

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ROCHELLE GOMES DE SOUZA

BURACOS NEGROS REGULARES A TEMPERATURA FINITA

BRASÍLIA

2021

ROCHELLE GOMES DE SOUZA

BURACOS NEGROS REGULARES A TEMPERATURA FINITA

Trabalho apresentado como requisito para a obtenção do título de Doutorado em Física pelo Programa de Pós Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade de Brasília.

Orientador: Prof Sérgio Costa Ulhoa, Dr

BRASÍLIA

2021

*Este trabalho é dedicado às mulheres que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família em especial ao meu avô, Paulino Carvalho de Souza por ter sempre me orientado e fazer a promessa de chegar ao doutorado, o meu orientador Dr. Sérgio Costa Ulhoa por ter aceitado me orientar, aos professores que fizeram parte da minha formação, que foram muitos, e a Capes por ter financiado os meus quatro anos de doutorado, mesmo com a pandemia.

Agradecimentos especiais também são direcionados ao Centro de Pesquisa em Arquitetura da Informação¹ da Universidade de Brasília (CPAI), ao grupo de usuários *latex-br*² e aos novos voluntários do grupo *abnT_EX2*³ que contribuíram e que ainda contribuirão para a evolução do *abnT_EX2*, e não posso esquecer à Gerald Weber, Miguel Frasson, Leslie H. Watter, Bruno Parente Lima, Flávio de Vasconcellos Corrêa, Otavio Real Salvador, Renato Machnievscz⁴ e todos aqueles que contribuíram para que a produção de trabalhos acadêmicos conforme as normas ABNT com \LaTeX fosse possível.

¹ <http://www.cpai.unb.br/>

² <http://groups.google.com/group/latex-br>

³ <http://groups.google.com/group/abntex2> e <http://abntex2.googlecode.com/>

⁴ Os nomes dos integrantes do primeiro projeto *abnT_EX* foram extraídos de <http://codigolivre.org.br/projects/abntex/>

*"Mesmo que seja difícil, tudo bem, tudo ficará bem, eu acredito em você" - It's Okay -
BTOB*

RESUMO

Faremos um estudo trabalhando com o Teleparalelismo equivalente à Relatividade Geral (TERG) que é dinamicamente equivalente à Relatividade Geral (RG), para tanto a RG é introduzida e seus problemas discutidos. Com isso o TERG é posicionado como a teoria gravitacional da tese. Nessa estrutura da tese a DCT (Dinâmica do Campo Térmico) é usada para calcular o efeito Casimir e a lei de Stefan-Boltzmann, inclusive à temperatura finita. Tais fenômenos são discutidos no âmbito de buracos negros regulares, pois os mesmos não exibem uma singularidade fundamental e por isso podem representar buracos negros reais.

Palavras-chaves: relatividade geral. dinâmica do campo térmico. teleparalelismo. buracos negros regulares.

ABSTRACT

We will do a study working with Teleparallelism equivalent to General Relativity (TEGR) which is dynamically equivalent to General Relativity (GR), for which both GR is introduced and its problems discussed. Thereby TEGR is positioned as the gravitational theory of the thesis. In this thesis structure, TFD (Thermal Field Dynamics) is used to calculate the Casimir effect and Stefan-Boltzmann's law, even at finite temperature. Such phenomena are discussed in the context of regular black holes, as they do not exhibit a fundamental singularity and therefore can represent real black holes.

Key-words: general relativity. thermal field dynamics. teleparallelism. regular black holes.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 – Um tensor em P existe no plano tangente das variedades em P.	17
FIGURA 2 – Diferenciação de um tensor.	19
FIGURA 3 – Duas partículas de gás num tubo em : (a) não estacionário, (b) estacionário e (c) fluxo estático.	29
FIGURA 4 – Uma família de hipersuperfícies classificado por μ	31
FIGURA 5 – O campo vetorial normal n^a em um ponto P.	32
FIGURA 6 – Um campo vetorial hipersuperfície-ortogonal X^a	32
FIGURA 7 – Dois eventos "simultâneos"no horário mundial.	34
FIGURA 8 – As coordenadas esféricas padrão θ e ϕ	37
FIGURA 9 – Uma estrela esférica pulsante não pode emitir ondas gravitacionais.	39
FIGURA 10 – Movimento de Kepler em uma elipse.	45
FIGURA 11 – O problema dos dois corpos.	45
FIGURA 12 – Movimento de uma partícula de teste (a) em um espaço-tempo e (b) projetado para t =constante.	47
FIGURA 13 – Precessão do periélio.	49
FIGURA 14 – Movimento em linha reta de um raio de luz na relatividade esférica.	51
FIGURA 15 – Deflexão da luz em um campo gravitacional.	51
FIGURA 16 – Posição das estrelas em um campo (a) quando o sol está ausente e (b) durante o eclipse total.	52
FIGURA 17 – O efeito de lente gravitacional de um campo de Schwarzschild.	53
FIGURA 18 – Representação esquemática do efeito de imagem dupla da lente gravitacional.	53
FIGURA 19 – Um perpetuum gravitacional móvel?	54
FIGURA 20 – Emissão e recepção de cristas de ondas sucessivas de um sinal.	55
FIGURA 21 – Observação do deslocamento para o vermelho dos átomos perto da borda do Sol.	56
FIGURA 22 – Um raio de luz viajando de um planeta para a Terra no campo gravitacional do Sol.	59
FIGURA 23 – Colapso gravitacional (duas dimensões espaciais suprimidas).	128
FIGURA 24 – Interpretação padrão da solução exterior de Schwarzschild.	133
FIGURA 25 – Diagrama espacial do espaço-tempo de Minkowski.	134
FIGURA 26 – Diagrama espacial do espço-tempo de Minkowski (uma dimensão espacial suprimida).	134
FIGURA 27 – Flash de luz de um ponto em três vezes sucessivas.	135

