso em que \mathfrak{g} é semi-simples e \mathfrak{h} é split, as subálgebras de Cartan são torais e os espaços \mathfrak{g}_α são unidimensionais (Proposição 6.3.2 e Teorema 6.3.4 de [4]).

Exemplo 1.2.4. Seja $\mathfrak{g} = sl(4, \mathbb{R}) = \{X \in gl(4, \mathbb{R}) : \text{tr}(X) = 0\}$, é possível mostrar que \mathfrak{g} é semi-simples. Denote por E_{ij} a matriz que tem entrada 1 na posição (i, j) e 0 em todas as outras. O seguinte conjunto de vetores define uma base de \mathfrak{g} .

$$\begin{array}{lll} H_1 = E_{11} - E_{22} & H_2 = E_{22} - E_{33} & H_3 = E_{33} - E_{44} \\ U_{12} = E_{12} - E_{21} & U_{13} = E_{13} - E_{31} & U_{14} = E_{14} - E_{41} \\ U_{23} = E_{23} - E_{32} & U_{34} = E_{34} - E_{43} & U_{24} = E_{24} - E_{42} \\ V_{12} = E_{12} + E_{21} & V_{13} = E_{13} + E_{31} & V_{14} = E_{14} + E_{41} \\ V_{23} = E_{23} + E_{32} & V_{34} = E_{34} + E_{43} & V_{24} = E_{24} + E_{42} \end{array}$$

A subálgebra abeliana $\mathfrak{h} = \langle H_1, H_2, H_3 \rangle$ é uma subálgebra de Cartan e, denotando $H = xH_1 + yH_2 + zH_3$, temos que

$$\begin{aligned} \text{ad}(H)(U_{ij} + V_{ij}) &= \alpha_{ij}(H)(U_{ij} + V_{ij}), \\ \text{ad}(H)(U_{ij} - V_{ij}) &= -\alpha_{ij}(H)(U_{ij} - V_{ij}), \end{aligned}$$

em que as raízes α_{ij} são descritas por

$$\begin{array}{ll} \alpha_{12}(H) = 2x - y & \alpha_{13}(H) = x + y - z \\ \alpha_{14}(H) = x + z & \alpha_{23}(H) = -x + 2y - z \\ \alpha_{24}(H) = -x + y + z & \alpha_{34}(H) = -y + 2z \end{array}$$

Pelo que foi discutido nos parágrafos anteriores, \mathfrak{g} se decompõe como a soma de \mathfrak{h} com os subespaços $\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}} = \langle U_{ij} + V_{ij} \rangle$ e $\mathfrak{g}_{-\alpha_{ij}} = \langle U_{ij} - V_{ij} \rangle$.

Vamos tratar agora do caso das álgebras compactas. Neste caso, a família de operadores $\text{ad}(\mathfrak{h})$ é comutativa, mas não é diagonalizável sobre \mathbb{R} .

Teorema 1.2.5. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra compacta, então*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{i\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} \mathfrak{m}_\alpha,$$

em que \mathfrak{h} é uma subálgebra de Cartan da parte semi-simples de \mathfrak{g} e os \mathfrak{m}_α são autoespaços generalizados da família de operadores $\text{ad}(\mathfrak{h})|_{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]}$.

Demonstração. Sendo \mathfrak{g} redutível ela é escrita como $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ em que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é compacta e semi-simples. Suponha inicialmente que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$, ou seja, que \mathfrak{g} é semi-simples e,

portanto, que a complexificação $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} + i\mathfrak{g}$ de \mathfrak{g} é semi-simples. Seja \mathfrak{h} uma subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} ; pela Proposição 6.1.11 de [4], $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ é subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Os operadores $\text{ad}(H), H \in \mathfrak{h}$, são anti-simétricos em relação a algum produto interno ad -invariante em \mathfrak{g} e, portanto, seus autovalores são imaginários puros (Lema 1.1.5), então denotamos as raízes de \mathfrak{g} com respeito a \mathfrak{h} por $i\alpha$ para $\alpha \in \mathfrak{h}^*$. Em particular, esses autovalores devem vir em pares conjugados $\pm i\alpha$. Isto significa que estes operadores são semi-simples, ou seja, diagonalizáveis sobre \mathbb{C} . Para $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, considere os seguintes autoespaços

$$l_{\alpha} = \{\tilde{X} \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} : \text{ad}(H)\tilde{X} = i\alpha(H)\tilde{X}, H \in \mathfrak{h}\}.$$

Denote por c a conjugação complexa em $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ dada por $c(X + iY) = X - iY$ para $X, Y \in \mathfrak{g}$. Trata-se de um isomorfismo linear de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. A proposição B.2.1 nos mostra que $\text{ad}(H), H \in \mathfrak{h}$, comuta com c , então seja $\tilde{X} \in l_{\alpha}$, temos que $\text{ad}(H)c(\tilde{X}) = c(\text{ad}(H)\tilde{X}) = -i\alpha(H)c(\tilde{X})$, o que mostra que $c(\tilde{X}) \in l_{-\alpha}$. Logo, l_{α} e $l_{-\alpha}$ têm as mesmas dimensões e $l_{\alpha} + l_{-\alpha}$ é invariante por c , ou seja, $l_{\alpha} + l_{-\alpha} = \mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$ para algum subespaço $\mathfrak{j} \subseteq \mathfrak{g}$. Defina $\mathfrak{m}_{\alpha} = (l_{\alpha} + l_{-\alpha}) \cap \mathfrak{g}$. Desta construção e pela Observação 1.1.6, vemos que \mathfrak{m}_{α} é constituído de pares X, Y satisfazendo $\text{ad}(H)X = \alpha(H)Y$, $\text{ad}(H)Y = -\alpha(H)X$, $\text{ad}(H)(X + iY) = -i\alpha(H)(X + iY)$ e $\text{ad}(H)(X - iY) = +i\alpha(H)(X - iY)$. A um par X, Y de \mathfrak{m}_{α} satisfazendo estas propriedades chamamos de *par hiperbólico*.

Deste modo, concluimos que a parte semi-simples de \mathfrak{g} se decompõe como

$$\mathfrak{h} \oplus \sum_{i\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} \mathfrak{m}_{\alpha},$$

onde segue que a decomposição para \mathfrak{g} enunciada no Teorema é válida. \square

Exemplo 1.2.6. Considere $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(4) = \{X \in gl(4, \mathbb{R}) : X + X^t = 0\}$. As matrizes U_{ij} do Exemplo 1.2.4 formam uma base de \mathfrak{g} , sendo que $\mathfrak{t} = \langle U_{12}, U_{34} \rangle$ é um toro maximal, logo, é uma subálgebra de Cartan. Denote $H = tU_{12} + sU_{34}$, calculando os comutadores, obtemos as seguintes relações.

$$\text{ad}(H)(U_{13} + U_{24}) = (t - s)(U_{14} - U_{23}), \quad (1.3)$$

$$\text{ad}(H)(U_{14} - U_{23}) = -(t - s)(U_{13} + U_{24}), \quad (1.4)$$

$$\text{ad}(H)(U_{14} + U_{23}) = (t + s)(U_{13} - U_{24}), \quad (1.5)$$

$$\text{ad}(H)(U_{13} - U_{24}) = -(t + s)(U_{14} + U_{23}). \quad (1.6)$$

Temos então que $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) = \{\pm\alpha, \pm\lambda\}$ com $\alpha(H) = t - s$ e $\lambda(H) = t + s$. Segue que $\mathfrak{m}_{\alpha} = \langle U_{13} + U_{24}, U_{14} - U_{23} \rangle$ e $\mathfrak{m}_{\lambda} = \langle U_{14} + U_{23}, U_{13} - U_{24} \rangle$.

Seja \mathfrak{g} uma álgebra compacta e escreva $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{s}$, em que $\mathfrak{s} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é semi-simples e $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Observe que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}$ é subálgebra abeliana e autonormalizante de \mathfrak{g} , já que $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{h})$ e \mathfrak{z} normaliza \mathfrak{h} em \mathfrak{g} , logo, é uma subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} . Além disso, esta subálgebra é abeliana maximal de \mathfrak{g} , uma vez que os elementos de \mathfrak{m}_{α} não comutam com os elementos de \mathfrak{h} . A recíproca também é verdadeira, então temos o seguinte resultado

Proposição 1.2.7. Uma subálgebra \mathfrak{t} de uma álgebra compacta \mathfrak{g} é uma subálgebra de Cartan se, e somente se, é uma subálgebra abeliana maximal.

Demonastração. Resta mostrar apenas que uma subálgebra \mathfrak{t} abeliana maximal é subálgebra de Cartan. Como toda álgebra abeliana é nilpotente, basta mostrar que \mathfrak{t} é autonormalizante. Seja $X \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$ e defina $\mathfrak{m} = \mathbb{R}X + \mathfrak{t}$. Como $[X, \mathfrak{t}] \subseteq \mathfrak{t}$, temos que \mathfrak{m} é uma subálgebra de \mathfrak{g} , logo, também é compacta e, portanto, redutível. Segue que $\mathfrak{m} = \mathfrak{z}(\mathfrak{m}) \oplus [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{m}) + \mathfrak{t}$, de modo que \mathfrak{m} é abeliana e contém \mathfrak{t} , logo, $\mathfrak{m} = \mathfrak{t}$ pela maximalidade de \mathfrak{t} . \square

Seja $\mathfrak{t} \leq \mathfrak{g}$ uma subálgebra de Cartan, um elemento $H \in \mathfrak{t}$ é chamado de *regular* se $\mathfrak{t} = \mathfrak{g}^0(\text{ad}(H))$, o que é equivalente a nenhuma raiz de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ se anular em H . A equivalência pode ser vista utilizando a decomposição de \mathfrak{g} em espaços de raízes. Sendo $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ finito, fica claro que toda subálgebra de Cartan contém um elemento regular. O seguinte resultado é muito importante em nossas próximas investigações.

Proposição 1.2.8. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie compacta. Quaisquer duas subálgebras de Cartan de \mathfrak{g} são conjugadas por um automorfismo interno e, dada uma subálgebra de Cartan \mathfrak{t} , temos que seus conjugados cobrem \mathfrak{g} , no sentido de que $\mathfrak{g} = \text{Inn}(\mathfrak{g})\mathfrak{t}$.

Demonastração. Sejam \mathfrak{t} e \mathfrak{t}' subálgebras de Cartan e $X \in \mathfrak{t}$, $X' \in \mathfrak{t}'$ elementos regulares satisfazendo $\mathfrak{t} = \mathfrak{g}^0(\text{ad}(X))$ e $\mathfrak{t}' = \mathfrak{g}^0(\text{ad}(X'))$. Seja G um grupo compacto e conexo com álgebra \mathfrak{g} e considere o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ad-invariante em \mathfrak{g} . Vamos mostrar que existe um automorfismo interno que leva \mathfrak{t} em \mathfrak{t}' , ou seja, elas são *conjugadas*. Como G é conexo, $\text{Ad}(G) \simeq \text{Inn}(\mathfrak{g})$, então basta mostrar que existe $g_0 \in G$ tal que $\mathfrak{t}' = \text{Ad}(g_0)\mathfrak{t}$.

A função contínua $g \mapsto \langle \text{Ad}(g)X, X' \rangle$ deve atingir um mínimo num ponto $g_0 \in G$ por compacidade. Seja $Y \in \mathfrak{g}$, e observe que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \langle \text{Ad}((\exp tY)g_0)X, X' \rangle \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \langle e^{\text{ad } tY} \text{Ad}(g_0)X, X' \rangle \Big|_{t=0} \\ &= \langle [Y, \text{Ad}(g_0)X], X' \rangle = \langle Y, [\text{Ad}(g_0)X, X'] \rangle, \end{aligned}$$

onde usamos a bi-linearidade do produto interno. A arbitrariedade de Y , mostra que $[\text{Ad}(g_0)X, X'] = 0$ e segue que $\text{Ad}(g_0)X$ comuta com um elemento regular de \mathfrak{t}' e, como \mathfrak{t}' é abeliana maximal, temos que $\text{Ad}(g_0)X \in \mathfrak{t}'$. Consequentemente, \mathfrak{t}' está contido em

$\mathfrak{g}^0(\text{ad}(\text{Ad}(g_0)X)) = \text{Ad}(g_0)\mathfrak{g}^0(\text{ad}(X)) = \text{Ad}(g_0)\mathfrak{t}$, o que mostra que $\mathfrak{t}' \subseteq \text{Ad}(g_0)\mathfrak{t}$ e, portanto, $\mathfrak{t}' = \text{Ad}(g_0)\mathfrak{t}$, pois são abelianos maximais.

Dado qualquer $Y \in \mathfrak{g}$, existe uma subálgebra abeliana \mathfrak{m} de dimensão maximal contendo Y . Por construção, \mathfrak{m} deve ser uma subálgebra de Cartan, então, pelo que foi mostrado anteriormente, deve existir $\phi \in \text{Inn}(\mathfrak{g})$ tal que $\mathfrak{m} = \phi(\mathfrak{t})$, ou seja, $Y \in \text{Inn}(\mathfrak{g})\mathfrak{t}$. \square

As subálgebras de Cartan de uma álgebra compacta são comumente chamadas de toros maximais. O motivo é que, se G é um grupo de Lie compacto e conexo com álgebra \mathfrak{g} , qualquer toro maximal de \mathfrak{g} corresponde a um subgrupo maximal abeliano compacto e conexo de G , que deve ser um toro maximal. Mais especificamente, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.2.9. Seja G um grupo compacto e conexo com álgebra \mathfrak{g} . Então

1. $\mathfrak{t} \leq \mathfrak{g}$ é toro maximal se, e só se, é a álgebra de um toro maximal de G .
2. Quaisquer dois toros maximais de G são conjugados via algum $g \in G$.
3. Se $T \leq G$ é um toro maximal, $G = \bigcup_{g \in G} gTg^{-1}$.

Demonstração. A demonstração desta proposição pode ser encontrada no Teorema 12.2.2 de [4]. \square

1.3 Sistemas de Raízes e Grupo de Weyl

As raízes das álgebras semi-simples que estudamos na seção anterior formam o que chamamos de Sistema de Raízes. Nesta Seção, estudaremos propriedades de sistemas de raízes a partir das quais obteremos resultados topológicos e geométricos em grupos de Lie e em Espaços simétricos (veja o Capítulo 3).

Seja \mathfrak{t} um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Para $H \in \mathfrak{t}$, denote por H^\perp o conjunto dos $X \in \mathfrak{t}$ tais que $\langle H, X \rangle = 0$, trata-se de um hiperplano de \mathfrak{t} . A reflexão em torno de H^\perp é a isometria que leva H em $-H$ e fixa H^\perp ponto a ponto; ela é descrita pela seguinte fórmula

$$r_H(X) = X - 2 \frac{\langle X, H \rangle}{\langle H, H \rangle} H$$

Um isomorfismo linear ψ de \mathfrak{t} age em \mathfrak{t}^* pela ação coadjunta $\psi^* \alpha = \alpha \circ \psi^{-1}$. Em particular, as reflexões r_H agem em \mathfrak{t}^* .

Podemos relacionar \mathfrak{t} e \mathfrak{t}^* considerando, para cada $H \in \mathfrak{t}$ o funcional α_H definido por $\alpha_H(X) = \langle H, X \rangle$. A associação $\phi : \mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{t}^*$ dada por $\phi(H) = \alpha_H$ é um isomorfismo de espaços vetoriais que nos permite induzir o produto interno

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \phi^{-1}(\alpha), \phi^{-1}(\beta) \rangle$$

em \mathfrak{t}^* a partir do produto interno em \mathfrak{t} , de modo que \mathfrak{t} e \mathfrak{t}^* são isométricos. Denotamos $H_\beta = \phi^{-1}(\beta)$, então faz sentido escrever

$$\alpha(H_\beta) = \langle H_\alpha, H_\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle = \beta(H_\alpha). \quad (1.7)$$

A reflexão em torno de $\alpha^\perp = H_\alpha^\perp$ pode ser escrita da seguinte forma

$$r_\alpha(H_\beta) = H_\beta - 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} H_\alpha = \beta - 2 \frac{\alpha(H_\beta)}{\langle \alpha, \alpha \rangle} H_\alpha.$$

É fácil ver que $\phi r_H \phi^{-1} = r_{\alpha_H}$ e, portanto, podemos trabalhar tanto em \mathfrak{t} quanto em \mathfrak{t}^* .

Para cada $\alpha \in \Delta$ definimos a *co-raiz* $H_{\check{\alpha}} = (2/\langle \alpha, \alpha \rangle) H_\alpha$. O conjunto das co-raízes terá um papel importante em seções subsequentes. Com esta notação, podemos denotar de forma mais simples

$$r_\alpha(H_\beta) = H_\beta - \alpha(H_\beta) H_{\check{\alpha}}.$$

Proposição 1.3.1. Seja $H \in \mathfrak{t}$, então $(r_H)^* = r_{\alpha_H}$, em que r_{α_H} é vista como uma reflexão em \mathfrak{t}^* .

Demonstração. Para $\beta \in \mathfrak{t}^*$, temos que $(r_H)^*(\beta) = \beta \circ r_H$ coincide com β em H^\perp e com $-\beta$ na reta $\mathbb{R}H$. Lembrando que $\langle \alpha_H, \beta \rangle = \beta(H)$, temos que

$$r_{\alpha_H}(\beta) = \beta - 2 \frac{\langle \alpha_H, \beta \rangle}{\langle \alpha_H, \alpha_H \rangle} \alpha_H = \beta - 2 \frac{\beta(H)}{\langle \alpha_H, \alpha_H \rangle} \alpha_H$$

coincide com β em H^\perp e

$$\beta(H) - 2 \frac{\beta(H)}{\langle \alpha_H, \alpha_H \rangle} \alpha_H(H) = \beta(H) - 2 \frac{\beta(H)}{\langle \alpha_H, \alpha_H \rangle} \langle \alpha_H, \alpha_H \rangle = -\beta(H),$$

onde segue a igualdade das duas transformações. \square

Definição 1.3.2. Um *Sistema de Raízes reduzido* é um subconjunto finito $\Delta \subseteq \mathfrak{t}^*$ que contém alguma base de \mathfrak{t}^* e que satisfaz:

1. Se $\alpha \in \Delta$, então $-\alpha \in \Delta$
2. $\Delta \cap \mathbb{R}\alpha = \{\pm\alpha\}$ para todo $\alpha \in \Delta$
3. $r_\alpha^*(\Delta) \subseteq \Delta$ para todo $\alpha \in \Delta$
4. Para quaisquer $\alpha, \beta \in \Delta$, $r_\alpha(H_\beta) - H_\beta \in \mathbb{Z}H_\alpha$.

A condição 4 desta definição é equivalente a $2\langle \alpha, \beta \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$ ou $\langle \check{\alpha}, \beta \rangle = \beta(H_{\check{\alpha}}) \in \mathbb{Z}$.

Observação 1.3.3. A condição no item 2 é o motivo pelo qual chamamos Δ de reduzido. Um conjunto $\Delta \subseteq \mathfrak{t}$ que satisfaz esta definição, exceto pelo item 2, é chamado apenas de *Sistema de Raízes*. Suponha, por um instante, que a condição 2 não seja válida e seja $\alpha \in \Delta$ tal que existe $c \neq 0$ satisfazendo $c\alpha \in \Delta$, existem poucos valores possíveis para c . Observe que $2c = \langle c\alpha, \check{\alpha} \rangle \in \mathbb{Z}$ e $(c\alpha)\check{\alpha} = (2c\alpha / \langle c\alpha, c\alpha \rangle) \check{\alpha} = (1/c)\check{\alpha}$, então $\langle (c\alpha)\check{\alpha}, \alpha \rangle = (1/c)\langle \check{\alpha}, \alpha \rangle = 2/c \in \mathbb{Z}$. Segue que $c \in \{\pm 1/2, \pm 1, \pm 2\}$.

Observação 1.3.4. As condições da Definição 1.3.2 são propriedades usuais das raízes de uma álgebra de Lie semi-simples com respeito a uma subálgebra de Cartan split (veja a remark 6.4.4 de [4]). Os mesmos axiomas também são satisfeitos pelas raízes de álgebras de Lie semi-simples compactas, nas quais as subálgebras de Cartan não são split. Este fato segue da Proposição 7.14 e do Teorema 7.30 de [3]. Pelo Teorema 1.2.5, vemos que uma subálgebra de Cartan de uma álgebra compacta \mathfrak{g} são da forma $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) + \mathfrak{t}$, em que \mathfrak{t} é subálgebra de Cartan da parte semi-simples de \mathfrak{g} , logo, as raízes estão contidas em $i\mathfrak{t}^*$ e satisfazem os axiomas da Definição 1.3.2 em $i\mathfrak{t}^*$. Para nos referir às raízes de uma álgebra compacta com respeito a uma subálgebra de Cartan, omitiremos o fator i .

Proposição 1.3.5. Seja Δ um sistema de raízes, então o conjunto das co-raízes

$$\check{\Delta} = \{\check{\alpha} : \alpha \in \Delta\} \simeq \{H_{\check{\alpha}} : \alpha \in \Delta\}$$

também é um sistema de raízes. Além disso, Δ é reduzido se, e somente se, $\check{\Delta}$ é reduzido.

Demonstração. A demonstração deste resultado encontra-se na Observação 6.4.18 de [4]. \square

O grupo gerado pelas reflexões r_α , $\alpha \in \Delta$, é chamado de Grupo de Weyl de Δ e o denotamos por $W(\Delta)$ ou simplesmente por W . Os hiperplanos $\alpha^\perp \subseteq \mathfrak{t}^*$ podem ser identificados com o conjunto de zeros de α em \mathfrak{t} . Chamamos cada um destes hiperplanos de *Hiperplano de raiz*. Sendo Δ finito, é fácil ver que o complemento destes hiperplanos em \mathfrak{t} é um conjunto aberto. A uma componente conexa do complemento dos hiperplanos de raiz damos o nome de *Câmara de Weyl*. Cada Câmara de Weyl é um cone convexo aberto em \mathfrak{t} .

Exemplo 1.3.6. Neste exemplo, vamos descrever o sistema de raízes de $\mathfrak{so}(4)$ formado pelas raízes da decomposição $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{t} + \mathfrak{m}_\alpha + \mathfrak{m}_\lambda$ do Exemplo 1.2.6, em que $\mathfrak{t} = \langle U_{12}, U_{34} \rangle$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{so}(4)$. Pela Observação 1.4.2, a forma bilinear simétrica $-\beta$, em que β é a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{so}(4)$, é um produto interno em $\mathfrak{so}(4)$, uma vez que $\mathfrak{so}(4)$ é semi-simples e compacto. Lembre-se que $\beta(X, Y) = \text{tr}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y))$, então, pelas equações (1.3)-(1.6), temos que

$$\text{tr}(\text{ad}(H)\text{ad}(H)) = -2(t-s)^2 - 2(t+s)^2,$$

em que $H = tU_{12} + sU_{34}$. Fazendo $t = 1$ e $s = 0$, segue que $\beta(U_{12}, U_{12}) = -4$ e, fazendo $t = 0$ e $s = 1$, temos que $\beta(U_{34}, U_{34}) = -4$. Contas simples nos permitem concluir que $\beta(U_{12}, U_{34}) = 0$. Portanto, escolhendo o produto interno $B = -\frac{1}{4}\beta$ restrito a \mathfrak{t} , temos que $\{U_{12}, U_{34}\}$ é uma base ortonormal de \mathfrak{t} .

Vamos agora determinar os pontos H_α e H_λ . Observe que $B(H_\lambda, H) = \lambda(H) = t+s$, então $H_\lambda = U_{12} + U_{34}$. De modo análogo, $B(H_\alpha, H) = \alpha(H) = t-s$, então $H_\alpha = U_{12} - U_{34}$. Para ter uma representação gráfica do sistema de raízes $\Delta = \Delta(\mathfrak{so}(4), \mathfrak{t})$ em \mathfrak{t}^* , utilizamos o isomorfismo $\phi : \mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{t}^*$ e trocamos H_α e H_λ , respectivamente, por α e λ . Escolhemos um sistema de coordenadas que está em dualidade com a base ortonormal $\{U_{12}, U_{34}\}$, ou seja, o sistema de coordenadas dado pela base $\{\gamma_{12} = \phi(U_{12}), \gamma_{34} = \phi(U_{34})\}$. Veja a Figura 1.1.

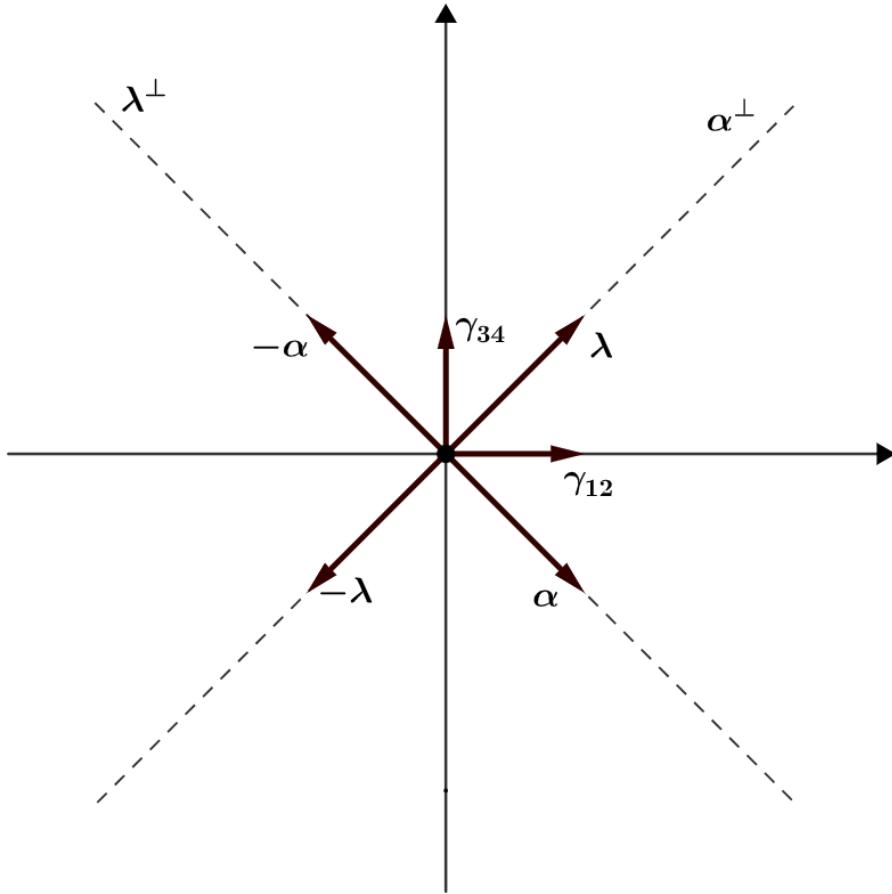


Figura 1.1 : Sistema de raízes $\Delta(\mathfrak{so}(4), \mathfrak{t})$.

Como temos apenas dois hiperplanos de raiz α^\perp e λ^\perp , o grupo de Weyl de Δ contém apenas 4 elementos e é dado por $W = \{1, r_\alpha, r_\lambda, r_\alpha r_\lambda\}$, em que $r_\alpha r_\lambda$ coincide com a reflexão em torno da origem. Pela Figura 1.1, vemos que há um total de 4 câmaras de Weyl.

Lema 1.3.7. Seja $\psi : \mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{t}$ um isomorfismo que preserva as raízes de Δ , ou seja, $\psi^* \Delta \subseteq \Delta$, então ψ preserva as câmaras de Weyl.

Demonação. Observe inicialmente que $(\psi^*)^{-1} = (\psi^{-1})^*$ e ψ preserva Δ se, e só se, ψ^{-1} preserva também. Por hipótese, temos que $\psi^* \Delta \subseteq \Delta$ e, sendo ψ um isomorfismo, temos que ψ^* é injetiva; da finitude de Δ , segue a igualdade $\psi^* \Delta = \Delta = (\psi^{-1})^* \Delta$. Sejam $\alpha \in \Delta$ uma raiz qualquer e $\beta = (\psi^{-1})^* \alpha$. Se nenhuma raiz se anula em $H \in \mathfrak{t}$, temos que $0 \neq \beta(H) = \alpha(\psi(H))$. Isto mostra que $\psi(H)$ está em alguma câmara de Weyl, pois α é arbitrária. Além disso, como ψ é contínua, deve levar conexos em conexos, então, se $C \subseteq \mathfrak{t}$ é uma câmara de Weyl, $\psi(C)$ também será. \square

Um grupo age *simplesmente* sobre um conjunto se o único elemento do grupo que tem pontos fixos é a identidade.

Teorema 1.3.8. *O grupo de Weyl age simplesmente e transitivamente sobre as câmaras de Weyl. Sejam $H \in \mathfrak{t}$ um elemento de alguma câmara de Weyl e $w \in W$ tais que $wH = H$, então $w = 1$.*

Demonstração. Estes resultados são consequências diretas das Proposições 8.23 e 8.27 de [3]. □

Como a quantidade de raízes é finita, podemos ter apenas uma quantidade finita de câmaras de Weyl. Além disso, a ação do grupo de Weyl é transitiva e simples, logo, há uma bijeção entre o grupo de Weyl e as câmaras de Weyl.

Corolário 1.3.9. O grupo de Weyl W é finito.

1.3.1 Reticulados e Grupo Fundamental

Nesta subseção, vamos estudar alguns objetos importantes que nos ajudam a fazer conexões entre álgebra e topologia de grupos de Lie, que são os reticulados. Vamos mostrar que o centro e o grupo fundamental de um grupo conexo com álgebra compacta e semi-simples são isomorfos a quocientes de reticulados.

Definição 1.3.10. Seja \mathfrak{t} um espaço vetorial com um produto interno. Um *reticulado* em \mathfrak{t} é um subgrupo aditivo Γ satisfazendo as seguintes condições.

1. Existe $d > 0$ tal que, para quaisquer $X, Y \in \Gamma$, a distância entre X e Y é limitada inferiormente por d .
2. Existe $D > 0$ tal que qualquer $Z \in \mathfrak{t}$ está a uma distância menor que D de algum ponto de Γ .

Segue desta definição que um reticulado é discreto, pois, se $\delta < d$, os pontos de Γ são isolados por bolas de raio δ . Além disso, Γ contém uma base de \mathfrak{t} . De fato, se \mathfrak{t} tem dimensão n e Γ gera um espaço de, no máximo, dimensão $n - 1$, a condição 2 da definição não poderia ser satisfeita.

Nesta subseção \mathfrak{g} denota uma álgebra de Lie compacta e semi-simples com subálgebra de Cartan \mathfrak{t} e conjunto de raízes $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ e G denota um grupo conexo com álgebra \mathfrak{g} .

Para $H \in \mathfrak{t}$ e $X, Y \in \mathfrak{m}_\alpha$ um par hiperbólico (Teorema 1.2.5), temos que

$$\text{Ad}(\exp(H))X = e^{\text{ad}(H)}X = \cos(\alpha(H))X - \sin(\alpha(H))Y \quad (1.8)$$

$$\text{Ad}(\exp(H))Y = e^{\text{ad}(H)}Y = \sin(\alpha(H))X + \cos(\alpha(H))Y \quad (1.9)$$

Sendo G conexo, temos que $\ker(\text{Ad}) = Z(G)$. Logo, $\exp(H) \in Z(G) = \ker(\text{Ad})$ se, e somente se, $\alpha(H) \in 2\pi\mathbb{Z}$ para todo $\alpha \in \Delta$. Defina

$$\Gamma_1 = \{X \in \mathfrak{t} : \alpha(X) \in \pi\mathbb{Z} \ \forall \alpha \in \Delta\},$$

o chamado *Reticulado Central* associado a $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$, que consiste dos pontos de \mathfrak{t} em que as raízes de Δ têm valores múltiplos inteiros de π . Trata-se do conjunto obtido pela intercessão de hiperplanos de \mathfrak{t} que são paralelos aos hiperplanos de raíz. Se $\alpha \in \Delta$, os hiperplanos $\alpha = k\pi \in \pi\mathbb{Z}$ são paralelos ao hiperplano de raíz $\alpha = 0$, então $X \in \Gamma_1$ se, e somente se, para cada $\alpha \in \Delta$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que X está no hiperplano $\alpha = k\pi$. Defina também

$$\Gamma = \{H \in \mathfrak{t} : \exp(2H) = 1\} = \{H \in \mathfrak{t} : \exp(H) = \exp(-H)\}. \quad (1.10)$$

Observação 1.3.11. A teoria desenvolvida nesta seção exige que apareça um fator 2 em algum lugar para que tudo se encaixe como desejado. Por este motivo, escolhemos usar a exponencial composta com um fator 2 na definição de Γ . Este fator poderia vir em outros lugares com os devidos ajustes (veja a Proposição 1.5 do capítulo V de [5] e a Seção 13.4 de [3] para mais detalhes). O motivo de nossa escolha é que os grupos fundamentais de espaços simétricos são isomorfos a quocientes de reticulados muito parecidos com os que definimos aqui, então definir Γ desta forma nos permite manter a teoria de certa maneira "unificada". Tudo ficará mais claro na Subseção 3.1.3.

Proposição 1.3.12. Se G é um grupo de Lie conexo com álgebra \mathfrak{g} , então $\Gamma \subseteq \Gamma_1$. Além disso, $\Gamma = \Gamma_1$ se $Z(G) = 1$.

Demonstração. A hipótese de conexidade para G é importante pois implica que $\ker \text{Ad} = Z(G)$. Se $H \in \Gamma$, temos que $\exp(2H) = 1$, logo, $\text{Ad}(\exp(2H)) = 1$ e segue das equações (1.8) e (1.9) que $\sin(\alpha(H)) = 0$, ou seja, $\alpha(H) \in \pi\mathbb{Z}$. Segue que $H \in \Gamma_1$ e, portanto, $\Gamma \subseteq \Gamma_1$.

Suponha que $Z(G) = 1$. Se $\alpha(H) \in \pi\mathbb{Z}$, as equações (1.8) e (1.9) mostram que

$$\text{Ad}(\exp(H)) = \text{Ad}(\exp(-H)),$$

isto é, $\exp(2H) \in \ker \text{Ad} = Z(G) = 1$. Neste caso, $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$. □

Em particular, esta demonstração mostra que Γ é um reticulado, uma vez que está contido em outro reticulado. Ainda não sabemos, no entanto, se é um reticulado em \mathfrak{t} , mostraremos isto mais adiante. Temos o seguinte resultado que relaciona $Z(G)$ e os reticulados vistos até aqui.

Proposição 1.3.13. Seja G um grupo conexo com álgebra \mathfrak{g} , então $Z(G) \simeq \Gamma_1/\Gamma$.

Demonstração. Pelo Corolário 12.2.3 de [4], a exponencial de G é sobrejetiva, então seja $z = \exp(2H) \in Z(G)$, para algum $H \in \mathfrak{g}$. Pela Proposição 1.2.8, podemos escolher t de modo que $H \in \mathfrak{t}$ e, pelas equações (1.8) e (1.9), temos que $\alpha(H) \in \pi\mathbb{Z}$. Portanto, a exponencial escalonada pelo fator 2 define um homomorfismo sobrejetivo $\Gamma_1 \rightarrow Z(G)$ com núcleo Γ . \square

Sendo \mathfrak{g} compacta, existe um produto interno ad-invariante em \mathfrak{g} , denote-o por B . Definimos as co-raízes e o isomorfismo $\phi : \mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{t}^*$ em termos deste produto interno. O *Reticulado Fundamental* Γ_0 associado a $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ é o reticulado gerado com coeficientes em $\pi\mathbb{Z}$ pelas co-raízes $H_{\check{\alpha}}$, $\alpha \in \Delta$, ou seja, seus elementos são combinações lineares com coeficientes em \mathbb{Z} de vetores da forma $\pi H_{\check{\alpha}}$, onde identificamos $\check{\alpha}$ e $\phi^{-1}(\check{\alpha}) = H_{\check{\alpha}}$. Trata-se de um subreticulado de Γ_1 , pois $\beta(\pi H_{\check{\alpha}}) = \pi\beta(H_{\check{\alpha}}) \in \pi\mathbb{Z}$, já que $\beta(H_{\check{\alpha}}) \in \mathbb{Z}$ para qualquer $\beta \in \Delta$. Segue que $\text{Ad}(\exp(\pi H_{\check{\alpha}})) \in \{\pm 1\}$ para toda $\alpha \in \Delta$ pelas equações (1.8) e (1.9).

Proposição 1.3.14. Seja G um grupo conexo com álgebra \mathfrak{g} . Para todo $\alpha \in \Delta$, temos que $\exp(2\pi H_{\check{\alpha}}) = 1$, ou seja, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.

Demonstração. Para um par hiperbólico $X, Y \in \mathfrak{m}_\alpha$ e $H \in \mathfrak{t}$ arbitrário, temos

$$\begin{aligned} B(H, [X, Y]) &= B([H, X], Y) \\ &= \alpha(H)B(Y, Y) \\ &= B(H, H_\alpha)B(Y, Y) \\ &= B(H, B(Y, Y)H_\alpha) \end{aligned}$$

e isto mostra que $[X, Y] = B(X, X)H_\alpha = B(Y, Y)H_\alpha$, já que B é um produto interno.

Denote $H'_\alpha = H_{\check{\alpha}}/2$, então temos as seguintes relações

$$[H'_\alpha, X] = \alpha(H'_\alpha)Y = Y, \quad [H'_\alpha, Y] = -\alpha(H'_\alpha)X = -X, \quad [X, Y] = B(X, X)H_\alpha.$$

Redimensionando para ter $B(X, X) = 1/B(H_\alpha, H_\alpha) = B(Y, Y)$, obtemos

$$[H'_\alpha, X] = Y, \quad [H'_\alpha, Y] = -X, \quad [X, Y] = H'_\alpha.$$

logo, $\mathfrak{u}(\alpha) = \langle H'_\alpha, X, Y \rangle$ é uma subálgebra de \mathfrak{g} isomorfa a $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(3)$. O grupo conexo $U = \langle \exp(\mathfrak{u}(\alpha)) \rangle \leq G$ é compacto pela Proposição 1.3 do capítulo V de [5]. Pela teoria de recobrimentos simplesmente conexos de grupos de Lie, temos que U é isomorfo a $\mathrm{SO}(3)$ ou ao seu recobrimento universal $\mathrm{Spin}(3) \simeq \mathrm{SU}(2)$, pois $Z(\mathrm{Spin}(3)) = \pm 1$ (veja a Proposição 5.3.2 de [7]). As raízes de $\mathfrak{u}(\alpha)$ têm valores inteiros sobre H'_α , então $\mathrm{Ad}(\exp(\pi H'_\alpha)) \in \{\pm 1\}$, donde segue que $\exp(\pi H_\alpha) = \exp(2\pi H'_\alpha)$ está em $Z(U)$. Sendo $Z(U)$ isomorfo a $\{1\}$ ou a $\{\pm 1\}$, temos que $\exp(2\pi H_\alpha) = \exp(\pi H_\alpha)^2 = 1$, logo, $\pi H_\alpha \in \Gamma$. \square

Com esta Proposição completamos a demonstração do seguinte Teorema, que mostra que Γ é um reticulado em \mathfrak{t} , já que as co-raízes geram \mathfrak{t} .

Teorema 1.3.15. *Seja G um grupo conexo com álgebra \mathfrak{g} , então os reticulados satisfazem $\Gamma_0 \subseteq \Gamma \subseteq \Gamma_1$.*

Observação 1.3.16. Observe que as raízes de Δ são nulas em $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{t} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, então a hipótese de que \mathfrak{g} é semi-simples é importante para que Γ_1 e Γ_0 sejam reticulados de \mathfrak{t} conforme a Definição 1.3.10. Caso $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{t} \neq 0$, ou seja, caso \mathfrak{g} não fosse semi-simples, as co-raízes não poderiam gerar \mathfrak{t} , então Γ_0 não poderia ser reticulado. Além disso, escrevendo $\mathfrak{t} = \hat{\mathfrak{t}} \oplus (\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{t})$, vemos que Γ_1 é a soma de um reticulado em $\hat{\mathfrak{t}}$ com o espaço $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{t}$.

Sejam G um grupo conexo com álgebra \mathfrak{g} e $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$ o recobrimento universal de G , em que \tilde{G} é um grupo de Lie simplesmente conexo com álgebra \mathfrak{g} . Como π é também um homomorfismo, G é o quociente de \tilde{G} pelo subgrupo discreto $\ker \pi \leq Z(\tilde{G})$ e, além disso, $\ker \pi$ é isomorfo ao grupo fundamental $\pi_1(G)$ (veja o Teorema 7.15 de [6]). O Teorema 13.17 de [3] nos diz que, para $\gamma \in \Gamma$, a curva fechada $[0, 1] \ni t \mapsto \exp(t\gamma)$ é homotópica a um ponto em G se, e somente se, $\gamma \in \Gamma_0$. Em particular, para $G = \tilde{G}$, temos que $\Gamma \subseteq \Gamma_0$, logo, o reticulado Γ_0 coincide com Γ . Segue que $Z(\tilde{G}) \simeq \Gamma_1/\Gamma_0$ pela Proposição 1.3.13.

Teorema 1.3.17. *Seja G um grupo conexo com álgebra \mathfrak{g} , então $\pi_1(G) \simeq \Gamma/\Gamma_0$.*

Demonstração. Observe inicialmente que $\pi(Z(\tilde{G})) \subseteq Z(G)$, então π restringe a um homomorfismo $Z(\tilde{G}) \rightarrow Z(G)$ que podemos considerar, com as devidas identificações, como um homomorfismo $\pi_0 : \Gamma_1/\Gamma_0 \rightarrow \Gamma_1/\Gamma$. O núcleo desse homomorfismo é Γ/Γ_0 e deve ser isomorfo a $\ker \pi \simeq \pi_1(G)$.

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_1/\Gamma_0 & \xrightarrow{\phi} & Z(\tilde{G}) \\ \downarrow \pi_0 & & \downarrow \pi \\ \Gamma_1/\Gamma & \xrightarrow{\psi} & Z(G) \end{array}$$

De fato, denote $\phi : \Gamma_1/\Gamma_0 \rightarrow Z(\tilde{G})$ e $\psi : \Gamma_1/\Gamma \rightarrow Z(G)$ os respectivos isomorfismos, que são dados por $\phi(v + \Gamma_0) = \exp_{\tilde{G}}(2v)$ e $\psi(v + \Gamma) = \exp_G(2v)$. Observe ainda que $\exp_{\tilde{G}} = \pi \circ \exp_G$, então defina $\pi_0 = \psi^{-1} \circ \pi \circ \phi$, deste modo

$$\begin{aligned}\pi_0(v + \Gamma_0) &= \psi^{-1} \circ \pi(\exp_{\tilde{G}}(2v)) \\ &= \psi^{-1}(\exp_G(2v)) \\ &= v + \Gamma,\end{aligned}$$

e segue o que afirmamos no primeiro parágrafo. \square

Como consequência temos que um grupo conexo G com álgebra compacta e semi-simples é simplesmente conexo se, e somente se, $\Gamma = \Gamma_0$. Além disso, o Corolário 1.4 do capítulo V de [5] nos diz que, se H é um grupo conexo com álgebra compacta \mathfrak{h} (não necessariamente semi-simples), então $H = V \times G$, em que V é um espaço vetorial e G é conexo, tem álgebra semi-simples e é um compacto maximal (no sentido de que G contém todos os subgrupos compactos de H). Pela Proposição 1.12 de [8], temos que $\pi_1(H) = \pi_1(V) \times \pi_1(G) = \pi_1(G)$. Dessa forma, o grupo fundamental de grupos de Lie conexos com álgebra compacta pode ser calculado a partir dos grupos conexos com álgebra compacta e semi-simples.

1.3.2 O grupo fundamental de $\mathrm{SO}(4)$

Relembre os Exemplos 1.2.6 e 1.3.6. Seja $\mathfrak{u} = \mathfrak{so}(4)$ e $\mathfrak{t} = \langle U_{12}, U_{34} \rangle$. Denotando $H = tU_{12} + sU_{34} \in \mathfrak{t}$, temos o sistema de raízes $\Delta(\mathfrak{u}, \mathfrak{t}) = \{\pm\alpha, \pm\lambda\}$ cujas raízes satisfazem

$$\alpha(H) = t - s, \quad \lambda(H) = t + s.$$

Sendo \mathfrak{u} semi-simples e compacta, a forma $B = -\frac{1}{4}\beta$, em que β denota a forma de Cartan-Killing de \mathfrak{u} , se restringe a um produto interno em \mathfrak{t} tal que U_{12} e U_{34} formam uma base ortonormal.

É fácil ver então que $H_\alpha = U_{12} - U_{34}$ e $H_\lambda = U_{12} + U_{34}$ e, como $B(H_\alpha, H_\alpha) = 2 = B(H_\lambda, H_\lambda)$, temos que as co-raízes $H_{\check{\alpha}}$ e $H_{\check{\lambda}}$ coincidem com H_α e H_λ respectivamente. Segue que

$$\Gamma_0 = \pi(\mathbb{Z}H_\alpha + \mathbb{Z}H_\lambda).$$

Para determinar Γ , observe que

$$\exp(2H) = \begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) & 0 & 0 \\ -\sin(2t) & \cos(2t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2s) & \sin(2s) \\ 0 & 0 & -\sin(2s) & \cos(2s) \end{pmatrix},$$

de modo que $H \in \Gamma$ se, e somente se, $t, s \in \pi\mathbb{Z}$ e temos que

$$\Gamma = \pi(\mathbb{Z}U_{12} + \mathbb{Z}U_{34}).$$

Para que $H = tU_{12} + sU_{34} \in \gamma_1$, devemos ter $t - s = \alpha(H) \in \pi\mathbb{Z}$ e $t + s = \lambda(H) \in \pi\mathbb{Z}$ ou, equivalentemente, então reticulado central é dado por

$$\Gamma_1 = \{tU_{12} + sU_{34} : t + s, t - s \in \pi\mathbb{Z}\}.$$

A Figura 1.2 ilustra os reticulados associados a $\mathrm{SO}(4)$. Os pontos verdes representam elementos de Γ_1 que não estão nos outros reticulados; os azuis, elementos de Γ que não estão em Γ_0 e os vermelhos, os elementos de Γ_0 . O ponto preto central representa a origem de t . As linhas tracejadas representam os hiperplanos do diagrama, sendo que aquelas que passam pela origem são os hiperplanos de raiz $\alpha = 0$ e $\lambda = 0$.

Vamos determinar agora a que grupo o quociente Γ/Γ_0 é isomorfo. Observe inicialmente que, para $k \in \mathbb{Z}$, temos $kH_\alpha + kH_\lambda = 2kU_{12}$ e $-kH_\alpha + kH_\lambda = 2kU_{34}$, logo, $2\pi\mathbb{Z}U_{12} \subseteq \Gamma_0$ e $2\pi\mathbb{Z}U_{34} \subseteq \Gamma_0$. Por outro lado, todo elemento de $\gamma = \pi(kU_{12} + nU_{34}) \in \Gamma$ está em Γ_0 se, e somente se, $k - n \in 2\mathbb{Z}$. Por exemplo,

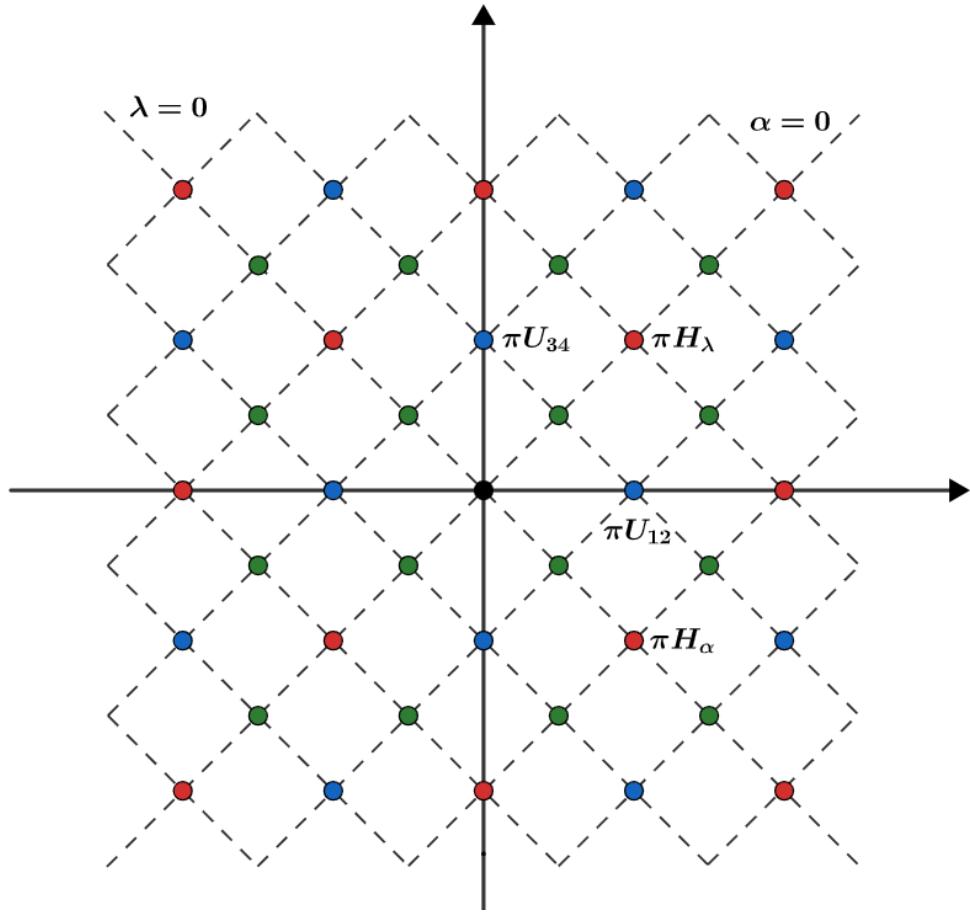
$$\begin{aligned} 3\pi U_{12} + 8\pi U_{34} &= 3\pi H_\lambda + 5\pi U_{34} \notin \Gamma_0 \\ 3\pi U_{12} + 9\pi U_{34} &= 3\pi H_\lambda + 6\pi U_{34} \in \Gamma_0. \end{aligned}$$

Podemos escrever então

$$\Gamma_0 = \{\gamma \in \Gamma : \alpha(\gamma) \in 2\pi\mathbb{Z}\}.$$

Considere o homomorfismo $\Gamma \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dado por $\gamma \mapsto \frac{1}{\pi}\alpha(\gamma) \pmod{2\mathbb{Z}}$. Claramente, é um homomorfismo sobrejetivo com núcleo Γ_0 . Segue do Teorema 1.3.17 que

$$\pi_1(\mathrm{SO}(4)) \simeq \Gamma/\Gamma_0 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Figura 1.2 : Reticulados associados ao grupo $SO(4)$.

1.3.3 Equivalentes Focais

Nesta subseção vamos trabalhar algumas propriedades e resultados envolvendo sistemas de raízes que serão aplicados no capítulo 3. Aqui, \mathfrak{g} denota uma álgebra de Lie compacta e \mathfrak{t} , uma subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} . Os resultados demonstrados aqui valem igualmente caso \mathfrak{g} seja uma álgebra ortogonal involutiva e \mathfrak{t} seja um subespaço de Cartan (veja a Seção 1.4). Um dos motivos para que eles continuem válidos também no contexto de álgebras ortogonais involutivas é que os reticulados considerados em ambos são os mesmos. Além disso, $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ e $\Delta_\sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ são ambos sistemas de raízes e compartilham todas as propriedades relevantes para os resultados apresentados nesta seção. As demonstrações que precisarem de adaptações serão mencionadas.

O *Diagrama de Stiefel* de \mathfrak{g} é o conjunto

$$\rho = \{H \in \mathfrak{t} : \alpha(H) \in \pi\mathbb{Z} \text{ para algum } \alpha \in \Delta\}. \quad (1.11)$$

Trata-se da união de todos os hiperplanos $\alpha = k\pi$, $\alpha \in \Delta$, os quais são paralelos aos hiperplanos de raíz $\alpha = 0$.