FIGURA 28 – Diagrama de espaço-tempo do flash de luz (uma dimensão espacial suprimida).	135
FIGURA 29 – Diagrama de espaço-tempo do flash de luz (duas dimensões espaciais suprimidas).	136
FIGURA 30 – Solução de Schwarzschild em coordenadas de Schwarzschild (duas dimensões suprimidas).	138
FIGURA 31 – Extensão analítica da solução de Schwarzschild.	140
FIGURA 32 – Solução Schwarzschild em coordenadas avançadas de Eddington-Finkelstein.	140
FIGURA 33 – Diagrama espacial da solução de Schwarzschild em coordenadas avançadas de Eddington-Finkelstein.	141
FIGURA 34 – Diagrama espacial do espaço-tempo de Minkowski.	142
FIGURA 35 – Entropia gravitacional. O eixo y é $90S/3072M_0\pi^5R^2T^3$ e $x = r_0/R$	147
FIGURA 36 – A temperatura do horizonte acima de $[90R^2/3072M_0\pi^4]^{1/3}$ é mostrado como uma função de $x = r_0/R$	149

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – Valores teóricos e de observação da precessão residual do periélio	50
TABELA 2 – Trabalhos mecânicos e Forças generalizadas	89

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	RELATIVIDADE GERAL	15
2.1	FUNDAMENTOS	15
2.1.1	Vetores, vetores duplos e tensores	16
2.1.2	Diferenciação Covariante	17
2.1.3	Geodésica	20
2.1.4	Vetores de Killing	21
2.1.5	Plano local	22
2.1.6	Determinante da Métrica	23
2.1.7	Tensor Levi-Cevita	25
2.1.8	Curvatura	26
2.2	A SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD	28
2.2.1	Campos vetoriais em hipersuperfície ortogonais	29
2.2.2	Soluções estáticas	32
2.2.3	Soluções simétricas esféricas	34
2.2.4	A Solução Schwarzschild	37
2.2.5	Propriedades da solução de Schwarzschild	39
2.2.6	Coordenadas Isotrópicas	41
2.3	TESTES EXPERIMENTAIS DA RELATIVIDADE GERAL	42
2.3.1	Movimento Clássico de Kepler	43
2.3.2	Avanço do periélio de Mercúrio	46
2.3.3	Curvatura da Luz	50
2.3.4	Desvio para o vermelho gravitacional	53
2.3.5	Atraso do tempo da luz	57
2.3.6	Uma cronologia de eventos experimentais e observacionais	59
3	TELEPARALELISMO EQUIVALENTE À RELATIVIDADE GERAL (TERG)	62
3.0.1	Os campos de tetrada e a estrutura de referência	63
3.0.2	A formulação lagrangiana do TERG	67
3.0.2.1	Identities Geométricas	67
3.0.3	As equações de campo do TERG e o tensor energia-momento gravitacional	68
3.0.4	Teorias da gravidade $f(T)$	73
3.1	A FORMULAÇÃO HAMILTONIANA DO TERG	74
3.2	MOMENTO-ENERGIA E MOMENTO ANGULAR DO CAMPO GRAVITACIONAL	77

3.2.1	Momento-energia gravitacional	79
3.2.2	Momento angular gravitacional	82
4	DINÂMICA DO CAMPO TÉRMICO (DCT)	87
4.1	PRINCÍPIOS GERAIS DA TERMODINÂMICA	87
4.1.1	Aspectos cinemáticos da física térmica	87
4.1.2	Aspectos dinâmicos da física térmica	90
4.1.2.1	Primeira Lei da Termodinâmica	90
4.1.2.2	Segunda Lei da Termodinâmica	90
4.1.2.3	Terceira Lei da Termodinâmica	91
4.2	FUNÇÃO DE PARTIÇÃO E INTEGRAL DE CAMINHO	91
4.2.1	Função de partição e o propagador	92
4.2.2	Integral de caminho na mecânica quântica	94
4.2.3	Campos clássicos	96
4.2.4	Integral de caminho para um campo escalar	99
4.3	DINÂMICA DA TERMODINÂMICA: BASE ALGÉBRICA DE SIMETRIA CINEMÁTICA	102
4.3.1	Espaço térmico de Hilbert	102
4.4	O SIGNIFICADO DA DUPLICAÇÃO: TERMO-ALGÉBRAS	104
4.4.1	Geradores de simetria e observáveis	104
4.4.2	Álgebra de Lie dobrada	105
4.4.3	Regras de conjugação de til	107
4.4.4	Transformação de Bogoliubov	109
4.5	PROCESSO DE ESPALHAMENTO EM TEMPERATURA FINITA	110
4.5.1	Matriz de dispersão em DCT	111
4.6	CAMPOS COMPACTADOS	113
4.6.1	Compactificação e topologia	114
4.6.2	Compactificação de uma dimensão espacial	114
4.6.3	Compactificação do tempo dimensional	119
4.6.4	Compactificação do espaço e tempo	120
4.6.5	Compactificação em d-dimensões	122
4.6.6	Transformação generalizada de Bogoliubov	122
5	RESULTADOS	126
5.1	BURACO NEGRO REGULAR	127
5.1.1	Caracterização das coordenadas	129
5.1.2	Singularidades	131
5.1.3	Diagramas espaciais e espaço-temporal	133
5.1.4	Diagrama espaço-tempo em coordenadas Schwarzschild	136

5.1.5	Coordenadas Eddington-Finkelstein	138
5.1.6	Horizonte de eventos	140
5.1.7	Buraco Negro de Bardeen	142
5.1.8	Buraco Negro de Hayward	143
5.1.9	Efeito Casimir Gravitacional e a Lei de Stefan-Boltzmann em temperatura finita para Buracos Negros Regulares	144
5.1.10	A Lei de Stefan-Boltzmann Gravitacional	145
5.1.11	Efeito Casimir Gravitacional	149
5.1.12	Efeito Casimir Gravitacional a Temperatura Finita	151
6	CONCLUSÃO	154
	REFERÊNCIAS	155

1 INTRODUÇÃO

Em 1915, Albert Einstein desenvolveu a Teoria da Relatividade Geral, tendo apresentado que a gravidade pode influenciar no movimento da luz. Pouco tempo depois, Karl Schwarzschild fez um sistema de unidades: Sistema métrico de Schwarzschild para as equações de campo de Einstein, onde é descrito o campo gravitacional de um ponto de massa e a massa esférica [1]. Poucos meses depois de Schwarzschild, Johannes Droste, um estudante de Hendrik Lorentz, independentemente deu a mesma solução para o ponto de massa e escreveu mais extensamente sobre suas propriedades [2, 3]. Esta solução tem uma característica que é chamada de raio de Schwarzschild, tornando-se singularidade matemática, o que significa que alguns dos termos nas equações de Einstein são infinitos. A natureza dessa superfície não era bem compreendida na época. Em 1924, Arthur Eddington mostrou que a singularidade desapareceu depois de uma mudança de coordenadas, embora tenha demorado até 1933 para que Georges Lemaître percebesse que isso significava a singularidade no raio de Schwarzschild, e não era uma propriedade física [4], mas matemática, a partir da descoberta da singularidade matemática. A existência de singularidades na Teoria da Relatividade Geral tem sido problemática desde o seu início, especialmente aquelas ligadas a buracos negros. As chamadas singularidades fundamentais não permitem aplicações das leis da Física, o que produziu algumas propostas para abordar o problema. A primeira é conhecida como Censura Cósmica que foi proposta por Penrose no século 20 [5]. A segunda veio com a solução de Buracos Negros Regulares cuja primeira solução foi obtida por Bardeen. É interessante observar que as soluções que descrevem Buracos Negros Regulares possuem horizonte de eventos e compartilham de muitas características com Buracos Negros Singulares. Portanto, se Buracos Negros são objetos reais, existe uma boa chance de que os Buracos Negros Regulares sejam objetos que poderão ser percebidos experimentalmente. Desta forma, o estudo teórico de tais soluções se torna muito relevante. Particularmente, a análise da termodinâmica dos Buracos Negros Regulares pode revelar implicações experimentais substanciais, mas para isso é necessário definir como a temperatura será introduzida e como a entropia gravitacional é obtida. Além disso, outros efeitos podem ser previstos por meio desses termos, como a Lei Gravitacional de Stefan-Boltzmann e o Efeito Casimir. Nesse sentido, trabalharemos com a Dinâmica do Campo Térmico (DCT) porque ela provou ser uma ferramenta muito poderosa para lidar com a termalização de um determinado campo. Essa abordagem requer a duplicação do espaço de Fock, que permite que o tempo e a temperatura sejam variáveis do sistema. Esta é uma vantagem sobre a abordagem de Matsubara. A Dinâmica do Campo Térmico também requer a caracterização do campo em análise por meio da Função de Green correspondente. Em relação ao