Dois pontos $X, Y \in \mathfrak{t}$ são Γ -equivalentes se $X - Y \in \Gamma$ e são chamados equivalentes focais se forem Γ -equivalentes e $|X| = |Y|$. Sejam $H \in \mathfrak{t}$ fixado, $q = \exp(H)$ e W o grupo de Weyl de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$, definimos

$$W^q = \{w \in W : wH \in H + \Gamma\}.$$

Para $w \in W^q$, temos que $\exp(wH) = \exp(H)$. Denotamos por W_0^q o grupo gerado pelas reflexões em torno dos hiperplanos de raíz $\alpha = 0$, tais que α satisfaz $\alpha(H) \in \pi\mathbb{Z}$. Trata-se de um subgrupo de W^q , uma vez que, se $\alpha(H) \in \pi\mathbb{Z}$, temos

$$r_\alpha(H) - H = -\alpha(H) \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle} H_\alpha \in \Gamma_0 \subseteq \Gamma, \quad (1.12)$$

de modo que devemos ter $r_\alpha(H) \in H + \Gamma$.

Observe ainda que W_0^q é normal em W^q ; dado $w \in W^q$ e $r_\alpha \in W_0^q$, temos que $wr_\alpha w^{-1} = r_{w^*\alpha}$ e, sendo $w^{-1}(H) = H + \gamma$ para alguma $\gamma \in \Gamma$, temos $w^*\alpha(H) = \alpha(w^{-1}(H)) = \alpha(H + \gamma) \in \pi\mathbb{Z}$, uma vez que $\Gamma \subseteq \Gamma_1$. Logo, $wr_\alpha w^{-1} \in W_0^q$.

Proposição 1.3.18. Se $w \in W_0^q$, então $wH \in H + \Gamma_0$. Por outro lado, se $w \in W^q$ e $wH \in H + \Gamma_0$, então $w \in W_0^q$.

Demonastração. Pela equação (1.12), temos que $r_\alpha(H) \in H + \Gamma_0$ se, e somente se, $r_\alpha \in W_0^q$. Seja $w = r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_n}$ um produto de reflexões de W_0^q . As igualdades abaixo mostram que uma reflexão qualquer r_α deixa invariante o reticulado Γ_0 .

$$\begin{aligned} r_\alpha(\pi H_{\check{\beta}}) - \pi H_{\check{\beta}} &= -2\pi \frac{\langle \alpha, \check{\beta} \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} H_\alpha \\ &= -4\pi \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle} H_\alpha \\ &= -\pi k H_{\check{\alpha}} \in \Gamma_0, \end{aligned}$$

em que $k = 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} \in \mathbb{Z}$. Segue que $r_\alpha(\pi H_{\check{\beta}}) \in \Gamma_0$ e, por linearidade, temos $r_\alpha(\Gamma_0) \subseteq \Gamma_0$. Portanto, $wH \in H + \Gamma_0$.

Sejam α e β raízes. Aplicando a equação (1.12) repetidamente e usando o que foi mostrado no parágrafo anterior, temos que

$$\begin{aligned} r_\beta r_\alpha(H) &= r_\beta(H) - \alpha(H)r_\beta(H_\alpha) \\ &= H - \beta(H)H_\beta - \alpha(H)\gamma_0, \end{aligned}$$

em que $\pi\gamma_0 \in \Gamma_0$, ou seja, γ_0 é uma combinação linear de co-raízes com coeficientes em \mathbb{Z} . Por indução, mostra-se que

$$r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_k}(H) = H - \sum_{j=1}^k \alpha_j(H)\gamma_j, \quad (1.13)$$

com $\pi\gamma_j \in \Gamma_0$. Segue que $r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_k}(H) \in H + \Gamma_0$ se, e somente se, $\alpha_j(H) \in \pi\mathbb{Z}$ para todo $j = 1, \dots, k$.

Suponha agora que $w \in W^q$ e $wH \in H + \Gamma_0$. Escrevendo $w = r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_k}$, segue da equação (1.13) que $r_{\alpha_j} \in W_0^q$ para $j = 1, \dots, k$, de modo que $w \in W_0^q$.

□

Dada a ação transitiva de um grupo G em um conjunto X , um *domínio fundamental* para esta ação é um subconjunto F de X que intercepta cada órbita da ação em exatamente um ponto. Desta definição segue que $G \cdot F = X$. Os conjuntos definidos abaixo nos ajudam a caracterizar um domínio fundamental para o grupo Γ , aqui visto como um grupo de translações em \mathfrak{t} .

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \{H \in \mathfrak{t} : |H| < |H + \gamma|, \text{ para todo } \gamma \in \Gamma \setminus \{0\}\} \\ \overline{\mathcal{D}} &= \{H \in \mathfrak{t} : |H| \leq |H + \gamma|, \text{ para todo } \gamma \in \Gamma\} \end{aligned}$$

Lema 1.3.19 (Lema 4.2 de [9]). Sejam $X, Y \in \mathfrak{t}$ equivalentes focais distintos. Para qualquer $\varepsilon > 0$, $(1 + \varepsilon)X$ e $Y + \varepsilon X$ são Γ -equivalentes distintos e $|(1 + \varepsilon)X| > |Y + \varepsilon X|$.

Demonstração. $(1 + \varepsilon)X$ e $Y + \varepsilon X$ são claramente distintos e Γ -equivalentes, já que a diferença deles é $Y - X \in \Gamma$. Usamos abaixo que $|X| = |Y|$ e a relação $\langle X, Y \rangle = |X||Y|\cos\theta$, em que θ é o ângulo entre X e Y . Temos que

$$\begin{aligned} |(1 + \varepsilon)X|^2 - |Y + \varepsilon X|^2 &= (1 + \varepsilon)^2|X|^2 - |Y|^2 - 2\varepsilon\langle X, Y \rangle - \varepsilon^2|X|^2 \\ &= |X|^2 - |Y|^2 + 2\varepsilon(|X|^2 - \langle X, Y \rangle) \\ &= 2\varepsilon(|X|^2 - |X||Y|\cos\theta) \\ &= 2\varepsilon|X|^2(1 - \cos\theta) > 0. \end{aligned}$$

Observe que $\theta \neq 0$ porque X e Y são distintos e têm mesma norma. \square

A próxima proposição mostra que existe um domínio fundamental de Γ contido entre \mathcal{D} e $\overline{\mathcal{D}}$. Pelo item 3, se $H \in \mathcal{D}$, temos que $|H|$ é menor que $|H + \gamma|$ para todo $\gamma \in \Gamma$, então as órbitas de Γ interceptam \mathcal{D} no máximo uma vez. O item 1 mostra que $\overline{\mathcal{D}}$ intercepta qualquer órbita de Γ , não necessariamente apenas uma vez. Portanto, existe um domínio fundamental F de Γ em \mathfrak{t} que satisfaz $\mathcal{D} \subseteq F \subseteq \overline{\mathcal{D}}$.

Proposição 1.3.20 (Proposição 4.3 de [9]). Seja $H \in \mathfrak{t}$ um elemento qualquer e $\mathcal{D}, \overline{\mathcal{D}}$ definidos como anteriormente, então valem as seguintes afirmações.

1. Dado $H \in \mathfrak{t}$, o elemento de menor norma em $H + \Gamma$ pertence a $\overline{\mathcal{D}}$.
2. $\overline{\mathcal{D}}$ é convexo, compacto e não é vazio.
3. \mathcal{D} é o interior de $\overline{\mathcal{D}}$, de modo que $H \in \mathcal{D}$ se, e somente se, H é o único elemento de $H + \Gamma$ com norma mínima.
4. $\partial\overline{\mathcal{D}}$ é o conjunto dos $H \in \overline{\mathcal{D}}$ que possuem algum equivalente focal não-trivial em \mathfrak{t} .

Demonstração. Para o item 1, considere a função $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(\gamma) = |H + \gamma|$. Observe inicialmente que, em cada região limitada R de \mathfrak{t} , existem apenas uma quantidade finita de pontos em $R \cap \Gamma$. Claramente, $f \geq 0$ e $f(\Gamma)$ é um conjunto discreto em \mathbb{R} . Para $\gamma \in \Gamma$ satisfazendo $|\gamma| > 2|H|$, temos que

$$\begin{aligned} f(\gamma)^2 &= |H + \gamma|^2 = |H|^2 + 2|H||\gamma| \cos \theta + |\gamma|^2 \\ &> |H|^2(5 + 4 \cos \theta) \\ &\geq |H|^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $|\gamma| \leq 2|H|$, temos que $f(\gamma) = |H + \gamma| \leq |H| + |\gamma| \leq 3|H|$.

Seja R a bola fechada com centro na origem e raio $2|H|$, temos que $f(R) \subseteq [0, 3|H|]$ consiste de uma quantidade finita de pontos, então existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tal que $f(\gamma_0) \leq f(\gamma)$ para todo $\gamma \in \Gamma$, em particular $H + \gamma_0 \in \overline{\mathcal{D}}$.

O item 2 é demonstrado considerando a expressão $|H|^2 - |H + \gamma|^2$, que pode ser reescrita como $-2\langle H, \gamma \rangle - |\gamma|^2 = -2\langle H + \gamma/2, \gamma \rangle$, logo,

$$|H|^2 \leq |H + \gamma|^2 \iff 2\langle H + \gamma/2, \gamma \rangle \geq 0 \tag{1.14}$$

e esta é uma equação que define um semi-espacô fechado de \mathfrak{t} contendo a origem. Logo, $\overline{\mathcal{D}}$, é a intercessão de semi-espacos fechados e convexos de \mathfrak{t} , então é fechado e convexo.

Seja $H \in \overline{\mathcal{D}}$ e $\gamma \in \Gamma$. Usando a equação (1.14), temos que

$$-2\langle H, \gamma \rangle - |\gamma|^2 = -2\langle H + \gamma/2, \gamma \rangle \leq 0,$$

logo, H satisfaz $|\langle H, \gamma \rangle| \leq |\gamma|^2/2$. Como Γ é discreto e contém uma base de \mathfrak{t} , as coordenadas de H são uniformemente limitadas, donde segue que $\overline{\mathcal{D}}$ é limitado, logo, compacto. Além disso, $\overline{\mathcal{D}}$ não é vazio porque contém a origem.

Para mostrar os itens 3 e 4, vamos mostrar inicialmente que \mathcal{D} é aberto. Seja $X \in \mathfrak{t}$, para $|\gamma|$ suficientemente grande, temos que $|X| < |X - \gamma|$. Para determinar uma condição para que tenhamos $X \in \mathcal{D}$, observe que $|X|^2 - |X - \gamma|^2 = 2\langle X, \gamma \rangle - |\gamma|^2 \leq |\gamma|(2|X| - |\gamma|)$ e isto mostra que $|X| < |X - \gamma|$ para $|\gamma| > 2|X|$, logo, para verificar se $X \in \mathcal{D}$, basta considerar $|\gamma| \leq 2|X|$.

Seja $H \in \mathcal{D}$ e defina $\Gamma' = \{\gamma \in \Gamma : |\gamma| \leq 3|H|\}$, trata-se de um subconjunto finito de Γ . Seja

$$U = \{X \in \mathfrak{t} : |X| < 3|H|/2, |H - X| < -\mu/4R\},$$

em que R é o maximo entre os $|\gamma|$ com $\gamma \in \Gamma'$ e

$$\mu = \max\{2\langle H, \gamma \rangle - |\gamma|^2 : 0 \neq \gamma \in \Gamma'\} < 0.$$

É fácil ver que $H \in U$, vamos mostrar que $U \subseteq \mathcal{D}$.

Para $X \in U$, temos

$$\begin{aligned} |X|^2 - |X + \gamma|^2 &= 2\langle X, \gamma \rangle - |\gamma|^2 \\ &= 2\langle H, \gamma \rangle - |\gamma|^2 + 2\langle X - H, \gamma \rangle \\ &\leq \mu + 2|X - H||\gamma| \\ &< \mu - 2\frac{\mu}{4R}R \\ &= \frac{\mu}{2} < 0, \end{aligned}$$

onde, na segunda igualdade, somamos e subtraímos $2\langle H, \gamma \rangle$. Isto mostra que $X \in \mathcal{D}$ e, portanto, $U \subseteq \mathcal{D}$, logo, \mathcal{D} é aberto.

Para mostrar que \mathcal{D} é o interior de $\overline{\mathcal{D}}$, basta mostrar que $A = \overline{\mathcal{D}} - \mathcal{D}$ coincide com $\partial\overline{\mathcal{D}}$. Seja $H \in A$, então H possui um equivalente focal distinto de H , pois $H \notin \mathcal{D}$. Além disso, $(1 + \varepsilon)H \notin \overline{\mathcal{D}}$, pois $H \in \overline{\mathcal{D}}$ e $(1 + \varepsilon)H$ é estritamente maior que um de seus equivalentes focais (Lema 1.3.19). Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, temos que $H \in \partial\overline{\mathcal{D}}$. Reciprocamente, seja $H \in \partial\overline{\mathcal{D}} \subseteq \overline{\mathcal{D}}$, então $|H| \leq |H + \gamma|$ para $\gamma \in \Gamma$. Sendo $\overline{\mathcal{D}}$ fechado, todo aberto de \mathfrak{t} contendo H deve interceptar o complementar de $\overline{\mathcal{D}}$, então existe uma sequência $H_n \notin \overline{\mathcal{D}}$ tal que $H_n \rightarrow H$ e, consequentemente, para cada H_n , deve existir $\gamma_n \in \Gamma$ tal que $|H_n| > |H_n + \gamma_n|$. A sequência γ_n

deve ser limitada, uma vez que H_n converge. Logo, existe alguma subsequência convergente $\gamma_{n_k} \rightarrow \gamma \in \Gamma$ e devemos ter $|H| \geq |H + \gamma|$. Da definição de $|H|$, temos que $|H| = |H + \gamma|$, logo, $H \notin \mathcal{D}$ e segue que $H \in A$. Este argumento mostra que $\partial\overline{\mathcal{D}} = A = \overline{\mathcal{D}} - \mathcal{D}$, então \mathcal{D} é o interior de $\overline{\mathcal{D}}$.

Por fim, segue do item 3 que cada elemento $H \in \partial\overline{\mathcal{D}}$ satisfaz $|H| = |H + \gamma|$ para algum $0 \neq \gamma \in \Gamma$, pois H não pode ser o único de norma mínima em $H + \Gamma$, já que $H \notin \mathcal{D}$. Isto termina a demonstração do item 4. \square

Para os próximos resultados, considere os seguintes conjuntos.

$$\mathcal{D}_0 = \{H \in \mathfrak{t} : \alpha(H) < \pi, \text{ para toda } \alpha \in \Delta\}, \quad (1.15)$$

$$\overline{\mathcal{D}_0} = \{H \in \mathfrak{t} : \alpha(H) \leq \pi, \text{ para toda } \alpha \in \Delta\}. \quad (1.16)$$

Exemplo 1.3.21. Relembre a Subseção 1.3.3, em que calculamos o grupo fundamental de $\text{SO}(4)$ e o reticulado da Figura 1.2. A Figura 1.3 abaixo ilustra as regiões \mathcal{D} e \mathcal{D}_0 em uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{so}(4)$. A região amarela representa \mathcal{D} e a região acinzentada, a qual contém a região amarela, representa \mathcal{D}_0 .

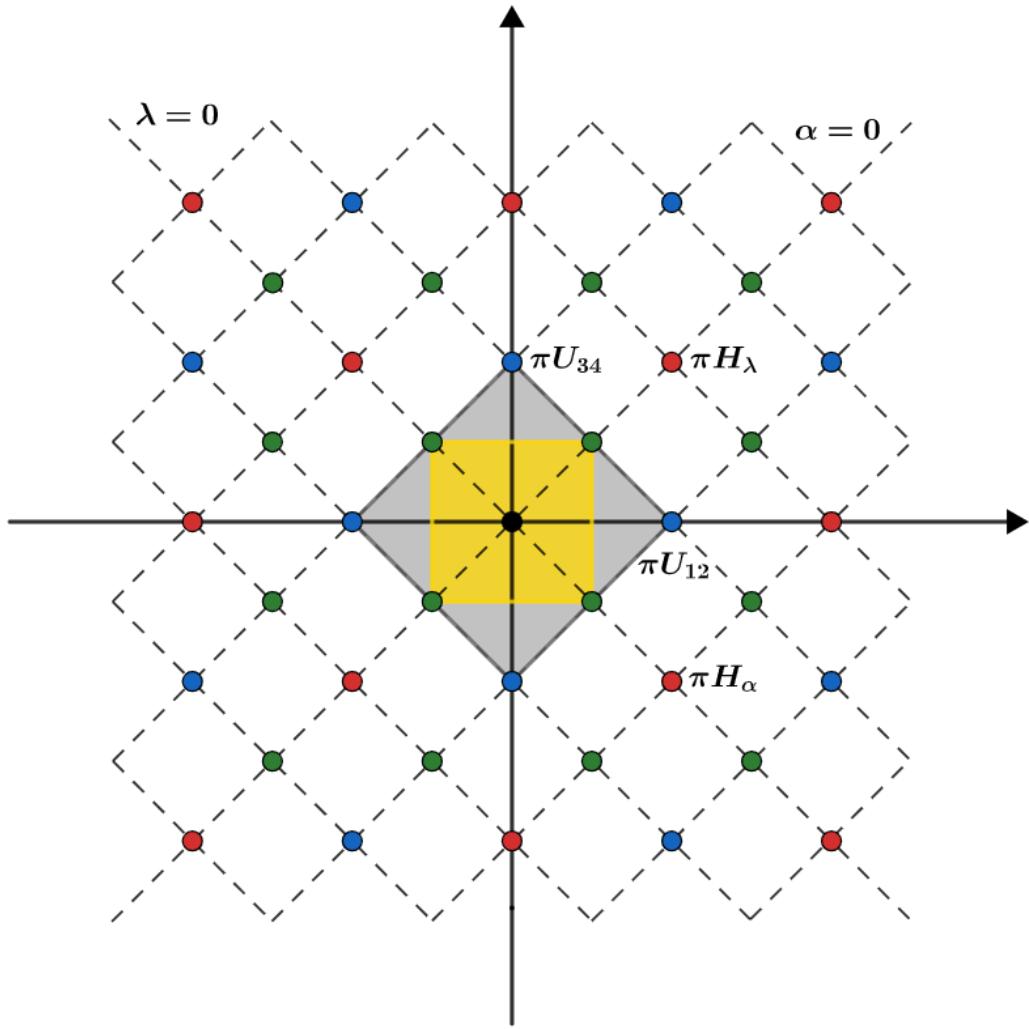


Figura 1.3 : Regiões \mathcal{D} e \mathcal{D}_0 em uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{so}(4)$.

Teorema 1.3.22 (Teorema 2.6 de [2]). *Se $\Gamma = \Gamma_0$, então*

1. *Existe um domínio fundamental de Γ entre \mathcal{D}_0 e $\overline{\mathcal{D}_0}$.*
2. *O conjunto de equivalentes focais de $H \in \overline{\mathcal{D}_0}$ coincide com a órbita $W_0^q \cdot H$.*
3. $W^q = W_0^q$.

Demonastração. Para o item 1, vamos mostrar que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$, então o resultado segue do comentário logo antes da Proposição 1.3.20. Para $\pi H_{\check{\alpha}} \in \Gamma_0$ e $H \in \mathfrak{t}$, temos que

$$\begin{aligned} |H + \pi H_{\check{\alpha}}|^2 - |H|^2 &= 2\pi \langle H, H_{\check{\alpha}} \rangle + \pi^2 |H_{\check{\alpha}}|^2 \\ &= 4\pi \frac{\langle H, H_{\alpha} \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} + 4\pi^2 \frac{\langle H_{\alpha}, H_{\alpha} \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle^2} \\ &= \frac{4\pi}{|\alpha|^2} (\alpha(H) + \pi), \end{aligned}$$

uma vez que $H_{\check{\alpha}} = 2H_{\alpha}/\langle \alpha, \alpha \rangle$.

Seja $v = \pi \sum_{j=1}^n H_{\check{\alpha}_j}$ um elemento de Γ_0 , em que podemos ter $H_{\check{\alpha}_j} = H_{\check{\alpha}_i}$ mesmo que $i \neq j$.

Supomos que v é escrito com o número mínimo de parcelas possível. Uma consequência direta desta hipótese é que não podemos ter $H_{\check{\alpha}_j} = -H_{\check{\alpha}_i}$ para $i \neq j$. Além disso, esta hipótese implica que $\langle H_{\check{\alpha}_i}, H_{\check{\alpha}_j} \rangle \geq 0$, para $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Para entender isto, observe inicialmente que as co-raízes formam um sistema de raízes $\check{\Delta}$ (Proposição 1.3.5). Suponha que $\langle H_{\check{\alpha}_i}, H_{\check{\alpha}_j} \rangle < 0$. Como $H_{\check{\alpha}_j}$ e $H_{\check{\alpha}_i}$ não são proporcionais, pois uma não pode ser a oposta da outra, segue do Lema 6.4.8 de [4] que

$$H_{\check{\alpha}_i} - (-H_{\check{\alpha}_j}) = H_{\check{\alpha}_i} + H_{\check{\alpha}_j} \in \check{\Delta},$$

ou seja, o número de parcelas na soma que define v poderia ser reduzido.

Nestas condições, temos que

$$\begin{aligned} |H + v|^2 - |H|^2 &= 2\pi \sum_{j=1}^n \langle H, H_{\check{\alpha}_j} \rangle + \pi^2 \sum_{j=1}^n \langle H_{\check{\alpha}_j}, H_{\check{\alpha}_j} \rangle + 2\pi^2 \sum_{i < j} \langle H_{\check{\alpha}_i}, H_{\check{\alpha}_j} \rangle \\ &\geq \sum_{j=1}^n \frac{4\pi}{|\alpha_j|^2} (\alpha_j(H) + \pi) + 2\pi^2 \sum_{i < j} \langle H_{\check{\alpha}_i}, H_{\check{\alpha}_j} \rangle \\ &\geq \sum_{j=1}^n \frac{4\pi}{|\alpha_j|^2} (\alpha_j(H) + \pi). \end{aligned}$$

Se $H \in \mathcal{D}_0$, temos, por definição, que $|\alpha_j(H)| < \pi$, então as inequações acima mostram que $H \in \mathcal{D}$. Suponha que existe $H \in \mathcal{D} - \mathcal{D}_0$, então existe $\alpha \in \Delta$ tal que $\alpha(H) > \pi$. Sendo $H_{-\check{\alpha}}$ a co-raiz correspondente a $-\alpha$, temos que

$$|H + \pi H_{-\check{\alpha}}|^2 - |H|^2 = \frac{4\pi}{|\alpha|^2} (-\alpha(H) + \pi) < 0,$$

de modo que

$$|H + \pi H_{-\check{\alpha}}| < |H|$$

e concluimos que $H \notin \mathcal{D}$, o que é absurdo. Segue que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$.

Vamos mostrar agora o item 2. Seja $H \in \overline{\mathcal{D}_0} = \overline{\mathcal{D}}$, então $|\alpha(H)| \leq \pi$ para toda raiz α e $|H| \leq |H + \gamma|$ para qualquer $\gamma \in \Gamma$. Dado $w \in W_0^q$, $wH \in H + \Gamma$ e $|wH| = |H|$, então H e wH são equivalentes focais. Por outro lado, seja $H + v$ um equivalente focal de H , com $v \in \Gamma = \Gamma_0$, então

$$0 = |H + v|^2 - |H|^2 = \sum_{j=1}^n \frac{4\pi}{|\alpha_j|^2} (\alpha_j(H) + \pi) + 2\pi^2 \sum_{i < j} \langle H_{\check{\alpha}_i}, H_{\check{\alpha}_j} \rangle,$$

em que

$$\sum_{j=1}^n \frac{4\pi}{|\alpha_j|^2} (\alpha_j(H) + \pi) \geq 0, \quad \sum_{i < j} \langle H_{\check{\alpha}_i}, H_{\check{\alpha}_j} \rangle \geq 0,$$

logo, $\alpha_j(H) = -\pi$ para $j = 1, \dots, n$, já que $|\alpha_j(H)| \leq \pi$, para $j = 1, \dots, n$. Além disso, devemos ter $\langle H_{\check{\alpha}_i}, H_{\check{\alpha}_j} \rangle = 0$ para $i, j \in \{1, \dots, n\}$ distintos. Em particular, temos que $H_{\check{\alpha}_i} \neq H_{\check{\alpha}_j}$ e $r_{\alpha_j}(H_{\check{\alpha}_i}) = H_{\check{\alpha}_i}$ se $i \neq j$. Sendo

$$r_{\alpha_j}(H) = H - 2 \frac{\alpha_j(H)}{|\alpha_j|^2} H_{\alpha_j} = H + \pi H_{\check{\alpha}_j},$$

temos que

$$H + v = H + \pi \sum_{j=1}^n H_{\check{\alpha}_j} = r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_n}(H).$$

Como $\alpha_j(H) \in \pi\mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, n$, temos que $r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_n} \in W_0^q$ e, portanto, $H + v \in W_0^q H$. Isto demonstra o item 2.

Por fim, seja $w \in W^q$ e $H \in \overline{\mathcal{D}_0}$ um elemento regular, i.e., H está em alguma câmara de Weyl. Por definição de W^q , sabemos que wH é equivalente focal de H , então segue do item 2 que existe $v \in W_0^q$ tal que $wH = vH$, ou seja, $v^{-1}wH = H$. Como H é regular, temos que $v^{-1}w$ fixa uma câmara de Weyl, então $w = v \in W_0^q$ (Teorema 1.3.8). \square

Observação 1.3.23. Para demonstrar o item 3 do Teorema anterior, utilizamos o fato de que um elemento do grupo de Weyl que fixa uma câmara de Weyl é a identidade, o que é justificado pelo Teorema 1.3.8. Este resultado também é válido no contexto de álgebras ortogonais involutivas compactas. Na demonstração do Teorema anterior, basta trocar o Teorema 1.3.8 pela Proposição 1.4.18.

1.4 Álgebras de Lie Ortogonais Involutivas

Uma *involução de \mathfrak{g}* é um automorfismo $\sigma \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ tal que $\sigma^2 = \text{id}$. Uma outra forma de definir o conceito álgebra semi-simples é usando uma involução especial chamada de involução de Cartan. Seja β a forma de Cartan-Killing de \mathfrak{g} , a involução σ será chamada de *Involução de Cartan* se a forma definida em \mathfrak{g} por

$$\langle X, Y \rangle = -\beta(X, \sigma(Y))$$

for um produto interno. Neste caso, ela recebe o nome de *Produto Interno de Cartan*.

Teorema 1.4.1. *Usando a notação do parágrafo anterior, \mathfrak{g} é semi-simples se, e só se, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno.*

Demonstração. Suponha que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno e seja \mathfrak{j} um ideal de \mathfrak{g} . Considere $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ e observe que

$$\begin{aligned} \langle \text{ad}(X)Y, Z \rangle &= -\beta([X, Y], \sigma(Z)) \\ &= -\beta(Y, [\sigma(Z), X]) \\ &= -\beta(Y, \sigma(-[\sigma(X), Z])) \\ &= -\beta(Y, \sigma([- \sigma(X), Z])) \\ &= \langle Y, \text{ad}(-\sigma(X))Z \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, escolhendo $Y \in \mathfrak{j}^\perp$, $Z \in \mathfrak{j}$ e $X \in \mathfrak{g}$, temos que $\text{ad}(-\sigma(X))Z \in \mathfrak{j}$ porque \mathfrak{j} é um ideal, logo,

$$0 = \langle Y, \text{ad}(-\sigma(X))Z \rangle = \langle \text{ad}(X)Y, Z \rangle,$$

de modo que $[X, Y] \in \mathfrak{j}^\perp$, logo, \mathfrak{j}^\perp é um ideal. Além disso, $\mathfrak{j} \cap \mathfrak{j}^\perp = 0$, pois $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno, então podemos escrever $\mathfrak{g} = \mathfrak{j} \oplus \mathfrak{j}^\perp$. Isto mostra que \mathfrak{g} é redutível (veja a Definição 5.7.1 e o Lema 5.7.2 de [4]). Devemos ter $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$, pois qualquer $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ é ortogonal a qualquer outro vetor de \mathfrak{g} o que não pode ocorrer porque $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno. Segue que \mathfrak{g} é semi-simples.

Suponha agora que \mathfrak{g} é semi-simples, a existência de uma involução de Cartan está relacionada com a existência de formas reais compactas de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ e segue do Lema 13.2.10 de [4]. \square

Seja \mathfrak{g} uma álgebra semi-simples não-compacta com involução de Cartan σ e escreva $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{s}$ como soma direta dos autoespaços ± 1 de σ e considere uma subálgebra \mathfrak{t} de \mathfrak{g}

contida em \mathfrak{s} . É fácil ver que

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subseteq \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subseteq \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{s}] \subseteq \mathfrak{s},$$

então \mathfrak{t} deve ser necessariamente abeliana. Logo, qualquer subálgebra maximal $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{s}$ é uma subálgebra abeliana maximal. Vamos obter uma decomposição em espaços de raízes de \mathfrak{g} similar àquela obtida anteriormente, mas desta vez com respeito à subálgebra \mathfrak{t} . Da demonstração do teorema anterior e observando que $\sigma|_{\mathfrak{s}} = -\text{id}$, temos que $\text{ad}(H)$ é simétrico com relação ao produto interno de Cartan para todo $H \in \mathfrak{t}$. Portanto, sendo \mathfrak{t} abeliana, $\text{ad}(\mathfrak{t})$ é uma família comutativa de operadores diagonalizáveis, logo, são simultaneamente diagonalizáveis. Além disso, $\text{ad}(X)$ é anti-simétrico com relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para todo $X \in \mathfrak{k}$ uma vez que $\sigma|_{\mathfrak{k}} = \text{id}$.

Observação 1.4.2. A hipótese que \mathfrak{g} não seja compacta serve para garantir que $\mathfrak{s} \neq 0$, pois $\text{ad}(H), H \in \mathfrak{s}$, é simétrico em relação ao produto interno de Cartan e, se \mathfrak{g} for compacta, os operadores $\text{ad}(H)$ devem ter autovalores puramente imaginários ou nulos. Portanto, $\text{ad}(H) = 0$ para $H \in \mathfrak{s}$, caso \mathfrak{g} seja compacta e semi-simples, e segue que $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$. Este argumento mostra que numa álgebra compacta e semi-simples, uma involução de Cartan deve ser a identidade, logo, a forma $-\beta$ deve ser um produto interno em \mathfrak{g} (veja a Observação 1.1.6).

Para $\alpha \in \mathfrak{t}^*$, defina

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \text{ad}(H)X = \alpha(H)X, H \in \mathfrak{t}\}.$$

O conjunto $\Delta_\sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ dos $\alpha \neq 0$ tais que $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$, é chamado de conjunto de *raízes restritas*. Sejam $\phi \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ um automorfismo que deixa \mathfrak{t} invariante e $X \in \mathfrak{g}_\alpha \neq 0$, então

$$\text{ad}(H)\phi(X) = \phi([\phi^{-1}(H), X]) = \alpha(\phi^{-1}(H))\phi(X) = (\phi^*\alpha)(H)\phi(X).$$

Segue que $\phi(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{\phi^*\alpha}$ e α é raiz se, e somente se, $\phi^*\alpha$ é raiz. Em particular, fazendo $\phi = \sigma$, obtemos que $-\alpha \in \Delta_\sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ sempre que $\alpha \in \Delta_\sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$.

Para entender a decomposição de \mathfrak{g} com respeito à representação $\text{ad}|_{\mathfrak{t}}$, é importante entender onde $\text{ad}(\mathfrak{t})$ age como transformação nula, ou seja, entender o centralizador $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t})$. Observe que σ age como $-\text{id}$ em \mathfrak{t} , então, para $X \in \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t})$, temos que $[\sigma(X), \mathfrak{t}] = \sigma([X, \sigma(\mathfrak{t})]) = 0$. Segue que $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t})$ é invariante por σ e podemos escrever

$$\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t}) = (\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t}) \cap \mathfrak{k}) \oplus (\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t}) \cap \mathfrak{s}).$$

Se $X \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) \cap \mathfrak{s}$, então $\mathbb{R}X + \mathfrak{t}$ é uma álgebra abeliana contendo \mathfrak{t} . Pela maximalidade de \mathfrak{t} , devemos ter $X \in \mathfrak{t}$, de modo que $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) \cap \mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{t}$ e, portanto, $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) \cap \mathfrak{s} = \mathfrak{t}$. Vale então a igualdade

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) = (\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) \cap \mathfrak{k}) \oplus \mathfrak{t}. \quad (1.17)$$

Denote $\mathfrak{m} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) \cap \mathfrak{k}$.

Teorema 1.4.3. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra semi-simples não compacta com decomposição de Cartan $\mathfrak{k} + \mathfrak{s}$ e $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{s}$ uma subálgebra abeliana maximal. Temos que*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + \mathfrak{t} + \sum_{\alpha \in \Delta_{\sigma}(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

Demonstração. Como $\text{ad}(\mathfrak{t})$ é uma família simultaneamente diagonalizável, podemos escrever $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ como uma soma de subespaços invariantes minimais por $\text{ad}(\mathfrak{t})$. Como trata-se de uma família comutativa de operadores, cada \mathfrak{g}_i é também invariante minimal de cada operador $\text{ad}(H)$, $H \in \mathfrak{t}$. De fato, seja $W \subseteq \mathfrak{g}_i$ o autoespaço associado ao autovalor $\alpha_i(H)$ de $\text{ad}(H)$ e $X \in W$. Para $Z \in \mathfrak{t}$, temos que

$$\text{ad}(H)\text{ad}(Z)X = \text{ad}(Z)\text{ad}(H)X = \alpha_i(H)\text{ad}(Z)H,$$

pois $0 = \text{ad}([H, Z]) = \text{ad}(H)\text{ad}(Z) - \text{ad}(Z)\text{ad}(H)$. Segue que W é invariante por $\text{ad}(\mathfrak{t})$ e, da minimalidade de \mathfrak{g}_i , segue que $W = \mathfrak{g}_i$. Portanto, qualquer $H \in \mathfrak{t}$ satisfaz $\text{ad}(H)|_{\mathfrak{g}_i} = \alpha_i(H)\text{id}_{\mathfrak{g}_i}$.

Observe que $\alpha_i \in \mathfrak{t}^*$, pois, em cada subespaço \mathfrak{g}_i , coincide com a função linear

$$\frac{1}{n_i} \text{tr}(\text{ad}(H)|_{\mathfrak{g}_i}),$$

em que $n_i = \dim(\mathfrak{g}_i)$. Portanto, $\alpha_i \in \Delta_{\sigma}(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \cup \{0\}$, já que $0 \neq \mathfrak{g}_i \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha_i}$. Segue que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \sum_{\alpha \in \Delta_{\sigma}(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})} \mathfrak{g}_{\alpha},$$

sendo que fica claro que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{m} + \mathfrak{t}$. Além disso, se $\alpha \neq \beta$, temos que $\mathfrak{g}_{\alpha} \cap \mathfrak{g}_{\beta} = 0$, pois, para $X \in \mathfrak{g}_{\alpha} \cap \mathfrak{g}_{\beta}$, é válido que $\alpha(H)X = [\mathfrak{h}, X] = \beta(H)X$ para todo $H \in \mathfrak{t}$, ou seja, $X = 0$. \square

Nesta seção, trataremos das álgebras ortogonais involutivas, que aparecem naturalmente no estudo de espaços simétricos (veja o Teorema 2.3.11). Uma involução σ dá origem a uma decomposição de \mathfrak{g} em autoespaços ± 1 , $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ em que σ age como $+id$ em \mathfrak{k} . Das relações

de colchete, vemos que existe uma representação de \mathfrak{k} em \mathfrak{s} dada por $\mathfrak{k} \ni X \mapsto \text{ad}(X)|_{\mathfrak{s}}$, que é chamada de representação de isotropia de \mathfrak{k} . Chamamos o par (\mathfrak{g}, σ) de *álgebra involutiva*.

Definição 1.4.4. Uma *álgebra ortogonal involutiva* é uma álgebra involutiva (\mathfrak{g}, σ) munida de um produto interno B que é $\text{ad}(\mathfrak{k})$ -invariante e também σ -invariante, ou seja,

$$\begin{aligned} B(\text{ad}(X)Y, Z) + B(Y, \text{ad}(X)Z) &= 0, \\ B(\sigma(Y), \sigma(Z)) &= B(Y, Z), \end{aligned}$$

para todos $X \in \mathfrak{k}$ e $Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Em particular, uma álgebra semi-simples não compacta munida com o produto interno de Cartan é ortogonal involutiva. Segue ainda da definição que os elementos do grupo de automorfismos internos gerados por \mathfrak{k} , denotado

$$\text{Inn}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}) := \langle e^{\text{ad } X} : X \in \mathfrak{k} \rangle,$$

deixam B invariante, isto segue do fato que os operadores $\text{ad}(X), X \in \mathfrak{k}$, são anti-simétricos com relação a B .

Observação 1.4.5. Numa álgebra ortogonal involutiva, temos que $B(\mathfrak{k}, \mathfrak{s}) = 0$, pois, para $X \in \mathfrak{k}$ e $Y \in \mathfrak{s}$, temos $B(X, Y) = B(\sigma(X), \sigma(Y)) = -B(X, Y)$. Além disso, qualquer produto interno Q que satisfaz $Q(\mathfrak{k}, \mathfrak{s}) = 0$ é σ -invariante. Para ver isto, escreva $Z = X + Y$ e $Z' = X' + Y'$ para $X, X' \in \mathfrak{k}$ e $Y, Y' \in \mathfrak{s}$, então

$$\begin{aligned} Q(\sigma(Z), \sigma(Z')) &= Q(\sigma(X), \sigma(X')) + Q(\sigma(X), \sigma(Y')) \\ &\quad + Q(\sigma(Y), \sigma(X')) + Q(\sigma(Y), \sigma(Y')) \\ &= Q(X, X') - Q(X, Y') - Q(Y, X') + Q(Y, Y') \\ &= Q(X, X') + Q(Y, Y') \\ &= Q(Z, Z'). \end{aligned}$$

Exemplo 1.4.6. Para a álgebra semi-simples $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ do Exemplo 1.2.4, temos que a involução $\sigma(X) = -X^t$ é uma involução de Cartan e, neste caso, $\mathfrak{h} = \langle H_1, H_2, H_3 \rangle \subseteq \mathfrak{s}$ é abeliana maximal, donde segue que as decomposições com relação a uma subálgebra de Cartan e a uma subálgebra abeliana maximal de \mathfrak{s} coincidem. A subálgebra \mathfrak{k} é gerada pelos $U_{ij}, i < j$, e é compacta isomorfa a $\mathfrak{so}(4)$ e \mathfrak{s} é gerado pelos V_{ij} junto com \mathfrak{h} .

O próximo Teorema é uma caracterização importante das álgebras ortogonais involutivas.

Teorema 1.4.7. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie, então (\mathfrak{g}, σ) é ortogonal involutiva se, e somente se, \mathfrak{k} é uma subálgebra compacta e existe um produto interno $\text{ad}(\mathfrak{k})$ -invariante em \mathfrak{s} .*

Demonstração. Se (\mathfrak{g}, σ) é ortogonal involutiva, existe um produto interno $\text{ad}(\mathfrak{k})$ -invariante em \mathfrak{k} , que é dado pela restrição do produto interno em \mathfrak{g} , isto mostra que \mathfrak{k} é compacta.

Suponha então que existe um produto interno F em \mathfrak{s} satisfazendo as hipóteses do Teorema. Existe também um produto interno B $\text{ad}(\mathfrak{k})$ -invariante em \mathfrak{k} , pela hipótese de compacidade de \mathfrak{k} . Defina o produto interno Q em \mathfrak{g} da seguinte forma:

$$Q(X, Y) = B(X, Y) \text{ se } X, Y \in \mathfrak{k}$$

$$Q(X, Y) = F(X, Y) \text{ se } X, Y \in \mathfrak{s}$$

$$Q(X, Y) = 0 \text{ se } X \in \mathfrak{k} \text{ e } Y \in \mathfrak{s}$$

Estendendo para \mathfrak{g} por linearidade, é fácil ver que (\mathfrak{g}, σ) munido do produto interno Q é uma álgebra ortogonal involutiva. Observe que Q é σ -invariante porque satisfaz $Q(\mathfrak{k}, \mathfrak{s}) = 0$ (veja a Observação 1.4.5). \square

Para álgebras semi-simples, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.4.8. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semi-simples. Se (\mathfrak{g}, σ) é ortogonal involutiva, então $\text{Inn}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ é um subgrupo compacto de $\text{Inn}(\mathfrak{g})$.*

Demonstração. Suponha que (\mathfrak{g}, σ) é ortogonal involutiva, e lembre-se que $\text{Inn}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ age como isometrias de B ; para concluir que é compacto, basta mostrar que é fechado em $GL(\mathfrak{g})$, já que $\text{Inn}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ deixa invariante um produto interno. A álgebra de Lie de $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ é álgebra das derivações $\text{Der}(\mathfrak{g})$ pelo Lema B.1.1 e, sendo \mathfrak{g} semi-simples, $\text{Der}(\mathfrak{g}) = \text{ad}(\mathfrak{g})$ (Teorema 5.5.14 de [4]). A componente da identidade de $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ deve ser então o grupo gerado por produtos de exponenciais $e^{\text{ad}(X)}$, $X \in \mathfrak{g}$, logo, coincide com $\text{Inn}(\mathfrak{g})$. Segue que $\text{Inn}(\mathfrak{g})$ é fechado em $GL(\mathfrak{g})$, pois $\text{Aut}(\mathfrak{g}) \leq GL(\mathfrak{g})$ é fechado.

Para concluir, vamos considerar a extensão de σ a um automorfismo de $\text{Inn}(\mathfrak{g})$ e mostrar que $\text{Inn}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ é a componente da identidade do conjunto de pontos fixos desse automorfismo. A partir de σ , definimos o automorfismo $\theta : \text{ad}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{ad}(\mathfrak{g})$, dado por $\theta(\text{ad}(X)) = \text{ad}(\sigma(X))$. Seja \tilde{G} o recobrimento universal de $\text{Inn}(\mathfrak{g})$; pelo Teorema 7.13 de [6], existe um automorfismo $\tilde{\theta} : \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ tal que $d\tilde{\theta}_1 = \theta$. Observe que $\text{Inn}(\mathfrak{g})$ tem centro trivial, como visto na seção 1.1 e \tilde{G} tem centro discreto, pois $\text{ad}(\mathfrak{g})$ tem centro nulo, então devemos ter $\text{Inn}(\mathfrak{g}) \simeq \tilde{G}/Z(\tilde{G})$. Como qualquer automorfismo, $\tilde{\theta}(Z(\tilde{G})) = Z(\tilde{G})$, então $\tilde{\theta}$ induz um automorfismo $\tilde{\sigma}$ de $\text{Inn}(\mathfrak{g})$ dado por $gZ(\tilde{G}) \mapsto \tilde{\theta}(g)Z(\tilde{G})$.

Com as devidas identificações, temos $d\tilde{\sigma}_1 = \theta$ e, em particular,

$$\tilde{\sigma}(e^{\text{ad}(X)}) = e^{\theta(\text{ad}(X))} = e^{\text{ad}(\sigma(X))}.$$

Desta equação, segue que $\text{Inn}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}) \leq \text{fix}(\tilde{\sigma})$. Por outro lado, suponha que

$$e^{t\text{ad}(X)} = \tilde{\sigma}(e^{t\text{ad}(X)}) = e^{t\text{ad}(\sigma(X))}.$$

Derivando em $t = 0$, temos que $\text{ad}(X) = \text{ad}(\sigma(X))$ e, da injetividade da representação adjunta de \mathfrak{g} , segue que $X \in \mathfrak{k}$. Portanto, a álgebra de Lie de $\text{fix}(\tilde{\sigma})$ é $\text{ad}(\mathfrak{k})$, donde segue que $\text{Inn}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ coincide com a componente da identidade $\text{fix}(\tilde{\sigma})_0$ de $\text{fix}(\tilde{\sigma})$. Por fim, temos a seguinte sequência de inclusões que mostra que $\text{Inn}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ é fechado em $GL(\mathfrak{g})$.

$$\text{Inn}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}) = \text{fix}(\tilde{\sigma})_0 \leq \text{fix}(\tilde{\sigma}) \leq \text{Inn}(\mathfrak{g}) = \text{Aut}(\mathfrak{g})_0 \leq \text{Aut}(\mathfrak{g}) \leq GL(\mathfrak{g}).$$

□

Uma subálgebra $\mathfrak{t} \leq \mathfrak{g}$ contida em \mathfrak{s} será necessariamente abeliana, como visto anteriormente. Uma subálgebra maximal de \mathfrak{g} contida em \mathfrak{s} é chamada *subespaço de Cartan*. Usamos esta nomenclatura para diferenciar do conceito usual de subálgebra de Cartan; veremos que os subespaços de Cartan fornecem decomposições em espaços de raízes similares àquelas obtidas anteriormente usando as subálgebras de Cartan.

No início desta seção, determinamos a decomposição em espaços de raízes no caso semi-simples não compacto. Vamos determinar a decomposição no caso compacto. Para tanto, é importante o seguinte Lema.

Lema 1.4.9. Seja \mathfrak{t} um subespaço de Cartan de $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{s}$. Se \mathfrak{g} é redutível, \mathfrak{t} está contida numa subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} .

Demonstração. A equação (1.17) vale em qualquer álgebra ortogonal involutiva, então escreva

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) = (\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) \cap \mathfrak{k}) \oplus \mathfrak{t}.$$

Seja \mathfrak{t}' uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) \cap \mathfrak{k}$, então $\mathfrak{h} := \mathfrak{t}' \oplus \mathfrak{t}$ é subálgebra de Cartan de $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$, pois uma subálgebra de Cartan de uma soma direta de álgebras é a soma direta de subálgebras de Cartan em cada componente (Lema B.1.2). Os operadores $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$, $X \in \mathfrak{k}$, são anti-simétricos, pois há um produto interno $\text{ad}(\mathfrak{k})$ -invariante em \mathfrak{g} , logo, são semi-simples (isto é, diagonalizáveis sobre \mathbb{C}). Sendo \mathfrak{g} redutível, a Proposição 1.15 do capítulo II de [5] implica que $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ é semi-simples se $X \in \mathfrak{s}$, de modo que $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$ consiste de operadores

semi-simples. Pela Proposição 6.1.12 de [4], segue que \mathfrak{h} é uma subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} contendo \mathfrak{t} . \square

Usando o Lema anterior, a decomposição em espaços de raízes de uma álgebra compacta com relação a uma subálgebra de Cartan do Teorema 1.2.5 e que as raízes de $\Delta_\sigma(\mathfrak{u}, \mathfrak{t})$ são restrições de raízes de \mathfrak{u} com respeito a alguma subálgebra de Cartan contendo \mathfrak{t} (Subseção 1.4.1), obtemos o seguinte resultado.

Teorema 1.4.10. *Seja (\mathfrak{g}, σ) uma álgebra involutiva compacta com decomposição $\mathfrak{k} + \mathfrak{s}$ e $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{s}$ um subespaço de Cartan. Então*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + \mathfrak{t} + \sum_{\alpha \in \Delta_\sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})} \mathfrak{m}_\alpha,$$

em que $\mathfrak{m} = \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t}) \cap \mathfrak{k}$ e os \mathfrak{m}_α são autoespaços generalizados da família de operadores $\text{ad}(\mathfrak{t})$.

Um vetor $H \in \mathfrak{t}$ é chamado *regular* se $\mathfrak{t} = \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(H) \cap \mathfrak{s}$. Segue da decomposição que o conjunto de raízes restritas $\Delta_\sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ é finito, então em todo subespaço de Cartan deve haver um elemento regular. No caso de álgebras compactas, vimos que as subálgebras de Cartan são todas conjugadas via automorfismos internos de \mathfrak{g} . O próximo Teorema é uma variação deste resultado que é muito importante no estudo de espaços simétricos compactos (veja o Teorema 2.4.6).

Teorema 1.4.11. *Seja (\mathfrak{g}, σ) uma álgebra ortogonal involutiva semi-simples ou compacta com produto interno B . Quaisquer dois subespaços de Cartan de \mathfrak{g} são conjugados por algum automorfismo de $\text{Inn}_\mathfrak{g}(\mathfrak{k})$.*

Demonstração. Esta demonstração é uma adaptação da demonstração da Proposição 1.2.8. Sejam $\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(H_1) \cap \mathfrak{s}$ e $\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(H_2) \cap \mathfrak{s}$ dois subespaços de Cartan de \mathfrak{g} . Se \mathfrak{g} é semi-simples, $\text{Inn}_\mathfrak{g}(\mathfrak{k})$ compacto pela Proposição 1.4.8. Vimos na Seção 1.1 que $\mathfrak{k} \leq \mathfrak{g}$ é compacta se \mathfrak{g} é compacta. O grupo $\text{Inn}_\mathfrak{g}(\mathfrak{k})$ é conexo e tem álgebra $\text{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{k})$. Observe que, sendo \mathfrak{k} compacta, é também redutível, logo, $\mathfrak{k} = \mathfrak{z}(\mathfrak{k}) \oplus [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$, em que $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$ é semi-simples (veja a Seção 1.1). Portanto, temos que $\text{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{k}) \simeq \mathfrak{k}/\mathfrak{z}(\mathfrak{k}) \simeq [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$ é semi-simples e compacta e segue que $\text{Inn}_\mathfrak{g}(\mathfrak{k})$ é um grupo compacto (veja o Teorema 1.3 do capítulo V de [5]). Considere então a função

$$\text{Inn}_\mathfrak{g}(\mathfrak{k}) \ni k \mapsto B(kH_1, H_2),$$

em que denotamos $kH_1 = \text{Ad}(k)H_1$. Esta função deve ter extremo em algum $k_0 \in \text{Inn}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$, donde segue que, para todo $X \in \mathfrak{k}$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} B(e^{\text{ad}(tX)} k_0 H_1, H_2) \Big|_{t=0} \\ &= B([X, k_0 H_1], H_2) \\ &= B(X, [k_0 H_1, H_2]), \end{aligned}$$

onde usamos a bi-linearidade do produto interno. Escolhendo $X = [k_0 H_1, H_2]$ na equação destacada acima, concluimos que $[k_0 H_1, H_2] = 0$. Segue que $k_0 H_1$ comuta com um elemento regular de \mathfrak{t}_2 e, como \mathfrak{t}_2 é abeliana maximal, temos que $k_0 H_1 \in \mathfrak{t}_2$. Portanto, $\mathfrak{t}_2 \subseteq \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(k_0 H_1) \cap \mathfrak{s} = k_0(\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(H_1) \cap \mathfrak{s}) = k_0 \mathfrak{t}_1$, logo, $k_0 \mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_2$. \square

Observação 1.4.12. O Teorema 1.4.11 poderia ser reformulado da seguinte forma. Seja G um grupo de Lie conexo com álgebra \mathfrak{g} e $K = \langle \exp_G(\mathfrak{k}) \rangle$ o subgrupo conexo de \mathfrak{g} gerado por \mathfrak{k} , então $\text{Ad}_G(\exp(X)) = e^{\text{ad}(X)}$ implica que $\text{Ad}_G(K) = \text{Inn}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$, em que Ad_G é a representação adjunta de G . Portanto, dados dois subespaços de Cartan $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2$ de \mathfrak{g} , existe $k \in K$ tal que $\text{Ad}(k)\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_2$. Em particular, para outro grupo conexo G' com álgebra \mathfrak{g} e $K' = \langle \exp_{G'}(\mathfrak{k}) \rangle$, temos $\text{Ad}_G(K) \simeq \text{Ad}_{G'}(K')$.

Temos ainda mais um resultado importante, que tem consequências geométricas no estudo de espaços simétricos (veja a Seção 2.4).