campo gravitacional, usaremos uma descrição alternativa que é conhecida como Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TERG). Quando o campo gravitacional é descrito dessa maneira alternativa algumas previsões únicas são reveladas.

O buraco negro é uma região do espaço da qual nada, nem mesmo partículas que se movem à velocidade da luz, podem escapar, pois a sua velocidade é inferior à velocidade de escape desses corpos celestes infinitamente densos. Resultado da deformação do espaço-tempo, causada após o colapso gravitacional de uma estrela massiva com pelo menos 30 vezes a massa do Sol em uma supernova, e que logo depois, desaparecerá, dando lugar ao que a Física chama de singularidade, o coração de um buraco negro, onde o espaço-tempo deixa de existir. Um buraco negro começa a partir de uma superfície denominada horizonte de eventos, que marca a região a partir da qual, se algo a atravessar, não poderá regressar. O adjetivo negro em buraco negro se deve ao fato de que se presumia que este não refletia nenhuma parte da luz que venha atingir seu horizonte de eventos, atuando assim como se fosse um corpo negro em termodinâmica, porém, atualmente existe a teoria da radiação Hawking que, resumidamente, prevê que os buracos negros não são realmente negros, e emitem radiação devido a efeitos quânticos, tais como flutuações quânticas.

Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral é descrito em termos de tetradas que tem muitas vantagens sobre a formulação métrica da gravitação como usada na relatividade geral, uma vez que a equivalência ocorre apenas em relação às equações de campo. Entre eles, o mais interessante é a existência de uma energia gravitacional que é obtida naturalmente através da formulação de Hamilton da TERG. Ademais, o propagador do gráviton obtido na Relatividade Geral não coincide com o predito pela TERG. Isso abre espaço para a exploração de Buracos Negros Regulares via Dinâmica do Campo Térmico, mas se os propagadores forem iguais poderíamos realizar o estudo em DCT (Dinâmica do Campo Térmico). Neste trabalho usaremos o DCT para calcular a Lei de Stefan-Boltzmann e o Efeito Casimir através do TEGR, e também utilizaremos as unidades naturais, $G = c = 1 = k$. Denotaremos a simetria de Lorentz pelos índices latinos $a = (0), (1), (2), (3)$, enquanto os difeomorfismos são denotados pelos índices gregos, $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Esta tese esta esquematizada da seguinte maneira: no capítulo 2, a Relatividade Geral é introduzida. No capítulo 3, as ideias do teleparalelismo equivalente à Relatividade Geral (TERG) são brevemente lembradas. No capítulo 4, a Dinâmica do Campo Térmico (DCT) é inserida a lei gravitacional de Stefan-Boltzmann e a Entropia são calculados para Buracos Negros Regulares, assim como calculamos para o mesmo sistema gravitacional o Efeito Casimir que é dado em temperatura zero e finita. Portanto, nos capítulos 5 e 6 apresentamos os resultados e a conclusão.

2 RELATIVIDADE GERAL

2.1 FUNDAMENTOS

Este capítulo é dedicado a uma rápida revisão dos fundamentos da geometria diferencial. A coleção de tópicos apresentados aqui é padrão e a maioria desses tópicos deveriam ter sido encontrados em um curso introdutório sobre Relatividade Geral. Alguns, no entanto, podem ser novos, ou podem ser tratados aqui de um ponto de vista diferente ou com um grau maior de completude.

Começamos na Seção 2.1.1, fornecendo definições para tensores em uma variedade diferenciável. O ponto de vista adotado aqui e ao longo do texto é totalmente pouco sofisticado: não temos a formulação abstrata da geometria diferencial e definimos tensores à moda antiga, em termos de como seus componentes se transformam sob uma transformação de coordenadas. Enquanto a formulação abstrata (na qual os tensores são definidos como mapeamentos multilineares de vetores e vetores duplos em números reais) é decididamente mais elegante e bonita, e deve ser parte integrante de uma educação em relatividade geral, a abordagem antiga tem a vantagem da economia, e isso motivou sua adoção aqui. Além disso, a maneira antiquada de definir tensores produz uma distinção imediata entre campos de tensores no espaço-tempo (quadri-tensores) e campos de tensores numa hipersuperfície (três-tensores).

A diferenciação covariante é revisada na Seção 2.1.2 e os vetores de Killing são introduzidos na Seção 2.1.4. Na Seção 2.1.3 desenvolvemos a teoria matemática da geodésica. A teoria é baseada em um princípio variacional e emprega uma parametrização arbitrária da curva. A vantagem dessa abordagem (mais de uma na qual a geodésica é definida pelo transporte paralelo do vetor tangente) que é o caso limitante da geodésica nula pode ser tratado com mais naturalidade. Além disso, geralmente é conveniente, especialmente com geodésica nula, usar uma parametrização não-afim.

Na Seção 2.1.5, revisamos um teorema fundamental da geometria diferencial, o Teorema da Planicidade Local. Aqui provamos o teorema de maneira padrão, contando o número de funções necessárias para passar de um sistema de coordenadas arbitrário para um quadro lorentziano local.

Resultados úteis envolvendo o determinante do tensor métrico são obtidos na Seção 2.1.6. O determinante métrico é usado na Seção 2.1.8 para definir o tensor Levi-Cevita. O tensor de curvatura de Riemann e suas contrações são introduzidas na Seção 2.1.7, juntamente com as equações de campo de Einstein.

Ao adotar as convenções de sinais com uma métrica de assinatura $(-1,1,1,1)$,

com o tensor de Riemann definido por, $R_{\beta\gamma,\delta}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^{\alpha} + \dots$, e o tensor de Ricci definido por $R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\mu\beta}^{\mu}$. Índices gregos (α, β, \dots) vão de 0 à 3, e índices latinos maiúsculos (A, B, \dots) vão de 2 à 3. Unidades geometrizadas, no qual $G = c = 1$, estão empregados.

2.1.1 Vetores, vetores duplos e tensores

Considere uma curva γ em uma variedade. A curva é parametrizada por λ e é descrita em um sistema de coordenadas arbitrário pelas relações $x^{\alpha}(\lambda)$. Desejamos calcular a taxa de mudança de uma função escalar $f(x^{\alpha})$ ao longo desta curva:

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}} \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda} = f_{,\alpha} u^{\alpha}. \quad (2.1)$$

Este procedimento nos permite introduzir dois tipos de objetos na variedade : $u^{\alpha} = dx^{\alpha}/d\lambda$ é um vetor tangente a γ em toda parte, e $f_{,\alpha} = \partial f/\partial x^{\alpha}$ é um vetor duplo, o gradiente da função f . Esses objetos se transformam da seguinte maneira sob uma transformação de coordenadas arbitrária de x^{α} à $x^{\alpha'}$:

$$f_{,\alpha'} = \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} f_{,\alpha} \quad (2.2)$$

e

$$u^{\alpha'} = \frac{dx^{\alpha'}}{d\lambda} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} u^{\alpha}. \quad (2.3)$$

A partir dessas equações, recuperamos o fato de que $df/d\lambda$ é invariável: $f_{,\alpha'} u^{\alpha'} = f_{,\alpha} u^{\alpha}$.

Qualquer objeto A^{α} que se transforma como:

$$A^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} A^{\alpha} \quad (2.4)$$

sob uma transformação de coordenadas será chamada de **componentes vectoriais**. Por outro lado, qualquer objeto, p_{α} , que se transforma como:

$$p_{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} p_{\alpha}, \quad (2.5)$$

sob uma transformação de coordenadas será chamado **vetor duplo**. A contração $A^{\alpha} p_{\alpha}$, entre um vetor e um vetor duplo é invariável sob a transformação de coordenadas, portanto, é escalar.

Generalizando essas definições, um tensor do tipo (n, m) é um objeto $T_{\gamma\dots\delta}^{\alpha\dots\beta}$ que se transforma como:

$$T_{\gamma'\dots\delta'}^{\alpha'\dots\beta'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \dots \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}} \dots \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x^{\delta'}} T_{\gamma\dots\delta}^{\alpha\dots\beta} \quad (2.6)$$

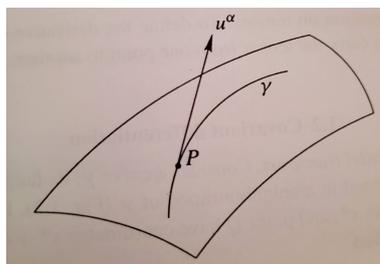
sob uma transformação de coordenadas. O número inteiro n é igual ao número de sobescritos, enquanto que m é o igual ao número de subescritos. Note-se que a ordem

dos índices é importante; em geral $T_{\gamma\dots\delta}^{\beta\dots\alpha} \neq T_{\gamma\dots\delta}^{\alpha\dots\beta}$. Por definição, vetores são tensores do tipo (1,0), e os vetores duplos são tensores do tipo (0,1).