Corolário 1.4.13. Sejam (\mathfrak{g}, σ) uma álgebra ortogonal involutiva semi-simples ou compacta e $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{s}$ um subespaço de Cartan, então $\mathfrak{s} = \text{Inn}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}) \cdot \mathfrak{t}$.

Demonstração. A demonstração funciona como na Proposição 1.2.8, mas o fato mais importante usado aqui é a compacidade de $\text{Inn}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$. Dado $X \in \mathfrak{s}$, existe uma subálgebra de \mathfrak{g} maximal contida em \mathfrak{s} que contém X , ela será então um subespaço de Cartan, logo, é conjugada a qualquer outro subespaço de Cartan. Isto mostra que $X \in \text{Inn}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}) \cdot \mathfrak{t}$. \square

Na mesma notação da Observação 1.4.12, segue desse Corolário o seguinte resultado.

Corolário 1.4.14. Dado $X \in \mathfrak{s}$, existe $k \in K_0$ tal que $\text{Ad}(k)X \in \mathfrak{t}$.

1.4.1 Raízes Restritas

O objetivo desta Subseção é mostrar que as raízes de uma álgebra ortogonal involutiva \mathfrak{g} com respeito a um subespaço de Cartan $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{s}$ são obtidas pela restrição a \mathfrak{t} de raízes de \mathfrak{g} com respeito a alguma subálgebra de Cartan \mathfrak{h} que contém \mathfrak{t} (veja o Lema 1.4.9). Observe

inicialmente que as decomposições obtidas nos Teoremas 1.4.3 e 1.4.10 são independentes da escolha do subespaço de Cartan escolhido, no sentido da proposição a seguir.

Proposição 1.4.15. Seja (\mathfrak{g}, σ) uma álgebra ortogonal involutiva semi-simples e não compacta, em que σ é uma involução de Cartan. Seja $k \in \text{Inn}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ e $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2 = k\mathfrak{t}_1$ subespaços de Cartan. Se

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{t}_1 + \sum_{\alpha \in \Delta_1} \mathfrak{g}_\alpha$$

é a decomposição de \mathfrak{g} com respeito a \mathfrak{t}_1 , então

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{t}_2 + \sum_{\alpha \in \Delta_1} \mathfrak{g}_{k^*\alpha}$$

é a decomposição com respeito a \mathfrak{t}_2 , em que denotamos $\Delta_j = \Delta_\sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}_j)$ e $\mathfrak{m}_j = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{t}_j)$.

Demonstração. Por hipótese, temos que $k\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_2$, então considere $Z \in \mathfrak{m}_1$ e observe que, para $k(H) = H' \in \mathfrak{t}_2$, temos $[kZ, H'] = k[Z, H] = 0$, logo, $k\mathfrak{m}_1 \subseteq \mathfrak{m}_2$. Por simetria do argumento, temos que $k\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$. Temos, portanto que $k(\sum_{\alpha \in \Delta_1} \mathfrak{g}_\alpha) = \sum_{\beta \in \Delta_2} \mathfrak{g}_\beta$.

Para concluir, basta notar que, para $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, com $\alpha \in \Delta_1$, temos

$$\text{ad}(H')kX = k\text{ad}(k^{-1}H')X = k(\alpha(H)X) = (k^*\alpha)(H')k(X),$$

logo, $k(X) \in \mathfrak{g}_{k^*\alpha}$. □

O mesmo vale no caso em que \mathfrak{g} é compacta, já que, se $k\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_2$, então teríamos $k\mathfrak{m}_\alpha = \mathfrak{m}_{k^*\alpha}$.

Proposição 1.4.16. Seja (\mathfrak{g}, σ) uma álgebra ortogonal involutiva compacta. Seja $k \in \text{Inn}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ e $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2 = k(\mathfrak{t}_1)$ subespaços de Cartan. Se

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{t}_1 + \sum_{\alpha \in \Delta_1} \mathfrak{m}_\alpha$$

é a decomposição de \mathfrak{g} com respeito a \mathfrak{t}_1 , então

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{t}_2 + \sum_{\alpha \in \Delta_1} \mathfrak{m}_{k^*\alpha}$$

é a decomposição com respeito a \mathfrak{t}_2 , em que denotamos $\Delta_j = \Delta_\sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}_j)$ e $\mathfrak{m}_j = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_j) \cap \mathfrak{k}$.

Os próximos resultados estão baseados na seguinte ideia. Seja (\mathfrak{g}, σ) uma álgebra ortogonal involutiva semi-simples não-compacta. Dado um subespaço de Cartan \mathfrak{t} de \mathfrak{g} ,

temos que existe uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$, tal que $\mathfrak{t} \leq \mathfrak{h}$ e, além disso, $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} + \mathfrak{t}'$, em que \mathfrak{t}' é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) \cap \mathfrak{k}$ (Lema 1.4.9). Supondo que \mathfrak{h} é split, temos que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{t} + \mathfrak{t}' + \sum_{\alpha|_{\mathfrak{t}} \neq 0} \mathfrak{g}_\alpha + \sum_{\alpha|_{\mathfrak{t}} = 0} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Além disso, $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) \cap \mathfrak{k}$ se, e somente se, $\alpha|_{\mathfrak{t}} = 0$, já que, se $X \in \mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{s}$ e $\alpha|_{\mathfrak{t}} = 0$, então $\mathfrak{t} + \mathbb{R}X$ é abeliano maximal em \mathfrak{s} , o que não pode ocorrer. É claro que $\mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) = 0$ se, e somente se, $\alpha|_{\mathfrak{t}} \neq 0$, então $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) \cap \mathfrak{k} = \mathfrak{t}' + \sum_{\alpha|_{\mathfrak{t}} = 0} \mathfrak{g}_\alpha$ e segue que

$$\Delta_\sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) = \{\alpha|_{\mathfrak{t}} : \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}), \alpha|_{\mathfrak{t}} \neq 0\}. \quad (1.18)$$

Suponha agora que (\mathfrak{g}, σ) seja uma álgebra ortogonal involutiva semi-simples não-compacta com involução de Cartan σ ou compacta. Seja \mathfrak{t} um subespaço de Cartan de \mathfrak{g} e $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} + \mathfrak{t}'$ uma subálgebra de Cartan, como no parágrafo anterior. Pela Proposição 6.1.11 de [4], $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, então se fatora como

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} + \sum_{\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})} (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_\alpha = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} + \mathfrak{t}'_{\mathbb{C}} + \sum_{\alpha|_{\mathfrak{t}} \neq 0} (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_\alpha + \sum_{\alpha|_{\mathfrak{t}} = 0} (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_\alpha,$$

pois as subálgebras de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ são torais, ou seja, sua representação adjunta é diagonalizável (Proposição 6.3.2 de [4]).

Se $\alpha|_{\mathfrak{t}} = 0$, então $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_\alpha \subseteq \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{t}) = (\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}))_{\mathbb{C}}$. Isto mostra que $\mathfrak{g} \cap ((\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_\alpha + (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{-\alpha}) \subseteq \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) \cap \mathfrak{k}$ caso $\alpha|_{\mathfrak{t}} = 0$. Portanto, temos que

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) \cap \mathfrak{k} = \mathfrak{t}' + \mathfrak{g} \cap \left(\sum_{\alpha|_{\mathfrak{t}} = 0} (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_\alpha \right).$$

Por outro lado, se $\alpha|_{\mathfrak{t}} \neq 0$, denote $\alpha|_{\mathfrak{t}} = \beta$. Temos que $\mathfrak{g} \cap ((\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_\alpha + (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{-\alpha})$ está contido em \mathfrak{g}_β no caso semi-simples ou em \mathfrak{m}_β no caso compacto, logo,

$$(\mathfrak{g}_\beta)_{\mathbb{C}} = \sum_{\alpha|_{\mathfrak{t}} = \beta} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Deste argumento segue que as raízes de \mathfrak{g} com respeito a \mathfrak{t} satisfazem a equação (1.18).

1.4.2 Grupo de Weyl de $\Delta_\sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$

O *grupo de Weyl* de $\Delta_\sigma = \Delta_\sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ é o grupo W gerado pelas reflexões r_α com $\alpha \in \Delta_\sigma$. Seja G um grupo de Lie conexo com álgebra \mathfrak{g} e K um subgrupo fechado com álgebra \mathfrak{k} ; para

cada $k \in K$, $\text{Ad}(k)$ é um isomorfismo linear $\mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{s}$. Defina o normalizador

$$M^* = \{k \in K : \text{Ad}(k) \cdot \mathfrak{t} = \mathfrak{t}\} = N_K(\mathfrak{t})$$

de \mathfrak{t} em K e o centralizador

$$M = \{k \in K : \text{Ad}(k)|_{\mathfrak{t}} = \text{id}\} = Z_K(\mathfrak{t})$$

de \mathfrak{t} em K . O grupo $W_s = M^*/M$ age em \mathfrak{t} por meio da representação adjunta: para $w = kM \in W_s$ e $H \in \mathfrak{t}$, a ação é dada por

$$w \cdot H = \text{Ad}(k)H,$$

de modo que W_s pode ser visto como $\text{Ad}(M^*)|_{\mathfrak{t}}$.

Pela Observação 1.4.12, W_s não depende das escolhas de G e de K quando K é conexo. Denote $M_0^* = N_{K_0}(\mathfrak{t})$ e $M_0 = Z_{K_0}(\mathfrak{t})$. O Teorema 3.5 do capítulo II de [5], mostra que ambos os grupos M^*/M e M_0^*/M_0 podem ser vistos como o grupo gerado pelas reflexões r_α , $\alpha \in \Delta_\sigma$, então temos o seguinte resultado.

Proposição 1.4.17. O grupo de Weyl W de $\Delta_\sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ é isomorfo a ambos M^*/M e M_0^*/M_0 .

Assim como no caso de raízes com respeito a uma subálgebra de Cartan, chamamos de *Câmara de Weyl* uma componente conexa do complemento, em \mathfrak{t} , da união de hiperplanos de raiz $\alpha = 0$. Como o grupo de Weyl W de Δ_σ é gerado pelas reflexões nos hiperplanos de raiz $\alpha = 0$, os resultados do Teorema 1.3.8 ainda continuam válidos.

Proposição 1.4.18. O grupo de Weyl de $\Delta_\sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ age simplesmente e transitivamente sobre as câmaras de Weyl. Sejam $H \in \mathfrak{t}$ um elemento de alguma câmara de Weyl e $w \in W$ tais que $wH = H$, então $w = 1$.

Dado um subespaço \mathfrak{t} de Cartan de \mathfrak{g} , vimos no Corolário 1.4.13 que $\text{Inn}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})\mathfrak{t} = \mathfrak{s}$. Além disso, se $k \in K$, temos que $\mathfrak{t}' = \text{Ad}(k)\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{s}$ é ainda um subespaço de Cartan de \mathfrak{g} . Os próximos resultados aprofundam nosso entendimento sobre a ação adjunta de K sobre os subespaços de Cartan.

Teorema 1.4.19. Sejam (\mathfrak{g}, σ) uma álgebra ortogonal involutiva compacta e $\mathfrak{t}, \mathfrak{t}'$ subespaços de Cartan. Considere $A \subseteq \mathfrak{t}$, $k \in K$ e suponha que $\text{Ad}(k)A = A' \subseteq \mathfrak{t}'$, então existe $k' \in K_0$ tal que $\text{Ad}(k')\mathfrak{t} = \mathfrak{t}'$ e $\text{Ad}(k')Y = \text{Ad}(k)Y$ para todo $Y \in A$.

Demonstração. Seja $\mathfrak{t}'' = \text{Ad}(k)\mathfrak{t}$. Como $A' \subseteq \mathfrak{t}' \cap \mathfrak{t}''$, temos que $\mathfrak{t}', \mathfrak{t}'' \subseteq \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(A') := \mathfrak{g}'$. Além disso, \mathfrak{g}' é invariante por σ , uma vez que $[\sigma(X), H'] = \sigma([X, -H']) = 0$ para quaisquer $X \in \mathfrak{g}'$

e $H' \in A'$, logo, $\mathfrak{g}' = \mathfrak{k}' + \mathfrak{s}'$ em que $\mathfrak{k}' = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{k}$ e $\mathfrak{s}' = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{s}$. Temos que $(\mathfrak{g}', \sigma|_{\mathfrak{g}'})$ é uma álgebra ortogonal involutiva compacta, então existe $k_1 \in K_0$ tal que $\text{Ad}(k_1) \in \text{Inn}_{\mathfrak{g}'}(\mathfrak{k}') \leq \text{Inn}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})|_{\mathfrak{g}'}$ e $\text{Ad}(k_1)\mathfrak{t}'' = \mathfrak{t}'$ (Teorema 1.4.11). Segue que $\text{Ad}(k_1)\mathfrak{t} = \mathfrak{t}'$ e $\text{Ad}(k_1)H = \text{Ad}(k)H$ para todo $H \in A$. Basta escolher $k' = k_1k$. \square

Como consequência deste Teorema temos o seguinte Corolário, que será importante para nós no Capítulo 3.

Corolário 1.4.20. Seja (\mathfrak{g}, σ) uma álgebra ortogonal involutiva compacta e \mathfrak{t} um subespaço de Cartan. Se $H \in \mathfrak{t}$ e $\text{Ad}(k)H \in \mathfrak{t}$, então existe $w \in W$ tal que $\text{Ad}(k)H = wH$.

Demonstração. Escolhendo $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}'$ e $A = \{H\}$ no Teorema anterior, vemos que existe $k' \in K$ tal que $\text{Ad}(k')\mathfrak{t} = \mathfrak{t}'$ e $\text{Ad}(k')H = \text{Ad}(k)H$. Observe que $k' \in M^*$, então o w que procuramos é $\text{Ad}(k')$. Observe que usamos que $W \simeq W_s$. \square

Capítulo 2

Espaços Simétricos Riemannianos

2.1 Variedades Riemannianas

Uma *Variedade Riemanniana* é uma variedade S dotada de uma métrica \langle , \rangle , onde uma métrica é uma função diferenciável que, para cada $p \in S$, associa um produto interno em $T_p S$, o espaço tangente a S no ponto p .

Uma *isometria* entre Variedades Riemannianas é um difeomorfismo $\varphi : S \rightarrow N$ que satisfaz

$$\langle (d\varphi)_p u, (d\varphi)_p v \rangle_{\varphi(p)} = \langle u, v \rangle_p$$

para todos $p \in S$ e $u, v \in T_p S$. O conjunto de todas as isometrias de uma Variedade Riemanniana forma um grupo de Lie que é denotado $I(S)$. Uma *isometria local* é uma aplicação que é isometria apenas quando restrita a alguma determinada vizinhança, isto é, para cada $p \in S$ existe uma vizinhança U de p tal que $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ é uma isometria no sentido que definimos anteriormente.

Os grupos de Lie são exemplos de variedades que, além de tudo, são grupos. Um grupo (algébrico) G é chamado *grupo de Lie* se existe uma estrutura de variedade diferenciável em G tal que a aplicação produto do grupo $p : G \times G \rightarrow G$, $p(g, h) = gh$, seja diferenciável. Uma das características principais de um grupo de Lie é sua "grande simetria", no sentido de que há muitos difeomorfismos $G \rightarrow G$. Para $g, h \in G$, denotamos por E_g e por D_g as aplicações $G \rightarrow G$ dadas por $E_g(h) = gh$ e $D_g(h) = hg$, são as aplicações de multiplicação à esquerda e à direita, respectivamente. Pode-se mostrar que estas aplicações são difeomorfismos de G (veja a Seção 5.1 de [6]).

Adicionando uma métrica a G , ele se torna uma Variedade Riemanniana. Uma métrica é chamada de *invariante à esquerda* se as aplicações E_g , $g \in G$, são isometrias e, analogamente, é chamada de *invariante à direita* se as aplicações D_g , $g \in G$, são isometrias. Uma métrica é

denominada bi-invariante se for invariante tanto à esquerda quanto à direita. Por sua simetria, sempre existe uma métrica invariante ou à esquerda ou à direita em G . Se queremos uma métrica invariante à esquerda, basta escolher qualquer produto interno \langle , \rangle em $T_1 G = \mathfrak{g}$ e definir, para $X, Y \in T_g G$,

$$\langle X, Y \rangle_g = \langle (dE_g)_g^{-1} X, (dE_g)_g^{-1} Y \rangle.$$

Nem sempre existe, no entanto, uma métrica bi-invariante num grupo de Lie qualquer, mas sempre existe caso G seja compacto e conexo (veja o Teorema A.1.8)

O *fibrado tangente* de S , denotado TS , é a união $\cup_{p \in S} T_p S$ de todos os espaços tangentes de S . Um campo de vetores em S é uma função $X : S \rightarrow TS$, tal que $X(p) \in T_p S$ para cada $p \in S$. Diremos que X é diferenciável se for diferenciável visto como aplicação $S \rightarrow TS$. O conjunto dos campos diferenciáveis em S será denotado por $\chi(S)$. Dada uma função diferenciável $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, denotamos por $X_p f$ a *derivada direcional* de f em p na direção de X_p a qual é definida da seguinte maneira. Seja α uma curva em M que satifaz $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = X(p)$, então

$$X_p f = \frac{d}{dt} (f \circ \alpha)(t) \Big|_{t=0}.$$

Podemos considerar ainda a função Xf como uma função $S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $(Xf)(p) = X_p f$.

Um campo de vetores diferenciável numa variedade é sempre *integrável*, ou seja, para cada $p \in S$, existem uma vizinhança U de p , $\delta > 0$ e uma aplicação diferenciável $\phi : (-\delta, \delta) \times U \rightarrow S$ que satisfaz

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, q) = X(\phi(t, q))$$

para $q \in U, t \in (-\delta, \delta)$. A aplicação ϕ é chamada de *fluxo* de X e, fixado q , $\phi(\cdot, q) = \phi_t(q)$ é uma curva em S tangente a X . Todos os campos com que trabalharemos serão diferenciáveis, a menos que seja dito o contrário, então omitiremos este termo.

Uma classe especial de campos de vetores que nos interessa é a dos Campos de Killing. Trata-se de campos cujos fluxos induzem uma aplicação $(-\delta, \delta) \rightarrow I(S)$. Mais precisamente, seja X um campo de vetores com fluxo $\phi : (-\delta, \delta) \times U \rightarrow S$; X é chamado *Campo de Killing* se, para todo $t_0 \in (-\delta, \delta)$ fixado, a aplicação $\phi(t_0, \cdot) = \phi_{t_0} : U \rightarrow S$ é uma isometria.

Dados dois campos diferenciáveis X e Y em S , construimos um novo campo diferenciável em S denominado *colchete* de X e Y , que é definido por:

$$[X, Y] = \frac{d}{dt} (d\phi_{-t})_{\phi_t(p)} Y(\phi_t(p)) \Big|_{t=0},$$

em que $\phi_t(p)$ é o fluxo de X passando por p .

Conexões Afins

Uma *Conexão Afim* numa variedade S é uma aplicação $\nabla : \chi(S) \times \chi(S) \rightarrow \chi(S)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ,$
- $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ,$
- $\nabla_X(fY) = f\nabla_XY + (Xf)Y,$

para todos $X, Y, Z \in \chi(S)$ e $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis. Observe que usamos a notação ∇_XY para denotar o valor de ∇ em (X, Y) .

Fixada uma conexão afim ∇ em S fica determinada a noção de derivada covariante de um campo de vetores ao longo de uma curva. Sejam V e W campos de vetores definidos ao longo da curva $\alpha : I \rightarrow S$, denotamos por DV/dt a derivada covariante de V ao longo de α . Trata-se de um campo vatorial ao longo α que satisfaz

- $\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt},$
- $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt},$ em que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável,
- Se existe um campo $Y \in \chi(S)$ tal que $V(t) = Y(\alpha(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{d\alpha/dt}Y.$

Para que a expressão $\nabla_{d\alpha/dt}Y$ faça sentido, devemos escrever $d\alpha/dt$ em coordenadas locais em termos de alguma parametrização local (veja a Proposição 2.2 do capítulo 2 de [10]).

O campo V é denominado *paralelo* ao longo de α se $DV/dt \equiv 0$. Seja $p = \alpha(0)$ e $v \in T_pS$, é possível mostrar que existe um único campo $V(t)$ paralelo ao longo de α tal que $V(0) = v$ (veja a Proposição 2.6 do capítulo 2 de [10]). Chamamos o vetor $V(t) \in T_{\alpha(t)}S$ de *transporte paralelo* de v ao longo de α do ponto p ao ponto $\alpha(t)$.

Dentre as infinitas conexões possíveis numa variedade, existe uma que é especial em relação à métrica de S , é a chamada conexão de Levi-Civitá de S (veja o Teorema do capítulo 2 de [10]). É a única conexão simétrica, isto é, satisfaz

$$\nabla_XY - \nabla_YX = [X, Y]$$

para quaisquer $X, Y \in \chi(S)$, e compatível com a métrica de S . A condição de compatibilidade significa que, para quaisquer campos paralelos V e W ao longo de uma curva α , temos $\langle V, W \rangle \equiv \text{constante}$, o que ocorre se, e somente se,

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_XY, Z \rangle + \langle Y, \nabla_XZ \rangle,$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \chi(S)$ (veja o Corolário 3.3 do capítulo 2 de [10]). Observe que usamos que $\langle Y, Z \rangle$ pode ser visto como uma função diferenciável $S \rightarrow \mathbb{R}$.

Uma geodésica é uma curva $\gamma: I \rightarrow S$ cujo vetor tangente $\gamma'(t)$ é paralelo ao longo de γ em relação à conexão de Levi-Civitá. A *exponencial Riemanniana* de S em p é a aplicação $T_p S \rightarrow S$ dada por $\exp_p(v) = \gamma(1)$, em que γ é a (única) geodésica de S que satisfaz $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$ (observe que o tamanho de v pode ser ajustado para que 1 se encontre no domínio de definição de γ).

Curvatura

Um dos objetos mais importantes no estudo de Variedades Riemannianas é a curvatura. Para superfícies (variedades de dimensão 2) é mais comum estudar a curvatura de Gauss, que é o produto das duas curvaturas principais em um ponto da superfície. Em dimensões maiores, temos mais de duas direções independentes, isto é, a dimensão do espaço tangente é maior que 2. Consideramos então algo análogo à curvatura de Gauss. Dado um plano (subespaço de dimensão 2) contido em $T_p S$, as geodésicas passando por p e tangentes a σ determinam uma subvariedade de S , de modo que podemos pensar na curvatura $K(p, \sigma)$ desta subvariedade, $K(p, \sigma)$ é chamada de curvatura seccional de S em p com respeito a σ (veja o capítulo 4 de [10]).

O grande problema com a abordagem acima é a dificuldade em calcular a curvatura seccional. De modo a superar esta dificuldade, definimos o operador curvatura

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad (2.1)$$

para X, Y, Z campos de vetores diferenciáveis.

Denote $|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$. Se $x, y \in T_p S$ geram um plano σ , definimos a curvatura seccional

$$K(p, \sigma) = \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{|x \wedge y|^2}.$$

É possível demonstrar que esta definição não depende de x, y e, além disso, é importante observar que o valor de $R(X, Y)Z$ em p depende apenas dos valores de X, Y, Z em p , portanto a curvatura seccional está bem definida. Para mais detalhes sobre Geometria Riemanniana, indicamos a referência [10].

Ações de grupos e Variedades Homogêneas

Uma ação (à esquerda) de um grupo G sobre S é uma aplicação $\psi : G \times S \rightarrow S$ que satisfaz as seguintes condições: (i) para todo $p \in S$ e $1 \in G$ a identidade, $\psi(1, p) = p$ e (ii) para $g, h \in G$, temos $\psi(g, \psi(h, p)) = \psi(gh, p)$. O ponto $\psi(g, p) \in S$ é visto como a imagem de p pela ação de g e é usualmente denotado simplesmente por gp , lembrando a multiplicação no grupo. A ação é dita diferenciável se G for um grupo de Lie e se ψ for uma aplicação diferenciável.

Dizemos que uma variedade S é homogênea se houver um grupo de Lie G que age sobre ela de forma transitiva e diferenciável. Suponha que G age de maneira transitiva sobre S e seja K o subgrupo de G das transformações que fixam algum $p \in S$, K é chamado de *isotropia* de p . Se K é fechado, é possível mostrar que existe uma única estrutura de variedade em S tal que a ação de G é diferenciável. O espaço G/K munido da topologia quociente, tem uma estrutura natural de variedade que faz com que $S \approx G/K$, isto é, S é difeomorfa ao espaço de classes laterais G/K . Para mais detalhes, veja o Teorema 6.22 de [6]. Uma das vantagens de se trabalhar com variedades vendo-as como espaços homogêneos é a facilidade em se obter cartas coordenadas.

Se $S \approx G/K$ é uma variedade homogênea e G é um grupo de Lie que age por isometrias em S , dizemos que S é uma *Variedade Homogênea Riemanniana*. As isometrias de G agindo em S podem ser identificadas com a ação de G sobre G/K por multiplicação à esquerda, ou seja, $g \cdot hK = (gh)K$. Podemos então estudar S e suas isometrias de forma mais simples vendo S como o espaço quociente G/K . A projeção $\pi : G \rightarrow G/K$, ($\pi(g) = gK$) nos permite relacionar propriedades de G com propriedades de G/K . Se G é conexo, G/K também é. Se G for compacto, G/K também será. Se G é simplesmente conexo e K é conexo e fechado, então G/K é simplesmente conexo (veja o Teorema A.3.1). Em particular, seja \mathfrak{g} a álgebra de Lie de G e \mathfrak{k} a álgebra de K contida em \mathfrak{g} ; se \mathfrak{s} é um subespaço que satisfaz $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$, podemos usar π para identificar \mathfrak{s} com $T_p S$ usando que $\ker d\pi_1 = \mathfrak{k}$ e que π é sobrejetiva.

2.2 Espaços Localmente Simétricos

Considere uma Variedade Riemanniana S e $p \in S$. Uma *vizinhança normal* de p é um aberto U de S que contém p e é difeomorfo via a exponencial riemanniana \exp_p a um aberto de $T_p S$ contendo a origem. Podemos considerar que o aberto contendo $0 \in T_p S$ seja uma bola $B(0, \varepsilon)$, onde ε pode variar dependendo do ponto p escolhido. Deste modo, definimos a *simetria geodésica* ao redor de p . Dados uma geodésica γ tal que $\gamma(0) = p$ e $t \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma(t) \in U$, definimos $s_p(\gamma(t)) = \gamma(-t)$. Segue desta definição que $s_p(p) = p$ e que s_p é uma involução, a qual deve satisfazer, portanto, $(ds_p)_p = -\text{id}$.

Definição 2.2.1. Seja S uma variedade Riemanniana. Dizemos que S é um *Espaço Localmente Simétrico* se, para todo $p \in S$, a simetria geodésica s_p estiver definida e for uma isometria local de S .

Exemplo 2.2.2. Na esfera $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ a simetria geodésica em torno de $p = (0, 0, 1)$ é induzida pela reflexão em torno da reta que passa pela origem e por p .

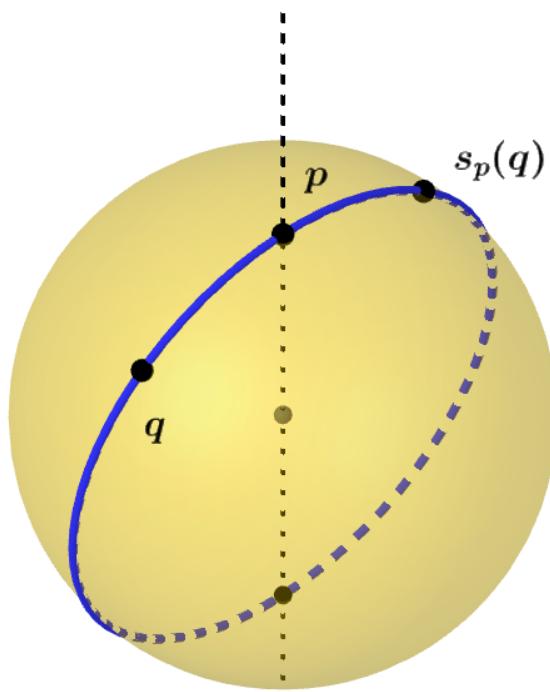


Figura 2.1 : Simetria geodésica na esfera S^2 .

Podemos definir os espaços localmente simétricos de forma diferente, usando o chamado tensor curvatura. Esta formulação alternativa será útil para nós na descrição dos campos de Jacobi nos espaços localmente simétricos. Em vez de pensar na curvatura R como uma

aplicação a depender de 3 argumentos tomando valores no espaço de campos diferenciáveis (veja a equação (2.1)), vamos tratá-la como uma aplicação a 4 argumentos tomando valores no espaço de funções diferenciáveis reais definidas em S . Para fazer isso, usamos a métrica e definimos

$$R(X, Y, Z, W) := \langle R(X, Y)Z, W \rangle.$$

Usamos também R nesta definição por motivos de simplicidade de notação. Observe que, fixados $X, Y, Z, W \in \chi(M)$, $R(X, Y, Z, W)$ é uma função real diferenciável definida em S . Dizemos que R é um tensor de ordem 4, pois depende de 4 argumentos (para mais detalhes, veja a Seção 5 do capítulo 4 de [10]). Definimos a derivada covariante ∇R de R como o tensor de ordem 5 dado por

$$\begin{aligned} \nabla R(X, Y, Z, W, U) = & U(R(X, Y, Z, W)) \\ & - R(\nabla_U X, Y, Z, W) - R(X, \nabla_U Y, Z, W) \\ & - R(X, Y, \nabla_U Z, W) - R(X, Y, Z, \nabla_U W). \end{aligned}$$

É comum denotar $\nabla R(X, Y, Z, W, U)$ por $\nabla_U R(X, Y, Z, W)$.

Teorema 2.2.3 (Caracterização tensorial). *Seja S uma variedade Riemanniana, então S é localmente simétrica se, e somente se, $\nabla R = 0$.*

Demonstração. Suponha que s seja localmente simétrica e seja $p \in S$. Seja $z \in T_p S$ e γ uma geodésica satisfazendo $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = z$. Como $s_p(\gamma(t)) = \gamma(-t)$ é fácil ver que $ds_p(z) = -z$. Segue que $ds_p = -\text{id}$. Para $X, Y, Z, W, U \in \chi(S)$, temos que

$$U \cdot R(X, Y, Z, W) = U \langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \nabla_U R(X, Y)Z, W \rangle + \langle R(X, Y)Z, \nabla_U W \rangle,$$

então segue que

$$\begin{aligned} \nabla R(X, Y, Z, W, U) = & \langle \nabla_U R(X, Y)Z, W \rangle + \langle R(X, Y)Z, \nabla_U W \rangle \\ & - R(\nabla_U X, Y, Z, W) - R(X, \nabla_U Y, Z, W) \\ & - R(X, Y, \nabla_U Z, W) - R(X, Y, Z, \nabla_U W) \\ = & \langle \nabla_U R(X, Y)Z, W \rangle - \langle R(\nabla_U X, Y)Z, W \rangle \\ & - \langle R(X, \nabla_U Y)Z, W \rangle - \langle R(X, Y)\nabla_U Z, W \rangle. \end{aligned}$$

Como s_p é isometria local, deve preservar a conexão ∇ e, portanto, a curvatura (veja o Teorema A.1.1 e o Corolário A.1.3), logo, denotando $L = (ds_p)_p$, temos

$$\begin{aligned}\nabla R(X, Y, Z, W, U) &= \langle L\nabla_U R(X, Y)Z, LW \rangle - \langle LR(\nabla_U X, Y)Z, LW \rangle \\ &\quad - \langle LR(X, \nabla_U Y)Z, LW \rangle - \langle LR(X, Y)\nabla_U Z, LW \rangle \\ &= \langle \nabla_{LU} R(LX, LY)LZ, LW \rangle \\ &\quad - \langle R(\nabla_{LU} LX, LY)LZ, LW \rangle \\ &\quad - \langle R(LX, \nabla_{LU} LY)LZ, LW \rangle \\ &\quad - \langle R(LX, LY)\nabla_{LU} LZ, LW \rangle \\ &= -\nabla R(X, Y, Z, W, U).\end{aligned}$$

Na primeira igualdade, usamos que s_p é uma isometria isometria e, na última igualdade, que, em cada parcela, $L = -\text{id}$ aparece um número ímpar de vezes. Segue que $\nabla R = 0$.

Suponha agora que $\nabla R = 0$. Seja $B(p, \varepsilon)$ uma vizinhança normal de p e considere o referencial geodésico $\{e_1, \dots, e_n\}$ em $B(p, \varepsilon)$ (veja a proposição A.2.4). Denote por $R_{ijkl} = R(e_i, e_j, e_k, e_l)$ as coordenadas de R neste referencial. Pela construção do referencial e, como $\nabla R = 0$, temos que os R_{ijkl} são constantes ao longo das geodésicas radiais. Para ver isto, seja σ uma geodésica radial iniciando em p , i.e., $\sigma(s) = \exp_p(sx)$ para algum $x \in T_p S$, então

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}R_{ijkl}(\sigma(s)) &= \nabla_{\sigma'(s)}R(e_i, e_j, e_k, e_l) \\ &= \nabla R(e_i, e_j, e_k, e_l, \sigma'(s)) \\ &\quad + R(\nabla_{\sigma'(s)}e_i, e_j, e_k, e_l) + R(e_i, \nabla_{\sigma'(s)}e_j, e_k, e_l) \\ &\quad + R(e_i, e_j, \nabla_{\sigma'(s)}e_k, e_l) + R(e_i, e_j, e_k, \nabla_{\sigma'(s)}e_l) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Observe que usamos a definição de ∇R para o desenvolvimento dos cálculos, que $\nabla R = 0$ para concluir que $\nabla R(e_i, e_j, e_k, e_l, \sigma'(s)) = 0$ e que $\nabla_{\sigma'(s)}e_r = 0$, para $r = 1, \dots, n$, uma vez que o referencial geodésico é construído de modo que os campos e_j sejam paralelos ao longo das geodésicas radiais.

Para concluir a demonstração, considere $i : T_p S \rightarrow T_p S$ a isometria dada por $i(v) = -v$, defina $s = \exp_p \circ i \circ (\exp_p)^{-1}$ e $\phi_t = P_t \circ i \circ (P_t)^{-1}$, onde P_t é o transporte paralelo ao longo da geodésica radial γ do ponto $\gamma(0) = p$ ao ponto $\gamma(t)$. Sendo os campos e_i paralelos ao longo

das geodésicas radiais, temos que $\phi_t(e_i) = -e_i$, $i = 1, \dots, n$, logo,

$$R(\phi_t(e_i), \phi_t(e_j), \phi_t(e_k), \phi_t(e_l)) \equiv R(e_i(p), e_j(p), e_k(p), e_l(p)).$$

Por linearidade, segue que

$$R(\phi_t(u), \phi_t(v), \phi_t(w), \phi_t(z)) \equiv R(u, v, w, z)$$

para todos $u, v, w, z \in T_{\gamma(t)}S$. Pelo Teorema de Cartan (Teorema A.2.5), s é uma isometria local. Segue do Lema A.1.7 que, numa vizinhança suficientemente pequena de p , $s \circ \exp_p = \exp_p \circ ds_p$. Como $ds_p = -\text{id}$, temos que s coincide com a simetria geodésica ao redor de p . \square

Um campo de vetores $J = J(t)$ ao longo da geodésica γ de S é chamado *Campo de Jacobi* ao longo de γ se satisfaz a seguinte equação diferencial.

$$J''(t) + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0. \quad (2.2)$$

Por simplicidade, denotamos D^2J/dt^2 por $J''(t)$, em que D/dt denota a derivada covariante ao longo de γ . O ponto $\gamma(t_0)$, $t_0 > 0$, é denominado *conjugado* a $\gamma(0)$ ao longo de γ se existe um campo de Jacobi não nulo ao longo de γ que satisfaz $J(0) = 0 = J(t_0)$. A multiplicidade de $\gamma(t_0)$ como ponto conjugado é igual à quantidade de Campos de Jacobi linearmente independentes satisfazendo a condição acima. Por conta da condição tensorial, veremos que os campos de Jacobi têm uma forma simplificada nos espaços localmente simétricos.

Lema 2.2.4. Seja S uma Variedade Riemanniana localmente simétrica e X, Y e Z campos paralelos ao longo da geodésica γ , então $R(X, Y)Z$ é paralelo ao longo de γ .

Demonstração. Para qualquer campo W paralelo ao longo de γ , temos $\nabla_{\gamma'}W = (D/dt)W = 0$. Deste modo, seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal e paralelo ao longo de γ ; como $\nabla R = 0$, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla R(X, Y, Z, e_i, \gamma'(t)) \\ &= \nabla_{\gamma'(t)}R(X, Y, Z, e_i) \\ &\quad - R(\nabla_{\gamma'(t)}X, Y, Z, e_i) + R(X, \nabla_{\gamma'(t)}Y, Z, e_i) \\ &\quad - R(X, Y, \nabla_{\gamma'(t)}Z, e_i) + R(X, Y, Z, \nabla_{\gamma'(t)}e_i). \end{aligned}$$

Observe que, por hipótese, temos que $\nabla_{\gamma'(t)}X = \nabla_{\gamma'(t)}Y = \nabla_{\gamma'(t)}Z = \nabla_{\gamma'(t)}e_i = 0$, então

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\gamma'(t)}R(X, Y, Z, e_i) \\ &= \langle \nabla_{\gamma'(t)}R(X, Y)Z, e_i \rangle + \langle R(X, Y)Z, \nabla_{\gamma'(t)}e_i \rangle = \left\langle \frac{D}{dt}R(X, Y)Z, e_i \right\rangle \end{aligned}$$

Segue que $(D/dt)R(X, Y)Z = 0$, uma vez que os e_i , $i = 1, \dots, n$, formam um referêncial ortonormal, logo, $R(X, Y)Z$ é paralelo ao longo de γ . Nas igualdades acima os campos estão restritos a γ . \square

Para determinar a forma dos campos de Jacobi no espaço localmente simétrico S , considere inicialmente $v = \gamma'(0) \in T_pS$ e seja $\Lambda_v : T_pS \rightarrow T_pS$ o operador definido por $\Lambda_v(x) = R(v, x)v$. Observe a relação deste operador com a equação de Jacobi (2.2). Pelas propriedades da curvatura, Λ_v é simétrico em relação ao produto interno definido em T_pS pela métrica de S , ou seja,

$$\langle \Lambda_v(x), w \rangle = \langle x, \Lambda_v(w) \rangle.$$

Isto segue do fato que $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$ para quaisquer campos X, Y, Z, W diferenciáveis em S (veja a Proposição 2.4 do capítulo 4 de [10]).

Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de T_pS que satisfaz $\Lambda_v(e_i) = \lambda_i e_i$. Pelo parágrafo anterior, $\Lambda_{\gamma'(t)}$ é simétrico para t no domínio de γ . Por transporte paralelo, estenda $\{e_1, \dots, e_n\}$ ao longo de γ . Pelo Lema 2.2.4, temos que $\Lambda_{\gamma'(t)}(e_i(t))$ é paralelo ao longo de γ para $i = 1, \dots, n$. Observe que $\Lambda_{\gamma'(0)}(e_i(0)) = \Lambda_v(e_i) = \lambda_i e_i$, então existem funções reais $\lambda_i = \lambda_i(t)$ tais que $\Lambda_{\gamma'(t)}(e_i(t)) = \lambda_i(t)e_i(t)$, com $\lambda_i(0) = \lambda_i$. Isto segue do fato que $\Lambda_{\gamma'(t)}(e_i(t))$ coincide com o transporte paralelo de $\lambda_i e_i$ ao longo de γ . Segue do paralelismo que $\lambda_i(t) \equiv \lambda_i$ são constantes.

Escreva $J(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t)e_i(t)$. Nestas coordenadas, a equação de Jacobi se reduz ao sistema de equações lineares

$$x_i'' + \lambda_i x_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

As soluções para J são mostradas abaixo, sendo $W(t)$ um campo paralelo ao longo de γ .

$$J(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(t\sqrt{\lambda_i})W(t), & \lambda_i > 0 \\ tW(t), & \lambda_i = 0 \\ \operatorname{senh}(t\sqrt{-\lambda_i})W(t), & \lambda_i < 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

A partir desta discussão, concluimos que existem pontos conjugados a $\gamma(0)$ ao longo de γ se, e só se, existe ao menos uma solução com $\lambda_i > 0$. Neste caso, os pontos $\gamma(\pi \frac{k}{\sqrt{\lambda_i}})$ são

conjugados a $\gamma(0)$ para $k \in \mathbb{Z}$. Esta construção mostra que, ao longo de uma geodésica γ , podem ter vários pontos conjugados a $\gamma(0)$. O ponto $\gamma(t_0)$ é chamado de *primeiro conjugado* se entre $\gamma(0)$ e $\gamma(t_0)$ não existe em γ outro ponto conjugado a $\gamma(0)$. O *locus conjugado* de $p \in S$ é o conjunto de todos pontos conjugados a p ao longo de qualquer geodésica iniciando em p e o *locus conjugado primário* de p é o conjunto de primeiros conjugados a p considerando todas as geodésicas iniciando em p .

Vamos finalizar esta seção mostrando que isometrias preservam campos de Jacobi.

Teorema 2.2.5. *Sejam $\varphi : S \rightarrow N$ uma isometria local, $\gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow S$ uma geodésica e J um campo de Jacobi ao longo de γ que satisfaz $J(0) = 0$. Então $\tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma$ é uma geodésica de N e $\tilde{J}(t) = (d\varphi)_{\gamma(t)}J(t)$ é um campo de Jacobi ao longo de $\tilde{\gamma}$.*

Demonstração. Denote $p = \gamma(0)$, $v = \gamma'(0)$ e $w = J'(0) \neq 0$. Para demonstrar este Teorema, vamos usar que um campo de Jacobi $J = J(t)$ ao longo de γ que satisfaz $J(0) = 0$ deve ter a forma

$$(d\exp_p)_{tv}tw$$

(veja o Corolário 2.5 (Cap. 5) de [10]).

$$\begin{aligned} \tilde{J}(t) &= (d\varphi)_{\gamma(t)}J(t) = (d\varphi)_{\gamma(t)}(d\exp_p)_{tv}tw \\ &= d(\varphi \circ \exp_p)_{tv}tw \\ &= d(\exp_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p)_{tv}tw \\ &= (d\exp_{\varphi(p)})_{td\varphi_p(v)}t(d\varphi_p w). \end{aligned}$$

Como $\tilde{\gamma}(t) = \exp_{\varphi(p)}(td\varphi_p v)$, segue que \tilde{J} é um campo de Jacobi com $\tilde{J}'(0) = d\varphi_p w$. Além disso, como φ é isometria local, $J(t) = 0$ se, e só se, $\tilde{J}(t) = 0$. O fato que $\tilde{\gamma}$ é uma geodésica segue do Corolário A.1.4. \square

Segue deste Teorema que, se p e q são pontos conjugados em S , então $\varphi(p)$ e $\varphi(q)$ são conjugados em N .

Corolário 2.2.6. Isometrias preservam pontos conjugados.

Um caso especial deste Teorema que será importante para nós é o seguinte. Seja K um grupo de isometrias que fixa p , então para todo q conjugado a p , temos que kq é conjugado a p . Dito de outra forma, K age sobre o locus conjugado de p .

2.3 Espaços Simétricos

Definição 2.3.1. Seja S uma variedade riemanniana localmente simétrica. Dizemos que S é um *Espaço Simétrico* se todas as simetrias geodésicas forem isometrias globalmente definidas em S .

Neste contexto, uma classe de isometrias de S que tem um papel muito importante, é a classe das transvecções. Considere $p \in S$ e γ uma geodésica com $\gamma(0) = p$. Denote por s_t a simetria geodésica $s_{\gamma(t)}$ e $s_0 = s_p$. A composição $p_t = s_{t/2} \circ s_0$ é chamada de *transvecção* ao longo de γ . As transvecções agem como translações ao longo de γ :

$$p_t(\gamma(t_0)) = s_{t/2} \circ s_0(\gamma(t_0)) = s_{t/2}(\gamma(-t_0)) = \gamma((-t_0) - 2((-t_0) - t/2)) = \gamma(t_0 + t). \quad (2.4)$$

Seja X um campo paralelo ao longo de $\gamma(t)$. Sendo s_0 uma isometria, temos que $Y(t) = (ds_0)_{\gamma(t)}X(t)$ é paralelo ao longo de γ . Além disso, $(ds_0)_pX(0) = -X(0)$, então $Y(t) = -X(-t)$.

Lema 2.3.2. Seja $\gamma(t)$ uma geodésica em S e p_l uma transvecção ao longo de γ satisfazendo $p_l(\gamma(t)) = \gamma(t + l)$. Se X é um campo paralelo ao longo de γ , então $(dp_l)_{\gamma(t)}X(t) = X(t + l)$.

Demonstração. $p_l = s_{l/2}s_0$ é uma composição de simetrias geodésicas. A discussão anterior mostra que a menos de sinal e translação no parâmetro, um campo paralelo ao longo de γ é preservado.

$$(dp_l)_{\gamma(t)}X(t) = -(ds_{l/2})_{\gamma(-t)}X(-t) = X(-t - 2(-t - l/2)) = X(t + l).$$

□

Exemplo 2.3.3. O Lema acima não é verdadeiro para isometrias em geral, ou seja, uma isometria que deixa uma geodésica invariante nem sempre preserva os campos paralelos no sentido destacado no Lema. Considere, por exemplo, o espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . Qualquer campo constante é paralelo neste contexto e o eixo z é uma geodésica. Se V é um campo constante que não é paralelo ao eixo z , então as rotações em torno deste eixo deixam-no invariante ponto a ponto, mas não deixam V invariante. Por outro lado, as translações na direção do eixo z (transvecções) deixam V invariante.

Proposição 2.3.4.

1. Qualquer campo paralelo Y ao longo de γ satisfazendo $Y(t_0) = v \in T_{\gamma(t_0)}S$ coincide com o campo paralelo X definido por $X(t + t_0) = (dp_t)_{\gamma(t_0)}v$.
2. $p_{t+t_1} = p_t \circ p_{t_1}$. Em particular, as transvecções ao longo de γ formam um grupo a um parâmetro.

3. Para todo $t \in \mathbb{R}$, $p_t = s_{t_1+t/2}s_{t_1}$, ou seja, as transvecções dependem apenas de γ e não do ponto inicial $\gamma(0)$.

Demonstração. 1. Segue diretamente do Lema 2.3.2.

2. Para uma isometria φ , temos que $\varphi \circ \exp_p = \exp_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p$ e isto implica que as isometrias são localmente determinadas pela diferencial em um ponto. Segue do item anterior que a diferencial de uma transvecção induz transporte paralelo e o transporte paralelo ao longo de duas curvas adjacentes é igual ao transporte paralelo ao longo destas curvas justapostas. Portanto, segue que $p_{t+t_1} = p_t \circ p_{t_1}$.
3. Observe inicialmente que $p_{t_1}^{-1} = p_{-t_1}$ pelo item anterior e é fácil ver que $p_{t_1}^{-1} = (s_{t_1/2}s_0)^{-1} = s_0s_{-t_1/2}$. Portanto,

$$\begin{aligned} p_t &= p_{t+2t_1}p_{-2t_1} \\ &= s_{t_1+t/2}s_0s_{-t_1}s_0 \\ &= s_{t_1+t/2}s_0s_0s_{t_1} \\ &= s_{t_1+t/2}s_{t_1}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 2.3.5. No espaço euclidiano \mathbb{R}^n , as transvecções são particularmente simples, p_t é a translação pelo vetor $(\gamma(t) - \gamma(0))$. É interessante observar também que as geodésicas de \mathbb{R}^n são da forma $q + tv, t \in \mathbb{R}$, ou seja, são imagens de pontos por grupos a um parâmetro de transvecções.

Exemplo 2.3.6. Como visto no Exemplo 2.2.2, a simetria geodésica s_p coincide com a isometria induzida na esfera pela reflexão em torno da reta r_p que passa por p e pela origem. Esta rotação pode ser vista como produto de reflexões em torno de planos perpendiculares que contém esta reta. Seja γ uma geodésica iniciando em p . A transvecção $p_t = s_{t/2}s_0$ é a composição das reflexões em torno de r_p e da reta que passa pela origem e por $\gamma(t/2)$. Portanto, pode-se mostrar que p_t é a isometria induzida em S^2 pela rotação em torno da reta perpendicular ao plano que contém r_p e $r_{\gamma(t/2)}$ no sentido de p para $\gamma(t/2)$ por um ângulo que é o dobro daquele formado pelos pontos $p = \gamma(0)$, $\gamma(t/2)$ e pela origem. Qualquer geodésica de S^2 pode, então, ser vista como órbita de um grupo a um parâmetro de transvecções.

Proposição 2.3.7. Sejam γ uma geodésica de S passando por $p = \gamma(0)$ e p_t o grupo de transvecções ao longo de γ .

1. $\gamma(t) = p_t(p)$.

2. O campo X definido por $X(q) = \frac{d}{dt} p_t(q) \Big|_{t=0}$ é um campo de Killing.

Demonstração. 1. O primeiro item segue da seguinte igualdade.

$$\gamma(t) = \gamma(0+t) = p_t(\gamma(0)).$$

2. Seja φ_t um grupo de isometrias a um parâmetro e defina $Y(q) = (d/dt)\varphi_t(q)|_{t=0}$. A trajetória de Y passando por $q \in S$ é claramente dada por $\varphi_t(q)$ e φ_t é uma isometria de S para cada t por hipótese. Em particular, este resultado vale para $\varphi_t = p_t$.

□

O campo definido no item 2 da Proposição 2.3.7 é chamado de *Transvecção Infinitesimal*; é fácil ver que toda transvecção pode ser vista como o fluxo de uma transvecção infinitesimal. O Teorema 1.2 do capítulo II de [11] nos diz que o grupo de isometrias de uma Variedade Riemanniana é um grupo de Lie e o grupo de isotropia K é compacto. Denote por G o grupo de isometrias de S e seja \mathfrak{g} a álgebra de Lie de G . Podemos representar \mathfrak{g} como álgebra de Lie de campos de Killing em S . Denotando por \exp a exponencial de G , $\exp(tX)$ é um grupo a um parâmetro de isometrias agindo em S para cada $X \in \mathfrak{g}$. Podemos associar então a cada $X \in \mathfrak{g}$ o campo dado por $\tilde{X}(q) = (d/dt)\exp(tX)q|_{t=0}$, que é um campo de Killing, uma vez que seu fluxo é o grupo a 1 parâmetro de isometrias $\{\exp(tX) : t \in \mathbb{R}\} \leq G$.

Teorema 2.3.8. *Todo espaço simétrico conexo é uma Variedade Riemanniana homogênea.*

Demonstração. Dados dois pontos $p, q \in S$, vamos mostrar que existe uma isometria de S que leva p em q ; esta isometria será uma composição de transvecções. Se m é um ponto numa vizinhança normal de p , existe uma geodésica que conecta p e m , logo, existe uma transvecção que leva p em m . Sendo S uma variedade conexa, é também conexa por caminhos. Seja $\alpha : I = [0, 1] \rightarrow S$ uma curva que satisfaz $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$. Sendo $\alpha(I)$ compacto, existe uma partição $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1\}$ de I e vizinhanças normais U_i de $\alpha(t_i)$ tais que $\alpha(I) \subseteq \bigcup_{i=0}^n U_i$. Escolhendo a partição de modo que as diferenças $|t_{j+1} - t_j|$ sejam suficientemente pequenas, podemos assumir que ambos $\alpha(t_i), \alpha(t_{i+1}) \in U_{i+1}$, $i = 0, \dots, n-1$, de modo que existem transvecções que levam $\alpha(t_i)$ em $\alpha(t_{i+1})$, $i = 0, \dots, n-1$. Compondo estas transvecções, obtemos uma isometria que leva $p = \alpha(0)$ em $q = \alpha(1)$. □

De agora em diante, vamos nos restringir a espaços simétricos conexos. Todo espaço simétrico conexo é homogêneo e, portanto, geodesicamente completo pelo Lema A.1.5 e pelo Teorema de Hopf-Rinow. A completude de S resulta em propriedades importantes como, por exemplo, o fato que o produto de quaisquer duas simetrias geodésicas de S é uma transvecção,

pois quaisquer dois pontos podem ser conectados por uma geodésica. Se $p, q \in S$, seja γ uma geodésica que satisfaz $\gamma(0) = p$ e $\gamma(l) = q$, então $s_q \circ s_p = s_l \circ s_0 = p_{2l}$ é uma transvecção.

A partir de agora, vamos denotar por G a componente da identidade do grupo de isometrias de S . Sendo S conexa, se o grupo de todas as isometrias age de forma transitiva, então G também age de transitivamente (Proposição 13.10 de [6]). Seja K o subgrupo de G que contém as isometrias que fixam $p \in S$ e denote por \mathfrak{k} sua álgebra, p será chamado de ponto base de S . É fácil ver que os elementos de \mathfrak{k} são representados como campos de Killing em S que se anulam em p . Temos $S \approx G/K$.

Toda geodésica de S determina um grupo a um parâmetro de transvecções, ou seja, p_t está definida para $t \in \mathbb{R}$. Portanto, p_t deve ter, necessariamente, a forma $\exp(tH)$ para algum $H \in \mathfrak{g}$. Em particular, toda transvecção infinitesimal é da forma $\tilde{H}(q) = (d/dt)\exp(tH)q|_{t=0}$ para algum $H \in \mathfrak{g}$. Esta é uma propriedade que não se restringe apenas às transvecções infinitesimais, a Proposição A.2.2 mostra que campos de Killing são completos em variedades riemannianas completas, ou seja, o fluxo de um tal campo está definido sobre \mathbb{R} e deve determinar um subgrupo a um parâmetro de G . Todo subgrupo a 1 parâmetro de G é da forma $\exp(tX)$ para algum $X \in \mathfrak{g}$ pelo Teorema 9.2.15 de [4]. Temos então o seguinte resultado.

Proposição 2.3.9. Qualquer campo de Killing em um espaço simétrico é completo e tem a forma

$$\tilde{X}(q) = \frac{d}{dt} \exp(tX)q \Big|_{t=0},$$

para algum $X \in \mathfrak{g}$ e seu fluxo é da forma $\phi_t(q) = \exp(tX)q$.

O próximo resultado é uma caracterização importante das transvecções infinitesimais.

Proposição 2.3.10. Um campo de Killing Y em S é uma transvecção infinitesimal em p se, e somente se, $(\nabla Y)_p = 0$.

Demonstração. Seja Y uma transvecção infinitesimal em p , ou seja, $Y(q) = (d/dt)p_t(q)|_{t=0}$, em que p_t é uma transvecção ao longo da geodésica γ por p . Seja X um campo de S e $\alpha(s)$ uma curva com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = X(p)$, então $(\nabla_X Y)(p) = (D/ds)Y(\alpha(s))|_{s=0}$. Pelo Lema 3.4 do capítulo 3 de [10], temos que

$$\begin{aligned} (\nabla_X Y)(p) &= \frac{D}{ds} \frac{d}{dt} p_t(\alpha(s)) \Big|_{t=0, s=0} \\ &= \frac{D}{dt} \frac{d}{ds} p_t(\alpha(s)) \Big|_{t=0, s=0} \\ &= \frac{D}{dt} (dp_t)_{\alpha(0)} \alpha'(0) \Big|_{t=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Na última igualdade, usamos que $(dp_t)_{\alpha(0)}\alpha'(0)$ é paralelo ao longo de γ (item 1 da Proposição 2.3.4).

Suponha agora que $(\nabla Y)_p = 0$ e seja γ a geodésica por p satisfazendo $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = Y(p)$. Denote por Z a transvecção infinitesimal ao longo de γ , ou seja, o campo definido por $Z(q) = (d/dt)p_t(q)|_{t=0}$. Como $p_t(p) = \gamma(t)$, temos que $Y(p) = \gamma'(0) = Z(p)$. Pelo que demonstramos no primeiro parágrafo, temos que $(\nabla Z)_p = 0 = (\nabla Y)_p$. Segue da Proposição A.2.3 que $Y - Z$ é um campo de Killing identicamente nulo, logo, $Y = Z$ é uma transvecção infinitesimal. \square

Sejam $\mathfrak{s} = \{X \in \mathfrak{g} : (\nabla \tilde{X})_p = 0\}$ e $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} : \tilde{X}(p) = 0\}$. Pela proposição anterior, os vetores de \mathfrak{s} geram todas as transvecções infinitesimais por p . Como os elementos de \mathfrak{g} geram os campos de Killing em S (Proposição 2.3.9), temos que $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{s} = 0$ pela Proposição A.2.3. Observe ainda que $\dim \mathfrak{s} \geq \dim T_p S = \dim S$, pois cada vetor de $T_p S$ determina uma geodésica passando por p e, portanto, determina uma transvecção por p . Sendo $S = G/K$, temos que $\dim S = \dim G - \dim K = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{k}$. Segue que $\dim \mathfrak{s} + \dim \mathfrak{k} \geq \dim \mathfrak{g}$ e, portanto, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{s}$.

Pela simetria da conexão, sabemos que $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$, donde segue que, se $X, Y \in \mathfrak{s}$, $[X, Y](p) = 0$, i.e., $[X, Y] \in \mathfrak{k}$. Este fato, também é uma consequência do seguinte Teorema.

Teorema 2.3.11. *Seja $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{g}$ o subespaço das transvecções infinitesimais. A aplicação $\sigma = \text{Ad}(s_p)$ determina uma involução de \mathfrak{g} tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ é a decomposição em autoespaços ± 1 .*

Demonstração. Seja $k \in K$, é fácil ver que $s_p k s_p \in K$ e, como $(ds_p)_p = -\text{id}$, $s_p k s_p$ tem a mesma diferencial em p que k . Logo, k e $s_p k s_p$ coincidem em um aberto de S contendo p . Segue do Lema A.1.6 que $s_p k s_p = k$ e, portanto, $\sigma = \text{Ad}(s_p)$ age como $+1$ em \mathfrak{k} .

Uma transvecção p_l ao longo da geodésica γ tal que $\gamma(0) = p$, pode ser escrita como $s_{l/2}s_p$, logo, $s_p p_l s_p = s_p s_{l/2} = p_{-l}$. Seja Y a transvecção infinitesimal determinada por p_l , então, para $q \in S$,

$$\begin{aligned}\sigma(Y(q)) &= \frac{d}{dt}s_p p_l s_p(q)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}p_{-l}(q)\Big|_{t=0} \\ &= -Y(q).\end{aligned}$$

Segue que σ age como $-\text{id}$ em \mathfrak{s} . \square

Esta seção mostra que a um espaço simétrico S está associada de maneira natural uma álgebra ortogonal involutiva (\mathfrak{g}, σ) (veja a Seção 1.4). Escolhendo $p \in S$ como ponto base e identificando $S = G/K$, a ação de G sobre S se identifica com a ação de multiplicação à esquerda de G sobre G/K dada por $(g, hK) \mapsto (gh)K$; em particular, se $g \in K$, temos $(gh)K = ghg^{-1}K$. A projeção natural $\pi : G \rightarrow S$ dada por $\pi(g) = gK$ nos permite identificar \mathfrak{s} e $T_p S$ por meio da derivada $d\pi_1 : \mathfrak{g} \rightarrow T_p S$, que é sobrejetiva e tem núcleo \mathfrak{k} .

Sendo K a isotropia de p , temos que k age sobre $T_p S$ via os diferenciais de seus elementos, ou seja, se $k \in K$ e $v \in T_p S$, $k(v) = dk_p(v)$. Observe que, para $X \in \mathfrak{s}$ e $k \in K$, temos que

$$k \exp(X)K = k \exp(X)k^{-1}K = \exp(\text{Ad}(k)X)K,$$

então a ação de K sobre $T_p M$ se identifica com a ação de K sobre \mathfrak{s} via a representação adjunta de K , ou seja, $k \in K$ age via a isometria $\text{Ad}(k) : \mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{s}$. Portanto, denotando por B a métrica de S em p e sendo \mathfrak{k} compacta (pois K é compacto pelo Teorema 1.2 do capítulo II de [11]), segue do Teorema 1.4.7 que (\mathfrak{g}, σ) é uma álgebra ortogonal involutiva com produto interno $\text{ad}(\mathfrak{k})$ -invariante B em \mathfrak{s} .

As transvecções agem de forma transitiva sobre S e isto nos permite provar o seguinte resultado.

Proposição 2.3.12. Denote por $P \subseteq G$ o conjunto das transvecções por $p \in S$ e por K o grupo das isometrias que fixam p . Temos que $G = PK = KP$.

Demonastração. Segue do fato que as transvecções agem de forma transitiva, ou seja, para cada $g \in G$, existe $q \in P$ tal que $qg(p) = p$. Segue que $qg \in K$, então $g \in PK$. Analogamente, existe $q \in P$ tal que $q(p) = g^{-1}(p)$, i.e., $gq \in K$, donde segue que $g \in KP$. \square

2.4 Locus Conjugado

Nesta seção vamos caracterizar o locus conjugado de um ponto num espaço simétrico conexo e compacto $S = G/K$. Assumimos que G é conexo e compacto, que a ação de G sobre G/K por multiplicação à direita é uma ação isométrica e que a isotropia K é fechada. Como a ação de G é transitiva e isometrias preservam pontos conjugados (Corolário 2.2.6), basta determinar o locus conjugado de um ponto de S , já que quaisquer outros locus conjugados são isométricos. Determinaremos o locus conjugado do ponto $p = 1K$.

Um *flat* F de S é uma subvariedade conexa, completa, com curvatura nula e totalmente geodésica. A condição que F é subvariedade totalmente geodésica significa que toda geodésica de F é também uma geodésica de S (para mais detalhes, veja a Proposição 2.9 do capítulo 6 de [10]). O flat F será chamada de *flat maximal* se for um flat que não está contido em nenhum outro. Os próximos resultados mostram que os flats maximais passando por p têm como espaço tangente as subálgebras de Cartan de \mathfrak{s} . É de interesse, portanto, ter uma compreensão melhor sobre o operador curvatura.

Lema 2.4.1. Seja X uma transvecção infinitesimal por p e Y um campo diferenciável definido numa vizinhança de p . Denotando por ∇ a conexão de Levi-Civitá, temos que

$$(\nabla_X Y)_p = [X, Y](p).$$

Demonstração. Pela Proposição 2.3.10, temos que $(\nabla X)_p = 0$. Usando a simetria da conexão,

$$[X, Y](p) = (\nabla_X Y - \nabla_Y X)_p = (\nabla_X Y)_p.$$

□

Usando este Lema, podemos expressar a curvatura em termos do Colchete de Lie.

Teorema 2.4.2. Sejam $q \in S$ e $x, y, z \in T_q S$, então

$$R(x, y)z = [[x, y], z].$$

Demonstração. Existe uma transvecção infinitesimal X em S tal que $X(q) = x$, pois cada vetor de $T_q S$ determina uma transvecção infinitesimal por q . Seja $\gamma(t) = \exp(tX)q$ uma geodésica por q e observe que $\gamma'(0) = X(q) = x$. Seja Y um campo de Jacobi ao longo de γ com $Y(0) = y$. Do Lema 2.4.1, sabemos que

$$[X, Y](q) = (\nabla_X Y)_q.$$

Usando este resultado e a equação de Jacobi para Y , temos que

$$\begin{aligned}
 R(x, y)x &= -\frac{D}{dt} \frac{D}{dt} Y(\gamma(t)) \Big|_{t=0} \\
 &= -\frac{D}{dt} (\nabla_X Y)_{\gamma(t)} \Big|_{t=0} \\
 &= -\frac{D}{dt} [X, Y](\gamma(t)) \Big|_{t=0} \\
 &= -(\nabla_X [X, Y])_{\gamma(t)} \\
 &= -[x, [x, y]] \\
 &= [[x, y], x].
 \end{aligned}$$

O resultado então segue da equação acima usando Lema 3.3 do capítulo 4 de [10]. A curvatura seccional determina o tensor curvatura e o lado direito da equação acima tem as simetrias do tensor curvatura. \square

Um *sistema triplo de Lie* (STL) é um subespaço \mathfrak{m} de uma álgebra de Lie que satisfaz $[[X, Y], Z] \in \mathfrak{m}$ para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$. O próximo resultado mostra que, para encontrar subvariedades totalmente geodésicas, conexas e completas de S , basta encontrar subespaços de $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{g}$ que sejam STL. Pelo Teorema 13.8 de [6], se $N \leq G$ é um subgrupo conexo de G , então para $q \in S$, temos que Nq é uma subvariedade de S . Denotamos por $\langle \exp(\mathfrak{m}) \rangle$ o subgrupo de G gerado por produtos de elementos do tipo $\exp(X), X \in \mathfrak{m}$ (veja a Subseção "Subálgebras e Subgrupos gerados" da Seção 1.1). Como trata-se de um subgrupo de Lie conexo de G , qualquer órbita $\langle \exp(\mathfrak{m}) \rangle p$, para $p \in S$, é uma subvariedade de S .

Proposição 2.4.3 (Teorema 3.2.2 de [1]). As subvariedades totalmente geodésicas, conexas e completas de S passando por p são da forma $\langle \exp(\mathfrak{m}) \rangle p$, em que $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{s}$ é um STL.

Demonstração. Seja $S' \subseteq S$ uma subvariedade totalmente geodésica contendo p e $\mathfrak{s}' \subseteq \mathfrak{s}$ um subespaço que se identifica com $T_p S'$. Sendo S' totalmente geodésica, as geodésicas de S' são também geodésicas de S , então as simetrias geodésicas $s_q : S \rightarrow S$, $q \in S'$, se restringem a simetrias geodésicas de S' . Segue que S' tem uma estrutura induzida de espaço simétrico e suas geodésicas passando por p são da forma $\exp(tH)p$ com $H \in \mathfrak{s}'$. A Equação de Gauss da Proposição 3.1 do capítulo 6 de [10] mostra que o tensor curvatura de S' é a restrição do tensor curvatura de S , uma vez que a segunda forma fundamental é sempre nula. Pelo Teorema 2.4.2, temos $[[\mathfrak{s}', \mathfrak{s}'], \mathfrak{s}'] \subseteq \mathfrak{s}'$. Por fim, se S' é completa e conexa, seus pontos podem ser conectados a p por geodésicas, logo, $S' = \langle \exp(\mathfrak{s}') \rangle p$.

Por outro lado, seja $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{s}$ um STL, então $\mathfrak{a} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$ é uma subálgebra de \mathfrak{g} . Seja $A = \langle \exp(\mathfrak{a}) \rangle \leq G$ e defina $S' = Ap$, trata-se da órbita de p pela ação de A . A variedade S' é

uma subvariedade (mergulhada) homogênea e conexa de S e, por definição, as geodésicas $\exp(tH)p$ de S , $H \in \mathfrak{m}$, estão contidas em S' , já que $\exp(tH) \in A$ e toda geodésica de S' passando por p tem essa forma (pois $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{k}$). Segue da homogeneidade de S e do fato que os elementos de A são isometrias de S' com a métrica induzida que as geodésicas de S' são da forma $a\exp(tH)p$, $a \in A$, logo, S' é totalmente geodésica. Além disso, S' é conexa por definição (já que A é conexo) e é completa por conta de sua homogeneidade. Observe que $S' \approx A/A_p$, em que A_p denota a isotropia de p em A , que é gerada pela subálgebra $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$, temos então que S' , como um conjunto, coincide com $\langle \exp(\mathfrak{m}) \rangle p$. \square

Observe que $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{g}$ é um STL, então esta proposição nos mostra que $S = \langle \exp(\mathfrak{s}) \rangle p$, uma vez que a dimensão de $\langle \exp(\mathfrak{s}) \rangle$ é maior ou igual que $\dim(\mathfrak{s}) = \dim(S)$. Além disso, temos a seguinte caracterização algébrica dos flats maximais de S .

Corolário 2.4.4. Os flats maximais de S passando por p são da forma Tp , em que \mathfrak{t} é um subespaço de Cartan de \mathfrak{g} e $T = \langle \exp(\mathfrak{t}) \rangle$.

Demonstração. Seja \mathfrak{t} um subespaço de Cartan e denote $T = \langle \exp(\mathfrak{t}) \rangle$. Sendo \mathfrak{t} abeliana, fica claro que é um STL, logo, $F = Tp$ é subvariedade totalmente geodésica, conexa e completa pela Proposição 2.4.3 e Tp é flat maximal porque \mathfrak{t} é maximal abeliana em \mathfrak{s} e o Teorema 2.4.2 garante que Tp tem curvatura nula.

Por outro lado, se $F \subseteq S$ é um flat maximal, deve ser da forma $\langle \exp(\mathfrak{t}) \rangle p$ para algum STL \mathfrak{t} contido em \mathfrak{s} satisfazendo $[X, [Y, Z]] = 0$ para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{t}$. Esta condição sobre \mathfrak{t} implica que a subálgebra $\mathfrak{t} + [\mathfrak{t}, \mathfrak{t}]$ é nilpotente, já que $[\mathfrak{t}, \mathfrak{t}] \subseteq \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$ e, para $X, Y, Z, W \in \mathfrak{t}$, temos que $[[X, Y], [Z, W]] = [X, [Y, [Z, W]]] - [Y, [X, [Z, W]]] = 0$, então $[\mathfrak{t}, \mathfrak{t}]$ é abeliana. As subálgebras de Cartan de \mathfrak{g} são nilpotentes maximais, como mostra a Proposição 6.1.6 de [4]. Deste modo, deve existir uma subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} contendo $\mathfrak{t} + [\mathfrak{t}, \mathfrak{t}]$ e tal subálgebra deve ser abeliana porque \mathfrak{g} é redutível (veja a discussão após o Exemplo 1.2.6), logo, $[\mathfrak{t}, \mathfrak{t}] = 0$ e \mathfrak{t} é subálgebra abeliana maximal de \mathfrak{g} contida em \mathfrak{s} , já que F é flat maximal. \square

Vimos no Teorema 1.4.11 que os subespaços de Cartan de \mathfrak{s} são K –conjugados. No contexto de espaços simétricos temos um resultado semelhante.

Teorema 2.4.5. *Seja $S = G/K$ um espaço simétrico e $p = K$ o ponto base. A isotropia K age de forma transitiva sobre os flats maximais de S passando por p e, dado um flat maximal Tp passando por p , temos que $S = KTp$.*

Demonstração. Sejam $Tp, T'p \subseteq S$ flats maximais passando por p com respectivos subespaços de Cartan associados \mathfrak{t} e \mathfrak{t}' . Existe $k \in K$ tal que $\text{Ad}(k)\mathfrak{t} = \mathfrak{t}'$ (Teorema 1.4.11). Observe que, para $H \in \mathfrak{t}$, temos

$$k \exp(H)K = k \exp(H)k^{-1}K = \exp(\text{Ad}(k)H)K,$$

então $kTp = T'p$. O Corolário 1.4.13 implica que $\text{Ad}(K)\mathfrak{t} = \mathfrak{s}$, logo, $KTp = S$. \square

Supomos agora que S seja um espaço simétrico compacto e consideramos o flat maximal Tp , com $T = \langle \exp(\mathfrak{t}) \rangle$, sendo \mathfrak{t} um subespaço de Cartan. Pela decomposição de \mathfrak{g} (Teorema 1.4.10), podemos escrever $\mathfrak{s} = \mathfrak{t} + \sum_{\alpha \in \Delta_\sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})} (\mathfrak{m}_\alpha \cap \mathfrak{s})$.

Uma geodésica de Tp passando por p tem a forma $\gamma(t) = \exp(tH)p$ com $H \in \mathfrak{t}$. Para obter a forma dos campos de Jacobi ao longo de γ , usamos o Teorema 2.4.2 e a discussão que resultou na Equação (2.3). Para $H \in \mathfrak{t}, X \in \mathfrak{s}$, temos que os autovalores do operador de Jacobi $R(H, X)H = -\text{ad}(H)^2 X$ têm a forma $\alpha(H)^2$ (Teorema 1.4.10). Portanto, um campo de Jacobi que não é da forma $tW(t)$ deve ter a forma

$$J(t) = \text{sen}(t|\alpha(H)|)W(t)$$

para algum campo paralelo W ao longo de γ e $\alpha(H) \neq 0$. Logo, $\gamma(1) = \exp(H)p \in Tp$ é conjugado a p se, e somente se, $0 \neq \alpha(H) \in \pi\mathbb{Z}$. A multiplicidade de $\exp(H)p$ como conjugado de p coincide com a quantidade de raízes positivas β para as quais $0 \neq \beta(H) \in \pi\mathbb{Z}$. Lembre-se do Diagrama de Stiefel ρ definido na Subseção 1.3.3, o Locus conjugado de p em F coincide com $\exp(\rho)p$. Por outro lado, $\exp(H)p$ é um primeiro conjugado a p se, e somente se, existe alguma raiz β para a qual $|\beta(H)| = \pi$; naturalmente isto implica que $\beta(\lambda H) \notin \pi\mathbb{Z}$ para $\lambda \in (0, 1)$. Portanto, o locus conjugado primário de p em Tp coincide com $\exp(\partial\mathcal{D}_0)p$, em que \mathcal{D}_0 foi definido na Equação (1.15),

$$\mathcal{D}_0 = \{H \in \mathfrak{t} : \alpha(H) < \pi, \text{ para toda } \alpha \in \Delta\}.$$

Este argumento caracteriza o locus conjugado de p em um flat maximal. O Corolário 2.2.6 mostra que isometrias preservam pontos conjugados, em particular K age sobre o conjunto de pontos conjugados a p , pois fixa p . Pelo Teorema 2.4.5, esta ação é transitiva, logo, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.4.6. *Seja $S = G/K$ um espaço simétrico compacto, em que K é a isotropia de $p \in S$.*

1. *O locus conjugado de p em S é a imagem por K dos conjugados a p em Tp .*
2. *O locus conjugado primário de p em S é o conjunto $K\exp(\partial\mathcal{D}_0)p$.*

Nas subseções 3.5.1 e 3.5.2 calculamos os Locus conjugados na esfera S^2 e no plano projetivo \mathbb{RP}^2 .

Capítulo 3

Espaços Simétricos Compactos

3.1 Preliminares

3.1.1 Construindo um Espaço Simétrico

Nesta Subseção vamos construir um espaço simétrico simplesmente conexo a partir de uma álgebra ortogonal involutiva (\mathfrak{u}, σ) dada. Este espaço pode ser visto como recobrimento riemanniano dos espaços simétricos associados a (\mathfrak{u}, σ) (veja a Seção 1.5 de [1]). Denotamos por B o produto interno em \mathfrak{u} que torna (\mathfrak{u}, σ) uma álgebra ortogonal involutiva. Seja $\mathfrak{u} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ a decomposição de \mathfrak{u} em autoespaços ± 1 .

Seja \tilde{U} um grupo de Lie simplesmente conexo com álgebra \mathfrak{u} ; pelo Teorema 7.13 de [6], σ se estende a um automorfismo (involutivo) $\tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$, que denotamos ainda por σ . Pela Proposição 3.2.5, temos que $\text{fix}(\sigma)$ é conexo, logo, coincide com $\tilde{K} = \langle \exp(\mathfrak{k}) \rangle$, donde segue que \tilde{K} é um subgrupo fechado de \tilde{U} .

Defina o espaço homogêneo conexo $S = \tilde{U}/\tilde{K}$. Temos que S é simplesmente conexa pelo Teorema A.3.1. Como $\sigma(\tilde{K}) \subseteq \tilde{K}$, σ induz uma involução $s : \tilde{U}/\tilde{K} \rightarrow \tilde{U}/\tilde{K}$ dada por $s(u\tilde{K}) = \sigma(u)\tilde{K}$.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \xrightarrow{\sigma} & \tilde{U} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \tilde{U}/\tilde{K} & \xrightarrow{s} & \tilde{U}/\tilde{K} \end{array}$$

Observe que s é diferenciável, uma vez que satisfaz $s \circ \pi = \pi \circ \sigma$, em que a projeção natural $\pi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}/\tilde{K}$ é uma submersão (veja o Teorema 6.22 de [6]).

Seja $p = 1\tilde{K} = \pi(1)$ o ponto base padrão de S . Nossa próximo passo é definir, em S , um produto interno \tilde{U} -invariante. A diferencial da projeção π nos permite identificar $T_p S$ com

\mathfrak{s} , logo, o produto interno B de \mathfrak{g} define um produto interno em $T_p S \approx \mathfrak{s}$. Observe que \tilde{K} age por isometrias em $T_p S$, uma vez que B é $\text{ad}(\mathfrak{k})$ -invariante. A ideia agora é utilizar \tilde{U} para mover este produto interno aos outros pontos de S .

Para $up \in S$ e $w, v \in T_{up} S$, definimos

$$\langle w, v \rangle_{up} = B(du_{up}^{-1}(w), du_{up}^{-1}(v)).$$

trata-se de uma métrica em S . Esta métrica é \tilde{U} -invariante, uma vez que, para quaisquer $u, u' \in \tilde{U}$, temos

$$\langle du'_{up}(w), du'_{up}(v) \rangle_{u'up} = B(d(u'u)_{u'up}^{-1} du'_{up}(w), d(u'u)_{u'up}^{-1} du'_{up}(v)) \quad (3.1)$$

$$= B(du_{up}^{-1}(w), du_{up}^{-1}(v)) \quad (3.2)$$

$$= \langle w, v \rangle_{up}. \quad (3.3)$$

Por fim, vamos mostrar que S é um espaço simétrico. Seja $Y' = d_1\pi(Y) \in T_p S$, em que $Y \in \mathfrak{s}$, temos que

$$ds_p(Y') = d(s \circ \pi)_1 Y = d(\pi \circ \sigma)_1 Y = d\pi_1(-Y) = -Y', \quad (3.4)$$

logo, $ds_p = -\text{id}$. Observe agora que

$$s(uu'p) = s(\pi(uu')) = \pi(\sigma(uu')) = \sigma(u)\pi(\sigma(u')) = \sigma(u)s(u'p), \quad (3.5)$$

de modo que $s \circ u = \sigma(u) \circ s$. Portanto, $ds_{up} = d\sigma(u)_p ds_p du_{up}^{-1}$ é uma composição de isometrias. Segue que s é a simetria geodésica em torno de p e a simetria geodésica em um ponto qualquer up é dada por usu^{-1} . Logo, S é um espaço simétrico.

3.1.2 Reticulados em Espaços Simétricos Compactos

A partir de agora nosso interesse será completamente voltado para os espaços simétricos compactos, aos quais adicionaremos algumas hipóteses. Sejam U um grupo de Lie compacto e conexo com álgebra \mathfrak{u} e $\sigma : U \rightarrow U$ um automorfismo involutivo. Denotamos também por σ a involução $\mathfrak{u} \rightarrow \mathfrak{u}$ obtida tomando a diferencial de σ em $1 \in U$, de modo que \mathfrak{u} se decompõe como $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$, a soma dos autoespaços ± 1 . Seja K um subgrupo fechado de U que satisfaz $\text{fix}(\sigma)_0 \subseteq K \subseteq \text{fix}(\sigma)$, em que $\text{fix}(\sigma)_0$ denota a componente da identidade do conjunto de pontos fixos $\text{fix}(\sigma)$ de σ .

Assumimos que existe em \mathfrak{u} um produto interno B que é $\text{ad}(\mathfrak{k})$ –invariante e σ –invariante, ou seja,

$$B(\text{ad}(X)Y, Z) + B(Y, \text{ad}(X)Z) = 0$$

e

$$B(\sigma(Y), \sigma(Z)) = B(Y, Z)$$

para todos $X \in \mathfrak{k}$ e $Y, Z \in \mathfrak{u}$. Isto torna (\mathfrak{u}, σ) uma álgebra ortogonal involutiva com produto interno B . Chamaremos de *espaço simétrico compacto* o espaço homogêneo $S = U/K$ munido de uma métrica U –invariante.

Identificando $T_p S \approx \mathfrak{s}$ e procedendo como na Subseção 3.1.1, temos que B se restringe a um produto interno $\text{ad}(\mathfrak{k})$ –invariante em \mathfrak{u} que se estende a um produto interno U –invariante em U/K . A involução $\sigma : U \rightarrow U$ induz a simetria geodésica s em $p = 1K$ a partir da qual obtemos as simetrias geodésicas nos outros pontos por conjugação via elementos de U .

Como visto na Seção 2.3, a exponencial Riemanniana de S em p é dada por

$$\exp_p : \mathfrak{s} \rightarrow S, \quad \exp_p(X) = \exp(X)K,$$

em que \exp denota a exponencial de U . Seja $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{s}$ um subespaço de Cartan, o reticulado de S em \mathfrak{t} é definido por

$$\Gamma = \{H \in \mathfrak{t} : \exp_p(H) = p\} = \{H \in \mathfrak{t} : \exp(H) \in K\}. \quad (3.6)$$

Observe que, caso $H \in \Gamma$, temos que $\exp(H) \in K$, logo,

$$\exp(H) = \sigma(\exp(H)) = \exp(\sigma(H)) = \exp(-H).$$

Portanto, uma definição equivalente para Γ é

$$\Gamma = \{H \in \mathfrak{t} : \exp(2H) = 1\}.$$

Relembre o sistema $\Delta_\sigma = \Delta_\sigma(\mathfrak{u}, \mathfrak{t})$ de raízes restritas com respeito a um subespaço de Cartan $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{s}$. Definimos o reticulado central

$$\Gamma_1 = \{H \in \mathfrak{t} : \alpha(H) \in \pi\mathbb{Z} \ \forall \alpha \in \Delta_\sigma\} \quad (3.7)$$

e o reticulado fundamental Γ_0 , que é gerado pelas co-raízes com coeficientes em $\pi\mathbb{Z}$. Observe que chamamos Γ_1 e Γ_0 de reticulados, mas eles podem não ser reticulados em \mathfrak{t} no sentido da Definição 1.3.10 dependendo se $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{u})$ é nulo ou não (veja a Observação 1.3.16). Queremos

demonstrar um resultado análogo ao Teorema 1.3.15, mas no contexto de espaços simétricos compactos. Para tanto, vamos considerar o chamado espaço simétrico adjunto de S .

Sendo \mathfrak{u} compacta, é também redutível, então podemos escrever $\mathfrak{u} = \mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \oplus \mathfrak{u}'$ em que $\mathfrak{u}' = [\mathfrak{u}, \mathfrak{u}]$ é semi-simples. Como $[\sigma(X), Y] = \sigma([X, \sigma(Y)])$, temos que $\mathfrak{z}(\mathfrak{u})$ é invariante por σ . A parte semi-simples \mathfrak{u}' também é invariante, uma vez que $\sigma(\mathfrak{u}') = [\sigma(\mathfrak{u}), \sigma(\mathfrak{u})] = \mathfrak{u}'$, logo,

$$\mathfrak{u} = (\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \cap \mathfrak{k}) \oplus (\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \cap \mathfrak{s}) \oplus (\mathfrak{u}' \cap \mathfrak{k}) \oplus (\mathfrak{u}' \cap \mathfrak{s}).$$

Segue que $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}' \oplus (\mathfrak{t}' \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{u}))$, em que $\mathfrak{t}' = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{u}'$ é um subespaço de Cartan da álgebra ortogonal involutiva $(\mathfrak{u}', \sigma|_{\mathfrak{u}'})$, em que o produto interno considerado é a restrição do produto interno de (\mathfrak{u}, σ) .

Uma vez que $\mathfrak{z}(\mathfrak{u})$ é invariante por σ , temos que $Z = Z(U)$ também é. Segue que σ induz um automorfismo $\sigma' : U' \rightarrow U'$ dado por $\sigma'(uZ(U)) = \sigma(u)Z(U)$, em que $U' = U/Z(U)$. Como $\text{Ad}(U) \simeq U/Z(U)$, podemos identificar $U' = \text{Ad}(U)$, então o automorfismo σ' satisfaz $\sigma'(\text{Ad}(u)) = \text{Ad}(\sigma(u))$ para $u \in U$. Observe ainda que

$$\begin{aligned} e^{\text{ad}(\sigma(X))} &= \text{Ad}(\exp(\sigma(X))) \\ &= \text{Ad}(\sigma(\exp(X))) \\ &= \sigma'(\text{Ad}(\exp(X))) \\ &= \sigma'(e^{\text{ad}(X)}). \end{aligned}$$

Seja $K' = \text{fix}(\sigma')$, o *espaço simétrico adjunto* de S é o espaço simétrico $S' = U'/K'$ associado à álgebra ortogonal involutiva compacta e semi-simples $(\mathfrak{u}', \sigma|_{\mathfrak{u}'})$. A métrica considerada em S' é obtida como na Subseção 3.1.1.

O reticulado de S' é dado por

$$\Gamma' = \{H \in \mathfrak{t}' : \exp_p(H) = p\} = \{H \in \mathfrak{t}' : \exp_{U'}(H) \in K'\},$$

em que $\exp_{U'}(H) = e^{\text{ad}(H)}$, já que $U' = \text{Ad}(U) \leq GL(\mathfrak{u})$. Fica claro que $H \in \Gamma'$ se, e somente se, $e^{\text{ad}(H)} \in K'$ e isto ocorre se, e somente se,

$$e^{\text{ad}(H)} = \sigma'(e^{\text{ad}(H)}) = e^{\text{ad}(\sigma(H))} = e^{-\text{ad}(H)}, \quad (3.8)$$

ou seja, $e^{\text{ad}(2H)} = 1$. Usando a decomposição em espaço de raízes restritas de \mathfrak{u} , sejam $X, Y \in \mathfrak{m}_\alpha$ um par hiperbólico, então

$$X = e^{\text{ad}(2H)}X = \cos(2\alpha(H))X - \sin(2\alpha(H))Y \quad (3.9)$$

(veja as equações (1.8) e (1.9)). de modo que $e^{\text{ad}(2H)} = 1$ se, e somente se, $\alpha(H) \in \pi\mathbb{Z}$. Portanto, Γ' coincide com o reticulado central

$$\Gamma'_1 = \{H \in \mathfrak{t}' : \alpha(H) \in \pi\mathbb{Z} \forall \alpha \in \Delta_\sigma(\mathfrak{u}', \mathfrak{t}')\}. \quad (3.10)$$

Sejam $\pi : U \rightarrow S$ e $\pi' : U' \rightarrow K'$ as projeções canônicas. Como $\text{Ad}(K) \subseteq K'$, temos que a projeção adjunta $\text{Ad} : U \rightarrow \text{Ad}(U)$ induz a projeção $r : S \rightarrow S'$ definida por

$$r(uK) = r(\pi(u)) = \pi'(\text{Ad}(u)) = \text{Ad}(u)K'.$$

Observe que, se $X \in \mathfrak{s} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{u})$, temos que $r(\exp(tX)K) = \text{Ad}(\exp(tX))K' = 1K'$, logo, o diferencial de r em $p = 1K$ coincide com a projeção $P : \mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{s} \cap \mathfrak{u}'$ paralela a $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{u})$. Podemos restringir P à projeção $\mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{t}'$ paralela a $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{u})$. Seja $H \in \Gamma$, então $\exp(H) \in K$ e temos

$$e^{\text{ad}(P(H))} = e^{\text{ad}(H)} = \text{Ad}(\exp(H)) \in \text{Ad}(K) \subseteq K',$$

de modo que $P(H) \in \Gamma'$. Como $\Gamma' = \Gamma'_1$, a discussão do parágrafo anterior nos mostra que $\alpha(P(H)) \in \pi\mathbb{Z}$. As raízes se anulam em $\mathfrak{z}(\mathfrak{u})$, então $\alpha(H) = \alpha(P(H)) \in \pi\mathbb{Z}$, ou seja, $H \in \Gamma_1$.

Vamos finalizar mostrando que $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$. Sejam $X, Y \in \mathfrak{m}_\alpha$ um par hiperbólico, $H \in \mathfrak{t}$ e denote por B o produto interno $\text{ad}(\mathfrak{k})$ -invariante e σ -invariante de (\mathfrak{u}, σ) . Observe que $X - \sigma(X) \in \mathfrak{s} \cap \mathfrak{m}_\alpha$, $Y + \sigma(Y) \in \mathfrak{k} \cap \mathfrak{m}_\alpha$ e, portanto, $[X - \sigma(X), Y + \sigma(Y)] \in \mathfrak{t}$, uma vez que está em \mathfrak{s} e comuta com os elementos de \mathfrak{t} . Por simplicidade de notação, denote $X_\alpha = X - \sigma(X)$ e $Y_\alpha = Y + \sigma(Y)$. Temos que, para qualquer $H \in \mathfrak{t}$,

$$[H, X_\alpha] = \alpha(H)Y_\alpha, \quad [H, Y_\alpha] = -\alpha(H)X_\alpha.$$

Usando que $Y_\alpha \in \mathfrak{k}$ e a invariância de B , temos que

$$\begin{aligned} B(H, [X_\alpha, Y_\alpha]) &= B([Y_\alpha, H], X_\alpha) \\ &= \alpha(H)B(X_\alpha, X_\alpha) \\ &= B(H, H_\alpha)B(X_\alpha, X_\alpha) \\ &= B(H, B(X_\alpha, X_\alpha)H_\alpha). \end{aligned}$$

Sendo B um produto interno, concluimos que $[X_\alpha, Y_\alpha] = B(X_\alpha, X_\alpha)H_\alpha = B(Y_\alpha, Y_\alpha)H_\alpha$. Denotando

$$X'_\alpha = \frac{1}{B(H_\alpha, H_\alpha)} \frac{X_\alpha}{\sqrt{B(X_\alpha, X_\alpha)}},$$

$$Y'_\alpha = \frac{1}{B(H_\alpha, H_\alpha)} \frac{Y_\alpha}{\sqrt{B(Y_\alpha, Y_\alpha)}},$$

temos que $B(X'_\alpha, X'_\alpha) = B(Y'_\alpha, Y'_\alpha) = 1/B(H_\alpha, H_\alpha)$. Seja $H'_\alpha = H_\alpha/2$, então são válidas as seguintes relações de colchete.

$$[H'_\alpha, X'_\alpha] = Y'_\alpha, \quad [H'_\alpha, Y'_\alpha] = -X'_\alpha, \quad [X'_\alpha, Y'_\alpha] = H'_\alpha,$$

em que H_α denota a co-raiz correspondente a α vista como elemento de \mathfrak{t} . Definimos então $\mathfrak{u}(\alpha) = \langle H'_\alpha, X'_\alpha, Y'_\alpha \rangle \subseteq \mathfrak{u}$, trata-se de uma álgebra isomorfa a $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathfrak{su}(2)$.

Considere o grupo $S^3 \simeq SU(2)$. Podemos ver o grupo S^3 como o conjunto dos elementos unitários dentro do anel de divisão

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$

chamado de *Quaternions* (para mais detalhes sobre quaternions, veja a Seção 4.4 de [7] ou o Capítulo 1 de [12]). Os elementos i, j e k de \mathbb{H} satisfazem $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ e \mathbb{H} pode ser identificado com o \mathbb{R}^4 como espaço vetorial. Neste contexto, consideramos

$$S^3 = \{a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} : a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}.$$

É possível mostrar que todo quaternion unitário q pode ser escrito na forma

$$q = \cos \theta + y \sin \theta = e^{\theta y}$$

para algum $\theta \in \mathbb{R}$ e y um quaternion unitário com parte real nula, isto é, y pertence a

$$\mathfrak{u} = \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$$

e tem norma 1. Além disso, $e^{\theta y}$ é definido pela série de potências usual da exponencial $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\theta y)^n}{n!}$.

Observe que $\bar{\mathfrak{u}}$ é uma álgebra de Lie não abeliana com o colchete dado por $[q, q'] = qq' - q'q$. Temos as seguintes relações de colchete para os geradores de $\bar{\mathfrak{u}}$

$$[i/2, j/2] = k/2, \quad [i/2, k/2] = -j/2, \quad [j/2, k/2] = i/2.$$

Portanto, $\bar{\mathfrak{u}} \simeq \mathfrak{su}(2)$ é a álgebra de $S^3 \simeq SU(2)$.

Considere a involução $\bar{\sigma}$ de S^3 dada por $\bar{\sigma}(q) = kqk^{-1}$. O conjunto \bar{K} de pontos fixos de $\bar{\sigma}$ é uma circunferência obtida via a intercessão do plano $\mathbb{R} + \mathbb{R}k$ com S^3 e sua álgebra é $\bar{\mathfrak{k}} = \mathbb{R}k$. A derivada de $\bar{\sigma}$ em 1, que denotamos ainda por $\bar{\sigma}$, é então uma involução de $\bar{\mathfrak{u}}$ que age como id em $\bar{\mathfrak{k}}$ e como $-\text{id}$ no complemento $\bar{\mathfrak{s}} = \mathbb{R}i + \mathbb{R}j$. Temos então que $\bar{\mathfrak{t}} = \mathbb{R}i$ é um subespaço de Cartan de $(\bar{\mathfrak{u}}, \bar{\sigma})$.

A aplicação linear $\phi : \bar{\mathfrak{u}} \rightarrow \mathfrak{u}$ definida por

$$\phi(i/2) = H'_\alpha, \quad \phi(j/2) = X'_\alpha, \quad \phi(k/2) = Y'_\alpha$$

é um homomorfismo de álgebras de Lie e satisfaz $\phi(\bar{\mathfrak{u}}) = \mathfrak{u}(\alpha)$ e $\phi(\bar{\mathfrak{k}}) \subseteq \mathfrak{k}$. Sendo S^3 simplesmente conexo, ϕ pode ser integrado a um homomorfismo $\psi : S^3 \rightarrow U$ tal que $\psi(\bar{K}) \subseteq K$ e

$$\psi(e^{ti}) = \exp(\phi(ti)) = \exp(tH_\alpha) \tag{3.11}$$

(veja o Teorema 7.13 de [6]). Segue que

$$\exp(\pi H_\alpha) = \psi(e^{\pi i}) = \psi(-1) \in K, \tag{3.12}$$

logo, $\pi H_\alpha \in \Gamma$. Observe que usamos que $-1 \in \bar{K}$ e que $\psi(\bar{K}) \subseteq K$. Segue desta discussão o seguinte Teorema.

Teorema 3.1.1. *Seja S um espaço simétrico compacto. Os reticulados associados a S satisfazem $\Gamma_0 \subseteq \Gamma \subseteq \Gamma_1$.*

Seja S um espaço simétrico compacto associado à álgebra ortogonal involutiva (\mathfrak{u}, σ) e $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{u}$ um subespaço de Cartan. O *Diagrama de Stiefel* de S é definido por

$$\rho = \{X \in \mathfrak{t} : \alpha(X) \in \pi\mathbb{Z} \text{ para algum } \alpha \in \Delta_\sigma(\mathfrak{u}, \mathfrak{t})\}. \tag{3.13}$$

Observe a semelhança com o diagrama de uma álgebra compacta (veja a Equação (1.11)). Temos consequência do Teorema anterior o seguinte Corolário

Corolário 3.1.2. $\Gamma \subseteq \rho$ e ρ é invariante pelas translações de Γ .

3.1.3 Grupos de Lie e Espaços Simétricos

Nesta Subseção, veremos como um grupo de Lie U conexo com álgebra compacta e que admite uma métrica bi-invariante pode ser visto como o espaço simétrico $(U \times U)/K$, em que K será definido abaixo. Veremos também como os reticulados definidos em $(U \times U)/K$ se relacionam com os reticulados em U definidos na Subseção 1.3.1. Juntamente com os resultados da Seção 3.4 a respeito dos grupos fundamentais de espaços simétricos, isto nos permitirá entender o motivo do uso do fator 2 na definição do reticulado Γ (equação (1.10)). Para tanto, vamos estudar sobre as raízes e os sistemas de raízes associados à álgebra ortogonal involutiva $\mathfrak{u} \oplus \mathfrak{u}$.

Considere o grupo $U^2 = U \times U$ com produto definido coordenada a coordenada e a involução $\sigma : U^2 \rightarrow U^2$ dada por $\sigma(u_1, u_2) = (u_2, u_1)$. Denotaremos a álgebra de U^2 por $\mathfrak{u}^2 = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{u}$, sendo \mathfrak{u} a álgebra de U , e um elemento desta álgebra será denotado $X \oplus Y$. O colchete de Lie é dado coordenada a coordenada: $[X_1 \oplus X_2, X'_1 \oplus X'_2] = [X_1, X'_1] \oplus [X_2, X'_2]$. A diferencial na identidade da involução σ induz uma involução $\mathfrak{u}^2 \rightarrow \mathfrak{u}^2$ que também denotaremos por σ e é definida por $\sigma(X_1 \oplus X_2) = X_2 \oplus X_1$. A álgebra \mathfrak{u}^2 se decompõe como a soma $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ de autoespaços ± 1 , em que

$$\begin{aligned}\mathfrak{k} &= \{X \oplus X : X \in \mathfrak{u}\} \simeq \mathfrak{u} \\ \mathfrak{s} &= \{X \oplus -X : X \in \mathfrak{u}\} \simeq \mathfrak{u}.\end{aligned}$$

Em particular, todo elemento $X_1 \oplus X_2 \in \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{u}$ pode ser escrito como soma de elementos de \mathfrak{k} e de \mathfrak{s} da seguinte forma:

$$X_1 \oplus X_2 = \frac{X_1 + X_2}{2} \oplus \frac{X_1 + X_2}{2} + \frac{X_1 - X_2}{2} \oplus -\frac{X_1 - X_2}{2},$$

em que $+$ denota a soma em $\mathfrak{u} \oplus \mathfrak{u}$.

Observe que $\mathfrak{k} \simeq \mathfrak{u}$, então, pelo Teorema 1.4.7, para que \mathfrak{u}^2 seja ortogonal involutiva é necessário que \mathfrak{u} seja compacto.

Por outro lado, supondo \mathfrak{u} é compacto, existe um produto interno ad-invariante em \mathfrak{u} , denote-o por B . Obtemos então um produto interno ad-invariante em $\mathfrak{u} \oplus \mathfrak{u}$, que denotamos ainda por B , e é dado por

$$B(X_1 \oplus X_2, X'_1 \oplus X'_2) = B(X_1, X'_1) + B(X_2, X'_2).$$

A invariância de B em $\mathfrak{u} \oplus \mathfrak{u}$ segue da invariância em cada componente:

$$\begin{aligned}
 B([H_1 \oplus H_2, X_1 \oplus X_2], X'_1 \oplus X'_2) &= B([H_1, X_1] \oplus [H_2, X_2], X'_1 \oplus X'_2) \\
 &= B([H_1, X_1], X'_1) + B([H_2, X_2], X'_2) \\
 &= -B(X_1, [H_1, X'_1]) - B(X_2, [H_2, X'_2]) \\
 &= -B(X_1 \oplus X_2, [H_1, X'_1] \oplus [H_2, X'_2]) \\
 &= -B(X_1 \oplus X_2, [H_1 \oplus H_2, X'_1 \oplus X'_2]).
 \end{aligned}$$

Segue que B é, em particular, $\text{ad}(\mathfrak{k})$ -invariante. Observe por fim que, para $X, Y \in \mathfrak{u}$, temos $B(X \oplus -X, Y \oplus Y) = B(X, Y) - B(X, Y) = 0$, logo, $B(\mathfrak{k}, \mathfrak{s}) = 0$ e B deve ser também σ -invariante (veja a Observação 1.4.5). Este argumento em conjunto com o Teorema 1.4.7 demonstra o seguinte Teorema.

Teorema 3.1.3. *A álgebra (\mathfrak{u}^2, σ) é ortogonal involutiva se, e somente se, \mathfrak{u} é compacto.*

Vamos descrever agora um subespaço de Cartan $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{s}$. Sendo $\mathfrak{s} \simeq \mathfrak{u}$ e \mathfrak{u} compacto, \mathfrak{t} deve ser isomorfa a uma subálgebra de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{u} , uma vez que \mathfrak{t} é uma subálgebra abeliana maximal contida em \mathfrak{s} (Proposição 1.2.7). Defina

$$\mathfrak{t} = \{H \oplus -H : H \in \mathfrak{h}\}.$$

Como \mathfrak{h} é abeliana maximal em \mathfrak{u} , \mathfrak{t} é abeliana maximal em \mathfrak{s} . Para um par hiperbólico $X, Y \in \mathfrak{m}_\alpha$, temos que

$$\begin{aligned}
 [H \oplus -H, X \oplus Y] &= [H, X] \oplus -[H, Y] \\
 &= \alpha(H)Y \oplus \alpha(H)X = \alpha(H)(Y \oplus X) \\
 [H \oplus -H, Y \oplus X] &= [H, Y] \oplus -[H, X] \\
 &= -\alpha(H)X \oplus -\alpha(H)Y = -\alpha(H)(X \oplus Y).
 \end{aligned}$$

Proposição 3.1.4. Os espaços de raízes restritas de \mathfrak{u}^2 com respeito a \mathfrak{t} são da forma $\mathfrak{m}_\alpha \oplus \mathfrak{m}_\alpha$ em que \mathfrak{m}_α é um espaço de raíz de \mathfrak{u} com relação a \mathfrak{h} e $\alpha \in \Delta(\mathfrak{u}, \mathfrak{h})$. Temos que \mathfrak{u}^2 se decompõe como

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{t} + \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{u}, \mathfrak{h})} \mathfrak{m}_\alpha \oplus \mathfrak{m}_\alpha,$$

em que $\mathfrak{m} := \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{t}) = \{X \oplus X : X \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}\}$.

Demonstração. Temos que $\mathfrak{m}_\alpha \oplus \mathfrak{m}_\beta$ é um espaço de raíz (generalizado) se, e somente se, $\alpha = \beta$, uma vez que, se $X_1, X_2 \in \mathfrak{m}_\alpha$ e $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{m}_\beta$ são pares hiperbólicos, então

$$[H \oplus -H, X_1 \oplus Y_1] = [H, X_1] \oplus -[H, Y_1] = \alpha(H)X_2 \oplus \beta(H)Y_2.$$

Além disso, se $X \oplus Y \in \mathfrak{m}_\alpha \oplus \mathfrak{m}_\beta$, podemos escrever $X \oplus 0 + 0 \oplus Y \in \mathfrak{m}_\alpha \oplus \mathfrak{m}_\alpha + \mathfrak{m}_\beta \oplus \mathfrak{m}_\beta$.

Pelo Teorema 1.4.10, a decomposição de \mathfrak{u}^2 com respeito a \mathfrak{t} é dada por

$$\mathfrak{u}^2 = \mathfrak{z}_\mathfrak{k}(\mathfrak{t}) + \mathfrak{t} + \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} \mathfrak{m}_\alpha \oplus \mathfrak{m}_\alpha,$$

Observe que $0 = [H \oplus -H, X \oplus X] = [H, X] \oplus -[H, X]$ para todo $H \in \mathfrak{h}$ se, e somente se, $[H, X] = 0$ para todo $H \in \mathfrak{h}$, donde segue que $\mathfrak{z}_\mathfrak{k}(\mathfrak{t}) = \{X \oplus X : X \in \mathfrak{z}_\mathfrak{u}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}\} \simeq \mathfrak{h}$.

□

Como consequência desta proposição, temos que o sistema de raízes restritas $\Delta_\sigma(\mathfrak{u}^2, \mathfrak{t})$ é isomorfo a $\Delta(\mathfrak{u}, \mathfrak{h})$. Em particular, podemos ver uma raíz de $\tilde{\alpha} \in \Delta_\sigma(\mathfrak{u} \oplus \mathfrak{u}, \mathfrak{t})$ como um elemento $\alpha \in \Delta(\mathfrak{u}, \mathfrak{h})$ fazendo $\tilde{\alpha}(H \oplus -H) := \alpha(H)$. Por simplicidade, identificaremos $\tilde{\alpha}$ com α .