Um tensor muito especial é o tensor métrico $g_{\alpha\beta}$, usado para definir o produto interno entre dois vetores. É também a quantidade que representa o campo gravitacional na relatividade geral. A métrica ou seu $g^{\alpha\beta}$ inverso podem ser usados para diminuir ou aumentar os índices. Por exemplo, $A_\alpha \equiv g_{\alpha\beta}A^\beta$ e $p^\alpha \equiv g^{\alpha\beta}p_\beta$. A métrica inversa é definida pelas relações $g^{\alpha\mu}g_{\mu\beta} = \delta^\alpha_\beta$. A métrica e seu inverso são tensores simétricos.

Os tensores não são realmente definidos pela própria variedade. Para ilustrar isso, considere o vetor u^α tangente à curva γ , como representado na Figura 1. O diagrama deixa claro que o vetor tangente realmente "sobressai" da variedade. De fato, um vetor em um ponto P da variedade é definido em um plano tangente em P . Da mesma forma, os tensores em um ponto P podem ser vistos como vivos nesse plano tangente. Os tensores em P podem ser adicionados e contraídos, e o resultado também é um tensor. No entanto, um tensor em P e outro tensor em Q não podem ser combinados de maneira tensorial, porque esses tensores pertencem a diferentes planos tangentes. Por exemplo, as operações $A^\alpha(P)B^\beta(Q)$ e $A^\alpha(Q) - A^\alpha(P)$ não são definidas como operações tensoriais. Isso implica que a diferenciação não é uma operação direta nos tensores. Para definir a derivada de um tensor, uma regra deve ser fornecida para transportar o tensor de um ponto para outro.

FIGURA 1 – Um tensor em P existe no plano tangente das variedades em P.



Fonte: E.Poisson- A Relativist's Toolkit, Cambridge University Press,2004.

2.1.2 Diferenciação Covariante

Uma dessas regras é o **transporte paralelo**. Considere uma curva γ , seu vetor tangente u^α , e um campo vetorial A^α definidos em uma vizinhança de γ Figura (2) [6]. Deixe o ponto P na curva ter coordenadas x^α , e o ponto Q tem coordenadas $x^\alpha + dx^\alpha$. Como foi dito anteriormente, a operação:

$$\begin{aligned} dA^\alpha &\equiv A^\alpha(Q) - A^\alpha(P) & (2.7) \\ &= A^\alpha(x^\beta + dx^\beta) - A^\alpha(x^\beta) \\ &= A^\alpha_{,\beta} dx^\beta, \end{aligned}$$

não é tensorial. Isso é facilmente verificado: em uma transformação de coordenadas,

$$A^{\alpha'}_{;\beta'} = \frac{\partial}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} A^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} A^{\alpha}_{;\beta} + \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} A^{\alpha}, \quad (2.8)$$

e isso não é uma transformação tensorial. Para ser adequadamente tensorial, a derivada do operador deve ter a forma, $DA^{\alpha} = A^{\alpha}_T(P) - A^{\alpha}(P)$, onde $A^{\alpha}_T(P)$ é o vetor obtido "transportando" A^{α} de Q e P . Podemos escrever isso como, $DA^{\alpha} = dA^{\alpha} + \delta A^{\alpha}$, onde $\delta A^{\alpha} \equiv A^{\alpha}_T(P) - A^{\alpha}(Q)$, também não é uma operação tensorial. A regra precisa para o transporte paralelo agora deve ser especificada. Exigimos que δA^{α} seja linear em A^{μ} e dx^{β} , de modo que $\delta A^{\alpha} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} A^{\mu} dx^{\beta}$, para algum campo (não-tensorial), $\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}$ é chamado de **conexão**. A priori, esse campo é livremente especificável.

Agora temos, $DA^{\alpha} = A^{\alpha}_{;\beta} dx^{\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} A^{\mu} dx^{\beta}$, e dividindo por $d\lambda$, o incremento no parâmetro da curva, obtemos:

$$\frac{DA^{\alpha}}{d\lambda} = A^{\alpha}_{;\beta} u^{\beta}, \quad (2.9)$$

onde $u^{\beta} = dx^{\beta}/d\lambda$ é o vetor tangente, e

$$A^{\alpha}_{;\beta} \equiv A^{\alpha}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} A^{\mu}. \quad (2.10)$$

Esta é a **derivada covariante** do vetor A^{α} . Outras notações padrão são: $A^{\alpha}_{;\beta} \equiv \nabla_{\beta} A^{\alpha}$ e $DA^{\alpha}/d\lambda \equiv \nabla_u A^{\alpha}$.