A involução $\sigma : U^2 \rightarrow U^2$ tem conjunto de pontos fixos $\text{fix}(\sigma) = \{(u, u) : u \in U\}$ conexo, uma vez que é isomorfo a U . Existe uma ação $\psi : U^2 \times U \rightarrow U$ do grupo U^2 sobre U à esquerda e à direita por translações via $\psi((u_1, u_2), x) = u_1 x u_2^{-1}$. Esta ação é claramente transitiva, uma vez que a órbita de 1 coincide com $\psi(U \times \{1\}, \{1\}) = U$. A isotropia de 1 é exatamente $K := \text{fix}(\sigma) = \langle \exp_{U^2}(\mathfrak{k}) \rangle$, em que a exponencial de U^2 é definida por $\exp_{U^2}(X \oplus Y) = (\exp(X), \exp(Y))$ e \exp denota a exponencial de U . Segue que a aplicação $\mu : (U \times U)/K \rightarrow U$ dada por $\mu((u_1, u_2)K) = \psi((u_1, u_2), 1) = u_1 u_2^{-1}$ é um difeomorfismo (Proposição 13.9 de [6]).

É interessante observar que μ fornece uma equivalência entre a ação ψ de U^2 sobre U com a ação de multiplicação à esquerda de G sobre U^2/K . Isto decorre das seguintes igualdades.

$$\mu((u_1, u_2) \cdot (x_1, x_2)K) = u_1(x_1 x_2^{-1})u_2^{-1} = \psi((u_1, u_2), \mu((x_1, x_2)K)). \quad (3.14)$$

Nosso próximo passo é mostrar em detalhes a métrica usada em $(U \times U)/K$ para que seja um espaço simétrico e como esta métrica corresponde a uma métrica bi-invariante em U . Denote $S = U^2/K$ e $p = (1, 1)K$ e identifique $T_p S \approx \mathfrak{s}$ via a projeção natural $U^2 \rightarrow S$. O produto interno B define um produto interno em $T_p S$ dada por

$$\langle X \oplus -X, Y \oplus -Y \rangle_p = B(X \oplus -X, Y \oplus -Y) = 2B(X, Y),$$

para $X \oplus -X, Y \oplus -Y \in \mathfrak{s}$. Podemos transladar este produto interno de forma diferenciável aos outros pontos de S via a ação de U^2 sobre S por multiplicação à esquerda, definindo

$$\langle w, v \rangle_{(u_1, u_2)p} = B(d(u_1, u_2)_{(u_1, u_2)p}^{-1}(w), d(u_1, u_2)_{(u_1, u_2)p}^{-1}(v)),$$

para $w, v \in T_{(u_1, u_2)p}S$. Procedendo como na equação (3.1), mostra-se que esta é uma métrica U^2 -invariante em S .

A simetria geodésica s ao redor de p é definida usando a involução de U^2 de acordo com o seguinte diagrama.

$$\begin{array}{ccc} U^2 & \xrightarrow{\sigma} & U^2 \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ U^2/K & \xrightarrow{s} & U^2/K \end{array}$$

A involução s satisfaz $s \circ \pi = \pi \circ \sigma$, está bem definida porque $\sigma(K) \subseteq K$ e é diferenciável porque π é uma submersão (veja o Teorema 6.22 de [6]). Explicitamente, ela é dada por $s((u_1, u_2)K) = \sigma(u_1, u_2)K = (u_2, u_1)K$. Procedendo como nas equações (3.4) e (3.5), mostra-se que s é uma isometria e que a simetria geodésica $s_{(u_1, u_2)p}$ é dada por $(u_1, u_2)s(u_1, u_2)^{-1}$. Portanto, temos que $U \approx U^2/K$ é um espaço simétrico.

Vamos definir uma métrica em U de modo que o difeomorfismo $\mu : S \rightarrow U$ seja uma isometria. Para $u \in U$ e $X, Y \in T_u U$, defina

$$\langle w, v \rangle_u = \langle d\mu_u^{-1}(w), d\mu_u^{-1}(v) \rangle_{(u, 1)p}.$$

Por construção, fica claro que $\mu : U^2/K \rightarrow U$ é uma isometria. Vamos mostrar que se trata de uma métrica bi-invariante em U (veja a Seção 2.1).

Inicialmente, observamos que, para $x, u \in U$, temos

$$\mu^{-1} \circ E_u(x) = \mu^{-1}(ux) = (ux, 1)K = (u, 1)\mu^{-1}(x),$$

ou seja, $\mu^{-1} \circ E_u = (u, 1)\mu^{-1}(x)$, onde denotamos por $(u, 1)$ a isometria de S que é dada pela multiplicação à esquerda por $(u, 1) \in U^2$. Analogamente,

$$\mu^{-1} \circ D_u(x) = \mu^{-1}(xu) = (xu, 1)K = (1, u^{-1}x^{-1})K = (1, u^{-1})\mu^{-1}(x),$$

então $\mu^{-1} \circ D_u = (1, u^{-1})\mu^{-1}$. Usaremos estas conclusões nas equações abaixo. Sejam $w, v \in T_x U$. A invariância à esquerda pode ser vista da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \langle (dE_u)_x w, (dE_u)_x v \rangle_{ux} &= \langle d\mu_{ux}^{-1} (dE_u)_x w, d\mu_{ux}^{-1} (dE_u)_x v \rangle_{(ux,1)p} \\ &= \langle d(u, 1)_{(x,1)p} d\mu_x^{-1} w, d(u, 1)_{(x,1)p} d\mu_x^{-1} v \rangle_{(ux,1)p} \\ &= \langle d\mu_x^{-1} w, d\mu_x^{-1} v \rangle_{(x,1)p} \\ &= \langle w, v \rangle_x. \end{aligned}$$

A invariância à direita segue de maneira análoga.

$$\begin{aligned} \langle (dD_u)_x w, (dD_u)_x v \rangle_{xu} &= \langle d\mu_{xu}^{-1} (dD_u)_x w, d\mu_{xu}^{-1} (dD_u)_x v \rangle_{(xu,1)p} \\ &= \langle d(1, u^{-1})_{(x,1)p} d\mu_x^{-1} w, d(1, u^{-1})_{(x,1)p} d\mu_x^{-1} v \rangle_{(xu,1)p} \\ &= \langle d\mu_x^{-1} w, d\mu_x^{-1} v \rangle_{(1, x^{-1})p} \\ &= \langle w, v \rangle_x. \end{aligned}$$

Demonstramos então o seguinte Teorema.

Teorema 3.1.5. *Uma métrica em $S = U^2/K$ em que a ação de U^2 por multiplicação à direita é uma ação isométrica corresponde a uma métrica bi-invariante em U .*

A recíproca deste Teorema também é válida, uma vez que a métrica em S pode ser vista como uma métrica vinda de U , definindo

$$\langle w, v \rangle_{(u_1, u_2)p} = \langle d\mu_{(u_1, u_2)p} u, d\mu_{(u_1, u_2)p} v \rangle_{u_1 u_2^{-1}}.$$

Suponha que a métrica em U seja bi-invariante e observe que a equação (3.14) implica que $\mu \circ (u_1, u_2) = (D_{u_2^{-1}} \circ E_{u_1}) \circ \mu$, logo,

$$\begin{aligned} &\langle d(u_1, u_2)_{(x_1, x_2)p} w, d(u_1, u_2)_{(x_1, x_2)p} v \rangle_{(u_1 x_1, u_2 x_2)p} \\ &= \langle d\mu_{(u_1 x_1, u_2 x_2)p} d(u_1, u_2)_{(x_1, x_2)p} w, d\mu_{(u_1 x_1, u_2 x_2)p} d(u_1, u_2)_{(x_1, x_2)p} v \rangle_{u_1 x_1 x_2^{-1} u_2^{-1}} \\ &= \langle d(D_{u_2^{-1}} E_{u_1})_{x_1 x_2^{-1}} d\mu_{(x_1, x_2)p} w, d(D_{u_2^{-1}} E_{u_1})_{x_1 x_2^{-1}} d\mu_{(x_1, x_2)p} v \rangle_{u_1 x_1 x_2^{-1} u_2^{-1}} \\ &= \langle d\mu_{(x_1, x_2)p} w, d\mu_{(x_1, x_2)p} v \rangle_{x_1 x_2^{-1}} \\ &= \langle w, v \rangle_{(x_1, x_2)p}. \end{aligned}$$

Isto demonstra o seguinte resultado.

Teorema 3.1.6. *Uma métrica bi-invariante em U corresponde a uma métrica U^2 -invariante em $S = U^2/K$.*

Portanto, um grupo de Lie conexo é um espaço simétrico se, e somente se, sua álgebra é compacta e ele admite uma métrica bi-invariante. Vamos agora estudar como a simetria geodésica de S induzida pela involução σ de U^2 se apresenta em U . Denote a simetria geodésica de U por i , ela deve satisfazer $i \circ \mu = \mu \circ i$, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} U^2/K & \xrightarrow{s} & U^2/K \\ \downarrow \mu & & \downarrow \mu \\ U & \xrightarrow{i} & U \end{array}$$

Fica claro que i é diferenciável, uma vez que μ é um difeomorfismo e, em particular, uma submersão (Proposição 5.19 de [13]). Explicitamente, temos que

$$i(gh^{-1}) = i(\mu((g,h)K)) = \mu(s((g,h)K)) = \mu((h,g)K) = hg^{-1},$$

logo, i coincide com a inversão em U .

Denotando por \exp a exponencial de U (como grupo de Lie), temos que ela coincide com a exponencial Riemanniana de U , uma vez que a métrica é bi-invariante (Teorema A.2.6). Portanto, as geodésicas de U passando por 1 e com direção $X \in \mathfrak{u}$ são da forma $\gamma(t) = \exp(tX)$ e, como era de se esperar, temos que $i(\exp(X)) = \exp(-X)$. A simetria geodésica ao redor de qualquer ponto $u \in U$ é então dada por $E_u \circ i \circ E_{u^{-1}} = D_u \circ i \circ D_{u^{-1}}$ e, para uma geodésica $\gamma_u(t) = u \exp(tX)$ passando por u com direção $X(u) = (dE_u)_1 X$, temos

$$E_u \circ i \circ E_{u^{-1}}(\gamma_u(t)) = \gamma_u(-t).$$

Assim fica caracterizado U como espaço simétrico.

Para finalizar esta subseção, vamos tratar dos reticulados em U e em $S = U^2/K$ e ver como eles se relacionam. Denotando $p = K$, temos que a exponencial Riemanniana de U^2/K em p é dada por

$$\exp_p(X \oplus Y) = \exp_{U^2}(X \oplus Y)K = (\exp(X), \exp(Y))K.$$

Definimos agora os reticulados de U^2/K como na Subseção anterior, seja

$$\begin{aligned}\Gamma &= \{H \oplus -H \in \mathfrak{t} : \exp_p(H \oplus -H) = p\} \\ &= \{H \oplus -H \in \mathfrak{t} : \exp_{U^2}(H \oplus -H) = (\exp(H), \exp(-H)) \in K\} \\ &= \{H \oplus -H \in \mathfrak{t} : \exp(H) = \exp(-H)\},\end{aligned}$$

como na equação (3.6). Assim como na equação (3.7), definimos

$$\Gamma_1 = \{H \oplus -H \in \mathfrak{t} : \alpha(H \oplus -H) = \alpha(H) \in \pi\mathbb{Z} \text{ para toda } \alpha \in \Delta(\mathfrak{u}, \mathfrak{h})\}.$$

O reticulado central Γ_0 é definido como o reticulado gerado, com coeficientes em $\pi\mathbb{Z}$ pelas co-raízes $H_\alpha \oplus -H_\alpha$, $\alpha \in \Delta(\mathfrak{u}, \mathfrak{h})$.

Vamos entender agora como estes reticulados se apresentam em U visto como grupo de Lie. Os reticulados Γ_1 e Γ_0 dependem apenas da estrutura dos sistemas de raízes $\Delta_\sigma(\mathfrak{u}^2, \mathfrak{t}) \simeq \Delta(\mathfrak{u}, \mathfrak{h})$, então correspondem, em U , aos reticulados central e fundamental definidos na Subseção 1.3.1. Para ver a que reticulado Γ corresponde, observe que a isometria μ nos fornece um isomorfismo entre \mathfrak{s} e \mathfrak{u} que é dado por

$$d\mu_p(X \oplus -X) = \frac{d}{dt} \mu(\exp_p(tX \oplus -X)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \exp(2tX) \Big|_{t=0} = 2X. \quad (3.15)$$

Temos que $\exp_p(X \oplus -X) = p$ se, e somente se, $\exp(X) = \exp(-X)$, de modo que o reticulado Γ aqui definido é isomorfo ao reticulado

$$\Gamma = \{H \in \mathfrak{h} : \exp(2H) = 1\} = \{H \in \mathfrak{h} : \exp(H) = \exp(-H)\}$$

definido na equação (1.10). Fica então claro o motivo de termos adicionado o fator 2 na definição de Γ .

3.2 Grupo de Weyl

O grupo de Weyl W de $\Delta_\sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ pode ser visto tanto como o grupo gerado pelas reflexões $r_\alpha, \alpha \in \Delta_\sigma$ ou como o grupo quociente M^*/M em que M^* e M são, respectivamente, o normalizador e o centralizador de \mathfrak{t} em K . Este grupo age em U/K por multiplicação à esquerda

$$w \cdot uK = wuK = wuw^{-1}K, \quad (3.16)$$

em que w pode ser pensado como um elemento de K . Se $T = \langle \exp(\mathfrak{t}) \rangle$ e Tp denota o respectivo flat maximal, temos que W deixa Tp invariante. De fato, se $H \in \mathfrak{t}$, temos que

$$w \exp(H)K = w \exp(H)w^{-1}K = \exp(\text{Ad}(w)H)K \in Tp.$$

Nesta Seção vamos estender o Corolário 1.4.20 para a ação de W sobre U/K . Mais especificamente, queremos demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 3.2.1 (Teorema 3.9 de [2]). *Seja $S = U/K$ um espaço simétrico compacto com ponto base $p = K$. Suponha que $k \in K$ e $h \in T$ sejam tais que $khp \in Tp$, então existe $w \in W$ tal que $khp = whp$.*

Observação 3.2.2. Algo similar é válido no contexto de grupos e Lie compactos e conexos. Seja G um grupo de Lie compacto e conexo e T um toro maximal, o grupo de Weyl analítico associado ao par (G, T) é definido por $W(G, T) = N_G(T)/T$. Este grupo age sobre T por conjugação. A Proposição 1.2.9 mostra que todos os toros maximaais de G são conjugados e que G é uma união de toros maximaais. O item (i) do Teorema 12.2.13 de [4] mostra que, se $t \in T$ e $g \in G$ são tais que $gtg^{-1} \in T$, então existe $w \in W(G, T)$ tal que $gtg^{-1} = wtw^{-1}$.

A isotropia K não é necessariamente conexa, denotamos sua componente conexa por K_0 . Para qualquer $k \in K$, temos que $\mathfrak{t}' = \text{Ad}(k)\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{s}$ é um subespaço de Cartan, logo, pelo Teorema 1.4.11, existe $l \in K_0$ tal que $\text{Ad}(l)\mathfrak{t}' = \text{Ad}(lk)\mathfrak{t} = \mathfrak{t}$, ou seja, $lk \in M^*$. Pelo Teorema 1.4.19, existe $u \in K_0$ que normaliza \mathfrak{t} tal que $\text{Ad}(lk)H = \text{Ad}(u)H$ para todo $H \in \mathfrak{t}$. Segue que $u^{-1}lk \in M$, logo, $k = (l^{-1}u)(u^{-1}lk) \in K_0M$. Esta discussão demonstra o seguinte resultado.

Proposição 3.2.3 (Proposição 3.1 de [9]). *Seja K_0 a componente conexa de K e M o centralizador de \mathfrak{t} em K , então $K = K_0M$.*

No próximo Teorema vamos estender o resultado descrito na Observação 3.2.2 para um toro $T = \langle \exp(\mathfrak{t}) \rangle$ de U cuja álgebra \mathfrak{t} é um subespaço de Cartan.

Teorema 3.2.4 (Proposição 3.2 de [9]). *Sejam $k \in K$ e $h \in T$ e suponha que $khk^{-1} \in T$, então existe algum $w \in W$ tal que $khk^{-1} = whw^{-1}$.*

Demonstração. Seja $h' = khk^{-1}$. A ideia da demonstração é proceder de forma análoga à demonstração do Teorema 1.4.19 e procurar um elemento de $(U_{h'})_0$ (onde $U_{h'}$ é o centralizador de h') que nos possibilite construir o elemento w de W que nos interessa. Inicialmente, observe que, como $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{s}$ e σ age como $-\text{id}$ em \mathfrak{s} , temos que σ age como a inversão em T .

É fácil ver que $(U_{h'})_0 = k(U_h)_0 k^{-1}$ e, portanto, $T, kTk^{-1} \subseteq (U_{h'})_0 := P$. Além disso, $U_{h'} = U_{(h')^{-1}}$, então $U_{h'}$ é invariante por σ , uma vez que, para $u \in U_{h'}$, temos

$$\sigma(u)h'\sigma(u)^{-1} = \sigma(u(h')^{-1}u^{-1}) = \sigma(h')^{-1} = h'.$$

Como $\sigma(P) \subseteq U_{h'}$ é conexo e contém a identidade, segue que $\sigma(P) = P$. Denote por σ' a restrição $\sigma|_P$. Por definição K satisfaz $\text{fix}(\sigma)_0 \subseteq K \subseteq \text{fix}(\sigma)$, então temos que $\text{fix}(\sigma')_0 \subseteq K \cap P \subseteq \text{fix}(\sigma')$. Definindo $K' := (K_{h'})_0 \subseteq K \cap P$ (onde $K_{h'}$ é o centralizador de h' em K), temos que $S = P/K'$ é um espaço simétrico e $TK', kTk^{-1}K'$ são flats maximais de S (veja o Corolário 2.4.4).

Segue do Teorema 2.4.5 que existe $l \in K'$ tal que $lkTk^{-1}l^{-1} = T$. Observe que $lk \in N_K(T)$ e, como $K' \subseteq U_{khk^{-1}}$, temos que $lkhk^{-1}l^{-1} = khk^{-1}$. Basta escolher $w = lkM$. \square

3.2.1 Recobrimento Universal de U

Seja $\tilde{\pi} : \tilde{U} \rightarrow U$ o recobrimento simplesmente conexo de U , trata-se de um grupo não compacto sempre que \mathfrak{u} não é semi-simples. Este fato é consequência de que $\mathfrak{u} = \mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \oplus \mathfrak{u}'$ é redutível; \tilde{U} é igual a $Z \times \tilde{U}'$, em que Z é um grupo vetorial central com álgebra $\mathfrak{z}(\mathfrak{u})$ e \tilde{U}' é conexo e simplesmente conexo com álgebra semi-simples e compacta \mathfrak{g} , logo, é compacto (veja o Teorema 1.3 do capítulo V de [5]). De fato, sendo U compacto com álgebra \mathfrak{u} , deve difeomorfo a $T \times U'$ em que T é um toro com álgebra $\mathfrak{z}(\mathfrak{u})$ e U' é compacto semi-simples, logo, \tilde{U} é um produto do recobrimento Z de T com o recobrimento \tilde{U}' de U' (veja o Corolário 1.4 do capítulo V de [5]). Podemos identificar Z com a componente conexa da identidade do centro $Z(\tilde{U})$, uma vez que \tilde{U}' tem centro finito. Além disso, \tilde{U}' contém todos os subgrupos compactos de \tilde{U} uma vez que Z não contém nenhum subgrupo compacto, exceto por $\{1\}$. Nesta Seção, vamos mostrar que vale uma versão do Teorema 3.2.4 para o recobrimento \tilde{U} .

O Teorema 12.4.26 de [4] nos mostra que o conjunto de pontos fixos de um automorfismo de um grupo de Lie compacto e simplesmente conexo é conexo. Vamos estender este resultado para grupos simplesmente conexos com álgebra compacta.

Proposição 3.2.5 (Proposição 3.3 de [2]). Seja $\tilde{\sigma}$ um automorfismo de \tilde{U} , então o conjunto $\text{fix}(\tilde{\sigma})$ de pontos fixos de $\tilde{\sigma}$ é conexo.

Demonstração. Para $u \in \tilde{U}$ e $z \in Z$, temos que

$$\tilde{\sigma}(z)u = \tilde{\sigma}(z\tilde{\sigma}^{-1}(u)) = \tilde{\sigma}(\tilde{\sigma}^{-1}(u)z) = \tilde{\sigma}(z)u,$$

logo, $\tilde{\sigma}(z)$ está no centro de \tilde{U} , mas, sendo $\tilde{\sigma}(Z)$ conexo e contido em $Z(\tilde{U})$, temos que $\tilde{\sigma}(Z) = Z$. Por outro lado, temos que $\tilde{\sigma}(\tilde{U}')$ é um subgrupo compacto e conexo de \tilde{U} , então $\tilde{\sigma}(\tilde{U}') = \tilde{U}'$.

Portanto, temos que $\tilde{\sigma}$ se decompõe como $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}|_Z \times \tilde{\sigma}|_{\tilde{U}'}$ e segue que $\text{fix}(\tilde{\sigma}) = \text{fix}(\tilde{\sigma}|_Z) \times \text{fix}(\tilde{\sigma}|_{\tilde{U}'})$. Sendo \tilde{U}' compacto e semi-simples, $\text{fix}(\tilde{\sigma}|_{\tilde{U}'})$ é conexo pelo Teorema 12.4.26 de [4]. Além disso, $\tilde{\sigma}|_Z$ é um automorfismo de um espaço vetorial visto como grupo aditivo, então é linear pelo Lema B.2.2, então $\text{fix}(\tilde{\sigma}|_Z)$ é conexo, pois trata-se de um subespaço vetorial. \square

Denote por \tilde{T} o subgrupo conexo de \tilde{U} com álgebra \mathfrak{t} . A derivada $(d\sigma)_1$ da involução de U é um homomorfismo involutivo de \mathfrak{u} e, pela teoria de recobrimentos de grupos de Lie, existe uma involução $\tilde{\sigma}$ de \tilde{U} que satisfaz $(d\sigma)_1 = (d\tilde{\sigma})_1$ (veja o Teorema 7.13 de [6]). As involuções σ e $\tilde{\sigma}$ estão relacionadas via o recobrimento universal segundo a seguinte equação $\tilde{\pi} \circ \tilde{\sigma} = \sigma \circ \tilde{\pi}$, uma vez que $d(\sigma \circ \tilde{\pi})_1 = d(\tilde{\pi} \circ \tilde{\sigma})_1$ (Proposição 7.8 de [6]). Para demonstrar o próximo resultado, fazemos uma redução, assumimos que $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{u}'$, ou seja, o centro de \mathfrak{u} está contido em \mathfrak{s} e \mathfrak{k} intercepta apenas a parte semi-simples de \mathfrak{u} .

Proposição 3.2.6 (Proposição 3.5 de [2]). Suponha que $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{u}'$ e que $\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \subseteq \mathfrak{s}$, então $\tilde{T} = Z \times (\tilde{T} \cap \tilde{U}')$ e $\tilde{K} := \text{fix}(\tilde{\sigma}) \subseteq \tilde{U}'$. Além disso, temos a decomposição $\tilde{U} = \tilde{K}\tilde{T}\tilde{K}$ para \tilde{U} .

Demonstração. Como \mathfrak{t} é abeliano maximal e $\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \subseteq \mathfrak{s}$, temos que $\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \subseteq \mathfrak{t}$, logo, $\mathfrak{t} = \mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \oplus (\mathfrak{t} \cap \mathfrak{g})$. Segue do Corolário 1.4 do capítulo V de [5] que $\tilde{T} = Z \times (\tilde{T} \cap \tilde{U}')$. Observe que \tilde{K} é conexo pela Proposição 3.2.5 e que sua álgebra consiste dos pontos fixos de $\sigma = (d\tilde{\sigma})_1$, logo, $\tilde{K} = \langle \exp(\mathfrak{k}) \rangle$. Como $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{u}'$, segue que $\tilde{K} \leq \tilde{U}'$, uma vez que ambos os grupos são conexos.

Na demonstração da Proposição 3.2.5, vimos que \mathfrak{u}' é invariante por $\tilde{\sigma}$, logo, $(\mathfrak{u}', \tilde{\sigma}|_{\mathfrak{u}'})$ é uma álgebra ortogonal involutiva que se decompõe como $\mathfrak{u}' = \mathfrak{k} \oplus (\mathfrak{u}' \cap \mathfrak{s})$. Os subespaços de Cartan contidos em $\mathfrak{u}' \cap \mathfrak{s}$ são todos conjugados via $\text{Inn}_{\mathfrak{u}'}(\mathfrak{k}) \simeq \text{Ad}(\tilde{K})$ e cobrem $\mathfrak{u}' \cap \mathfrak{s}$ (Corolário 1.4.13). Usando a Proposição 2.3.12, concluimos que

$$\tilde{U}' = \tilde{K}(\tilde{T} \cap \tilde{U}')\tilde{K}.$$

Observe que $\tilde{U}' \simeq \tilde{U}/Z$, então considere a projeção natural $\pi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}/Z$. Como $\tilde{U} \simeq Z \times \tilde{U}'$, podemos considerar que π coincide com a projeção $Z \times \tilde{U}' \rightarrow \tilde{U}'$ na segunda coordenada

de $Z \times \tilde{U}'$. Segue que $\pi(\tilde{K}) = \tilde{K}$ e $\pi(\tilde{T}) = \tilde{T} \cap \tilde{U}'$, de modo que

$$\pi(\tilde{U}) = \tilde{U}' = \tilde{K}(\tilde{T} \cap \tilde{U}')\tilde{K} = \pi(\tilde{K}\tilde{T}\tilde{K}).$$

Como $\ker \pi = Z$, dado $u \in \tilde{U}$, existem $k, l \in \tilde{K}$, $z \in Z$ e $h \in \tilde{T}$ tais que $u = khlz = k(hz)l \in \tilde{K}\tilde{T}\tilde{K}$, uma vez que $Z \subseteq \tilde{T}$. \square

O próximo Lema nos mostra porque podemos sempre assumir que $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{u}'$. A ideia é mostrar que, dado um espaço simétrico compacto U/K , sempre existe um espaço simétrico $\overline{U}/\overline{K}$ isométrico a U/K em que a hipótese é válida. Lembre-se que

$$\mathfrak{u} = (\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \cap \mathfrak{k}) \oplus (\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \cap \mathfrak{s}) \oplus (\mathfrak{u}' \cap \mathfrak{k}) \oplus (\mathfrak{u}' \cap \mathfrak{s}).$$

Definimos a álgebra compacta

$$\overline{\mathfrak{u}} = (\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \cap \mathfrak{s}) \oplus (\mathfrak{u}' \cap \mathfrak{k}) \oplus (\mathfrak{u}' \cap \mathfrak{s}),$$

que é uma subálgebra de \mathfrak{u} isomorfa a $\mathfrak{u}/(\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \cap \mathfrak{k})$. Observe que a involução σ de \mathfrak{u} se restringe a uma involução $\overline{\sigma} = \sigma|_{\overline{\mathfrak{u}}}$ de $\overline{\mathfrak{u}}$.

Lema 3.2.7. Existe um espaço simétrico compacto isométrico a U/K cuja álgebra ortogonal involutiva associada tem o autoespaço $+1$ contido na parte semi-simples.

Demonstração. A parte semi-simples de $\overline{\mathfrak{u}}$ coincide com \mathfrak{u}' e $\mathfrak{z}(\overline{\mathfrak{u}}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \cap \mathfrak{s}$. Além disso, o autoespaço -1 de $\overline{\sigma}$ coincide com \mathfrak{s} , enquanto o autoespaço $+1$ é igual a $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g} := \overline{\mathfrak{k}}$, i.e., intercepta apenas a parte semi-simples. O subgrupo $Z(U) \cap K$ é normal em U , defina então $\overline{U} = U/(Z(U) \cap K)$. A involução de U deixa $Z(U) \cap K$ invariante, pois age como a identidade em K (lembre-se que $\text{fix}(\sigma)_0 \subseteq K \subseteq \text{fix}(\sigma)$), então σ induz uma involução $\overline{\sigma} : \overline{U} \rightarrow \overline{U}$ que satisfaz $\overline{\sigma} \circ \phi = \phi \circ \sigma$, em que ϕ é a projeção natural $U \rightarrow \overline{U}$.

Defina $\overline{K} = \phi(K)$, então temos que $\overline{K} \subseteq \phi(\text{fix}(\sigma)) \subseteq \text{fix}(\overline{\sigma})$. Todos estes grupos têm mesma álgebra $\overline{\mathfrak{k}}$, logo, $\text{fix}(\overline{\sigma})_0 \subseteq \overline{K}$. Segue que $\overline{U}/\overline{K}$ é um espaço simétrico compacto. Para finalizar, vamos mostrar que é isométrico a U/K . Considere o seguinte diagrama, em que π e $\overline{\pi}$ denotam projeções naturais e ψ é definida por $\psi \circ \pi = \overline{\pi} \circ \phi$.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\phi} & \overline{U} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \overline{\pi} \\ S = U/K & \xrightarrow{\psi} & \overline{U}/\overline{K} = \overline{S} \end{array}$$

Observe que

$$\psi(u'K) = \psi(uK) \iff \phi(u^{-1}u') \in \bar{K} \iff u^{-1}u' \in K,$$

logo, ψ está bem definida e é injetiva. Sendo $\bar{\pi} \circ \phi$ sobrejetivo, temos que ψ é sobrejetiva.

Vamos mostrar que ψ é uma isometria. π é uma submersão e $\psi \circ \pi$ é diferenciável, então ψ é diferenciável. Além disso, ambos $\bar{\pi}$ e ϕ são submersões e $\psi^{-1} \circ (\bar{\pi} \circ \phi) = \pi$ é diferenciável, logo, ψ^{-1} é diferenciável. Segue que ψ é um difeomorfismo. Seja $p = K$ e $\bar{p} = \bar{K}$ os pontos base padrão, identifique $\mathfrak{s} = T_p S = T_{\bar{p}} \bar{S}$ via as projeções $\pi, \bar{\pi}$ e considere $X \in \mathfrak{s}$, então

$$\begin{aligned} (d\psi)_p X &= (d\psi)_p \circ (d\pi)_1(X + \mathfrak{k}) \\ &= (d\bar{\pi})_1 \circ (d\phi)_1(X + \mathfrak{k}) \\ &= (d\bar{\pi})_1(X + \bar{\mathfrak{k}}) \\ &= X. \end{aligned}$$

Segue que $(d\psi)_p$ é uma isometria. Para $u \in U$, temos que $\psi(up) = \phi(u)\psi(p)$, então $(d\psi)_{u(p)} = (d\phi(u))_{\bar{p}} \circ (d\psi)_p$ é uma isometria, uma vez que a ação de \bar{U} por multiplicação à direita em \bar{U}/\bar{K} é isométrica. \square

Para finalizar esta subseção, vamos demonstrar que o análogo do Teorema 3.2.4 é válido no recobrimento simplesmente conexo $\tilde{\pi} : \tilde{U} \rightarrow U$. Observe que o referido Teorema não é diretamente válido para \tilde{U} se u não for semi-simples, pois, neste caso, \tilde{U} não é compacto (como visto no início desta subseção). Usando a notação da Proposição 3.2.6, defina $\tilde{W} = N_{\tilde{K}}(\tilde{T}) = N_{\tilde{K}}(\mathfrak{t})$.

Teorema 3.2.8 (Proposição 3.6 de [2]). *Sejam $\tilde{k} \in \tilde{K}$ e $\tilde{h} \in \tilde{T}$ e suponha que $\tilde{k}\tilde{h}\tilde{k}^{-1} \in \tilde{T}$, então existe algum $\tilde{w} \in \tilde{W}$ tal que $\tilde{k}\tilde{h}\tilde{k}^{-1} = \tilde{w}\tilde{h}\tilde{w}^{-1}$. Além disso, $\tilde{\pi}(\tilde{W}) \subseteq W$.*

Demonstração. Seja $\tilde{T}' = \tilde{T} \cap \tilde{U}'$. Pela Proposição 3.2.6, temos que $\tilde{T} = \tilde{T}' \times Z$ e $\tilde{K} \subseteq \tilde{U}'$. Restringindo $\tilde{\sigma}$ a \tilde{U}' , obtemos o espaço simétrico compacto G/\tilde{K} que tem toro maximal \tilde{T}' .

Denote $\tilde{t} = \tilde{k}\tilde{h}\tilde{k}^{-1} \in \tilde{T}$ e escreva $\tilde{h} = \tilde{h}'z$, $\tilde{t} = \tilde{t}'\tilde{z}$ com $\tilde{h}', \tilde{t}' \in \tilde{T}'$ e $z, \tilde{z} \in Z$. Como Z é subgrupo central, temos que $\tilde{t}'\tilde{z} = \tilde{k}\tilde{h}'\tilde{k}^{-1}z$, então $\tilde{t}' = \tilde{k}\tilde{h}'\tilde{k}^{-1}$ e $z = \tilde{z}$, uma vez que $\tilde{U} = Z \times \tilde{U}'$. Segue do Teorema 3.2.4 que existe $\tilde{w} \in N_{\tilde{K}}(\tilde{T}') = N_{\tilde{K}}(\tilde{T})$ tal que $\tilde{k}\tilde{h}'\tilde{k}^{-1} = \tilde{w}\tilde{h}'\tilde{w}^{-1}$, segue que

$$\tilde{k}\tilde{h}\tilde{k}^{-1} = \tilde{k}\tilde{h}'\tilde{k}^{-1}z = \tilde{w}\tilde{h}'\tilde{w}^{-1}z = \tilde{w}\tilde{h}\tilde{w}^{-1}.$$

Para finalizar, sendo \tilde{K} conexo, temos que $\tilde{\pi}(\tilde{K}) \subseteq \text{fix}(\sigma)_0 \subseteq K$ e $\tilde{\pi}(\tilde{T}) = T$, pois ambos são abelianos e conexos com álgebra \mathfrak{t} . Seja $\tilde{k} \in \tilde{W}$ e $t = \tilde{\pi}(\tilde{t}) \in T$, em que $\tilde{t} \in \tilde{T}$, então $\tilde{\pi}(\tilde{k})t\tilde{\pi}(\tilde{k})^{-1} = \tilde{\pi}(\tilde{k}\tilde{t}\tilde{k}^{-1}) \in T$, logo, $\tilde{\pi}(\tilde{W}) \subseteq W$. \square

3.2.2 Recobrimento Universal de Klein de U/K

Nesta seção vamos tratar de um recobrimento simplesmente conexo especial de U/K chamado de Recobrimento Universal de Klein. Estudar este recobrimento é interessante para nós porque permitirá estender o Teorema 3.2.4 para U/K considerando a ação do grupo de Weyl em U/K .

Para $u \in U$, denotaremos por * o anti-homomorfismo de U definido por $u^* = \sigma(u^{-1})$, em que σ é a involução de U . É fácil ver que * é uma operação involutiva, ou seja, $u^{**} = u$ para todo $u \in U$. Além disso, * coincide com a inversão em $\text{fix}(\sigma)$; em particular, coincide com a inversão em K , uma vez que $K \subseteq \text{fix}(\sigma)$. Existe então uma ação natural de U sobre si mesmo dada por $u \cdot h = uhu^*$. Defina a aplicação $\eta : U \rightarrow U$ dada por $\eta(u) = uu^*$, então $\eta(U)$ é a órbita de 1 pela ação definida acima. Observe ainda que $\text{fix}(\sigma)$ é a isotropia de 1. Para reduzir a redundância de η , podemos fatorá-la via o quociente de U por algum subgrupos de $\text{fix}(\sigma)$, tal qual K .

$$\begin{array}{ccc} U & & \\ \downarrow \pi & \searrow \eta & \\ U/K & \xrightarrow{\eta} & U \end{array}$$

Por simplicidade, denotamos ambas as aplicações com o mesmo símbolo η , deve satisfazer $\eta(uK) = \eta(u)$ e está claramente bem definida, uma vez que $K \subseteq \text{fix}(\sigma)$. Observe que $\eta(uK) = uu^* = u \cdot 1$, então η é U -equivariante. Chamaremos ambas as aplicações η definidas acima de *Recobrimento de Cartan* de U .

Como $\text{fix}(\sigma)_0 \subseteq K$, temos que $\eta : U/K \rightarrow U$ tem diferencial sempre não nula, logo, é um homeomorfismo local sobre sua imagem. Dois pontos uK e vK têm mesma imagem por η sempre que $u \in \text{fix}(\sigma)v$, então $\text{fix}(\sigma)$ parametriza os conjuntos de pontos de U/K com uma mesma imagem via η , em outras palavras, $\eta : U/K \rightarrow U$ é um recobrimento sobre sua imagem com fibra difeomorfa a $\text{fix}(\sigma)/K$ em cada ponto, que é discreta porque K contém a componente da identidade de $\text{fix}(\sigma)$.

Se $\tilde{\pi} : \tilde{U} \rightarrow U$ é o recobrimento simplesmente conexo de U e $\tilde{\sigma}$ é a extensão de σ a \tilde{U} , então $\text{fix}(\tilde{\sigma})$ é conexo pela Proposição 3.2.5. Logo, $\tilde{K} = \langle \exp(\mathfrak{k}) \rangle$ coincide com $\text{fix}(\tilde{\sigma})$. Temos então que $\tilde{\pi}(\tilde{K}) = \text{fix}(\sigma)_0 \subseteq K$ e \tilde{U}/\tilde{K} é simplesmente conexo pelo Teorema A.3.1, então $\tilde{\pi} : \tilde{U} \rightarrow U$ induz a aplicação $\tilde{\pi} : \tilde{U}/\tilde{K} \rightarrow U/K$, que denotamos ainda por $\tilde{\pi}$, e satisfaz $\tilde{\pi}(u\tilde{K}) = \tilde{\pi}(u)K$.

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{U} & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & U \\
 \downarrow \tilde{f} & & \downarrow f \\
 \tilde{U}/\tilde{K} & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & U/K
 \end{array}$$

Observe que $\tilde{\pi}$ é claramente sobrejetiva e é diferenciável uma vez que $\tilde{\pi} \circ \tilde{f} = f \circ \tilde{\pi}$ é diferenciável e \tilde{f} é uma submersão (veja o Teorema 5.19 de [13]). Vamos mostrar que $\tilde{\pi}$ é um recobrimento.

O grupo $\tilde{\pi}^{-1}(K)$ normaliza \tilde{K} , como mostra a demonstração do Lema 3.2.13 e ambos \tilde{K} e $\tilde{\pi}^{-1}(K)$ têm a mesma álgebra, então $\tilde{\pi}^{-1}(K)/\tilde{K}$ é discreto. Pelo Teorema 13.22 de [6], a aplicação $\xi : \tilde{U}/\tilde{K} \rightarrow \tilde{U}/\tilde{\pi}^{-1}(K)$, definida por $\xi(u\tilde{K}) = u\tilde{\pi}^{-1}(K)$, é um fibrado principal com grupo estrutural $\tilde{\pi}^{-1}(K)/\tilde{K}$, logo, é um recobrimento diferenciável (veja o Teorema A.3.3). Seja $\psi : \tilde{U}/\tilde{\pi}^{-1}(K) \rightarrow U/K$ dada por $\psi(u\tilde{\pi}^{-1}(K)) = \tilde{\pi}(u)K$, esta aplicação está bem definida e é injetiva, uma vez que

$$u\tilde{\pi}^{-1}(K) = v\tilde{\pi}^{-1}(K) \iff \tilde{\pi}(u^{-1}v) \in K \iff \tilde{\pi}(u^{-1}v)K = K.$$

Além disso, ψ é claramente sobrejetiva e é diferenciável (Teorema 5.19 de [13]), pois satisfaz $\tilde{\pi} = \psi \circ \xi$ e ξ é uma submersão sobrejetiva, já que \tilde{K} e $\tilde{\pi}^{-1}(K)$ têm a mesma álgebra e os espaços tangentes de \tilde{U}/\tilde{K} e $\tilde{U}/\tilde{\pi}^{-1}(K)$ se identificam com u/\mathfrak{k} . Como $\tilde{\pi} = \psi \circ \xi$, a derivada de ψ é sobrejetiva em todo ponto, logo, é também injetiva, já que é uma aplicação entre espaços de mesma dimensão; segue da Proposição 5.16 de [13] que ψ é um difeomorfismo. Sendo ξ um recobrimento, $\tilde{\pi}$ é também um recobrimento.

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{U}/\tilde{K} & & \\
 \downarrow \xi & \searrow \tilde{\pi} & \\
 \tilde{U}/\tilde{\pi}^{-1}(K) & \xrightarrow{\psi} & U/K
 \end{array}$$

Como $\tilde{K} = \text{fix}(\tilde{\sigma})$, ao fatorar o recobrimento de Cartan $\tilde{\eta}$ de \tilde{U} via \tilde{U}/\tilde{K} , obtemos o mergulho $\tilde{\eta} : \tilde{U}/\tilde{K} \rightarrow \tilde{U}$. Denote $\tilde{S} = \tilde{\eta}(\tilde{U}/\tilde{K})$, então temos o seguinte diagrama comutativo de recobrimentos simplesmente conexos, que define o *Recobrimento Universal de Klein* denotado por λ .

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{U}/\tilde{K} & \xrightarrow{\tilde{\eta}} & \tilde{S} \subseteq \tilde{U} \\
 \searrow \tilde{\pi} & & \swarrow \lambda \\
 & U/K &
 \end{array}$$

Observe que λ é um recobrimento porque $\tilde{\pi}$ é e porque $\tilde{\eta}$ é um homeomorfismo. O próximo passo é descrever como são as fibras destes recobrimentos. No que segue, usaremos os resultados descritos na Subseção A.3.1 do Apêndice.

Denotando por $p = K$ o ponto base padrão de U/K , observe que ambas as fibras $\tilde{\pi}^{-1}(p)$ e $\lambda^{-1}(p)$ são isomórfas ao grupo das deck transformations do respectivo recobrimento, já que este grupo age de maneira transitiva e fiel e trata-se de recobrimentos simplesmente conexos. Além disso, ambos $\tilde{\pi}^{-1}(p)$ e $\lambda^{-1}(p)$ são isomórfos ao grupo fundamental $\pi_1(U/K)$ e U/K é difeomorfo ao quociente $\tilde{S}/\lambda^{-1}(p)$.

Sejam $\mathfrak{u} = \mathfrak{k} + \mathfrak{s}$ a decomposição de \mathfrak{u} e $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{s}$ um subespaço de Cartan. Denote por $\tilde{T} = \langle \exp(\mathfrak{t}) \rangle$ o grupo conexo gerado por \mathfrak{t} em \tilde{U} e defina $\tilde{F} = \tilde{T} \cap Z(\tilde{U})$.

Teorema 3.2.9. *O mergulho $\tilde{\eta}$ se fatora a um isomorfismo de grupos $N_{\tilde{U}}(\tilde{K})/\tilde{K} \rightarrow \tilde{F}$. Além disso, $\tilde{\eta}$ se restringe a um isomorfismo entre $\tilde{\pi}^{-1}(p)$ e $\lambda^{-1}(p)$.*

A demonstração deste Teorema seguirá de uma série de Lemas que mostramos a seguir.

Lema 3.2.10. $N_{\tilde{U}}(\tilde{K}) \cap \tilde{T} = \{t \in \tilde{T} : t^2 \in \tilde{F}\}$

Demonastração. Seja $t \in N_{\tilde{U}}(\tilde{K}) \cap \tilde{T}$ e $k \in \tilde{K}$. Como $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{s}$, temos que $\sigma(t) = t^{-1}$ e, além disso, $tkt^{-1} \in \tilde{K}$. Segue que $tkt^{-1} = \sigma(tkt^{-1}) = t^{-1}kt$, então $t^2 \in Z_{\tilde{U}}(\tilde{K})$ pela arbitrariedade de k . Observe, no entanto, que $\tilde{U} = \tilde{K}\tilde{T}\tilde{K}$ (Proposição 3.2.6), então $t^2 \in \tilde{T} \cap Z(\tilde{U}) = \tilde{F}$.

Seja agora $t \in \tilde{T}$ e suponha que $t^2 \in \tilde{F}$. Temos que $\text{Ad}(t^2) = \text{id}$, pois $t^2 \in Z(\tilde{U})$, então $\text{Ad}(t) = \text{Ad}(t^{-1})$. Observe por fim que

$$\sigma \text{Ad}(t) \sigma^{-1} = \text{Ad}(\sigma(t)) = \text{Ad}(t^{-1}) = \text{Ad}(t),$$

uma vez que $t \in \tilde{T}$, ou seja, σ comuta com $\text{Ad}(t)$, logo, $\text{Ad}(t)$ deixa \mathfrak{k} invariante. Segue que $t \in N_{\tilde{U}}(\mathfrak{k}) = N_{\tilde{U}}(\tilde{K})$, em que esta igualdade vale pela conexidade de \tilde{K} . \square

Lema 3.2.11. $N_{\tilde{U}}(\tilde{K}) = (N_{\tilde{U}}(\tilde{K}) \cap \tilde{T})\tilde{K} \subseteq \tilde{T}\tilde{K}$.

Demonstração. Seja $u \in N_{\tilde{U}}(\tilde{K})$ e escreva $u = ktl$ com $k, l \in \tilde{K}$ e $t \in \tilde{T}$ (Proposição 3.2.6), isto mostra que $t \in N_{\tilde{U}}(\tilde{K}) \cap \tilde{T}$. Como u normaliza \tilde{K} , temos que $k^{-1}u = um$ para algum $m \in \tilde{K}$, segue que $um = tl$, ou seja, $u = tlm$. \square

Considere agora o recobrimento de Cartan $\tilde{\eta} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$. Pelo Lema 3.2.11, temos que $\tilde{\eta}(N_{\tilde{U}}(\tilde{K})) = \tilde{\eta}(N_{\tilde{U}}(\tilde{K}) \cap \tilde{T})$, uma vez que $\tilde{\eta}$ é constante nas classes laterais $u\tilde{K}$. Para qualquer $t \in \tilde{T}$, temos que $\tilde{\eta}(t) = t^2$, então segue do Lema 3.2.10 que $\tilde{\eta}(N_{\tilde{U}}(\tilde{K})) \subseteq \tilde{F}$. Por fim, veja que, se $u \in \tilde{U}$ e $n \in N_{\tilde{U}}(\tilde{K})$, temos que

$$\tilde{\eta}(un) = u\tilde{\eta}(n)u^* = uu^*\tilde{\eta}(n) = \tilde{\eta}(u)\tilde{\eta}(n),$$

em que usamos que $\tilde{\eta}(n) \in Z(\tilde{U})$. Portanto $\tilde{\eta}$ induz um homomorfismo $N_{\tilde{U}}(\tilde{K}) \rightarrow \tilde{F}$ com núcleo K . Para mostrar que $N_{\tilde{U}}(\tilde{K})/\tilde{K} \simeq \tilde{F}$, resta mostrar que $\tilde{\eta}$ é sobrejetiva, isto que segue do Lema a seguir.

Lema 3.2.12. $\tilde{\eta}(N_{\tilde{U}}(\tilde{K})) = \tilde{F}$.

Demonstração. Pelo Corolário 12.2.3 de [4], a exponencial $t \rightarrow \tilde{T}$ é sobrejetiva, logo, todo elemento de \tilde{T} tem raiz quadrada em \tilde{T} . Seja $t \in \tilde{F}$ e $h \in \tilde{T}$ tal que $t = h^2$; segue do Lema 3.2.10 que $h \in N_{\tilde{U}}(\tilde{K}) \cap \tilde{T}$. \square

Vamos mostrar agora que o isomorfismo $\tilde{\eta} : N_{\tilde{U}}(\tilde{K})/\tilde{K} \rightarrow \tilde{F}$ se restringe a um isomorfismo entre as fibras $\tilde{\pi}^{-1}(p)$ e $\lambda^{-1}(p)$. Pelo que foi discutido anteriormente, já sabemos que tratar-se de grupos isomorfos e é fácil ver que $\tilde{\eta}(\tilde{\pi}^{-1}(p)) = \lambda^{-1}(p)$ pela construção de λ . Portanto, basta mostrar o seguinte Lema.

Lema 3.2.13. $\tilde{\pi}^{-1}(p) \leq N_{\tilde{U}}(\tilde{K})/\tilde{K}$.

Demonstração. Seja $u \in \tilde{U}$ e suponha que $\tilde{\pi}(u) \in K$. Temos que

$$\tilde{\pi}(u\tilde{K}u^{-1}) \subseteq \tilde{\pi}(u)K\tilde{\pi}(u)^{-1} = K,$$

logo, $u\tilde{K}u^{-1}$ e \tilde{K} são subgrupos conexos de \tilde{U} com álgebra \mathfrak{k} , então coincidem e segue que $u \in N_{\tilde{U}}(\tilde{K})$. \square

O grupo $N_{\tilde{U}}(\tilde{K})/\tilde{K}$ age à direita de \tilde{U}/\tilde{K} por isometrias da seguinte maneira. Seja $n \in N_{\tilde{U}}(\tilde{K})$ e $u \in \tilde{U}$, então $u\tilde{K} \cdot n\tilde{K} = un\tilde{K} = u\tilde{K}n$. O grupo \tilde{F} também age sobre \tilde{S} por multiplicação à direita e podemos vizualizar esta ação por meio do recobrimento de Cartan. Seja $f = \tilde{\eta}(n\tilde{K}) \in \tilde{F}$ e $s = \tilde{\eta}(u\tilde{K}) \in \tilde{S}$, então

$$s \cdot f = \tilde{\eta}(u\tilde{K})\tilde{\eta}(n\tilde{K}) = \tilde{\eta}(un\tilde{K}) = \tilde{\eta}(u\tilde{K} \cdot n\tilde{K}),$$

onde usamos que o recobrimento de Cartan $\tilde{\eta} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ satisfaz $\tilde{\eta}(un) = \tilde{\eta}(u)\tilde{\eta}(n)$ para $u \in \tilde{U}$ e $n \in N_{\tilde{U}}(\tilde{K})$. Portanto, $\tilde{\eta}$ funciona como uma equivalência entre estas duas ações.

Os resultados que vimos até aqui nos permitem demonstrar um resultado análogo ao Teorema 3.2.4 para o espaço simétrico U/K . Seja $W = M^*/M$ o grupo de Weyl de U/K , em que M^* e M são, respectivamente, o normalizador e o centralizador de \mathfrak{t} em K . Denote por T o subgrupo conexo de U com álgebra \mathfrak{t} . Finalizamos demonstrando o Teorema 3.2.1, que enunciámos no início desta Seção.