O fato de $A^{\alpha}_{;\beta}$ ser um tensor que nos permite deduzir a propriedade de transformação de conexão. A partir de $\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} A^{\mu} = A^{\alpha}_{,\beta} - A^{\alpha}_{;\beta}$, é fácil mostrar que:

$$\Gamma^{\alpha'}_{\mu'\beta'} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} A^{\mu} - \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} A^{\mu}. \quad (2.11)$$

Expressando $A^{\mu'}$ em termos de A^{μ} no lado esquerdo e usando o fato de que A^{μ} é um campo vetorial arbitrário, obtemos:

$$\Gamma^{\alpha'}_{\mu'\beta'} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} - \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}. \quad (2.12)$$

Multiplicando por $\partial x^{\mu}/\partial x^{\gamma'}$ e reorganizando os índices, chegamos à

$$\Gamma^{\alpha'}_{\mu'\beta'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} - \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}. \quad (2.13)$$

Esta é a lei de transformação para a conexão; o segundo termo impede que ele se transforme como um tensor.

A diferenciação covariante pode ser estendida a outros tipos de tensores exigindo que o operador D obedeça à regra do produto do cálculo diferencial (para escalares, entende-se que $D \equiv d$.) Por exemplo, podemos derivar uma expressão para a derivada covariante de um vetor duplo do requisito:

$$d(A^{\alpha} p_{\alpha}) \equiv D(A^{\alpha} p_{\alpha}) = (DA^{\alpha}) p_{\alpha} + A^{\alpha} D(p_{\alpha}). \quad (2.14)$$

Escrevendo o lado esquerdo como $A^\alpha_{,\beta} p_\alpha dx^\beta + A^\alpha p_{,\alpha\beta} dx^\beta$ e usando as equações (2.9) e (2.10), obtemos:

$$\frac{Dp_\alpha}{d\lambda} = p_{\alpha;\beta} u^\beta, \quad (2.15)$$

onde

$$p_{\alpha;\beta} \equiv p_{\alpha,\beta} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} p_\mu. \quad (2.16)$$

Este procedimento generaliza para tensores do tipo arbitrário. Por exemplo, a derivada covariante de um tensor do tipo - (1,1) é dada por:

$$T^\alpha_{\beta;\gamma} = T^\alpha_{\beta,\gamma} + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma} T^\mu_\beta - \Gamma^\mu_{\beta\gamma} T^\alpha_\mu. \quad (2.17)$$

A regra é que existe um termo de conexão para cada índice tensorial; ele vem com sinal de menos se o índice for subscrito.

Até agora, a conexão foi deixada completamente arbitrária. É feita uma escolha específica exigindo que seja com métricas e simétricas compatíveis,

$$\Gamma^\alpha_{\gamma\beta} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}, \quad g_{\alpha\beta;\gamma} = 0. \quad (2.18)$$

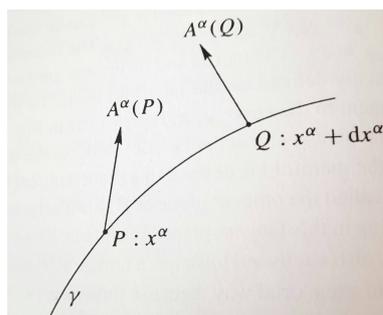
Na relatividade geral, essas propriedades são uma consequência do princípio de equivalência de Einstein. É fácil mostrar que as equações (2.18) implicam:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} (g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}). \quad (2.19)$$

Assim, a conexão é totalmente determinada pela métrica. Nesse contexto, $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ é chamado de **símbolo de Christoffel**.

Concluimos esta seção introduzindo alguma terminologia. Diz-se que um campo tensorial, $T^\alpha_{\beta\dots}$, é transportado paralelamente ao longo de uma curva γ se essa derivada covariante ao longo da curva desaparecer: $DT^\alpha_{\beta\dots}/d\lambda = T^\alpha_{\beta\dots;\mu} u^\mu = 0$.

FIGURA 2 – Diferenciação de um tensor.



Fonte: E.Poisson- A Relativist's Toolkit, Cambridge University Press,2004.

2.1.3 Geodésica

Uma curva é uma geodésica se ela aumentar a distância entre dois pontos fixos [7, 8].