Demonstração do Teorema 3.2.1. Pela Proposição 3.2.3, podemos escrever $k = k_0m$, com $k_0 \in K_0$ e $m \in M$. Como m centraliza T , podemos supor, sem perda de generalidade, que $k = k_0 \in K$. Seja $t' \in T$ tal que $ktp = t'p$ e considere $\tilde{k} \in \tilde{K}, \tilde{t}, \tilde{t}' \in \tilde{T}$ no recobrimento $\tilde{\pi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ tais que $\tilde{\pi}(\tilde{k}) = k, \tilde{\pi}(\tilde{t}) = t$ e $\tilde{\pi}(\tilde{t}') = t'$. Denotando $\tilde{p} = \tilde{K}$, temos que

$$\tilde{\pi}(\tilde{k}\tilde{t}\tilde{p}) = ktp = t'p = \tilde{\pi}(\tilde{t}'\tilde{p}).$$

Isto mostra que ambos $\tilde{t}'\tilde{p}$ e $\tilde{k}\tilde{t}\tilde{p}$ estão em $\tilde{\pi}^{-1}(p)$, logo, $\tilde{\eta}(\tilde{t}'\tilde{p}), \tilde{\eta}(\tilde{k}\tilde{t}\tilde{p}) \in \lambda^{-1}(p)$. Vimos que $\tilde{\pi}^{-1}(p) \leq N_{\tilde{U}}(\tilde{K})$, então $\lambda^{-1}(p) \leq \tilde{F}$; segue que existe $f \in \tilde{F} \subseteq \tilde{T}$ tal que

$$\tilde{k}\tilde{t}^2\tilde{k}^{-1} = \tilde{\eta}(\tilde{k}\tilde{t}\tilde{p}) = \tilde{\eta}(\tilde{t}'\tilde{p}) \cdot f = (t')^2f \in \tilde{T}.$$

Pelo Teorema 3.2.8, temos que existe $\tilde{w} \in \tilde{W}$, em que $\tilde{W} = N_{\tilde{K}}(\tilde{T})$, tal que

$$\tilde{\eta}(\tilde{k}\tilde{t}\tilde{p}) = \tilde{k}\tilde{t}^2\tilde{k}^{-1} = \tilde{w}\tilde{t}^2\tilde{w}^{-1} = \tilde{\eta}(\tilde{w}\tilde{t}\tilde{p}).$$

Como $\tilde{\eta}$ é um mergulho, temos que $\tilde{k}\tilde{t}\tilde{p} = \tilde{w}\tilde{t}\tilde{p}$. Projetando esta igualdade em U/K , temos que $ktp = \tilde{\pi}(\tilde{w})tp$, em que $\tilde{\pi}(\tilde{w}) \in W$ pelo Teorema 3.2.8. \square

3.3 Imagem Inversa da Exponencial

O objetivo desta Seção é descrever o conjunto das geodésicas que conectam dois pontos arbitrários p e q de um espaço simétrico compacto S . Para motivar a discussão, considere o seguinte exemplo

Exemplo 3.3.1 (Esfera $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$). Sejam $p, q \in S^2$ e suponha que $q \neq p$ e que $q \neq -p$. Seja $X \in T_p S^2$ o vetor de menor norma tal que $\exp_p(X) = q$ e denote $X_0 = X/|X|$. As geodésicas que conectam p e q têm a forma $\exp_p(t(X + 2\pi X_0))$, $t \in [0, 1]$, logo, todos os pontos do reticulado $X + 2\pi \mathbb{Z} X_0$ são levados em q por \exp_p .

Por outro lado, se $q = -p$, todo $X \in T_p S^2$ com $|X| = \pi$ é tal que $\exp_p(tX)$ é uma geodésica que vai de p a $q = -p$. O mesmo vale se $|X| = (2k + 1)\pi$ para $k \in \mathbb{N}$. De maneira análoga, se $q = p$, as geodésicas fechadas passando por p têm a forma $\exp_p(tX)$ com $|X| = 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Mais adiante, voltaremos a este exemplo nos apropriando da teoria geral a ser desenvolvida nesta Seção.

Fixado o ponto base $p = 1K$ e, dado um ponto $q \in S = U/K$, denote por K^q o subgrupo de K que fixa q , então, para qualquer geodésica γ que conecta p e q , a órbita $K^q \gamma$ consiste de geodésicas que vão de p a q . Podemos identificar uma geodésica γ com o vetor tangente $X = \gamma'(0) \in T_p S \approx \mathfrak{s}$ e escrevemos $\gamma(t) = \exp_p(tX) = \exp(tX)p$, de modo que $q = \gamma(1) = \exp_p(X)$ e $X \in \exp_p^{-1}(q)$. Dado $k \in K$, a exponencial Riemanniana satisfaz

$$k\gamma(t) = k\exp(tX)k^{-1}K = \exp(t\text{Ad}(k)X)p,$$

logo, K^q age em $\exp_p^{-1}(q)$ via a sua representação adjunta, ou seja, $kX = \text{Ad}(k)X$. Como os subespaços de Cartan são conjugados e cobrem \mathfrak{s} (Corolário 1.4.13), podemos supor, sem perda de generalidade, que $X = H \in \mathfrak{t}$, em que $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{s}$ é um subespaço de Cartan. Deste modo, a órbita $K^q \gamma$ se identifica com a chamada *órbita focal*

$$\mathfrak{F}(H) = K^q H \subseteq T_p S. \quad (3.17)$$

Considere o reticulado de S ,

$$\Gamma = \{\gamma \in \mathfrak{t} : \exp_p(\gamma) = p\} = \{\gamma \in \mathfrak{t} : \exp(\gamma) \in K\},$$

definido na Subseção 3.1.2. Lembre-se do centralizador $\text{mod } \Gamma$

$$W^q = \{w \in W : wH \in H + \Gamma\}.$$

e do subgrupo W_0^q de W^q gerado pelas reflexões em hiperplanos de raíz $\alpha = 0$ tais que $\alpha(H) \in \pi\mathbb{Z}$. Como vimos na Subseção 1.3.3, trata-se de um subgrupo normal de W^q .

Teorema 3.3.2. *Dado $q = \exp(H)p$,*

$$\exp_p^{-1}(q) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{F}(H + \gamma)$$

Demonastração. Denote $h = \exp(H)$. Inicialmente, mostramos que cada uma das órbitas focais é levada em $q = hp$ pela exponencial. Dado $k \in K^q$ e $\gamma \in \Gamma$, temos que

$$\exp_p(\text{Ad}(k)(H + \gamma)) = k \exp(H + \gamma) k^{-1} p = k \exp(H) k^{-1} p = k(hp) = q.$$

Por outro lado, seja $X \in \mathfrak{s}$ tal que $\exp_p(X) = \exp(X)p = hp$. Existe $k \in K$ tal que $\text{Ad}(k)X \in \mathfrak{t}$ (Corolário 1.4.13), de modo que $\exp(\text{Ad}(k)X)p = khp \in Tp$. Segue do Teorema 3.2.1 que existe $w \in W$ que satisfaz $khp = whp$, em que w pode ser pensado como um elemento de K e, portanto, $k^{-1}w \in K^q$. De modo equivalente, podemos escrever

$$\exp(\text{Ad}(k)X)p = \exp(wH)p,$$

em que ambos $\text{Ad}(k)X, wH \in \mathfrak{t}$, logo,

$$\text{Ad}(k)X = wH + \gamma' = w(H + \gamma),$$

em que $\gamma = w^{-1}\gamma' \in \Gamma$. Observe que usamos que Γ é W -invariante, isto segue do fato que podemos considerar $W \subseteq K$ e $\exp(\Gamma) \subseteq K$. Temos então que

$$X = \text{Ad}(k^{-1})w(H + \gamma) = \text{Ad}(k^{-1}w)(H + \gamma) \in \mathfrak{F}(H + \gamma).$$

□

Por definição de órbita, se duas órbitas focais se intersectam, elas claramente coincidem. O subgrupo W^q de W nos fornece uma maneira de determinar quando duas órbitas focais coincidem.

Proposição 3.3.3. Duas órbitas focais $\mathfrak{F}(H + \gamma)$ e $\mathfrak{F}(H + \gamma')$ coincidem se, e somente se, $H + \gamma' \in W^q(H + \gamma)$.

Demonastração. Suponha que exista $w \in W$ (podemos pensar que $w \in K$) tal que $w(H + \gamma) = H + \gamma'$, então

$$q = \exp(H + \gamma')p = w \exp(H + \gamma)p = wq.$$

Segue que $w \in K^q$ e, portanto, $H + \gamma' \in \mathfrak{F}(H + \gamma)$.

Por outro lado, suponha que $\mathfrak{F}(H + \gamma) = \mathfrak{F}(H + \gamma')$. Existe $k \in K^q$ tal que $H + \gamma' = \text{Ad}(k)(H + \gamma)$ e, pelo Corolário 1.4.20, existe $w \in W$ que satisfaz $\text{Ad}(k)(H + \gamma) = w(H + \gamma)$. Como $w\gamma \in \Gamma$, temos que $w \in W^q$. \square

O próximo passo é determinar a dimensão das órbitas focais e descrever suas componentes conexas. Para tanto, é necessário entender melhor alguns subgrupos de K^q e de W^q . Seja $K_H = \{k \in K : \text{Ad}(k)H = H\}$ o centralizador de H em K e $K_h = \{k \in K : khk^{-1} = h\}$ o centralizador de h em K . Para $k \in K_H$, temos que

$$h = \exp(H) = \exp(\text{Ad}(k)H) = khk^{-1},$$

de modo que $K_H \subseteq K_h$. Os elementos de K_H fixam a geodésica $\gamma(t) = \exp(tH)$ ponto a ponto e o mesmo não é, necessariamente, verdade para os elementos de K_h . Temos então que $\mathfrak{F}(H)$ é difeomorfo ao espaço homogêneo K^q/K_H .

Seja $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{s}$ um subespaço de Cartan de \mathfrak{u} , denote $\mathfrak{m} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{t}) \cap \mathfrak{k}$ e lembre-se dos autoespaços generalizados \mathfrak{m}_α da família de operadores $\text{ad}(\mathfrak{t})$ definidos no Teorema 1.4.10. Temos que \mathfrak{u} se decompõe da seguinte forma:

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{m} + \mathfrak{t} + \sum_{\alpha \in \Delta_\sigma} \mathfrak{m}_\alpha,$$

em que $\Delta_\sigma = \Delta_\sigma(\mathfrak{u}, \mathfrak{t})$ é o conjunto das raízes restritas e σ é a invocação de \mathfrak{u} , conforme a Seção 1.4. Para $\alpha \in \Delta_\sigma(\mathfrak{u}, \mathfrak{t})$, denotamos $\mathfrak{k}_\alpha = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{m}_\alpha$ e $\mathfrak{s}_\alpha = \mathfrak{s} \cap \mathfrak{m}_\alpha$, de modo que

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{m} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta_\sigma} \mathfrak{k}_\alpha, \quad \mathfrak{s} = \mathfrak{t} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta_\sigma} \mathfrak{s}_\alpha.$$

\mathfrak{k}_α e \mathfrak{s}_α têm a mesma dimensão, uma vez que, para H regular (ou seja, $\mathfrak{z}_{\mathfrak{u}}(H) \cap \mathfrak{s} = \mathfrak{t}$, veja a Seção 1.4), temos que $\text{ad}(H)$ é invertível em cada \mathfrak{m}_α e temos que

$$\text{ad}(H)\mathfrak{k}_\alpha \subseteq \mathfrak{s}_\alpha, \quad \text{ad}(H)\mathfrak{s}_\alpha \subseteq \mathfrak{k}_\alpha.$$

Denotamos por n_α a dimensão comum de \mathfrak{s}_α e \mathfrak{k}_α .

A álgebra de K_H é denotada $\mathfrak{k}_H = \{X \in \mathfrak{k} : [X, H] = 0\}$ e a álgebra \mathfrak{k}_h de K_h pode ser descrita como $\{X \in \mathfrak{k} : e^{\text{ad}(H)}X = X\}$. Estas álgebras podem ser decompostas da seguinte forma.

$$\mathfrak{k}_H = \mathfrak{m} \oplus \sum_{\alpha(H)=0} \mathfrak{k}_\alpha, \quad \mathfrak{k}_h = \mathfrak{m} \oplus \sum_{\alpha(H) \in 2\pi\mathbb{Z}} \mathfrak{k}_\alpha. \quad (3.18)$$

Se $k \in K^q$, temos que $kq = q$, logo, aplicando o recobrimento de Klein $\eta : U/K \rightarrow U$ com $q = hp$, temos que

$$kh^2k^{-1} = \eta(khp) = \eta(kq) = \eta(q) = \eta(hp) = h^2, \quad (3.19)$$

então $K^q \subseteq U_{h^2}$, o centralizador de h^2 . Como $khp = hp$ se, e somente se $h^{-1}kh \in K$, podemos descrever K^q como o conjunto $\{k \in K : h^{-1}kh \in K\}$. Para X é um elemento da álgebra \mathfrak{k}^q de K^q , temos que $\exp(-H)\exp(tX)\exp(H) = \exp(te^{\text{ad}(-H)}X) \in K$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então $e^{\text{ad}(-H)}X \in \mathfrak{k}$. Segue que $\mathfrak{k}^q = \{X \in \mathfrak{k} : e^{\text{ad}(-H)}X \in \mathfrak{k}\}$. Para $X \in \mathfrak{k}^q$, usando a involução, temos que

$$e^{\text{ad}(-H)}X = \sigma(e^{\text{ad}(-H)}X) = e^{\text{ad}(H)}X$$

(veja a Equação (3.8)). Portanto, $e^{\text{ad}(2H)}X = X$, então

$$\mathfrak{k}^q = \{X \in \mathfrak{k} : e^{\text{ad}(2H)}X = X\} = \mathfrak{k}_{h^2}.$$

Lembrando da equação (3.9) e da discussão que vem em seguida, temos que

$$\mathfrak{k}^q = \mathfrak{k}_{h^2} = \mathfrak{m} \oplus \sum_{\alpha(H) \in \pi\mathbb{Z}} \mathfrak{k}_\alpha \quad (3.20)$$

Estes espaços que descrevemos nos serão úteis na demonstração da próxima Proposição, que é um passo na direção de entender as propriedades das órbitas focais. Os elementos do grupo de Weyl W são representados em K pelos elementos do normalizador M^* de \mathfrak{t} , ou seja, $W = \text{Ad}(M^*)|_{\mathfrak{t}}$. Defina $M^{*q} = M^* \cap K^q$.

Proposição 3.3.4. Podemos decompor $K^q = (K^q)_0 M^{*q}$.

Demonstração. A ideia desta demonstração é, a partir do espaço simétrico U/K , encontrar um espaço simétrico que tenha K^q como isotropia para, assim, proceder de maneira similar à Proposição 3.2.3.

Denote por s a simetria geodésica ao redor de $p = K$, ela satisfaz $s(uK) = \sigma(u)K$, em que σ é a involução de U . Seja $q = hp$, em que $h = \exp(H)$ com $H \in \mathfrak{t}$ e defina $q' = s(q) = h^{-1}p$. Se $k \in K^q$, temos que

$$kq' = s(khp) = s(hp) = \sigma(h)p = q',$$

logo, $K^q \subseteq K^{q'}$. Por simetria do argumento, temos que $K^q = K^{q'}$.

O centralizador U_{h^2} é fechado em U , logo, é um grupo compacto. Além disso, se $u \in U_{h^2}$, temos que

$$\begin{aligned}\sigma(u)h^2\sigma(u^{-1}) &= \sigma(uh^{-2}u^{-1}) = \sigma(h^{-2}) = h^2, \\ \sigma(u)h^{-2}\sigma(u^{-1}) &= \sigma(uh^2u^{-1}) = \sigma(h^2) = h^{-2},\end{aligned}$$

logo, U_{h^2} é invariante por σ . Por fim, a equação (3.19) nos mostra que $K^q \leq U_{h^2}$.

Denote por \mathfrak{u}_{h^2} a álgebra de U_{h^2} ; sendo U_{h^2} invariante por σ , \mathfrak{u}_{h^2} também é, então $\mathfrak{u}_{h^2} = \mathfrak{k}_{h^2} \oplus \mathfrak{s}_{h^2}$, em que $\mathfrak{k}_{h^2} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{u}_{h^2}$ e $\mathfrak{s}_{h^2} = \mathfrak{s} \cap \mathfrak{u}_{h^2}$. Relembrando a equação (3.20), temos que $\mathfrak{k}_{h^2} = \mathfrak{k}^q$, logo, $\text{fix}(\sigma|_{U_{h^2}})_0 \subseteq K^q \subseteq \text{fix}(\sigma|_{U_{h^2}})$ e, portanto, U_{h^2}/K^q é um espaço simétrico compacto. Observe ainda que $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{s}_{h^2}$, uma vez que $h^2 \in T = \langle \exp(\mathfrak{t}) \rangle \leq U_{h^2}$.

Dado $k \in K^q$, $\text{Ad}(k)\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{s}_{h^2}$ é um subespaço de Cartan, então, pelo Corolário 1.4.13, existe $k' \in (K^q)_0$ tal que $\text{Ad}(k'k)\mathfrak{t} = \mathfrak{t}$, logo, $k'k = w \in K^q \cap M^* = M^{*q}$. Portanto, $k = (k')^{-1}w \in K^q = (K^q)_0 M^{*q}$

□

A próxima proposição nos fornece informações sobre os grupos W^q e W_0^q , os quais são importantes nas descrições das órbitas focais.

Proposição 3.3.5. Os subgrupos W^q e W_0^q de W satisfazem

$$W^q = \text{Ad}(M^{*q})|_{\mathfrak{t}} \quad W_0^q = \text{Ad}((K^q)_0 \cap M^{*q})|_{\mathfrak{t}}.$$

Demonstração. Seja $w \in W^q$, então $wH = H + \gamma$ para algum $\gamma \in \Gamma$. Seja $k \in M^*$ um representante de w , ou seja, $w = \text{Ad}(k)$. Segue que

$$kq = k \exp(H)k^{-1}p = \exp(wH)p = \exp(H + \gamma)p = \exp(H)p = q,$$

logo, $k \in K^q$. Por outro lado, se $k \in M^{*q}$, temos que $\exp(\text{Ad}(k)H)p = k(\exp(H)p) = \exp(H)p = q$, então $\text{Ad}(k)H \in H + \Gamma$, ou seja, $\text{Ad}(k) \in W^q$.

Com a notação da Proposição 3.3.4, seja

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}_{h^2}}(\mathfrak{t}) + \mathfrak{t} \oplus \sum_{\alpha} \mathfrak{m}'_{\alpha}$$

a decomposição de \mathfrak{u}_{h^2} em espaços de raízes restritas com respeito a \mathfrak{t} (vide Teorema 1.4.10). O grupo U_{h^2} pode ser descrito como o conjunto dos $u \in U$ tal que $uh^2u^{-1} = h^2$ ou, equivalentemente, $h^2uh^{-2} = u$, de modo que, para $X \in \mathfrak{u}_{h^2}$, temos

$$\exp(tX) = \exp(\text{Ad}(h^2)tX) = \exp(e^{\text{ad}(2H)}tX) = h^2 \exp(tX)h^{-2}.$$

Portanto, todo $X \in \mathfrak{u}_{h^2}$ deve satisfazer $e^{\text{ad}(2H)}X = X$. Esta equação impõe condições sobre as raízes de $\Delta_\sigma(\mathfrak{u}_{h^2}, \mathfrak{t})$. Para um par hiperbólico $X, Y \in \mathfrak{m}'_\alpha$, temos que $X = e^{\text{ad}(2H)}X = \cos(2\alpha(H))X - \sin(2\alpha(H))Y$, de modo que $\alpha(H) \in \pi\mathbb{Z}$. Segue que o conjunto de raízes de $(\mathfrak{u}_{h^2}, \mathfrak{t})$ pode ser descrito como $\{\alpha \in \Delta_\sigma(\mathfrak{u}, \mathfrak{t}) : \alpha(H) \in \pi\mathbb{Z}\}$ e, portanto, o seu grupo de Weyl coincide com W_0^q , o qual pode ser visto tanto como representação adjunta do normalizador $K^q \cap M^* \subseteq K^q$ quanto de $(K^q)_0 \cap M^* = (K^q)_0 \cap (K^q \cap M^*) = (K^q)_0 \cap M^{*q}$ (veja a Proposição 1.4.17). \square

Pelo Teorema 13.8 de [6] e pelo comentário que vem logo em seguida a este Teorema, se G é um grupo de Lie (não necessariamente conexo) e age de forma diferenciável e transitiva sobre uma variedade N , então, para $x \in N$, temos

$$N = Gx = \bigcup_{g \in G} gG_0x = \bigcup_{g \in G} G_0gx,$$

uma vez que $G_0 \trianglelefteq G$, ou seja, N é união de componentes conexas difeomorfas a G_0x . O mesmo ocorre com as órbitas focais, cada uma de suas componentes conexas é difeomorfa a $(K^q)_0H$ e, como $K^q = (K^q)_0M^{*q}$ (Proposição 3.3.4) e $W^q = \text{Ad}(M^{*q})|_{\mathfrak{t}}$ (Proposição 3.3.5), as outras componentes são da forma $(K^q)_0wH$ para algum $w \in W^q$. Portanto,

$$\mathfrak{F}(H) = K^qH = \bigcup_{w \in W^q} (K^q)_0wH. \quad (3.21)$$

Esta descrição pode ser ainda mais refinada se determinarmos sob quais condições $(K^q)_0wH = (K^q)_0w'H$ para $w, w' \in W^q$.

Teorema 3.3.6. *As componentes conexas de $\mathfrak{F}(H)$ estão em bijeção com o grupo quociente W^q/W_0^q . Cada componente corresponde a uma órbita (à esquerda) de W_0^q em W^qH e é difeomorfa a $(K^q)_0H$.*

Demonastração. Inicialmente, observamos que $\mathfrak{F}(H)$ intercepta \mathfrak{t} na órbita W^qH . Claramente, $W^qH \subseteq \mathfrak{t}$. Por outro lado, seja $k \in K^q$ e suponha que $\text{Ad}(k)H \in \mathfrak{t}$, então existe $w \in W$ tal que $\text{Ad}(k)H = wH$ (Corolário 1.4.20). Temos que

$$q = \exp(H)p = kq = \exp(\text{Ad}(k)H)p = \exp(wH)p,$$

logo, $wH \in H + \Gamma$ e segue que $w \in W^q$. Usando a equação (3.21), para contar as componentes conexas de $\mathfrak{F}(H)$, basta determinar sob quais condições $(K^q)_0wH = (K^q)_0w'H$ para $w, w' \in W^q$.

O centralizador W_H de H em W satisfaz $W_H \leq W_0^q \trianglelefteq W^q$. Se $w' = lwg$ para $g \in W_H$ e $l \in W_0^q$, é fácil ver que $(K^q)_0 wH = (K^q)_0 w' H$, pois $gH = H$ e $W_0^q = \text{Ad}((K^q)_0 \cap M^{*q})|_t$ (Proposição 3.3.5). Vamos mostrar que as componentes conexas de $\mathfrak{F}(H)$ estão em bijeção com o espaço de classes laterais duplas $W_0^q \setminus W^q / W_H$. Suponha, de modo geral, que $(K^q)_0 wH = (K^q)_0 w' H$ e relembrre o espaço simétrico U_{h^2}/K^q definido na demonstração da Proposição 3.3.4, o seu grupo de Weyl é W_0^q . Temos que $t \ni w' H = \text{Ad}(y)wH$ para algum $y \in (K^q)_0$, então existe $l \in W_0^q$ tal que $lwH = \text{Ad}(y)wH$ (Corolário 1.4.20) e segue que $w' H = lwH$. Se H é regular, segue da Proposição 1.4.18 que $w' = lw$, caso contrário, temos que $(lw)^{-1}w' \in W_H$, ou seja, $w' = lwg$ para algum $g \in W_H$.

Segue que há uma bijeção entre as componentes conexas de $\mathfrak{F}(H)$ e o conjunto de classes laterais duplas $W_0^q \setminus W^q / W_H$. Para qualquer $w \in W^q$, temos que $W_0^q wW_H = wW_0^q W_H = wW_0^q$, uma vez que $W_0^q \trianglelefteq W^q$, logo, há uma correspondência bijetiva entre W^q / W_0^q e $W_0^q \setminus W^q / W_H$.

□

Por fim, descrevemos uma fórmula para a dimensão das órbitas focais. Num sistema de raízes, temos a noção de raízes positivas e negativas (veja a Definição 6.4.9 de [4]). Com as devidas escolhas feitas, denotamos por $\Delta_\sigma(u, t)^+$ o conjunto de raízes positivas de $\Delta_\sigma(u, t)$. Defina

$$L_H = \{\alpha \in \Delta_\sigma(u, t)^+ : 0 \neq \alpha(H) \in \pi\mathbb{Z}\}.$$

Cada órbita focal é difeomorfa a K^q / K_H como visto anteriormente e a dimensão de K^q / K_H coincide com a dimensão de $\mathfrak{k}^q / \mathfrak{k}_H$, a qual pode ser calculada observando as equações (3.18) e (3.20). Isto demonstra o seguinte Teorema.

Teorema 3.3.7.

$$\dim \mathfrak{F}(H) = \sum_{\alpha \in L_H} n_\alpha,$$

onde n_α é a dimensão comum de \mathfrak{k}_α e \mathfrak{s}_α .

3.3.1 Imagem Inversa da Exponencial na Esfera S^2

Nesta Subseção, vamos aplicar à esfera unitária $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ com a métrica induzida pelo produto interno padrão de \mathbb{R}^3 a teoria desenvolvida a respeito da imagem inversa da exponencial.

Escolhemos $p = (0, 0, 1)$ como ponto base. O grupo $U = \text{SO}(3)$ age de forma transitiva sobre S^2 , de modo que podemos escrever $S^2 \approx U/K$, em que

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} A & \\ & 1 \end{pmatrix} : A \in \text{SO}(2) \right\} \simeq \text{SO}(2).$$

A simetria geodésica em torno de p é dada pela restrição da transformação linear

$$s_p = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \\ 0 & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in K$$

a S^2 (veja o Exemplo 2.2.2). A ação de s_p sobre S^2 se identifica com a ação de multiplicação à esquerda por s_p em U/K . Podemos recuperar a involução σ de U observando que ela compõe o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\sigma} & U \\ \downarrow r & & \downarrow r \\ S^2 & \xrightarrow{s_p} & S^2 \end{array}$$

em que $r : U \rightarrow S^2$ é a projeção natural. Temos que σ satisfaz $\sigma(u) = s_p u s_p^{-1}$.

Considere a base

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

de $\mathfrak{so}(3)$ com as relações de colchete

$$[X_1, X_2] = -X_3, \quad [X_1, X_3] = X_2, \quad [X_2, X_3] = -X_1.$$

A involução $\sigma : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ satisfaz

$$\sigma(X_1) = X_1, \quad \sigma(X_2) = -X_2, \quad \sigma(X_3) = -X_3,$$

de modo que $\mathfrak{k} = \langle X_1 \rangle$ e $\mathfrak{s} = \langle X_2, X_3 \rangle$. Os subespaços de Cartan são unidimensionais da forma $\mathfrak{t} = \langle H \rangle$ com $H \in \mathfrak{s}$. Escolhendo $H = \theta X_2$, temos que $\mathfrak{so}(3)$ se decompõe como $\mathfrak{t} + \mathfrak{m}_\alpha$ com $\mathfrak{m}_\alpha = \langle X_1, X_3 \rangle$, em que o sistema de raízes restritas é $\Delta_\sigma = \{\pm\alpha\}$ com $\alpha(H) = \theta$. Portanto, o grupo de Weyl tem apenas dois elementos, $W = \{1, r_\alpha\}$, em que $r_\alpha(H) = -H$. Fica claro que $\Gamma_1 = \pi \mathbb{Z} X_2$.

Para determinar os reticulados Γ e Γ_0 precisamos entender como a métrica se expressa em \mathfrak{t} . Identificando $\mathfrak{s} \approx T_p S^2$ e considerando $Y \in \mathfrak{s}$, a exponencial Riemanniana se escreve

$$\exp_p(Y) = \exp(Y)p = \cos(|Y|)p + \sin(|Y|) \frac{Y}{|Y|}. \quad (3.22)$$

Além disso, denotando $\exp : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$ a exponencial de $\mathrm{SO}(3)$, temos que

$$\exp(sX_2) = \begin{pmatrix} \cos(s) & 0 & \sin(s) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(s) & 0 & \cos(s) \end{pmatrix}, \quad \exp(sX_3) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos(s) & \sin(s) \\ & -\sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix},$$

logo, $\exp_p((\pi/2)X_2) = \exp((\pi/2)X_2)p = (1, 0, 0)$ e $\exp_p((\pi/2)X_3) = (0, 1, 0)$. Portanto, o produto interno em \mathfrak{s} induzido pela métrica de S^2 em p é tal que X_2, X_3 forma uma base ortonormal.

Como $\alpha(X_2) = 1$, temos que $H_\alpha = X_2$ e segue que $H_{\check{\alpha}} = 2H_\alpha$, logo, $\Gamma_0 = 2\pi\mathbb{Z}X_2$. Pela Equação (3.22), o reticulado Γ pode ser definido como

$$\Gamma = \{Y \in \mathfrak{t} : |Y| \in 2\pi\mathbb{Z}\},$$

pois $\exp_p(Y) = p$ se $|Y| \in 2\pi\mathbb{Z}$. Segue que $\Gamma = \Gamma_0$.

Vamos agora variar o valor de θ na definição de $H = \theta X_2$ de modo a considerar os diferentes resultados possíveis de acordo com cada escolha para $q = \exp_p(H)$. Suponha que $H = 2\pi X_2$, ou seja, $q = p$, então $K^q = K$ é conexo e segue da Proposição 3.3.5 que $W = W^q = W_0^q$, de modo que $\mathfrak{F}(H)$ tem apenas uma componente conexa (Teorema 3.3.6). Para ver isso, considere

$$u = \begin{pmatrix} \cos(s) & \sin(s) & \\ -\sin(s) & \cos(s) & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in K.$$

Temos que $\mathrm{Ad}(u)H = uHu^{-1} = 2\pi(\cos(s)X_2 - \sin(s)X_3)$, donde segue que $\mathfrak{F}(H)$ consiste de uma circunferência com centro na origem de \mathfrak{s} e com raio 2π . De maneira similar, mostra-se que, para cada $\gamma = 2k\pi X_2 \in \Gamma$, a órbita focal $\mathfrak{F}(H + \gamma)$ consiste de uma circunferência com raio $2|k + 1|\pi$. Segue que $\exp_p^{-1}(q)$ é uma união disjunta de circunferências. Observe a Figura 3.1, ela ilustra o plano $T_p S^2 \approx \mathfrak{s}$ e o eixo destacado representa o subespaço de Cartan \mathfrak{t} . Os pontos verdes representam elementos de Γ_1 que não estão em Γ e, os vermelhos, os elementos de $\Gamma_0 = \Gamma$. O ponto preto central representa a origem de \mathfrak{s} .

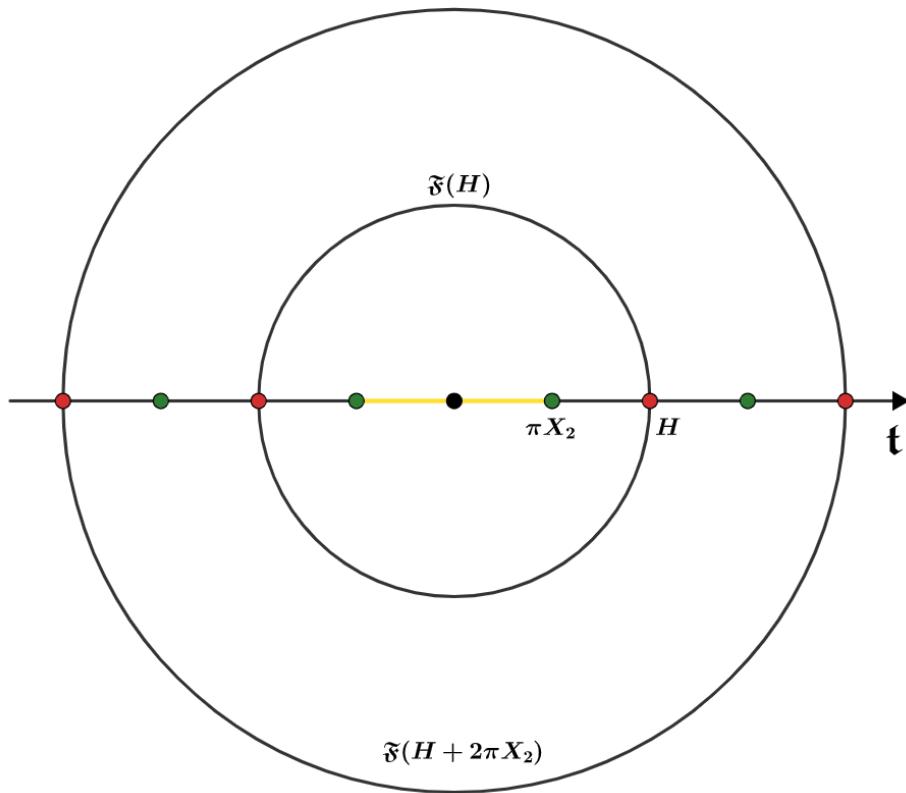
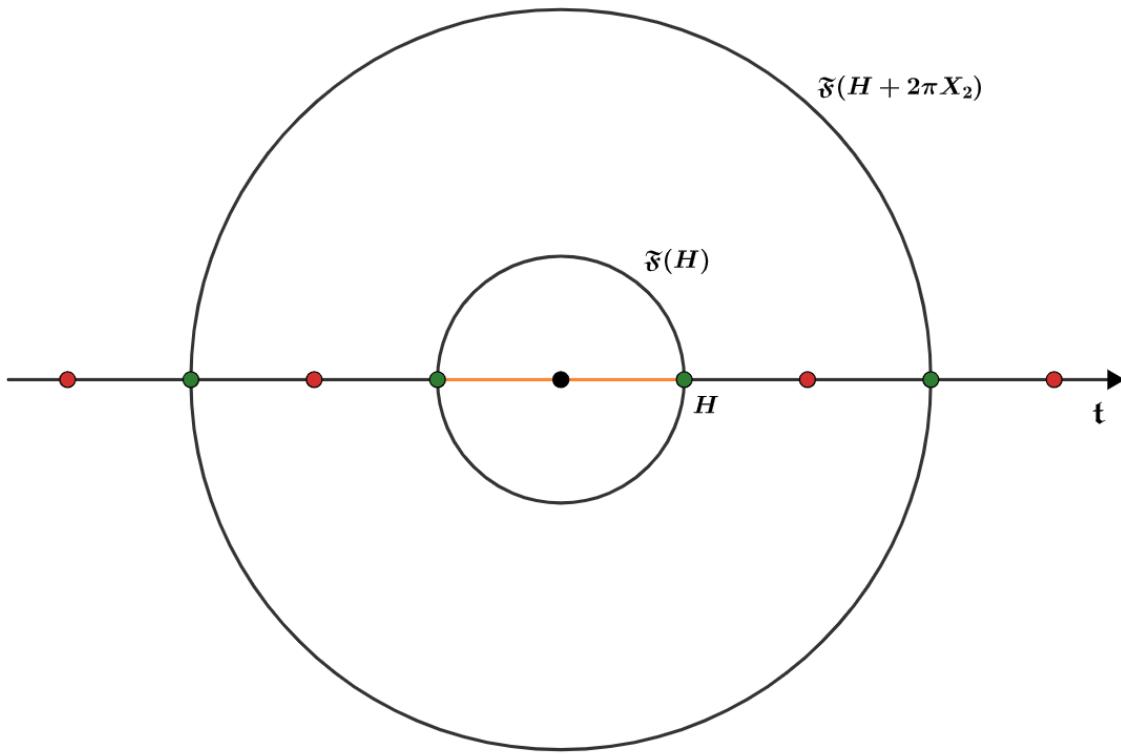


Figura 3.1 : Órbitas focais em S^2 no caso $H = 2\pi X_2$

Suponha agora que $H = \pi X_2$, isto é, $q = -p$. Qualquer rotação de $SO(3)$ que fixa p deve fixar também o seu antípoda q , logo, $K^q = K$. Como no exemplo anterior, $W = W^q = W_0^q$ e cada órbita focal tem apenas uma componente conexa. Novamente, $\exp_p^{-1}(q)$ é uma união disjunta de circunferências centradas na origem de \mathfrak{s} , mas, desta vez, com raios $|2k + 1|\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, veja a Figura 3.2 abaixo.

Figura 3.2 : Órbitas focais em S^2 no caso $H = \pi X_2$.

Suponha agora que $q \notin \{\pm p\}$, ou seja, $H \notin \pi \mathbb{Z} X_2$. Um elemento de K que fixa dois pontos de S^2 que não são antípodas deve ser a identidade, então $K^q = \{1\}$. Segue que cada órbita focal consiste de um único ponto e $\exp^{-1}(q) = H + \Gamma$.

3.3.2 Imagem Inversa da Exponencial no Plano Projetivo $\mathbb{R}P^2$

Nesta subseção, vamos tratar do plano projetivo, do qual a esfera do exemplo anterior é o recobrimento universal Riemanniano. Isto nos permitirá aproveitar o que fizemos anteriormente e adaptar para este novo contexto.

O plano projetivo, denotado $\mathbb{R}P^2$ pode ser descrito de diferentes maneiras, uma delas é como o conjunto obtido ao se identificar pontos antípodas da esfera. Um ponto de $\mathbb{R}P^2$ é denotado $[q] = \{\pm q\}$, onde $q \in S^2$. Temos então uma projeção natural $\pi : S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ dada por $\pi(q) = [q]$, que é um difeomorfismo local (veja os Exemplos 4.7 e 4.8 do capítulo 1 de [10] para mais detalhes). Podemos definir uma métrica em $\mathbb{R}P^2$ para que π seja uma isometria local da seguinte maneira. Para $w, v \in T_{[q]} \mathbb{R}P^2$,

$$\langle w, v \rangle_{[q]} = \langle d\pi_{[q]}^{-1} w, d\pi_{[q]}^{-1} v \rangle_q.$$

Podemos escolher tanto q quanto $-q$ para definir a métrica em $[q]$, mas a definição não depende desta escolha, como veremos a seguir. Seja $a = -1 \in O(3)$, é fácil ver que $\pi \circ a = \pi$ e, consequentemente, $\pi^{-1} = a \circ \pi^{-1}$. Usando que $da_{-q} = -\text{id}$, concluimos que

$$\begin{aligned}\langle d\pi_{[q]}^{-1}w, d\pi_{[q]}^{-1}v \rangle_{-q} &= \langle da_{-q}d\pi_{[q]}^{-1}w, da_{-q}d\pi_{[q]}^{-1}v \rangle_q \\ &= \langle d\pi_{[q]}^{-1}w, d\pi_{[q]}^{-1}v \rangle_q.\end{aligned}$$

Sendo π uma isometria local, a exponencial Riemanniana de $\mathbb{R}P^2$ em $[p]$ satisfaz $\exp_{[p]} \circ d\pi_p = \pi \circ \exp_p$ (Lema A.1.7). Usando $d\pi_p$ para identificar $T_p S^2$ e $T_{[p]} \mathbb{R}P^2$, podemos considerar que $\exp_{[p]} = \pi \circ \exp_p$. A simetria geodésica $s_{[p]}$ satisfaz $s_{[p]} \circ \pi = \pi \circ s_p$. De fato, seja $X \in T_p S^2$, então

$$\begin{aligned}\pi(s_p(\exp_p(X))) &= \pi(\exp_p(-X)) \\ &= \exp_{[p]}(-X) \\ &= s_{[p]}(\exp_{[p]}(X)) \\ &= s_{[p]}(\pi(\exp_p(X))).\end{aligned}$$

Temos o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{s_p} & S^2 \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathbb{R}P^2 & \xrightarrow{s_{[p]}} & \mathbb{R}P^2 \end{array}$$

Compondo a projeção $r : U \rightarrow S^2$ do exemplo anterior com π , obtemos o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\sigma} & U \\ \downarrow \pi \circ r & & \downarrow \pi \circ r \\ \mathbb{R}P^2 & \xrightarrow{s_{[p]}} & \mathbb{R}P^2 \end{array}$$

Isto nos mostra que, no nível da álgebra u nada é alterado em relação ao exemplo da esfera.

A projeção π nos permite transferir a ação de $U = SO(3)$ sobre S^2 para uma ação sobre $\mathbb{R}P^2$ fazendo $u[q] = \pi(uq) = [uq]$. Deste modo, temos que $\mathbb{R}P^2 \approx U/K'$, em que a isotropia de $[p]$ é dada por

$$K' = \left\{ \begin{pmatrix} A & \\ & \pm 1 \end{pmatrix} \in SO(3) \right\},$$

em que A é uma matriz 2×2 . Seja A' como definido na Equação (3.26), então todo elemento de K' ou está em K (a isotropia de p no exemplo da esfera S^2) ou pode ser escrito como

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A' & \\ & -1 \end{pmatrix}}_{:=J} \underbrace{\begin{pmatrix} B & \\ & 1 \end{pmatrix}}_{\in K},$$

de modo que $K' = K \cup JK$ tem duas componentes, sendo K a componente da identidade de K' .

A álgebra de K' coincide com a álgebra $\mathfrak{k} = \langle X_1 \rangle$ do exemplo anterior e $\mathfrak{s} = \langle X_2, X_3 \rangle$. Identificando os espaços tangentes em p e em $[p]$ com \mathfrak{s} , escolhemos o subespaço de Cartan $\mathfrak{t} = \langle X_2 \rangle$, de modo que $\Gamma_1 = \pi\mathbb{Z}X_2$ e $\Gamma_0 = 2\pi\mathbb{Z}X_2$. Para determinar o reticulado Γ , basta notar que $[p] = \exp_{[p]}(\theta X_2) = \pi(\exp_p(\theta X_2))$ se, e somente se, $\exp_p(\theta X_2) \in \{\pm p\}$, logo, $\Gamma = \pi\mathbb{Z}X_2 = \Gamma_1$.

Vamos agora obter a órbita focal $\mathfrak{F}(H)$ no caso em que $H = (\pi/2)X_2$. Observe que $\exp_{[p]}(H) = [q]$ com $q = (1, 0, 0)$, como visto no exemplo anterior. Temos que $(K')^{[q]}$ consiste dos elementos $k \in K'$ tais que $kq \in \{\pm q\}$; cálculos simples mostram que

$$(K')^{[q]} = \left\{ 1, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}}_{=k_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}}_{=k_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}}_{=k_3} \right\}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} \text{Ad}(1)X_2 &= \text{Ad}(k_2)X_2 = X_2, \\ \text{Ad}(k_1)X_2 &= \text{Ad}(k_3)X_2 = -X_2, \end{aligned}$$

de modo que $\mathfrak{F}(H) = (K')^{[q]} = \{\pm H\}$. Como $\Gamma = \pi\mathbb{Z}X_2$, temos que, para $\gamma = \pi nX_2 \in \Gamma$, $\mathfrak{F}(H + \gamma) = \{\pm(H + \gamma)\}$.

Vimos no exemplo da esfera que $W = \{\pm 1\}$ e, claramente, $1 \in W^{[q]}$. Como

$$-1 \cdot H = -H = H - \underbrace{\pi X_2}_{\in \Gamma},$$

temos que $-1 \in W^{[q]}$ também. Além disso, $\alpha(H) = \pi/2$, então $-1 \notin W_0^{[q]}$ e temos $W_0^{[q]} = \{1\}$, como esperado, já que as órbitas focais têm apenas duas componentes conexas (que são dois pontos).

Para $H = \pi X_2$, temos que $[q] = \exp_{[p]}(H) = [p]$, já que $\exp_p(H) = -p$, logo, $(K')^{[q]} = K'$. Contas simples mostram que $\text{Ad}(J)X_2 = X_2$ e $\text{Ad}(J)X_3 = -X_3$, de modo que a órbita de qualquer ponto de $X \in \mathfrak{s}$ pela ação de $\text{Ad}(K')$ consiste de uma circunferência passando por X e com centro na origem. Portanto, uma órbita focal $\mathfrak{F}(H + \gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, consiste de uma circunferência com centro na origem e passando por $H + \gamma$, como na Figura 3.3 abaixo, a qual descreve o plano $T_{[p]}\mathbb{R}P^2 \approx \mathfrak{s}$. Os pontos verdes representam elementos do reticulado $\Gamma = \Gamma_1$ que não estão em Γ_0 e os pontos vermelhos representam elementos de Γ_0 . Observe como as órbitas focais na Figura 3.3 podem ser formados pela sobreposição das órbitas focais nas Figuras 3.1 e 3.2. Isto está relacionado com o fato que construímos $\mathbb{R}P^2$ identificando os pontos antípodas de S^2 .

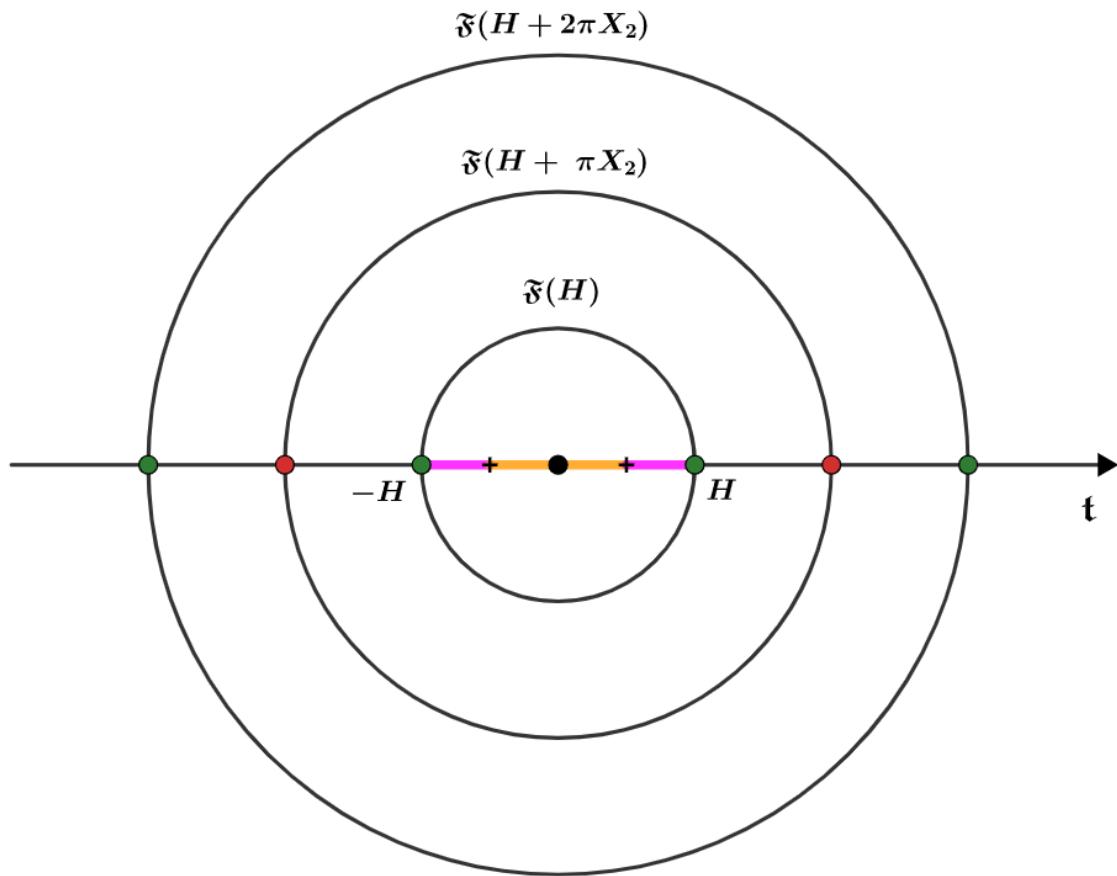


Figura 3.3 : Órbitas Focais em $\mathbb{R}P^2$ no caso $H = \pi X_2$.

3.3.3 Imagem Inversa da Exponencial em Grupos de Lie

Nesta Subseção, vamos aplicar a teoria da Imagem inversa da exponencial a uma classe de grupos de Lie que podem ser vistos como espaços simétricos. Pelo Teorema A.2.6, sabemos que, num grupo de Lie com métrica bi-invariante, a exponencial do grupo coincide com a exponencial Riemanniana. Seja U um grupo de Lie conexo com álgebra compacta \mathfrak{u} e métrica bi-invariante, tal como na Subseção 3.1.3. Vimos que existe uma isometria μ entre U e o espaço simétrico U^2/K em que $K = \{(u, u) : u \in U\}$ e μ é dada por

$$\mu((u_1, u_2)K) = u_1 u_2^{-1}.$$

Além disso, vimos que a álgebra \mathfrak{u}^2 se decompõe como a soma $\mathfrak{k} + \mathfrak{s}$ de autoespaços ± 1 , em que

$$\begin{aligned}\mathfrak{k} &= \{X \oplus X : X \in \mathfrak{u}\} \simeq \mathfrak{u} \\ \mathfrak{s} &= \{X \oplus -X : X \in \mathfrak{u}\} \simeq \mathfrak{u},\end{aligned}$$

e \mathfrak{k} é a álgebra de K . Denotando $p = (1, 1)K$, podemos identificar $T_p(U^2/K) \approx \mathfrak{s}$ e a isometria μ nos fornece um isomorfismo $\mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{u}$ dado por

$$d\mu_p(X \oplus -X) = 2X,$$

veja a Equação (3.15).

Sejam $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{u}$ uma subálgebra de Cartan e $h = \exp(H)$, com $H \in \mathfrak{h}$, vamos calcular $\exp^{-1}(h)$ utilizando o que vimos na Seção 3.3. Seja $H_0 = H/2$ e $h_0 = \exp(H_0)$. Escolhendo $q = (h_0, h_0^{-1})K \in U^2/K$, temos que $\mu(q) = h_0^2 = h$. Para determinar $\exp^{-1}(h)$, vamos determinar $\exp_p^{-1}(q)$ e usar a isometria μ para obter o resultado desejado. Pelo Teorema 3.3.2, temos que

$$\exp_p^{-1}(q) = \bigcup_{\gamma \oplus -\gamma \in \Gamma} \mathfrak{F}(H_0 \oplus -H_0 + \gamma \oplus -\gamma),$$

em que $\mathfrak{F}(H_0 \oplus -H_0) = K^q(H_0 \oplus -H_0)$ e K^q age via a representação adjunta.

Teorema 3.3.8. *Temos que*

$$\exp^{-1}(h) = d\mu_p(\exp_p^{-1}(q)).$$

Demonstração. Seja $X \in \exp^{-1}(h)$. Observe que $X = d\mu_p(X/2 \oplus -X/2)$ e que

$$\mu(\exp_p(X/2 \oplus -X/2)) = \exp(X) = h = \mu(q).$$

Da injetividade de μ segue que $\exp_p(X/2 \oplus -X/2) = q$ e, portanto, $X \in d\mu_p(\exp_p^{-1}(q))$.

Por outro lado, seja $Y \in d\mu_p(\exp_p^{-1}(q))$ e denote $Y = d\mu_p(X \oplus -X)$, em que $q = \exp_p(X \oplus -X)$. Usando que \exp coincide com a exponencial Riemanniana de U segue do Lema A.1.7 que

$$\begin{aligned}\exp(Y) &= \exp(d\mu_p(X \oplus -X)) \\ &= \mu(\exp_p(X \oplus -X)) \\ &= \mu(q) \\ &= h,\end{aligned}$$

logo, $Y \in \exp^{-1}(h)$

□

Para entender melhor $\exp^{-1}(h)$, devemos então entender o subgrupo K^q ; ele consiste dos elementos $(k, k) \in K$ que fixam q , ou seja, $(k, k)(h_0, h_0^{-1})K = (h_0, h_0^{-1})K$. Temos que $(k, k) \in K^q$ se, e somente se,

$$khk^{-1} = kh_0^2k^{-1} = h_0^2 = h.$$

Portanto,

$$K^q = \{(k, k) \in K : k \in U_h\},$$

é a diagonal de $U_h \times U_h$, em que U_h é o centralizador de h em U . De maneira geral, $\text{Ad}(u, u')X \oplus Y = \text{Ad}(u)X \oplus \text{Ad}(u')Y$, então

$$d\mu_p(\text{Ad}(k, k)H_0 \oplus -H_0) = d\mu_p(\text{Ad}(k)H_0 \oplus -\text{Ad}(k)H_0) = \text{Ad}(k)H.$$

e

$$d\mu_p(\text{Ad}(k, k)(H_0 \oplus -H_0 + \gamma \oplus -\gamma)) = \text{Ad}(k)(H + 2\gamma).$$

Temos então que

Teorema 3.3.9. *Se $\gamma \in \Gamma$, a órbita focal $\mathfrak{F}(H_0 \oplus -H_0 + \gamma \oplus -\gamma)$ em U^2/K corresponde, em U , via a isometria μ , à órbita $U_h(H + 2\gamma)$. Segue que*

$$\exp^{-1}(h) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_h(H + 2\gamma).$$

Além disso, U_hH é difeomorfo ao espaço homogêneo U_h/U_H .

Vamos tratar agora sobre como usar a fórmula do Teorema 3.3.7 para calcular a dimensão da órbita focal U_hH . Relembre a decomposição de \mathfrak{u}^2 com respeito ao subespaço de Cartan \mathfrak{t}

(Proposição 3.1.4) e observe que $(\mathfrak{m}_\alpha \oplus \mathfrak{m}_\alpha) \cap \mathfrak{k} \simeq \mathfrak{m}_\alpha$. Seja

$$L_{H_0} = \{\alpha \in \Delta^+ : 0 \neq \alpha(H_0 \oplus -H_0) = \alpha(H_0) \in \pi\mathbb{Z}\}$$

e observe que, como $H = 2H_0$, $0 \neq \alpha(H_0) \in \pi\mathbb{Z}$ se, e somente se, $0 \neq \alpha(H) \in 2\pi\mathbb{Z}$. Portanto,

$$L_H = \{\alpha \in \Delta^+ : 0 \neq \alpha(H) \in 2\pi\mathbb{Z}\}$$

Deste modo, aplicando a fórmula, temos que

$$\dim(U_h H) = \dim \mathfrak{F}(H_0 \oplus -H_0) = \sum_{\alpha \in L_{H_0}} n_\alpha = \sum_{\alpha \in L_{H_0}} \dim(\mathfrak{m}_\alpha), \quad (3.23)$$

em que n_α é igual à dimensão de $(\mathfrak{m}_\alpha \oplus \mathfrak{m}_\alpha) \cap \mathfrak{k}$, que é igual à dimensão de \mathfrak{m}_α .

Imagen Inversa da Exponencial em $\mathrm{SO}(4)$

Aplicamos agora o que foi visto até aqui nesta Seção em um exemplo mais específico. Sejam $U = \mathrm{SO}(4)$ e $\mathfrak{u} = \mathfrak{so}(4)$. Como no Exemplo 1.2.6, as matrizes $U_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$, com $i, j \in \{1, \dots, 4\}$ e $i < j$, formam uma base de \mathfrak{u} e as matrizes U_{12} e U_{34} formam uma subálgebra de Cartan que denotaremos \mathfrak{h} . Sejam

$$H = \theta U_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \theta & & \\ -\theta & 0 & & \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \exp(H) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & & \\ -\sin \theta & \cos \theta & & \\ & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cálculos simples mostram que U_h consiste de matrizes da forma

$$u = \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Se $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, temos que $A, B \in \mathrm{SO}(2)$, ou seja, $U_h \simeq \mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2)$. Como a matriz

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & \pi/2 \\ -\pi/2 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

pertence a $\mathrm{SO}(2)$ e $\mathrm{SO}(2)$ é abeliano, temos que U_h coincide com U_H e segue que $U_h H = \{H\}$. Como as componentes conexas de $U_h H$ estão em bijeção com o quociente W^q/W_0^q , deduzimos que $W^q = W_0^q$ (Teorema 3.3.6).

Por outro lado, se $\theta = \pi$, temos que

$$h = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de modo que $H \in \Gamma$ e, conforme a Equação (3.24),

$$U_h = \{u : A, B \in \mathrm{O}(2), AB \in \mathrm{SO}(2)\}.$$

Como no caso anterior, $U_H \simeq \mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2)$. Para determinar $U_h H$, observe que, como $\mathrm{SO}(2)$ é a componente da identidade de $\mathrm{O}(2)$, então $\mathrm{O}(2) = \mathrm{SO}(2) \cup A' \mathrm{SO}(2)$ para alguma $A' \in \mathrm{O}(2) - \mathrm{SO}(2)$. Podemos escolher, por exemplo,

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Seja $u \in U_h$ conforme a Equação (3.24), podemos escrever $A = A' A_0$ se $A \in \mathrm{O}(2) - \mathrm{SO}(2)$, em que $A_0 \in \mathrm{SO}(2)$ comuta com a matriz R da Equação (3.25) ou $A = A_0$ se $A \in \mathrm{SO}(2)$. Segue que

$$\mathrm{Ad}(u)H = uHu^{-1} = u \begin{pmatrix} \pi R & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix} u^{-1} = \begin{pmatrix} \pi A R A^{-1} & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

em que $\mathbf{0}$ denota a matriz nula 2×2 . Temos então que $U_h H$ consiste de 2 pontos, sendo um deles H e o outro

$$\begin{pmatrix} \pi A' R (A')^{-1} & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi R & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix} = -H.$$

Segue que $W^q/W_0^q \simeq \{\pm 1\}$.

Por fim, suponha que $\theta = 2\pi$. Neste caso, temos que $h = 1$, logo, $U_h = U$ e temos que $U_h H \approx U_h/U_H \approx U/(\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2))$ tem dimensão 4, o que concorda com a fórmula da equação (3.23), uma vez que ambas as raízes α e λ (Exemplo 1.2.6) assumem o valor 2π sobre $2\pi U_{12}$ e $\dim \mathfrak{m}_\alpha = 2 = \dim \mathfrak{m}_\lambda$.

3.4 Grupo Fundamental de Espaços Simétricos

Nesta Seção vamos calcular o grupo fundamental de um espaço simétrico conexo e compacto. A estratégia é baseada no capítulo 13 de [3], em que é obtido o grupo fundamental de grupos de Lie compactos. Veremos que, assim como no caso de grupos de Lie compactos, os grupos fundamentais de espaços simétricos compactos e conexos são quocientes de reticulados. Seguiremos os passos descritos no Teorema 5.2 de [2] e, quando necessário, usaremos alguns resultados de [3]. Manteremos as mesmas notações da Seção anterior.

Denotando por T o subgrupo conexo de U gerado pelo subespaço de Cartan \mathfrak{t} , é fácil calcular o grupo fundamental do flat maximal Tp de U/K . A exponencial Riemanniana $\exp_p : \mathfrak{t} \rightarrow Tp$ é sobrejetiva e é um homeomorfismo local, logo, é um recobrimento simplesmente conexo de Tp . O grupo das deck transformations consiste dos pontos $H \in \mathfrak{t}$ tais que $\exp_p(H) = p$, ou seja, coincide com o reticulado Γ . Sendo \mathfrak{t} simplesmente conexo, temos que $\pi_1(Tp) \simeq \Gamma$. Observe que usamos a notação $\pi_1(Tp)$ sem mencionar o ponto base do grupo fundamental, fazemos isso porque Tp é conexo (e, portanto, conexo por caminhos), então, a menos de isomorfismos, a escolha de ponto base é irrelevante (Proposição 1.5 de [8]). A menos que seja dito o contrário, o ponto base é sempre p . Além disso, chamaremos de *loop* uma curva fechada. Para mais detalhes sobre a relação entre recobrimentos e grupos fundamentais, veja a Subseção A.3.1 do Apêndice.

Por simplicidade, denote $S = U/K$. Vamos descrever uma relação entre $\pi_1(Tp)$ e $\pi_1(S)$. Seja $[\alpha]$ uma classe de homotopia de loops passando por p , ou seja, $[\alpha] \in \pi_1(S)$. Pelo Teorema 2.2 do Capítulo 12 de [10], todo elemento de $\pi_1(S)$ pode ser representado por uma geodésica fechada passando por p , então seja $X \in \mathfrak{s} \approx T_p S$ e $\gamma(t) = \exp_p(tX)$, $t \in [0, 1]$, uma geodésica fechada tal que $[\alpha] = [\gamma]$. Observe que $\exp_p(X) = p$. Pelo Corolário 1.4.14, existe $k \in K_0$ tal que $\text{Ad}(k)X = H \in \mathfrak{t}$, de modo que

$$\exp_p(H) = k \exp_p(X) = kp = p,$$

onde segue que $H \in \Gamma$. Sendo K_0 conexo, denote por $k(s)$, $s \in [0, 1]$, uma curva em K_0 tal que $k(0) = 1$ e $k(1) = k$. A aplicação

$$l_s(t) = k(s) \exp_p(tX)$$

é contínua e satisfaz $l_0(t) = \gamma(t)$ e $l_1(t) = \exp_p(tH)$, logo, é uma homotopia entre γ e a geodésica $\exp_p(tH)$ de Tp . Note que $k(s) \exp_p(X) = k(s)p = p$, então $l_s(t)$ é uma curva fechada por p para todo s .

A inclusão $Tp \rightarrow S$ induz a inclusão $\pi_1(Tp) \rightarrow \pi_1(S)$. A discussão do parágrafo anterior demonstra o seguinte resultado.

Teorema 3.4.1. *Todo loop em S é homotópico a um loop em Tp e a inclusão $Tp \rightarrow S$ induz o homomorfismo sobrejetivo $\pi_1(Tp) \rightarrow \pi_1(S)$.*

Isto nos mostra que, para calcular $\pi_1(S)$, basta determinar o núcleo do homomorfismo $\pi_1(Tp) \rightarrow \pi_1(S)$, é para isso que trabalharemos nesta Seção. Demonstramos agora um Lema análogo à Proposição 13.14 de [3], que nos será útil mais adiante.

Lema 3.4.2. Todo loop em Tp é homotópico em Tp a um loop da forma

$$t \mapsto \exp_p(t\gamma),$$

para algum $\gamma \in \Gamma$.

Demonastração. Seja $l(t), t \in [0, 1]$, um loop em Tp passando por p . Existe uma curva $\tilde{l}(t)$ em \mathbf{t} que é o levantamento de $l(t)$, ou seja, $l(t) = \exp_p(\tilde{l}(t))$ (Proposição 13.2 de [3]). Observe que usamos que $\exp_p : \mathbf{t} \rightarrow Tp$ é o recobrimento simplesmente conexo de Tp . Se $\tilde{l}(1) = \gamma \in \Gamma$, temos que \tilde{l} é homotópica com extremidades fixadas ao segmento de reta $r(t) = t\gamma, t \in [0, 1]$. Denotando esta homotopia por \tilde{l}_s , ela satisfaz $\tilde{l}_0 = \tilde{l}$ e $\tilde{l}_1 = r$. A composição $\exp_p \circ \tilde{l}_s$ nos fornece uma homotopia entre l e a geodésica fechada $\exp_p(t\gamma), t \in [0, 1]$. \square

Observação 3.4.3. A composição de loops em Tp corresponde à operação de soma em $\Gamma = \pi_1(Tp)$. Sejam $H_1, H_2 \in \Gamma$ e $\alpha_j(t) = \exp_p(tH_j)$ ($j = 1, 2$) loops em Tp . Considere a composição (produto em $\pi_1(Tp)$) $[\alpha_1 \cdot \alpha_2]$ dos loops $[\alpha_1]$ e $[\alpha_2]$. O levantamento desta composição deve ser uma composição dos levantamentos $t \mapsto tH_1$ e $t \mapsto H_1 + tH_2$, ou seja, o levantamento $t \mapsto tH_2$ de α_2 foi transladado por H_1 . Este levantamento é homotópico em \mathbf{t} ao segmento $t \mapsto t(H_1 + H_2)$. Então a composição de loops em Tp corresponde à operação de soma em $\Gamma = \pi_1(Tp)$.

Na Subseção 3.1.2, construimos um homomorfismo $\psi : S^3 \rightarrow U$, o qual satisfaz

$$\psi(e^{ty}) = \exp(t\phi(y)),$$

em que y é um quaternion unitário com parte real nula. Considere o arco de grande círculo $c(t) = e^{t\pi i}, t \in [0, 1]$, que vai de $1 \in S^3$ ao ponto antípoda $-1 \in S^3$. Seja $\pi : U \rightarrow U/K$ a projeção natural, então $\pi(\psi(e^{t\pi i})) = \pi(\exp(t\pi H_\alpha)) = \exp_p(t\pi H_\alpha)$. Portanto, a composição $\pi \circ \psi$ mapeia a semicircunferência $c([0, 1])$ na geodésica fechada $t \mapsto \exp_p(t\pi H_\alpha)$ passando por p .

Teorema 3.4.4. Se $\gamma \in \Gamma_0$, então a geodésica fechada $\gamma(t) = \exp_p(t\gamma), t \in [0, 1]$, é homotópica, em S , a um ponto.

Demonstração. Seja $\pi H_{\alpha} \in \Gamma_0$, vamos mostrar que $\gamma(t) = \exp_p(t\pi H_{\alpha}), t \in [0, 1]$, é homotópica, em S , a um ponto. Temos que $\gamma(t) = \pi(\psi(e^{t\pi i}))$. Lembre-se do subgrupo \bar{K} de pontos fixos da involução $\bar{\sigma} : S^3 \rightarrow S^3$ definidos na Subseção 3.1.2, temos que $\psi(\bar{K}) \subseteq K$. O conjunto \bar{K} é um grande círculo de S^3 e pode ser parametrizado por $s \mapsto e^{s\pi k}$, em que k é um quaternion unitário.

Seja $l_s(t)$ a homotopia em S^3 definida da seguinte maneira. Para $s = 0$, $l_0(t) = e^{t\pi i}$, $t \in [0, 1]$, e, para $s \in (0, 1]$, $l_s(t)$ é o grande círculo de S^3 que conecta $e^{s\pi k}$ ao ponto $-1 \in \bar{K}$. Deste modo, temos que $l_s(t)$ é uma homotopia, com extremidades em \bar{K} , da curva $e^{t\pi i}$ à curva constante $l_1(t) \equiv -1$, já que $e^{s\pi k} = -1$. A composição $\pi \circ \psi \circ l_s(t)$ é uma homotopia de γ à curva constante $\pi(\psi(-1)) \in \pi(K) = \{p\}$.

Seja agora $\gamma \in \Gamma_0$ um ponto qualquer. Pelo Lema 3.4.2 e pela Observação 3.4.3, temos que $\gamma(t) = \exp_p(t\gamma)$ é homotópico a uma composição de loops do tipo $\exp_p(t\pi H_{\alpha})$ para variadas co-raízes H_{α} . Sendo cada uma delas homotópica a um ponto, temos que $\gamma(t)$ também é. \square

Nosso próximo passo é mostrar que os elementos de $\Gamma - \Gamma_0$ correspondem a loops em Tp que não são homotópicos a um ponto. Para tanto, vamos considerar um subconjunto de S denotado S_{reg} cujo grupo fundamental é isomorfo ao de S e que tem propriedades que nos ajudarão a obter os resultados desejados. Para estudar S_{reg} , construiremos um recobrimento para ele.

Seja U um grupo compacto. Um elemento $x \in U$ é chamado de *regular* se está contido em apenas um toro maximal de U e, caso contrário, x é chamado de *singular*. Os conjunto de elementos regulares e singulares serão denotados U_{reg} e U_{sing} respectivamente. Por exemplo, se $x = utu^{-1}$ para t em algum toro maximal T e $u \in U$, temos que x é regular se, e somente se, T é o único toro maximal que contém t , uma vez que todos os toros maxima de U são conjugados e cobrem U (veja a Proposição 1.2.9). Além disso, escrevendo $t = \exp(2H)$ para H na álgebra de T , temos que $x = u \exp(2H) u^{-1}$ é singular se, e somente se, existe alguma raiz α tal que $\alpha(H) \in \pi\mathbb{Z}$ (Proposição 13.24 de [3]).

Inspirado nessas ideias definimos \mathfrak{t}_{reg} o conjunto de elementos *regulares* de \mathfrak{t} , trata-se do complemento em \mathfrak{t} do diagrama de Stiefel ρ (equação (3.13)). Em outras palavras

$$\mathfrak{t}_{reg} = \{H \in \mathfrak{t} : \alpha(H) \notin \pi\mathbb{Z} \text{ para todo } \alpha \in \Delta_{\sigma}(\mathfrak{u}, \mathfrak{t})\},$$

em que \mathfrak{t} é um subespaço de Cartan de (\mathfrak{u}, σ) . Uma componente conexa de \mathfrak{t}_{reg} é chamada de *alcova* e \mathfrak{t}_{reg} é uma união de alcovas.

Observação 3.4.5. Observe que o conceito de elemento regular é um pouco mais restritivo neste novo contexto. Anteriormente, definimos $H \in \mathfrak{t}$ como regular se $\mathfrak{t} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(H) \cap \mathfrak{s}$, o que equivale à condição que nenhuma raiz de Δ_{σ} se anule sobre H .

Considere o grupo $\Gamma \rtimes W$ e seja $H \in \mathfrak{t}$. Este grupo age à direita de \mathfrak{t} via

$$H \cdot (\gamma, w) = \gamma + w^{-1}H.$$

Observe que

$$\begin{aligned} H \cdot (\gamma, w) \cdot (\gamma', w') &= (\gamma + w^{-1}H) \cdot (\gamma', w') \\ &= \gamma' + (w')^{-1}\gamma + (ww')^{-1}H \\ &= H \cdot (\gamma' + (w')^{-1}\gamma, ww'). \end{aligned}$$

É importante observar que W deixa Γ invariante. Se $\gamma \in \Gamma$ e $w = kM \in W$, temos que

$$\exp_p(w\gamma) = k \exp_p(\gamma) = kp = p,$$

uma vez que K é a isotropia de p . Definimos então o produto em $\Gamma \rtimes W$ por

$$(\gamma, w) \cdot (\gamma', w') = (\gamma' + (w')^{-1}\gamma, ww')$$

Como consequência da próxima proposição, podemos restringir a ação de $\Gamma \rtimes W$ a uma ação sobre \mathfrak{t}_{reg} .

Proposição 3.4.6. Os grupos Γ e W deixam \mathfrak{t}_{reg} invariante.

Demonstração. Seja $H \in \mathfrak{t}_{reg}$. Sabemos que Γ deixa ρ invariante, uma vez que $\Gamma \subseteq \Gamma_1$, logo, se $H + \gamma \in \rho$ para alguma $\gamma \in \Gamma$, temos que $H = (H + \gamma) - \gamma \in \rho$, o que é absurdo. Segue que Γ deixa \mathfrak{t}_{reg} invariante.

Seja $w \in W$ e suponha que $\alpha(wH) \in \pi\mathbb{Z}$ para alguma raiz α , ou seja, $wH \in \rho$. Temos que $(w^{-1})^* \alpha \in \Delta_{\sigma}(\mathfrak{u}, \mathfrak{t})$ e $((w^{-1})^* \alpha)(H) = \alpha(wH) \in \pi\mathbb{Z}$, de modo que $H \notin \mathfrak{t}_{reg}$, o que é contraditório. \square

Enunciamos agora um resultado que nos será útil posteriormente.

Teorema 3.4.7. O grupo $\Gamma_0 \rtimes W$ age transitivamente e simplesmente no conjunto de alcovas de \mathfrak{t} . Portanto, $\Gamma \rtimes W$ age transitivamente no conjunto de alcovas.

Demonstração. Este Teorema é consequência direta do Teorema 13.34 de [3] observando que $\Gamma_0 \rtimes W \leq \Gamma \rtimes W$. Aqui a ação que consideramos é à direita e não à esquerda como em

[3], mas o resultado não é alterado. Considere a ação à esquerda

$$(\gamma, w) * H = wH + \gamma.$$

É fácil ver que

$$(\gamma, w) * H = H \cdot (\gamma, w^{-1}),$$

onde segue que o Teorema também é válido considerando a ação à direita. \square

Seja

$$S_{reg} := K \exp_p(\mathfrak{t}_{reg}) = \exp_p(\text{Ad}(K)\mathfrak{t}_{reg}) \quad (3.27)$$

o conjunto dos elementos regulares de S , trata-se de um aberto de S , uma vez que \mathfrak{t}_{reg} é uma união de abertos conexos em \mathfrak{t} , K age por isometrias e $\text{Ad}(K)\mathfrak{t} = \mathfrak{s}$. O complemento de S_{reg} em S é chamado de conjunto dos pontos *singulares* de S e será denotado S_{sing} . Segue da Proposição 13.24 de [3] que $S_{sing} = \pi(U_{sing})$, em que $\pi : U \rightarrow U/K$ é a projeção natural. Observe que $k \exp_p(H) = \exp_p(H)$ sempre que $k \in M$, então, com o objetivo de construir um recobrimento para S_{reg} , consideramos o quociente K/M . Sendo $W = M^*/M$, em que M^* e M são, respectivamente, o normalizador e o centralizador de \mathfrak{t} em K , temos que W age naturalmente à direita de K/M da seguinte maneira:

$$kM \cdot w = kwM.$$

Esta ação está bem definida uma vez que $M \trianglelefteq M^*$. Portanto, temos que $\Gamma \rtimes W$ age simplesmente à direita de $\mathfrak{t}_{reg} \times K/M$ via

$$(H, kM) \cdot (\gamma, w) = (\gamma + w^{-1}H, kwM).$$

A simplicidade da ação segue do fato que, se (γ, w) fixa (H, kM) , temos que $kwM = kM$, ou seja, $w \in M$. Segue que $w^{-1}H = H$ e, portanto, $\gamma + H = H$, então γ deve ser nulo.

Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \Psi : \mathfrak{t}_{reg} \times K/M &\rightarrow S_{reg} \\ (H, kM) &\mapsto k \exp_p(H). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que Ψ é um recobrimento de S_{reg} . A ação do grupo $\Gamma \rtimes W$ deixa Ψ invariante:

$$\begin{aligned}\Psi(\gamma + w^{-1}H, kwM) &= kw \exp_p(\gamma + w^{-1}H) \\ &= kw \exp_p(w^{-1}H) \\ &= k \exp_p(ww^{-1}H) \\ &= \Psi(H, kM)\end{aligned}$$

A próxima proposição mostra que o grau ao qual Ψ deixa de ser injetiva é medido pela ação de $\Gamma \rtimes W$.

Proposição 3.4.8. Sejam $H, H' \in \mathfrak{t}_{reg}$ e $k, k' \in K$ e suponha que $\Psi(H, kM) = \Psi(H', k'M)$, então existe $(\gamma, w) \in \Gamma \rtimes W$ tal que

$$(H', k'M) = (H, kM) \cdot (\gamma, w)$$

Demonstração. Por hipótese, temos $k \exp_p(H) = k' \exp_p(H')$, de modo que

$$q = \exp_p(H) = \exp_p(\text{Ad}(k^{-1}k')H') \in S_{reg}.$$

Pelo Teorema 3.3.2 e pela Proposição 3.3.3, temos que

$$\text{Ad}(k^{-1}k')H' = \text{Ad}(u)(H + \gamma)$$

para algum $u \in K^q$, uma vez que $W^q = \text{Ad}(M^{*q})|_{\mathfrak{t}}$. Sendo $\exp_p(H) \in S_{reg}$, temos que $\alpha(H) \notin \pi\mathbb{Z}$ para nenhuma raiz α , donde segue que a álgebra de K^q satisfaz $\mathfrak{k}^q = \mathfrak{m} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{t}) \cap \mathfrak{k}$ (veja a equação (3.20)). Segue que $(K^q)_0 = M_0$ e, pela Proposição 3.3.4, temos que $K^q = M_0 M^{*q} = M^{*q}$. Portanto, $u \in M^{*q}$ e, pela Proposição 3.3.3, segue que $\text{Ad}(u)|_{\mathfrak{t}} \in W^q$, de modo que

$$\text{Ad}(u)(H + \gamma) = H + \gamma',$$

para alguma $\gamma' \in \Gamma$. Portanto, $\text{Ad}(k^{-1}k')H' = H + \gamma' \in \mathfrak{t}$ e segue do Corolário 1.4.20 que $\text{Ad}(k^{-1}k')H' = wH'$ para algum $w \in W$. Temos, enfim, que $wH' = H + \gamma'$, ou seja, $H' = w^{-1}\gamma' + w^{-1}H = \gamma'' + w^{-1}H$ para $\gamma'' = w^{-1}\gamma'$. Segue que

$$\text{Ad}(w^{-1}k^{-1}k')H' = H'.$$

Observe que $\mathfrak{t} = \mathfrak{z}_s(H')$, uma vez que H' é regular e, se $k_0 \in K$ centraliza H' e $Y \in \mathfrak{t}$, temos que

$$[\text{Ad}(k_0)Y, H'] = \text{Ad}(k_0)[Y, \text{Ad}(k_0^{-1})H'] = \text{Ad}(k_0)[Y, H'] = \text{Ad}(k_0)0 = 0,$$

de modo que $\text{Ad}(k_0)\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{t}$ e $k_0 \in M^*$. Temos que $w^{-1}k^{-1}k' \in M^*$ e $\text{Ad}(w^{-1}k^{-1}k')$ é um elemento do grupo de Weyl que fixa um elemento regular, logo, é a identidade (Proposição 1.4.18). Segue que $w^{-1}k^{-1}k' \in M$ e $k'M = kwM$. Finalmente, temos que

$$(H', k'M) = (H, kM) \cdot (\gamma', w).$$

□

Considere o espaço Q obtido identificando os pontos das órbitas de $\Gamma \times W$ em $\mathfrak{t}_{reg} \times K/M$. A proposição anterior nos mostra que a projeção natural $\mathfrak{t}_{reg} \times K/M \rightarrow Q$ se identifica com a aplicação $\Psi : \mathfrak{t}_{reg} \times K/M \rightarrow S_{reg}$, uma vez que os pontos que têm mesma imagem por Ψ devem estar numa mesma órbita de $\Gamma \times W$. Pela Proposição 1.40 de [8], para mostrar que Ψ é um recobrimento, basta mostrar que a ação de $\Gamma \times W$ é propriamente descontínua (veja a Subseção A.3.1 para mais detalhes).

Lema 3.4.9. A ação à direita de $\Gamma \times W$ sobre $\mathfrak{t}_{reg} \times K/M$ é propriamente descontínua.

Demonstração. Seja $(H, kM) \in \mathfrak{t}_{reg} \times K/M$. Observe que HW consiste de uma quantidade finita de pontos e a imagem de H por $\Gamma \times W$ é igual a

$$\bigcup_{w \in W} Hw^{-1} + \Gamma,$$

que é um reticulado segundo a Definição 1.3.10. Portanto, podemos escolher um aberto U de \mathfrak{t}_{reg} contendo H tal que $H(\gamma, w) = \gamma + w^{-1}H \notin U$ para todo $(\gamma, w) \in \Gamma \times W$ diferente de $(0, 1)$.

Por outro lado, para $kM \in K/M$, temos que a órbita $kM \cdot W$ consiste de uma quantidade finita de pontos, então basta mostrar que $kM = kwM$ apenas se $w = 1$. É fácil ver que isto ocorre se, e somente se, $w \in M$, mas, como $W = M^*/M$, isto é equivalente a dizer que $w = 1$. □

Teorema 3.4.10. Seja $A \subseteq \mathfrak{t}_{reg}$ uma alcova, então a restrição $\Psi|_{A \times K/M}$ é também um recobrimento de S_{reg} .

Demonstração. Pelo Teorema 3.4.7, temos que a ação de $\Gamma \times W$ pode levar qualquer ponto de \mathfrak{t}_{reg} em A , de modo que $\psi(A \times K/M) = S_{reg}$, ou seja, $\Psi|_{A \times K/M}$ é sobrejetiva.

Para $y \in S_{reg}$, existe $V \subseteq S_{reg}$ aberto e contendo y tal que $\Psi^{-1}(V)$ é uma união de abertos disjuntos $U_\alpha \subseteq t_{reg} \times K/M$ que são homeomorfos, via Ψ a V . Diminuindo V de forma adequada, podemos assumir que V é conexo, de modo que cada U_α ou está contido em $A \times K/M$ ou não o intercepta. Segue que a imagem inversa de V por $\Psi|_{A \times K/M}$ é uma união disjunta de abertos de $A \times K/M$. \square

O próximo resultado nos mostra que, para estudar loops em S , basta considerar loops em Tp .

Proposição 3.4.11. Todo loop em S é homotópico a um loop da forma $t \mapsto \exp_p(t\gamma)$ para algum $\gamma \in \Gamma$.

Demonstração. Pelo Teorema 3.4.1, um loop qualquer de S é homotópico a um loop em Tp e, pelo Lema 3.4.2, temos que todo loop em Tp é homotópico a um loop da forma $t \mapsto \exp_p(t\gamma)$ para algum $\gamma \in \Gamma$. \square

Sejam $A \subseteq t$ uma alcova, $H \in A$ e $\gamma \in \Gamma - \Gamma_0$. Pelo Lema 13.38 de [3], existem $\gamma' \in \Gamma_0$ e $w \in W$ tais que

$$H' = w \cdot (H + \gamma + \gamma') \in A,$$

mas $H' \neq H$. Seja $p(t) = H + t(H' - H)$, $t \in [0, 1]$, de modo que $p(0) = H$ e $p(1) = H'$. Pensando em M^* como o normalizador de t em K_0 , se $k \in M^*$ representa w , seja $k(t)$ um caminho em K_0 de 1 a k e defina

$$q(t) = (p(t), k(t)^{-1}M) \in A \times K/M. \quad (3.28)$$

Observe que $q(0) \neq q(1)$, uma vez que $p(0) \neq p(1)$.

Teorema 3.4.12. O caminho $\Psi \circ q(t)$ é um loop em S_{reg} e é homotópico, em S , ao loop $t \mapsto \exp_p(t\gamma)$.

Demonstração. Observe inicialmente que

$$\begin{aligned} \Psi(q(1)) &= \Psi(H', k^{-1}M) \\ &= k^{-1} \exp_p(H') \\ &= \exp_p(w^{-1}w(H + \gamma + \gamma')) \\ &= \exp_p(H + \gamma + \gamma') \\ &= \exp_p(H) \\ &= \Psi(q(0)), \end{aligned}$$

logo, $\Psi \circ q$ é um loop. Temos que

$$\Psi(q(t)) = \Psi(p(t), k(t)^{-1}M) = \exp_p(\text{Ad}(k(t)^{-1})p(t)),$$

em que $\text{Ad}(k(t)^{-1})p(t)$ começa em H e termina em $H + \gamma + \gamma'$, logo, é homotópico em t ao segmento $t \mapsto H + t(\gamma + \gamma')$, pois t é simplesmente conexo. Segue que $\Psi \circ q$ é homotópico a

$$t \mapsto \exp_p(H + t(\gamma + \gamma')) = \exp(H) \exp_p(t(\gamma + \gamma')).$$

Como podemos deformar $\exp(H)$ continuamente para a identidade 1 via $s \mapsto \exp((1-s)H)$, temos que $\Psi \circ q$ é homotópico a $t \mapsto \exp_p(t(\gamma + \gamma'))$. Pela Observação 3.4.3, temos que $t \mapsto \exp_p(t(\gamma + \gamma'))$ é homotópico à composição dos loops $t \mapsto \exp(t\gamma)$ e $t \mapsto \exp(t\gamma')$, em que o segundo desses loops é homotópico a um ponto pelo Teorema 3.4.4. Portanto, $\Psi \circ q$ é homotópico, em S , ao loop $t \mapsto \exp(t\gamma)$. \square

Para demonstrar o próximo resultado, precisamos de uma condição para determinar quando um loop em um dado espaço topológico não é homotópico a um ponto a partir de informações no recobrimento.

Lema 3.4.13. Sejam X e Y espaços topológicos conexos e $\pi : Y \rightarrow X$ um recobrimento. Suponha que l é um loop homotópico a um ponto em X e seja \tilde{l} seu levantamento em Y , então \tilde{l} é um loop em Y .

Demonstração. Seja l_s uma homotopia de l a um ponto que satisfaz

$$l_0(t) = l(t), \quad l_1(t) \equiv x \in X$$

Podemos levantar l_s a uma homotopia \tilde{l}_s em Y com extremidades fixadas (veja o Teorema 13.3 de [3]). Sendo l_1 uma curva constante, temos que $\tilde{l}_1([0, 1]) \subseteq \pi^{-1}(x)$, ou seja, \tilde{l}_1 é constante e igual a um ponto. Como \tilde{l}_s é uma homotopia com extremos fixados, temos que \tilde{l} deve ser um loop em Y . \square

Corolário 3.4.14. Se l é um loop em X e seu levantamento não é um loop em Y , então l não pode ser homotópica a um ponto.

Vamos mostrar agora que S e S_{reg} têm o mesmo grupo fundamental. Mais especificamente, vamos demonstrar o seguinte Teorema.

Teorema 3.4.15. *Todo loop em S é homotópico a um loop em S_{reg} . Um loop em S_{reg} é homotópico, em S , a um ponto apenas se for homotópico, em S_{reg} , a um ponto.*

Para demonstrar estes resultados, precisamos de alguns Lemas auxiliares. O Lema a seguir foi retirado de [3] e será enunciado para referência futura. Mudamos ligeiramente a notação para servir melhor a nossos propósitos.

Lema 3.4.16 (Lema 13.29 de [3]). Sejam L, Y e D variedades compactas, sendo que D pode ter bordo, que satisfazem

$$\dim(Y) + \dim(D) < \dim(L).$$

Sejam $f : Y \rightarrow L$ e $g : D \rightarrow L$ funções diferenciáveis. Suponha que $E \subseteq D$ é fechado e a imagem $g(E)$ de E por g é disjunta de $f(Y)$, então g é homotópica a uma função $g' : D \rightarrow L$ tal que g e g' coincidem em E , mas $g'(D) \cap f(Y) = \emptyset$.

Como consequência do Lema 13.28 de [3], temos o seguinte resultado.

Lema 3.4.17. Existe uma subvariedade compacta $N \subseteq U$ tal que $S_{sing} \subseteq \pi(N)$ e

$$\dim(\pi(N)) \leq \dim(S) - 3.$$

Demonastração. Sejam M_1, \dots, M_n variedades compactas e $f_j : M_j \rightarrow U$, $j = 1, \dots, n$, funções diferenciáveis conforme o Lema 13.28 de [3]. Temos que

$$\dim(M_j) \leq \dim(U) - 3 \quad \text{e} \quad U_{sing} \subseteq \bigcup_{j=1}^n f_j(M_j).$$

Defina $N = \bigcup_{j=1}^n f_j(M_j)$, sendo que N é compacta porque é uma união finita de compactos. Segue que

$$S_{sing} = \pi(U_{sing}) \subseteq \pi(N)$$

e, além disso,

$$\begin{aligned} \dim(\pi(N)) &\leq \dim(N) - \dim(K) \\ &\leq \dim(U) - 3 - \dim(K) \\ &= \dim(S) - 3. \end{aligned}$$

□

Com estes dois lemas, temos o suficiente para fazer a demonstração do Teorema 3.4.15.

Demonastração do Teorema 3.4.15. Seja l um loop qualquer em S , podemos pensar em l como uma função $g : S^1 \rightarrow S$. Vamos aplicar o Lema 3.4.16 com $D = S^1$, $L = S$, $E = \emptyset$,

$Y = \pi(N)$ (como no Lema 3.4.17) e escolheremos f como a inclusão $\pi(N) \rightarrow S$. Isto é possível porque

$$\dim(\pi(N)) + \dim(S^1) \leq \dim(S) - 3 + 1 < \dim(S).$$

O Lema 3.4.16 então nos diz que podemos deformar g continuamente a uma aplicação $g' : S^1 \rightarrow S$ tal que $g'(S^1)$ não intercepta $\pi(N) \supseteq S_{sing}$. Ou seja, obtemos uma homotopia do loop $l = g$ a um loop $l' = g' \subseteq S_{reg}$.

Se l é um loop em S_{reg} que é homotópico a um ponto em S_{reg} , também será homotópico a um ponto em S , já que $S_{reg} \subseteq S$. Suponha agora que l é um loop em S_{reg} que é homotópico, em S , a um ponto. Vamos mostrar que l também é homotópico, em S_{reg} , a um ponto. Podemos pensar na homotopia, em S , de l a um ponto como uma aplicação contínua $g : D \rightarrow S$, em que D é um disco fechado no plano tal que $g(\partial D) = l$ e a imagem do centro de D é o fim da homotopia. Podemos aplicar o Lema 3.4.16 com $E = \partial D$, D como o disco descrito acima, $L = S$, $Y = \pi(N)$ e f como a inclusão $\pi(N) \rightarrow S$, uma vez que

$$\dim(\pi(N)) + \dim(D) \leq \dim(S) - 3 + 2 = \dim(S) - 1 < \dim(S).$$

Existe então uma aplicação $g' : D \rightarrow S$ tal que $g'|_{\partial D} = l = g|_{\partial D}$, mas $g'(D)$ não intercepta $\pi(N) \supseteq S_{sing}$. Em outras palavras, g' é uma homotopia de l a um ponto em S_{reg} . \square

Finalmente, temos todos os requisitos para provar o seguinte Teorema.

Teorema 3.4.18. *Seja $\gamma \in \Gamma - \Gamma_0$ e $l(t) = \exp_p(t\gamma)$, então l não é homotópico a um ponto.*

Demonstração. Considere o caminho q em $A \times K/M$ construído na equação (3.28), em que $A \subseteq \mathfrak{t}$ é uma alcova. Lembre-se que $\Psi|_{A \times K/M}$ é um recobrimento (Teorema 3.4.10) e que $\Psi \circ q$ é um loop em S_{reg} que é homotópico, em S , a $t \mapsto \exp_p(t\gamma)$ (Teorema 3.4.12). Como q não é um loop em $A \times K/M$, temos que $\Psi \circ q$ não é homotópico, em S_{reg} , a um ponto (Corolário 3.4.14). Como S e S_{reg} têm grupos fundamentais isomórfos, segue do Teorema 3.4.15, que $\Psi \circ q$ não é homotópico, em S a um ponto, logo, $t \mapsto \exp_p(t\gamma)$ não é homotópico, em S , a um ponto. \square

Segue que o homomorfismo sobrejetivo

$$\Gamma \simeq \pi_1(Tp) \longrightarrow \pi_1(S)$$

do Teorema 3.4.1 tem como núcleo o reticulado Γ_0 , de modo que é válido o seguinte Teorema.

Teorema 3.4.19 (Teorema 5.2 de [2]). *Se S é um espaço simétrico compacto, então*

$$\pi_1(S) \simeq \Gamma/\Gamma_0.$$

Como consequência deste teorema, e dos reticulados calculados nas Subseções 3.3.1 e 3.3.2, temos que $\pi_1(S^2) \simeq 1$ (como esperado) e $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Para finalizar esta Seção, enunciamos algumas consequências do Teorema anterior.

Corolário 3.4.20 (Corolário 5.3 de [2]). *Se S é simplesmente conexo, então*

$$\Gamma = \Gamma_0, \quad \mathcal{D} = \mathcal{D}_0, \quad W^q = W_0^q$$

Segue que cada uma das órbitas focais $\mathfrak{F}(H)$ são conexas.

Demonstração. Está claro que $\Gamma = \Gamma_0$, uma vez que $1 = \pi_1(S) \simeq \Gamma/\Gamma_0$. O fato que $W^q = W_0^q$ segue do Teorema 1.3.22 e a igualdade $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$ segue da demonstração do mesmo Teorema. As órbitas focais foram definidas na equação (3.17) e elas são conexas porque estão em bijeção com o grupo quociente W^q/W_0^q (Teorema 3.3.6). \square

Por definição, se $w \in W^q$, temos que $wH - H \in \Gamma$, isto nos fornece uma maneira de construir uma aplicação $\phi : W^q \rightarrow \Gamma/\Gamma_0 \simeq \pi_1(S)$ dada por $\phi(w) = wH - H + \Gamma_0$. A Proposição 1.3.18 nos mostra que o grau de injetividade de ϕ é medido pelo subgrupo W_0^q de W^q . Suponha que $w, w' \in W^q$ e que

$$wH - H + \Gamma_0 = w'H - H + \Gamma_0 \iff wH + \Gamma_0 = w'H + \Gamma_0.$$

Portanto, $w^{-1}w'H + \Gamma_0 = H + \Gamma_0$, ou seja, $w^{-1}w'H \in H + \Gamma_0$, de modo que $w^{-1}w' \in W_0^q$. Consideramos então a aplicação injetiva

$$\begin{aligned} \phi : W^q/W_0^q &\longrightarrow \Gamma/\Gamma_0 \simeq \pi_1(S) \\ w &\longmapsto wH - H + \Gamma_0 \end{aligned}$$

Lembre-se que as componentes conexas da órbita focal $\mathfrak{F}(H)$ estão em bijeção com o grupo quociente W^q/W_0^q (Teorema 3.3.6). Vamos mostrar a seguir que cada componente conexa de $\mathfrak{F}(H)$ corresponde a uma classe de homotopia de curvas entre p e $q = \exp_p(H)$. Seja $\gamma_H = \exp_p(tH)$ e denote por $\pi_{p,q}$ o conjunto das classes de homotopia de curvas que

vão de p a q . Considere a aplicação

$$\begin{aligned} v : \pi_{p,q} &\longrightarrow \pi_1(S) \\ [\alpha] &\longmapsto [\alpha * \gamma_H^{-1}], \end{aligned}$$

em que γ_H^{-1} denota a geodésica γ_H percorrida na ordem reversa e $*$ denota a concatenação de curvas, isto é, em $\alpha * \gamma_H^{-1}$, primeiro percorremos α e depois γ_H^{-1} .

Lema 3.4.21. A aplicação $v : \pi_{p,q} \rightarrow \pi_1(S)$ é uma bijeção.

Demonastração. A condição $[\alpha * \gamma_H^{-1}] = [\alpha' * \gamma_H^{-1}]$ implica que existe uma homotopia entre α e α' com extremidades fixadas, ou seja, $[\alpha] = [\alpha']$. Segue que v é injetiva.

Por outro lado, seja $\xi : \pi_1(S) \rightarrow \pi_{p,q}$ dada por $\xi([\alpha]) = [\alpha * \gamma_H]$, então

$$\begin{aligned} v(\xi([\alpha])) &= v([\alpha * \gamma_H]) \\ &= [\alpha * \gamma_H * \gamma_H^{-1}] \\ &= [\alpha]. \end{aligned}$$

Portanto, ξ é uma inversa à direita de v , o que implica que v é sobrejetiva. \square

A composição $v^{-1} \circ \phi$ é uma aplicação injetiva $W^q/W_0^q \rightarrow \pi_{p,q}$, o que nos dá uma correspondência entre componentes conexas de $\mathfrak{F}(H)$ e classes de homotopias de curvas entre p e q . Em particular, se S é simplesmente conexa, há apenas um elemento em $\pi_{p,q}$, de modo que o grupo quociente W^q/W_0^q é trivial, ou seja, $W^q = W_0^q$ e $\mathfrak{F}(H)$ tem apenas uma componente conexa. Dessa forma, reobtemos parte dos resultados do Corolário 3.4.20.

3.5 Locus de Corte e Locus Conjugado

Nesta Seção vamos obter o locus de corte de um espaço simétrico compacto. O locus conjugado foi definido na Seção 2.2 e o que chamamos de *locus de corte* aqui é comumente chamado de "cut locus" em inglês. Denotaremos $S = U/K$ e manteremos também as outras notações da seção anterior.

Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ uma curva diferenciável, definimos o seu *comprimento* por

$$\ell(\alpha) = \int_a^b \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle} dt$$

Um segmento de geodésica $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ ligando os pontos $p = \gamma(a)$ e $q = \gamma(b)$ é chamada de *geodésica minimizante* se satisfaz

$$\ell(\gamma) \leq \ell(\alpha)$$

para toda curva α ligando os pontos p e q .

Em uma variedade Riemanniana completa as geodésicas estão definidas para qualquer valor de parâmetro. Considere então a geodésica $\gamma : [0, \infty) \rightarrow S$. Pela Proposição 3.6 do capítulo 3 de [10], temos que, para $t > 0$ suficientemente pequeno, o segmento geodésico $\gamma([0, t])$ é minimizante. Além disso, se $\gamma([0, t_1])$ não é minimizante, então $\gamma([0, t_2])$ não é minimizante para nenhum $t_2 > t_1$. Por continuidade, o conjunto maximal dos pontos $t \in [0, \infty)$ tais que a geodésica $\gamma([0, t])$ é minimizante deve ser da forma $[0, t_0]$ ou $[0, \infty)$.

Definição 3.5.1. Se existe $t_0 > 0$ tal que $\gamma([0, t_0])$ é uma geodésica minimizante e $\gamma([0, t_1])$ não é minimizante para $t_1 > t_0$, dizemos que $\gamma(t_0)$ é um *ponto de corte* de $p = \gamma(0)$ ao longo de γ . O conjunto dos pontos de corte de p ao longo de todas as geodésicas iniciando em p é chamado de *locus de corte* de p e é denotado $C(p)$.

Exemplo 3.5.2. Para ilustrar a Definição 3.5.1 e as outras ideias desta Seção, considere a esfera $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. Uma geodésica que se inicia em um ponto $p \in S^2$ deixa de ser minimizante assim que passa pelo antípoda $-p$. Na Figura 3.4 abaixo, vemos que a geodésica em azul conecta p a q , porém, a geodésica em vermelho cumpre o mesmo papel percorrendo um caminho mais curto. As duas geodésicas fazem parte do mesmo grande círculo.

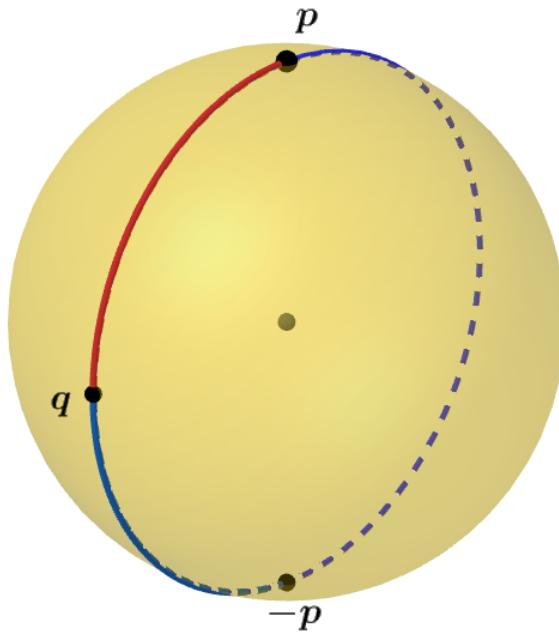


Figura 3.4 : Geodésicas na Esfera.

Pela figura, já somos capazes de perceber que o locus de corte de p em S^2 consiste exatamente de seu antípoda $-p$.

Podemos nos referir a um segmento de geodésica minimizante entre dois pontos como *geodésica minimizante* entre os pontos em questão. Vamos agora demonstrar algumas propriedades do locus de corte de um ponto em um espaço homogêneo Riemanniano. Inicialmente, temos o seguinte resultado.

Lema 3.5.3. Sejam N uma variedade Riemanniana e $\gamma: [a, b] \rightarrow N$ um segmento de geodésica minimizante ligando os pontos $p = \gamma(0)$ e $q = \gamma(1)$. Se $\varphi: N \rightarrow N$ é uma isometria, então $\varphi \circ \gamma$ é uma geodésica minimizante ligando os pontos $\varphi(p)$ e $\varphi(q)$.

Demonstração. Seja α uma curva que conecta $\varphi(p)$ e $\varphi(q)$, então $\varphi^{-1} \circ \alpha$ é uma curva que conecta p e q , logo, $\ell(\gamma) \leq \ell(\varphi^{-1} \circ \alpha)$, já que γ é minimizante. Como isometrias preservam o comprimento de curvas, temos que

$$\ell(\varphi \circ \gamma) \leq \ell(\varphi \circ \varphi^{-1} \circ \alpha) = \ell(\alpha).$$

Segue que $\varphi \circ \gamma([a, b])$ é minimizante. □

Corolário 3.5.4. Sejam $p \in S$ e $\varphi: S \rightarrow S$ uma isometria, então $\varphi(C(p)) = C(\varphi(p))$.

Demonstração. Seja $\gamma(t_0) \in C(p)$. Pelo Lema anterior, temos que $\varphi(\gamma([0, t_0]))$ é minimizante, uma vez que $\gamma([0, t_0])$ é minimizante. Se $t_1 > t_0$, então $\varphi(\gamma([0, t_1]))$ deixa de ser minimizante, pois, caso contrário, $\gamma([0, t_1])$ seria minimizante, o que é impossível porque $\gamma(t_0)$ é um ponto de corte. Segue que $\varphi(\gamma(t_0)) \in C(\varphi(p))$.

Suponha agora que $\tilde{\gamma}(t_0) \in C(\varphi(p))$. Podemos escrever $\tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma$. Pelo Lema anterior e pelos argumentos do paragrafo anterior, $\gamma(t_0) \in C(p)$, de modo que $\tilde{\gamma}(t_0) \in \varphi(C(p))$. \square

Segue do Corolário anterior que, num espaço homogêneo Riemanniano U/K os locus de corte são todos isométricos, ou seja, se conhecemos $C(p)$ e queremos calcular $C(q)$, basta escolher $u \in U$ tal que $up = q$ e temos

$$C(q) = C(up) = uC(p).$$

De modo que basta estudar o locus de corte de apenas um ponto.

Relembre que dois pontos de $H, H' \in \mathfrak{t}$ são chamados de Γ –equivalentes se $H - H' \in \Gamma$ e são chamados de equivalentes focais se, além disso, $|H| = |H'|$. Além disso, relembre dos conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \{H \in \mathfrak{t} : |H| < |H + \gamma|, \text{ para todo } \gamma \in \Gamma \setminus \{0\}\} \\ \overline{\mathcal{D}} &= \{H \in \mathfrak{t} : |H| \leq |H + \gamma|, \text{ para todo } \gamma \in \Gamma\} \end{aligned}$$

definidos na Subseção 1.3.3, em que \mathcal{D} é o interior de $\overline{\mathcal{D}}$ (Proposição 1.3.20). Antes de determinar o locus de corte de S , vamos determiná-lo em Tp para depois aplicar a ação de K e obter o locus de corte em S .

Proposição 3.5.5. Seja $\mathfrak{t} \leq \mathfrak{u}$ um subespaço de Cartan e $T \leq U$ o toro gerado por \mathfrak{t} . O locus de corte de p no flat maximal Tp é igual a $\exp_p(\partial\mathcal{D})$.

Demonstração. Seja $\exp_p(H) \in C(p)$, então $\exp_p(tH)$ é uma geodésica minimizante para $t \in [0, 1]$ e deixa de ser minimizante para $t > 1$. Portanto, os pontos tH , $t \in [0, 1]$, devem ter normas minimais entre seus Γ –equivalentes, ou seja, $tH \in \overline{\mathcal{D}}$ para $t \in [0, 1]$ e $tH \notin \overline{\mathcal{D}}$ para $t > 1$. Segue que $H \in \partial\mathcal{D}$.

Seja agora $H \in \partial\mathcal{D}$. Sendo $\overline{\mathcal{D}}$ convexo, temos que os pontos tH têm normas minimais entre seus Γ –equivalentes para $0 \leq t \leq 1$, logo, a geodésica $\exp_p(tH)$ é minimizante para $t \in [0, 1]$. Como $\partial\mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}} - \mathcal{D}$, existe $\gamma \in \Gamma$ não nulo tal que $Y = H + \gamma$ é um equivalente focal de H (veja a Proposição 1.3.20). Pelo Lema 1.3.19, temos que, para qualquer $\varepsilon > 0$, $(1 + \varepsilon)H$ e $Y + \varepsilon H$ são equivalentes focais, então

$$\exp_p((1 + \varepsilon)H) = \exp_p(Y + \varepsilon H).$$

Além disso, $|(1 + \varepsilon)H| > |Y + \varepsilon H|$, de modo que $\exp_p(tH)$ não pode ser geodésica minimizante para $t > 1$. Portanto, $H \in C(p)$. \square

Para caracterizar o locus de corte de p em S precisamos determinar qual a relação ele tem com o locus de corte de p em Tp . Em uma variedade Riemannina, temos a noção de *distância*. A distância $d_N(p, q)$ entre dois pontos p e q de uma variedade N é definido como o ínfimo dos comprimentos de todas as curvas que conectam p e q . Portanto, se γ é uma geodésica minimizante de p a q , então $d_N(p, q) = \ell(\gamma)$. Segue do Lema 3.5.3 que isometrias preservam a função distância, uma vez que preservam comprimentos de curvas.

Se $N' \subseteq N$ é uma subvariedade, podemos obter uma noção de distância em N' por meio da restrição da função distância de N a N' . Uma outra noção de distância pode ser obtida considerando apenas a variedade N' sem levar em conta o espaço ambiente N em que está inserida. Sejam $p, q \in N'$, definimos a distância *intrínseca* $d_{N'}(p, q)$ como o ínfimo dos comprimentos de curvas contidas em N' e que conectam p e q . Como todas as curvas de N' que conectam p e q são também curvas de N , temos que

$$d_N(p, q) \leq d_{N'}(p, q).$$

Lema 3.5.6. Sejam d_S e d_T as distâncias intrínsecas de S e de Tp respectivamente, então d_T coincide com a restrição de d_S a Tp .

Demonstração. Sejam $x, y \in Tp$, então $d_S(x, y) \leq d_T(x, y)$. Como T age transitivamente por isometrias (de S) em Tp , podemos supor, sem perda de generalidade, que $x = hp$ e que $y = p$ para algum $h \in T$. Como a exponencial de U é sobrejetiva, escolha $X \in \mathfrak{s}$ que satisfaça $\exp_p(X) = hp$ e que tenha norma mínima. A geodésica $\exp_p(tX)$ conecta p a hp e, pela minimalidade de X deve ser minimizante para $0 \leq t \leq 1$. Esta afirmação segue do Corolário 3.9 do capítulo 3 de [10], uma vez que uma curva que conecta dois pontos em uma variedade com comprimento mínimo deve ser uma geodésica e dentre as geodésicas que conectam p e hp , $\exp_p(tX)$ tem comprimento mínimo e igual a $|X|$. Segue que $d_S(hp, p) = |X|$.

Seja $H \in \mathfrak{t}$ com norma mínima satisfazendo $hp = \exp_p(H)$. De maneira similar ao parágrafo anterior, mostra-se que $d_T(hp, p) = |H|$. Com estas construções, temos que

$$\exp_p(X) = \exp_p(H) = hp,$$

de modo que $X \in \mathfrak{F}(H + \gamma)$ para algum $\gamma \in \Gamma$ pela Proposição 3.3.3. Como $\mathfrak{F}(H + \gamma)$ é a órbita da ação de K^q sobre $H + \gamma$ e K age por isometrias em \mathfrak{s} , temos que $|X| = |H + \gamma| \geq |H|$,

uma vez que H tem norma mínima. Finalmente, temos a desigualdade reversa

$$|X| = d_S(hp, p) \geq d_T(hp, p) = |H|.$$

□

Teorema 3.5.7. *Seja $S = U/K$ um espaço simétrico compacto e $p = 1K$. O locus de corte $C(p)$ de p em S coincide com o conjunto $K \exp_p(\partial \mathcal{D})$.*

Demonstração. Denote por $C_T(p)$ e $C_S(p)$ os locus de corte de p em Tp e em S respectivamente. Pelo Lema 3.5.6, a distância intrínseca de Tp coincide com a distância induzida em Tp pela distância intrínseca de S , portanto, $C_T(p) \subseteq C_S(p)$. Como K fixa p , segue do Corolário 3.5.4 que K age sobre o locus de corte de p , de modo que $K C_T(p) \subseteq C_S(p)$. Como $\text{Ad}(K)\mathfrak{t} = \mathfrak{s}$, esta inclusão é, na verdade, uma igualdade, ou seja,

$$C_S(p) = K C_T(p) = K \exp_p(\partial \mathcal{D}),$$

aplicando a Proposição 3.5.5. □

Relembre agora dos conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0 &= \{H \in \mathfrak{t} : \alpha(H) < \pi, \text{ para toda } \alpha \in \Delta_\sigma(\mathfrak{u}, \mathfrak{t})\}, \\ \overline{\mathcal{D}_0} &= \{H \in \mathfrak{t} : \alpha(H) \leq \pi, \text{ para toda } \alpha \in \Delta_\sigma(\mathfrak{u}, \mathfrak{t})\}, \end{aligned}$$

definidos na Subseção 1.3.3. Mostramos na Seção 2.4 que o locus conjugado primário de p em Tp coincide com $\exp_p(\partial \mathcal{D}_0)$ e no Teorema 2.4.6 que o locus conjugado primário de p em S é órbita $K \exp_p(\partial \mathcal{D}_0)$. O próximo Teorema caracteriza a topologia de S com base nos seus locus de corte e locus conjugado.

Teorema 3.5.8. *Sejam S um espaço simétrico compacto e $p \in S$, então S é simplesmente conexo se, e somente se, o locus de corte de p coincide com o locus conjugado primário de p .*

Demonstração. Denote por $C^1(p)$ o locus conjugado primário de p em S . Temos que $C^1(p) = K \exp_p(\partial \mathcal{D}_0)$ e $C(p) = K \exp_p(\partial \mathcal{D})$, então

$$C(p) = C^1(p) \iff \mathcal{D} = \mathcal{D}_0.$$

Se S é simplesmente conexa, o Teorema 3.4.19 implica que $\Gamma = \Gamma_0$ e segue da demonstração do Teorema 1.3.22 que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$.

Por outro lado, suponha que $C(p) = C^1(p)$ ou, equivalentemente, que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$, vamos mostrar que $\Gamma \subseteq \Gamma_0$. Seja $H \in \mathfrak{t}$ e defina

$$m_0 := \min_{\gamma_0 \in \Gamma_0} |H + \gamma_0|, \quad m := \min_{\gamma \in \Gamma} |H + \gamma|.$$

vamos mostrar que $m_0 = m$. Considere a demonstração do item 1 da Proposição 1.3.20, restringindo função f a Γ_0 obtemos que existe $\gamma_0 \in \Gamma_0$ tal que $m_0 = f(\gamma_0) = |H + \gamma_0|$.

O Teorema 1.3.22 implica que existe um domínio fundamental de Γ_0 contido entre \mathcal{D}_0 e $\overline{\mathcal{D}_0}$. Se $H + \gamma_0 \notin \overline{\mathcal{D}_0}$, existe $\gamma_1 \in \Gamma_0$ tal que $H + \gamma_0 + \gamma_1 \in \mathcal{D}_0$, mas, como $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$, isto implica que $|H + \gamma_0 + \gamma_1| < |H + \gamma_0|$, o que é absurdo já que $|H + \gamma_0|$ é minimal. Portanto, $H + \gamma_0 \in \overline{\mathcal{D}_0}$. Pela definição de $\overline{\mathcal{D}}$, segue que

$$m_0 = |H + \gamma_0| = \min_{\gamma \in \Gamma} |(H + \gamma_0) + \gamma| = \min_{\gamma \in \Gamma} |H + \gamma| = m,$$

uma vez que $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.

Seja $\gamma \in \Gamma$ e considere $H = \gamma$ nas discussões acima. Temos que

$$\min_{\gamma_0 \in \Gamma_0} |\gamma + \gamma_0| = \min_{\gamma' \in \Gamma} |\gamma + \gamma'| = 0,$$

logo, $\gamma \in \Gamma_0$. Segue que $\Gamma = \Gamma_0$ e, portanto, S é simplesmente conexa. \square

3.5.1 Locus Conjugado e de Corte na Esfera S^2

Vamos descrever os Locus Conjugado e de Corte de $p = (0, 0, 1)$ em S^2 . Lembre-se da Subseção 3.3.1 em que descrevemos o sistema de raízes e reticulados associados. Para tanto, basta observar que

$$\mathcal{D}_0 = \{H \in \mathfrak{t} : |\alpha(H)| < \pi\} = \{tX_2 : t \in (-\pi, \pi)\}$$

é um intervalo centrado na origem e com tamanho 2π em $\mathfrak{t} = \langle X_2 \rangle$. Como $\partial\mathcal{D}_0 = \{\pm\pi X_2\}$, segue que o locus conjugado primário de p em Tp coincide com $\{-p\} = \exp_p(\pm X_2)$. Como K fixa $-p$, locus conjugado primário de p em S^2 contém apenas $-p$ (Teorema 2.4.6). Os únicos pontos conjugados a p são p e $-p$, uma vez que $\exp_p(\Gamma_1 - 0) = \{\pm p\}$.

Como $\Gamma = 2\pi\mathbb{Z}X_2$, se $H' \in \mathfrak{t}$ é tal que $|H'| > \pi$, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $|H' + \gamma| < \pi$. Neste caso, dado qualquer $0 \neq \gamma' \in \Gamma$, temos que $|H' + \gamma + \gamma'| > |H' + \gamma|$. Portanto,

$$\mathcal{D} = \{H \in \mathfrak{t} : |H| < |H + \gamma|, \gamma \in \Gamma - 0\} = \mathcal{D}_0$$

e segue que o Locus de Corte de p coincide com o Locus conjugado primário, o que já era esperado, já que S^2 é simplesmente conexo (Teorema 3.5.8). A região $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$ é representada na Figura 3.2 pelo segmento amarelo cujo ponto médio é a origem de \mathfrak{s} . Outra forma de obter que $\pi_1(S^2) \simeq 1$ é observando que $\Gamma = \Gamma_0$, logo, é uma consequência do Teorema 3.4.19.

3.5.2 Locus Conjugado e de Corte no Plano Projetivo $\mathbb{R}P^2$

Usaremos aqui as mesmas notações da Subseção 3.3.2 em que descrevemos o sistema de raízes e os reticulados associados a $\mathbb{R}P^2$. Vamos descrever os locus conjugado e de corte de $[p]$ em $\mathbb{R}P^2$, em que $p = (0, 0, 1) \in S^2$. Observe que \mathcal{D}_0 depende apenas da estrutura do sistema de raízes, então $\mathcal{D}_0 = \{tX_2 : t \in (-\pi, \pi)\}$ coincide com o exemplo da esfera, de modo que $\partial\mathcal{D}_0 = \{\pm\pi X_2\}$. Como $\exp_p(\partial\mathcal{D}_0) = \{\pm p\}$, temos que $\exp_{[p]}(\partial\mathcal{D}_0) = \{[p]\}$, logo, o Locus conjugado primário de $[p]$ em $T[p]$ contém apenas o ponto $[p]$, em que $T = \langle \exp(t) \rangle$. Como K fixa $[p]$, o Locus conjugado primário de $[p]$ em S contém apenas $[p]$ (Teorema 2.4.6). O conjunto \mathcal{D}_0 está representado na Figura 3.3 como o segmento rosa compreendido entre H e $-H$, note que ele contém o segmento amarelo, o qual representa \mathcal{D} .

O Locus de Corte, no entanto, muda em relação ao exemplo anterior, uma vez que $\Gamma = \pi\mathbb{Z}X_2$ muda em relação ao exemplo da esfera. Temos que

$$\mathcal{D} = \{tX_2 : t \in (-\pi/2, \pi/2)\},$$

então $\partial\mathcal{D} = \{\pm(\pi/2)X_2\}$. Segue que o Locus de Corte de $[p]$ em $T[p]$ é igual a $\{[q]\}$, com $q = (1, 0, 0) = \exp_p((\pi/2)X_2)$. Vamos determinar agora o Locus de corte $K'[q]$ de $[p]$ em S . Os elementos de K e a isometria J deixam invariante o plano xy que contém q e Kq é o grande círculo vermelho na Figura 3.5, ele está contido no plano xy e passa por q . Além disso, J preserva este grande círculo, de modo que $JKq = Kq$. Como $K' = K \cup JK$, $K'q = Kq$ e segue que $K'[q] = \pi(K'q)$, ou seja, $K'[q]$ é a projeção do grande círculo $K'q$ de S^2 em $\mathbb{R}P^2$. Observe que, neste caso, o locus conjugado primário e o locus de corte de $[p]$ não coincidem, isto já era esperado, pois $\mathbb{R}P^2$ não é simplesmente conexo (veja o Teorema 3.5.8). Na verdade, $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pelo Teorema 3.4.19 (observe que usamos os reticulados calculados na Subseção 3.3.2).

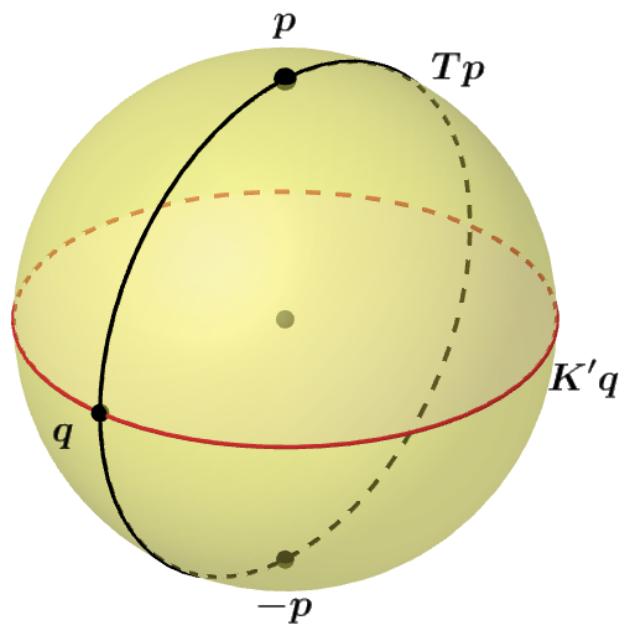


Figura 3.5 : Locus de corte de $[p]$ no plano projetivo \mathbb{RP}^2 .

Apêndice A

A.1 Isometrias e conexão de Levi-Civitá

Seja $\phi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável entre variedades, dizemos que dois campos de vetores X em M e Y em N são ϕ -relacionados se $d\phi_p(X(p)) = Y(\phi(p))$ para todo $p \in M$. Além disso, se ϕ é difeomorfismo, existe um único campo em N ϕ -relacionado a um dado campo X de M , que é denotado por ϕ_*X e definido da seguinte forma:

$$(\phi_*X)(q) = (d\phi)_{\phi^{-1}(q)}X(\phi^{-1}(q)).$$

O campo ϕ_*X é chamado de *pushforward* de X via o difeomorfismo ϕ .

Teorema A.1.1. *Sejam (M, g, ∇^g) e (N, h, ∇^h) Variedades Riemannianas equipadas com as respectivas conexões de Levi-Civitá e seja $\varphi : M \rightarrow N$ uma isometria local. Seja $U \subseteq M$ um aberto tal que $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ é uma isometria, então*

$$\varphi_* \nabla_X^g Y = \nabla_{\varphi_* X}^h \varphi_* Y$$

para $X, Y \in \chi(U)$ campos de vetores diferenciáveis definidos em U .

Demonstração. Por simplicidade, vamos supor que φ é uma isometria. Observe inicialmente que $h(\varphi_*X, \varphi_*Y) = g(X, Y)$. Pela fórmula de Koszul (equação (9) do cap. 2 de [10]), temos que

$$\begin{aligned} 2h(\varphi_*Z, \nabla_{\varphi_*X}^h \varphi_*Y) &= (\varphi_*Y)h(\varphi_*X, \varphi_*Z) + (\varphi_*X)h(\varphi_*Z, \varphi_*Y) \\ &\quad - (\varphi_*Z)h(\varphi_*X, \varphi_*Y) - h(\varphi_*[X, Z], \varphi_*Y) \\ &\quad - h(\varphi_*[X, Z], \varphi_*X) - h(\varphi_*[X, Y], \varphi_*Z), \end{aligned}$$

em que usamos que o pushforward comuta com o colchete de campos. Basta mostrar que $[(\varphi_*Y)h(\varphi_*X, \varphi_*Z)](q) = Yg(X, Z)(\varphi^{-1}(q))$ para todo $q \in N$ e quaisquer campos diferenciáveis $X, Y, Z \in \chi(\varphi^{-1}(q))$.

ciáveis X, Y, Z de M , pois, neste caso, obteremos que $2g(Z, \nabla_X^g Y) = 2h(\varphi_* Z, \varphi_* \nabla_X^g Y)$, donde segue que $\varphi_* \nabla_X^g Y = \nabla_{\varphi_* X}^h \varphi_* Y$.

Seja y_t o fluxo de Y em algum aberto de M e $\tilde{y}_t = \varphi \circ y_t \circ \varphi^{-1}$. É fácil ver que $(\varphi_* Y)(q) = \frac{d}{dt} \tilde{y}_t(q)|_{t=0}$, então

$$\begin{aligned} [(\varphi_* Y)h(\varphi_* X, \varphi_* Z)](q) &= \frac{d}{dt} h(\varphi_* X, \varphi_* Z)(\tilde{y}_t(q)) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} g(X, Z)(y_t(\varphi^{-1}(q))) \Big|_{t=0} \\ &= [Yg(X, Z)](\varphi^{-1}(q)). \end{aligned}$$

□

Corolário A.1.2. Seja $V(t) \in T_{\alpha(t)} M$ um campo paralelo ao longo da curva $\alpha(t)$, então $W(t) = (d\varphi)_{\alpha(t)} V(t)$ é um campo paralelo ao longo de $\varphi \circ \alpha$.

Demonastração. Seja (x, U) uma carta coordenada de M , em que $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x: U \rightarrow M$. Nesta carta, denote por $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ as coordenadas locais de α e $X_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$. Escrevendo $V(t) = \sum_j v^j X_j$, temos que

$$\frac{DV(t)}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} v^j \nabla_{X_i}^g X_j.$$

Denotando $\beta(t) = \varphi \circ \alpha(t)$, podemos escrever

$$W(t) = \sum_j v^j(t) (d\varphi)_{\alpha(t)} X_j(\alpha(t)) = \sum_j v^j(t) (\varphi_* X_j)(\beta(t)),$$

logo,

$$\begin{aligned} \frac{DW(t)}{dt} &= \sum_j \frac{dv^j}{dt} (\varphi_* X_j) + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} v^j \nabla_{\varphi_* X_i}^h \varphi_* X_j \\ &= \varphi_* \left(\frac{DV(t)}{dt} \right) = 0. \end{aligned}$$

□

O operador curvatura de uma Variedade Riemanniana é o operador

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z,$$

definido na equação (2.1), em que ∇ denota a conexão de Levi-Civitá.

Corolário A.1.3. Seja φ uma isometria local entre as Variedades Riemannianas (M, g, ∇^g) e (N, h, ∇^h) equipadas com as respectivas conexões de Levi-Civitá, e sejam R o operador curvatura de M e \tilde{R} o operador curvatura de N . Então

$$\varphi_* R(X, Y)Z = \tilde{R}(\varphi_* X, \varphi_* Y)\varphi_* Z.$$

Demonstração. Este resultado é consequência da aplicação repetida do Teorema A.1.1.

$$\begin{aligned} \varphi_* R(X, Y)Z &= \varphi_*(\nabla_Y^g \nabla_X^g Z - \nabla_X^g \nabla_Y^g Z + \nabla_{[X, Y]}^g Z) \\ &= \nabla_{\varphi_* Y}^h \varphi_* \nabla_X^g Z - \nabla_{\varphi_* X}^h \varphi_* \nabla_Y^g Z + \nabla_{[\varphi_* X, \varphi_* Y]}^h \varphi_* Z \\ &= \nabla_{\varphi_* Y}^h \nabla_{\varphi_* X}^h \varphi_* Z - \nabla_{\varphi_* X}^h \nabla_{\varphi_* Y}^h \varphi_* Z + \nabla_{[\varphi_* X, \varphi_* Y]}^h \varphi_* Z \\ &= \tilde{R}(\varphi_* X, \varphi_* Y)\varphi_* Z. \end{aligned}$$

□

Corolário A.1.4. Sejam $p \in M$ e $\varphi : U \subseteq M \rightarrow N$ uma isometria local entre variedades Riemannianas, em que U é um aberto contendo p . Se $\gamma(t)$ é uma geodésica em M , com $\gamma(0) = p$, então, escolhendo um domínio adequado para γ , temos que $\varphi \circ \gamma(t)$ é uma geodésica de N .

Demonstração. Seja $I = (-\delta, \delta)$ o domínio de γ , em que $\delta > 0$ é tal que $\gamma(I) \subseteq U$. Este resultado segue do fato que uma isometria preserva campos paralelos. Sendo $\gamma'(t)$ paralelo ao longo de γ , $d\varphi_{\gamma(t)}\gamma'(t)$ é o vetor tangente da curva $\varphi \circ \gamma(t)$ e é paralelo ao longo de $\varphi \circ \gamma$ pelo Corolário A.1.2, logo, $\varphi \circ \gamma$ é uma geodésica. □

Lema A.1.5. Um espaço homogêneo Riemanniano é completo como espaço métrico.

Demonstração. Seja M um espaço homogêneo riemanniano e x_n uma sequência de Cauchy em M , ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq N \implies d(x_n, x_m) < \varepsilon. \quad (\text{A.1})$$

Seja $p \in M$. Para cada n , existe uma isometria g_n tal que $g_n(p) = x_n$. Dado, $\varepsilon > 0$, fixe $N \in \mathbb{N}$ que satisfaz (A.1); para $m \geq N$, temos

$$\begin{aligned} \varepsilon > d(x_N, x_m) &= d(g_N(p), x_m) \\ &= d(p, g_N^{-1}x_m). \end{aligned}$$

Segue que, se $m \geq N$, temos $g_N^{-1}(x_m) \in B_\varepsilon(p)$, ou seja, $x_m \in g_N(B_\varepsilon(p)) = B_\varepsilon(g_N(p))$. Logo, escolhendo ε suficientemente pequeno para que $B = \overline{B_\varepsilon(g_N(p))}$ seja compacto, existe uma subsequência convergente de x_n , donde segue que x_n é convergente. \square

Lema A.1.6. Uma isometria que fixa pontualmente um aberto da Variedade Riemanniana completa M é a identidade.

Demonastração. Seja φ uma isometria e $U \subseteq M$ um aberto cujos pontos são fixados por φ . Sejam $u \in U$, q um ponto qualquer de M e γ uma geodésica conectando u e q . Como φ fixa a porção de γ que está em U , deve fixar γ por inteiro, logo, fixa q . Segue que $\varphi = \text{id}$. \square

Lema A.1.7. Seja $\varphi : V \subseteq M \rightarrow N$ uma isometria local entre variedades Riemannianas e $p \in M$. Seja $U \subseteq T_p M$ um aberto de 0 tal que $\exp_p(U) \subseteq V$ e $d\varphi_p(U)$ está no domínio de $\exp_{\varphi(p)}$, então

$$\varphi \circ \exp_p|_U = \exp_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p|_U$$

Demonastração. Este resultado segue fazendo uma comparação das geodésicas de N iniciando em $\varphi(p)$. Para $v \in T_p M$ escolhido adequadamente e $s \in (-\delta, \delta)$, temos que $\sigma(s) = \varphi(\exp_p(sv))$ é uma geodésica que satisfaz $\sigma(0) = \varphi(p)$ e $\sigma'(0) = d\varphi_p(v)$. Por outro lado, $\gamma(s) = \exp_{\varphi(p)}(sd\varphi_p(v))$ satisfaz $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = d\varphi_p(v)$, ou seja, $\sigma(s) = \gamma(s)$, o que demonstra o Lema. \square

No próximo Teorema usamos as ideias de formas diferenciais em uma variedade para construir uma métrica bi-invariante em um grupo de Lie compacto e conexo. Para os detalhes que não forem expostos aqui sobre formas diferenciais, indicamos o capítulo 4 de [14].

Se ω é uma forma diferencial em uma variedade G e $f : G \rightarrow G$ é uma função diferenciável, denotamos por $f^* \omega$ o pushforward de ω por f . Para $a \in G$, temos, em detalhes,

$$(f^* \omega)(a)(v_1, \dots, v_n) = \omega(f(a))(df_a v_1, \dots, df_a v_n),$$

em que $v_1, \dots, v_n \in T_a G$.

Uma forma ω é chamada de *invariante à esquerda* ou *invariante à direita* se, respectivamente $E_a^* \omega = \omega$ ou $D_a^* \omega = \omega$, em que E_a e D_a denotam a multiplicação à esquerda e à direita de G respectivamente. Em detalhes, esta condição significa que

$$\begin{aligned} \omega(a)(v_1, \dots, v_n) &= (E_g^* \omega)(a)(v_1, \dots, v_n) = \omega(ga)((dE_a)_g v_1, \dots, (dE_a)_g v_n), \\ \omega(a)(v_1, \dots, v_n) &= (D_g^* \omega)(a)(v_1, \dots, v_n) = \omega(ag)((dD_a)_g v_1, \dots, (dD_a)_g v_n). \end{aligned}$$

Teorema A.1.8. Seja G um grupo de Lie compacto e conexo, então existe uma métrica bi-invariante em G .

Demonstração. Esta demonstração é baseada no exercício 7 do capítulo 1 de [10]. Primeiro, vamos mostrar que sempre existe uma forma invariante à esquerda em G . Seja ω_0 um tensor alternado em $T_1 G = \mathfrak{g}$ e defina

$$\omega(a)(v_1, \dots, v_n) = \omega_0((dE_{a^{-1}})_a v_1, \dots, (dE_{a^{-1}})_a v_n).$$

As equações a seguir mostram que ω é invariante à esquerda.

$$\begin{aligned} (E_g^* \omega)(a)(v_1, \dots, v_n) &= \omega(ga)((dE_g)_a v_1, \dots, (dE_g)_a v_n) \\ &= \omega_0((dE_{(ga)^{-1}})_{ga} (dE_g)_a v_1, \dots, (dE_{(ga)^{-1}})_{ga} (dE_g)_a v_n) \\ &= \omega_0((dE_{a^{-1}})_a v_1, \dots, (dE_{a^{-1}})_a v_n) \\ &= \omega(a)(v_1, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Seja agora $n = \dim(G)$ e ω uma n –forma invariante à esquerda em G . Observe que

$$E_g^* D_a^* \omega = D_a^* E_g^* \omega = D_a^* \omega,$$

uma vez que $E_g \circ D_a = D_a \circ E_g$, logo, $D_a^* \omega$ é também invariante à esquerda. Sendo a dimensão do espaço vetorial das n –formas em G unidimensional, devemos ter que $D_a^* \omega = f(a) \omega$ para alguma função contínua $f : G \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$. A função f deve ser um homomorfismo, uma vez que

$$\begin{aligned} f(ab) \omega &= D_{ab}^* \omega \\ &= D_b^* D_a^* \omega \\ &= f(a) D_b^* \omega \\ &= f(a) f(b) \omega. \end{aligned}$$

Como G é compacto e o único subgrupo compacto de $\mathbb{R} - \{0\}$ é $\{1\}$, temos que $f \equiv 1$ e segue que ω é também invariante à direita.

Construimos agora uma métrica bi-invariante em G da seguinte forma. Seja \langle , \rangle uma métrica invariante à esquerda em G (foi mostrado na Seção 2.1 que uma tal métrica sempre existe) e defina

$$(u, v)_y = \int_G \langle (dD_x)_y u, (dD_x)_y v \rangle_{yx} \omega$$

Como a função $\langle (dD_x)_y u, (dD_x)_y v \rangle_{yx}$ que depende de x não tem singularidades, a compactidade de G garante que $(,)$ sempre assume valores finitos. As propriedades de produto interno seguem do fato que \langle , \rangle é uma métrica e da linearidade da integral.

Vamos verificar agora que esta métrica é bi-invariante. Primeiro, a invariância à direita.

$$\begin{aligned}
 ((dD_g)_y u, (dD_g)_y v)_{yg} &= \int_G \langle (dD_x)_{yg} (dD_g)_y u, (dD_x)_{yg} (dD_g)_y v \rangle_{ygx} D_g^* \omega \\
 &= \int_G \langle (dD_{gx})_y u, (dD_{gx})_y v \rangle_{ygx} D_g^* \omega \\
 &= \int_G \langle (dD_x)_y u, (dD_x)_y v \rangle_{yx} \omega \\
 &= (u, v)_y
 \end{aligned}$$

A invariância à esquerda segue da seguintes equações.

$$\begin{aligned}
 ((dE_g)_y u, (dE_g)_y v)_{gy} &= \int_G \langle (dD_x)_{gy} (dE_g)_y u, (dD_x)_{gy} (dE_g)_y v \rangle_{gyx} E_g^* \omega \\
 &= \int_G \langle (dE_g)_{yx} (dD_x)_y u, (dE_g)_{yx} (dD_x)_y v \rangle_{ygx} E_g^* \omega \\
 &= \int_G \langle (dD_x)_y u, (dD_x)_y v \rangle_{yx} \omega \\
 &= (u, v)_y
 \end{aligned}$$

□

A.2 Campos de Vetores

Lema A.2.1. Um campo de Killing tem norma constante ao longo de seu fluxo.

Demonstração. Esta afirmação é consequência do fato que o fluxo φ_t de um campo de Killing X é uma isometria para cada t e também de uma das propriedades fundamentais das funções do tipo fluxo que é $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s} = \varphi_s \circ \varphi_t$. Observe que

$$X(\varphi_s(x)) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t(\varphi_s(x)) \Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_s(\varphi_t(x)) \Big|_{t=0} = (d\varphi_s)_x X(x).$$

Portanto,

$$|X(\varphi_s(x))|^2 = \langle X(\varphi_s(x)), X(\varphi_s(x)) \rangle = \langle (d\varphi_s)_x X(x), (d\varphi_s)_x X(x) \rangle = |X(x)|^2.$$

□

Proposição A.2.2. Seja X um campo de Killing na Variedade Riemanniana completa M , então X é completo.

Demonstração. Suponha que o fluxo $\varphi_t(x)$ de X esteja definido para $t \in (a, b)$ e $x \in U \subseteq M$, em que U é aberto. Seja $\{t_n\} \subseteq (a, b)$ uma sequência satisfazendo $t_n \rightarrow b$. Usando o Lema anterior, temos que

$$d(\varphi_{t_n}(x), \varphi_{t_k}(x)) \leq \left| \int_{t_k}^{t_n} |X(\varphi_s(x))| ds \right| = |t_n - t_k| |X(x)|,$$

então $\varphi_{t_n}(x)$ é de Cauchy, logo, convergente pela completude de M .

Denote $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{t_n}(x)$. Para ver que $y = \lim_{t \rightarrow b} \varphi_t(x)$, considere $s_n \rightarrow b$ com $s_n \in (a, b)$. Seja u_n a sequência definida por $u_{2k} = t_k$ e $u_{2k-1} = s_k$. Pelo argumento acima, $\varphi_{u_n}(x)$ é de Cauchy e converge para y pois suas subsequências convergem para y ; em particular, $\varphi_{s_n}(x) \rightarrow y$, donde segue que $y = \lim_{t \rightarrow b} \varphi_t(x)$.

Observe que $X(\varphi_t(x)) = (\partial/\partial t)\varphi_t(x)$, então, por continuidade,

$$\lim_{t \rightarrow b} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t(x) = X(y).$$

Isto mostra que (a, b) não é domínio maximal de φ_t e devemos ter $b = \infty$. Analogamente, mostra-se que $a = -\infty$. □

Proposição A.2.3. Seja X um campo de Killing numa Variedade Riemanniana conexa M . Se existe $q \in M$ tal que $X(q) = 0$ e $(\nabla X)_q = 0$, então X é identicamente nulo.

Demonstração. $X(q) = 0$ implica que q é um ponto fixo do fluxo φ_t de X . Este fato segue unicidade de soluções de equações diferenciais usando que a solução constante $\varphi_t(q) \equiv q$ satisfaz $(\partial/\partial t)\varphi_t(q) = X(\varphi_t(q))$. Portanto, $(d\varphi_t)_q : T_q M \rightarrow T_q M$; vamos mostrar que $(d\varphi_t)_q = \text{id}$. Usando a simetria da conexão e a hipótese, temos que

$$[X, Y](q) = (\nabla_X Y - \nabla_Y X)(q) = (\nabla_X Y)_q = \frac{d}{dt} Y(\varphi_t(q)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} Y(q) \Big|_{t=0} = 0.$$

Por outro lado, $0 = [X, Y](q) = (d/dt)(\varphi_{-t})_* Y|_{t=0}$. Como $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$, temos que $d\varphi_{-t}$ não depende de t , logo, $d\varphi_{-t} = \text{id}$, pois $d\varphi_0 = \text{id}$. Usando a exponencial riemanniana, pode-se mostrar que uma isometria é localmente determinada pela diferencial em um ponto (Lema A.1.7), então segue que $\varphi_t = \text{id}$ para todo t , ou seja, $X \equiv 0$. \square

Proposição A.2.4. Seja M uma Variedade Riemanniana de dimensão n e $p \in M$. Existe uma vizinhança U de p e campos diferenciáveis e_1, \dots, e_n ortonormais definidos em U tais que $(\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0$. Tal conjunto de campos é chamado de *Referencial geodésico*.

Demonstração. Seja $U \subseteq M$ uma vizinhança normal de p . Para cada $q \in U$, existe uma única geodésica minimizante e normalizada tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(d(p, q)) = q$, em que $d(p, q)$ é a distância Riemanniana de p a q , que está bem definida na vizinhança normal U . Seja v_1, \dots, v_n uma base ortonormal de $T_p M$ e denote por $V_j(t)$ o transporte paralelo de v_j ao longo de γ de p a $\gamma(t)$. Por fim, para $q \in U$, defina $e_j(q) = V_j(d(p, q))$.

Seja σ a geodésica normalizada que satisfaz $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = e_j(p) = V_j(0) = v_j$, então

$$(\nabla_{e_j} e_i)(p) = \frac{D}{ds} e_i(\sigma(s)) \Big|_{s=0} = \frac{D}{ds} V_j(d(p, \sigma(s))) \Big|_{s=0} = 0.$$

\square

Para enunciar o próximo Teorema, sejam M e N duas Variedades Riemannianas e $p \in M$, $q \in N$. Seja $i : T_p M \rightarrow T_q N$ uma isometria linear e considere uma vizinhança normal V de p tal que \exp_q esteja definida em $i \circ \exp_p^{-1}(V)$. Defina $f : V \rightarrow N$ dada por $f(x) = \exp_q \circ i \circ \exp_p^{-1}(x)$. Para cada $x \in V$, existe uma única geodésica normalizada $\gamma : [0, t] \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(t) = x$, então denote por P_t o transporte paralelo ao longo de γ iniciando em p e terminando em $\gamma(t)$. Defina a aplicação $\phi_t : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ dada por $\phi_t(v) = \bar{P}_t \circ i \circ P_t^{-1}(v)$, em que \bar{P}_t é o transporte ao longo da geodésica normalizada $\bar{\gamma} : [0, t] \rightarrow N$ que satisfaz $\bar{\gamma}(0) = q$ e $\bar{\gamma}'(0) = i(\gamma'(0))$.

Proposição A.2.5 (Teorema 2.1 de [10]). Com a notação acima e denotando por R e \bar{R} as curvaturas de M e N , respectivamente, se, para todo $x \in V$ e $w, y, u, v \in T_x M$, tivermos

$$\langle R(w, y)u, v \rangle = \langle \bar{R}(\phi_t(w), \phi_t(y))\phi_t(u), \phi_t(v) \rangle$$

então $f : V \rightarrow f(V) \subseteq N$ é uma isometria local tal que $df_p = i$.

Teorema A.2.6. *Num grupo de Lie G com métrica bi-invariante, a exponencial do grupo coincide com a exponencial Riemanniana.*

Demonstração. Vamos considerar que a álgebra de Lie \mathfrak{g} de G é composta dos campos de vetores invariante à esquerda. Para qualquer $g \in G$ e $X, Y \in \mathfrak{g}$, temos que $\langle X, Y \rangle_g = \langle (dL_g)_1 X(1), (dL_g)_1 Y(1) \rangle_g = \langle X, Y \rangle_1$, logo, $\langle X, Y \rangle$ é constante e temos que $Z \langle X, Y \rangle = 0$ para todo campo diferenciável Z de G . Pela equação de Koszul (equação (9) do capítulo 2 de [10]), temos que

$$2\langle X, \nabla_Y Y \rangle = 2\langle Y, [X, Y] \rangle.$$

A bi-invariância então implica que $\langle [X, Y], Y \rangle + \langle Y, [X, Y] \rangle = 0$, logo, $\langle X, \nabla_Y Y \rangle = 0$ para qualquer $X \in \mathfrak{g}$, então $\nabla_Y Y = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{g}$. Portanto, todo subgrupo a um parâmetro $\exp(tY)$ é uma geodésica e, reciprocamente, toda geodésica tem esta forma por conta da unicidade de geodésicas dados um ponto e uma direção. \square

A.3 Fibrados e Topologia

Teorema A.3.1. *Seja G um grupo de Lie simplesmente conexo e K um subgrupo conexo e fechado, então G/K é um espaço homogêneo simplesmente conexo.*

Não demonstraremos este Teorema diretamente; em vez disso, vamos demonstrar um resultado mais geral do qual o Teorema acima é um caso particular.

Um *fibrado principal*, $P(M, K)$ se constitui do espaço total P , da base M e do grupo estrutural K . Os espaços topológicos P e M são relacionados pela projeção $\pi : P \rightarrow M$. O grupo K age de forma livre à direita de P (apenas a identidade tem pontos fixos) e as órbitas de K são as fibras $\pi^{-1}(x)$, $x \in M$. Exige-se ainda que P seja localmente trivial, ou seja, para cada $x \in M$, existe uma vizinhança $x \in U \subseteq M$ e uma aplicação bijetora $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times K$ tal que, se π_1 denota a projeção na primeira coordenada de $U \times K$, temos que $\pi_1 \circ \psi = \pi$. Observe que trivialização local pode ser vista tanto como uma aplicação $\pi^{-1}(U) \rightarrow U \times K$ quanto como uma aplicação $U \times K \rightarrow \pi^{-1}(U)$.

No caso em que P e M são variedades diferenciáveis, consideramos que π é diferenciável, que K é um grupo de Lie que age diferenciavelmente e que ψ é um difeomorfismo. A aplicação ψ pode ser descrita de maneira mais explícita da seguinte maneira.

$$\psi(x) = (\pi(x), \phi(x)),$$

em que, $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow K$ satisfaz $\phi(xk) = \phi(x)k$ para $k \in K$. Segue que

$$\psi(xk) = (\pi(xk), \phi(xk)) = (\pi(x), \phi(x)k).$$

Pela Proposição 13.22 de [6], se $K \leq G$ é um subgrupo fechado, então a projeção natural $\pi : G \rightarrow G/K$ é um fibrado principal com grupo estrutural K .

Proposição A.3.2. *Seja $\pi : P \rightarrow M$ um fibrado principal com grupo estrutural K . Suponha que P é simplesmente conexo e que K é conexo por caminhos, então M é simplesmente conexo.*

Demonstração. Seja $m \in M$ e $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$ um caminho fechado tal que $\sigma(0) = m = \sigma(1)$, vamos mostrar que σ é homotópica a um ponto. Pela Proposição 4.48 de [8], existe um levantamento $\tilde{\sigma} : [0, 1] \rightarrow P$ que satisfaz $\pi \circ \tilde{\sigma} = \sigma$.

Seja U_1 uma vizinhança de m que admite a trivialização local $\psi_1 : U_1 \times K \rightarrow \pi^{-1}(U_1)$. Denote $\psi_1^{-1}(\tilde{\sigma}(0)) = (m, k_0)$ e $\psi_1^{-1}(\tilde{\sigma}(1)) = (m, k_1)$. Intuitivamente, $\tilde{\sigma}$ se projeta no caminho fechado σ , mas não é necessariamente fechado (a menos que $k_0 = k_1$). Seja $k : [0, 1] \rightarrow F$ tal que $k(0) = k_0$ e $k(1) = k_1$ e defina $\delta(t) = \psi_1(m, k(2t - 1))$.

A seguir vamos definir um caminho fechado em P que nos fornecerá a homotopia que deforma σ no caminho constante m . Seja

$$\phi(t) = \begin{cases} \tilde{\sigma}(2t), & t \in [0, 1/2] \\ \delta(t), & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

É fácil verificar que ϕ é contínua e também é fechada, uma vez que

$$\phi(0) = \tilde{\sigma}(0) = \psi_1(m, k_0) = \psi_1(m, k(0)) = \delta(1) = \phi(1) := p.$$

Sendo P simplesmente conexo, existe uma homotopia $h : [0, 1]^2 \rightarrow P$ que satisfaz $h(0, t) = \phi(t)$, $h(1, t) = p$ para $t \in [0, 1]$ e $h(s, 0) = p = h(s, 1)$ para $s \in [0, 1]$. Defina $H = \pi \circ h$, então

$$H(0, t) = \begin{cases} \sigma(2t), & t \in [0, 1/2] \\ m, & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

e $H(1, t) = \pi(p) = m$ para $t \in [0, 1]$, $H(s, 0) = m = H(s, 1)$ para $s \in [0, 1]$.

Segue que H é a homotopia que deforma σ ao ponto m e, portanto, M é simplesmente conexo. \square

Teorema A.3.3. *Um fibrado principal com fibra discreta é uma aplicação de recobrimento.*

Demonstração. Para cada $x \in M$, seja $U \ni x$ uma vizinhança que admite uma trivialização local ψ . Por definição $\pi^{-1}(U)$ é homeomorfo a $U \times G$ e sendo a fibra discreta, G também é discreto. O produto cartesiano $U \times G$, e portanto, $\pi^{-1}(U)$ pode ser visto como a união disjunta

$$\bigcup_{g \in G} U \times \{g\},$$

em que, claramente, $U \times \{g\}$ é homeomorfo a U via π , já que π coincide com $\pi_1 \circ \psi$ em $\pi^{-1}(U)$. Segue que π é uma aplicação de recobrimento. \square

A.3.1 Grupo Fundamental e Deck Transformations

Seja $r : \tilde{X} \rightarrow X$ um recobrimento, em que ambas X e \tilde{X} são variedades conexas. O grupo das *deck transformations* deste recobrimento é o conjunto $G(\tilde{X})$ dos homeomorfismos $f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ que satisfazem $r \circ f = r$, pode ser visto também como o conjunto de levantamentos da aplicação de recobrimento r . Esta condição implica que $G(\tilde{X})$ age sobre as fibras $r^{-1}(x)$ para $x \in X$; em particular, esta ação é fiel por conta da unicidade de levantamentos (veja a

Proposição 1.34 de [8]). Uma ação fiel é aquela em que apenas a identidade do grupo tem pontos fixos.

O recobrimento r induz um homomorfismo entre $\pi_1(\tilde{X})$ e $\pi_1(X)$ que é denotado r_* e satisfaz $r_*[\gamma] = [r \circ \gamma]$, em que $[\gamma]$ denota uma classe de homotopia de um caminho fechado. Denote $H = r_*(\pi_1(\tilde{X})) \leq \pi_1(X)$. Temos que $G(\tilde{X})$ é isomorfo a $N(H)/H$, em que $N(H)$ denota o normalizador de H em $\pi_1(X)$. No caso em que H é normal em $\pi_1(X)$, o grupo de deck transformations age de forma transitiva sobre as fibras $r^{-1}(x), x \in X$, e $G(\tilde{X}) \simeq \pi_1(X)/H$. Em particular, se \tilde{X} é simplesmente conexo, temos que H é trivial e $G(\tilde{X}) \simeq \pi_1(X)$ (veja a Proposição 1.39 de [8]).

A ação de $G(\tilde{X})$ sobre \tilde{X} é *propriamente descontínua*, isto significa que, dado qualquer $\tilde{x} \in \tilde{X}$, existe uma vizinhança V de \tilde{x} tal que $g(V) \cap h(V) = \emptyset$ se g e h são elementos distintos de $G(\tilde{X})$. Equivalentemente, $g(V) \cap V = \emptyset$ sempre que $g \neq 1$. Para $x \in X$, existe um aberto $W \ni x$ tal que $p^{-1}(W) = \bigcup_j V_j$ é união de vizinhanças V_j disjuntas e homeomorfas, via p , a W .

Seja $\tilde{x} \in p^{-1}(x) \cap V_j$, então é fácil ver que $g(V_j) \cap V_j \neq \emptyset$ se, e somente se, $g = 1$, pois $G(\tilde{X})$ preserva $p^{-1}(x)$ e apenas a identidade tem pontos fixos. Como resultado desta discussão, segue que, no caso em que $G(\tilde{X})$ age transitivamente, X é homeomorfo ao quociente $\tilde{X}/G(\tilde{X})$, onde identificamos os pontos das órbitas de $G(\tilde{X})$ (veja a Proposição 1.40 de [8]).

Apêndice B

B.1 Álgebras e Grupos de Lie

Lema B.1.1. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie com grupo de automorfismos $\text{Aut}(\mathfrak{g})$. A álgebra de Lie de $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ é $\text{Der}(\mathfrak{g})$.

Demonstração. Seja $D \in gl(\mathfrak{g})$, vamos mostrar que D é derivação se, e só se, e^{tD} é um automorfismo de \mathfrak{g} para todo $t \in \mathbb{R}$. Sejam $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Se e^{tD} é automorfismo, temos que $e^{tD}[X, Y] = [e^{tD}X, e^{tD}Y]$; derivando em $t = 0$ e usando a bilinearidade do colchete, temos que $D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY]$.

Por outro lado, se D é derivação, basta notar que $e^{tD}[X, Y]$ e $[e^{tD}X, e^{tD}Y]$ coincidem para $t = 0$ e satisfazem a mesma equação diferencial, ou seja,

$$\frac{d}{dt}e^{tD}[X, Y] = \frac{d}{dt}[e^{tD}X, e^{tD}Y].$$

□

Lema B.1.2. Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ uma soma direta de álgebras de Lie. Qualquer subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} é da forma $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$, em que \mathfrak{h}_j é subálgebra de Cartan de \mathfrak{g}_j , $j = 1, 2$.

Demonstração. Se \mathfrak{h}_1 e \mathfrak{h}_2 são subálgebras de Cartan de \mathfrak{g}_1 e \mathfrak{g}_2 respectivamente, então $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ deve ser uma subálgebra autonormalizante, já que $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] = 0$ e cada uma das \mathfrak{h}_j é autonormalizante em \mathfrak{g}_j , logo, é uma subálgebra de Cartan.

Suponha então que $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ é subálgebra de Cartan. \mathfrak{h} deve interceptar ambos \mathfrak{g}_1 e \mathfrak{g}_2 , caso contrário, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_j] = 0$ para algum j , ou seja, $\mathfrak{g}_j \leq \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, o que é absurdo. Portanto, podemos escrever $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$, sendo $\mathfrak{h}_j = \mathfrak{g}_j \cap \mathfrak{h}$. Dado $X \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}_j}(\mathfrak{h}_j)$, temos que $[X, \mathfrak{h}] = [X, \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2] = [X, \mathfrak{h}_1] \subseteq \mathfrak{h}$, então $X \in (\mathfrak{g}_j \cap \mathfrak{h}) = \mathfrak{h}_j$. □

B.2 Complexificação

Nesta seção vamos tratar das complexificações de espaços vetoriais e de operadores. Veremos que tipos de conclusões podemos tirar sobre a estrutura dos subespaços com relação a um dado operador a partir das propriedades na complexificação.

Dado um espaço vetorial V sobre \mathbb{R} , definimos a sua complexificação $V_{\mathbb{C}}$ como a soma direta formal $V \oplus iV$. A conjugação $c : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$ é o automorfismo antilinear definido por $c(u + iv) = u - iv$ com $u, v \in V$. A terminologia antilinear está relacionada ao fato que, para $z \in \mathbb{C}$, temos $c(z(u + iv)) = \bar{z}c(u + iv)$, em que \bar{z} denota o conjugado de z em \mathbb{C} . É fácil ver que $w \in V_{\mathbb{C}}$ é fixado se, e somente se, $w \in V \subseteq V_{\mathbb{C}}$. Um subespaço de $V_{\mathbb{C}}$ da forma $W_{\mathbb{C}}$ para algum subespaço $W \subseteq V$ é claramente preservado por c e, por outro lado, se $E \subseteq V_{\mathbb{C}}$ e $c(E) = E$, então existe $W \subseteq V$ tal que $E = W_{\mathbb{C}}$. De fato, basta observar que, se $u + iv \in E$, então $u - iv \in E$ e segue que $u, v \in E \cap V$, logo, $E = (E \cap V)_{\mathbb{C}}$.

Um endomorfismo $M : V \rightarrow V$ induz um endomorfismo $M_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$ chamado de *complexificação de M* . Para $z \in \mathbb{C}$, definimos $M_{\mathbb{C}}(z(u + iv)) = z(M(u) + iM(v))$. Observe que

$$\begin{aligned} c \circ M_{\mathbb{C}}(z(u + iv)) &= c(z(M(u) + iM(v))) \\ &= \bar{z}(M(u) - iM(v)) \\ &= M_{\mathbb{C}} \circ c(z(u + iv)), \end{aligned}$$

logo, $c \circ M_{\mathbb{C}} = M_{\mathbb{C}} \circ c$. Se $M_{\mathbb{C}}$ tem um autovalor complexo $z = a + ib$ associado ao autovetor $u + iv$, então u e v satisfazem $M(u) = au - bv$ e $M(v) = bu + av$. Este fato segue da equação abaixo

$$M(u) + iM(v) = M_{\mathbb{C}}(u + iv) = (a + ib)(u + iv) = au - bv + i(bu + av).$$

Portanto, $W = \langle u, v \rangle$ é um subespaço de V em que M se expressa matricialmente como

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Em particular, se $a = 0$, $M|_W$ é anti-simétrica. Resumimos as consequências desta discussão na Proposição abaixo.

Proposição B.2.1. Sejam V um espaço vetorial real, $V_{\mathbb{C}}$ sua complexificação e $M : V \rightarrow V$ um endomorfismo linear. Então valem as seguintes afirmações.

1. $M_{\mathbb{C}}$ comuta com a conjugação c .

2. Um subespaço $E \leq V_{\mathbb{C}}$ é da forma $W_{\mathbb{C}}$ para $W \leq V$ se, e somente se, $c(E) = E$.
3. Se $M_{\mathbb{C}}$ tem um autovetor complexo, então existe um subespaço de dimensão 2 de V invariante por M em que M tem a representação matricial da Equação (B.1).

Lema B.2.2. Sejam V, W espaços vetoriais reais de dimensão finita e $f : V \rightarrow W$ um homomorfismo contínuo de espaços vetoriais vistos como grupos aditivos, então f é linear.

Demonastração. Sem perda de generalidade, assumimos que $V = \mathbb{R}^n$ e $W = \mathbb{R}^m$. Por hipótese, temos que $f(u+v) = f(u) + f(v)$ para todos $u, v \in \mathbb{R}^n$. Sejam $n, m \in \mathbb{Z}$, então $f(nu) = nf(u)$ e $f(u) = f\left(\frac{m}{m}u\right) = mf\left(\frac{1}{m}u\right)$, logo, $\frac{1}{m}f(u) = f\left(\frac{1}{m}u\right)$. Segue que, para todos $q = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$, temos $f(qu) = qf(u)$. Sendo \mathbb{Q} denso em \mathbb{R} e f contínua, concluímos que $f(ru) = rf(u)$ para todo $r \in \mathbb{R}$. \square

Bibliografia

- [1] C. Gorodski. *An Introduction to Riemannian Symmetric Spaces*. VII School and Workshop on Lie Theory, Juiz de Fora, Minas Gerais, 2021.
- [2] L. Seco e M. Patrão. Counting geodesics on compact symmetric spaces. *Monatsh Math*, 204:281–310, 2024.
- [3] B. Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An elementary introduction*. Springer, second edition, Switzerland, 2015.
- [4] J. Hilgert, K. Neeb. *Structure and Geometry of Lie Groups*. Springer, New York, 2012.
- [5] A. Borel. *Semisimple Groups and Riemannian Symmetric Spaces*. Hindustan Book Agency, New Delhi, India, 1998.
- [6] L. San Martin. *Grupos de Lie*. Editora da Unicamp, Campinas, São Paulo, 2016.
- [7] A. Baker. *Matrix groups : an introduction to Lie group theory*. Springer-Verlag, London, 2002.
- [8] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [9] L. Seco e L. San Martin. Counting geodesics on compact lie groups. *Differ. Geom. Appl.*, 56:1–19, 2018.
- [10] M. do Carmo. *Riemannian Geometry*. Birkhauser, Boston, 1992.
- [11] S. Kobayashi. *Transformation Groups in Differential Geometry*. Springer Verlag, Berlin, 1972.
- [12] J. Stillwell. *Naive Lie Theory*. Springer, New York, 2008.
- [13] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2003.
- [14] M. Spivak. *Calculus on Manifolds*. ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY, 1965.