Deixe uma curva γ ser descrita pelas relações $x^\alpha(\lambda)$, onde λ é um parâmetro arbitrário, e P e Q sejam dois pontos nessa curva. A distância entre P e Q ao longo de γ é dada por:

$$\ell = \int_P^Q \sqrt{\pm g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta} d\lambda, \quad (2.20)$$

onde $\dot{x}^\alpha \equiv dx^\alpha/d\lambda$. Na raiz quadrada, o sinal positivo (negativo) é escolhido se a curva for tipo espaço (tipo tempo); supõe-se que γ não seja nulo em nenhum lugar. Deve ficar claro que ℓ é invariante sob uma reparametrização da curva, $\lambda \rightarrow \lambda'(\lambda)$.

A curva para qual ℓ é um extremo determinado pela substituição da "lagrangiana" $L(\dot{x}^\mu, x^\mu) = (\pm g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)^{1/2}$ nas equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (2.21)$$

Um cálculo direto mostra que $x^\alpha(\lambda)$ deve satisfazer a equação diferencial:

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = \kappa(\lambda) \dot{x}^\alpha, \quad (2.22)$$

(parâmetro arbitrário), onde $\kappa \equiv d \ln L / d\lambda$. A equação geodésica também pode ser escrita como $u_{;\beta}^\alpha u^\beta = \kappa u^\alpha$, no qual $u^\alpha = \dot{x}^\alpha$ é tangente à geodésica.

Uma escolha útil do parâmetro é o tempo próprio τ quando a geodésica é tipo tempo, ou a distância própria s quando a geodésica é tipo espaço. (É importante que essa escolha seja feita após a extremização, e não antes). Como $d\tau^2 = -g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ para geodésica tipo tempo e $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$, para geodésica tipo espaço, temos $L = 1$ em ambos os casos, e isso implica que $\kappa = 0$. A equação geodésica se torna:

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = 0, \quad (2.23)$$

ou $u_{;\beta}^\alpha u^\beta = 0$, que afirma que o vetor tangente é transportado paralelamente ao longo da geodésica. Essas equações são invariantes sob reparametrização da forma $\lambda \rightarrow \lambda' = a\lambda + b$, onde a e b são constantes. Parâmetros relacionados a s e τ por essas transformações são chamados de *parâmetros afins*. É útil notar que a equação (2.23) pode ser recuperada substituindo $L' = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$ nas equações de Euler-Lagrange, o que dá origem a um método prático de calcular os símbolos de Christoffel.

Por continuidade, a forma geral $u_{;\beta}^\alpha u^\beta = \kappa u^\alpha$ para a equação da geodésica deve ser válida também para a geodésica nula. Para que isso seja verdade, o parâmetro λ não pode ser afim, porque $ds = d\tau = 0$ ao longo de uma geodésica nula e o limite é

então singular. No entanto, os parâmetros afins podem, no entanto, ser encontrados para geodésica nula. A partir da equação (2.22) é sempre possível introduzir um novo parâmetro λ^* de modo que a equação geodésica assuma a forma da equação (2.23). É fácil verificar se a transformação apropriada é:

$$\frac{d\lambda^*}{d\lambda} = \exp \left[\int^{\lambda} \kappa(\lambda') d\lambda' \right]. \quad (2.24)$$

Note-se que, enquanto a versão nula da equação (2.22) foi obtida por um procedimento de limitação, a versão nula da equação (2.23) não pode ser considerada um limite da mesma equação para geodésicas tipo tempo ou espaço : a parametrização é altamente descontínua.

Concluimos esta seção com a seguinte observação: Ao longo de uma geodésica parametrizada afim (tipo tempo, espaço, ou nula), a quantidade escalar $\epsilon = u^\alpha u_\alpha$ é uma constante. A prova requer uma única linha:

$$\frac{d\epsilon}{d\lambda} = (u^\alpha u_\alpha)_{;\beta} u^\beta = (u_{;\beta}^\alpha) u_\alpha + u^\alpha (u_{\alpha;\beta} u^\beta) = 0. \quad (2.25)$$

Se o tempo próprio ou distância própria forem escolhidos para λ , então $\epsilon = \mp 1$, respectivamente. Para uma geodésica nula, $\epsilon = 0$.

2.1.4 Vetores de Killing

Se, em determinado sistema de coordenadas, as componentes da métrica não dependerem de x^0 , então pelo teorema precedente $\mathcal{L}_\xi g_{\alpha\beta} = 0$, onde $\xi^\alpha \doteq \delta_0^\alpha$ e \mathcal{L}_ξ é a derivada de Lie. O vetor ξ^α é então chamado de **vetor de Killing**. A condição para ξ^α ser um vetor de Killing é que:

$$0 = \mathcal{L}_\xi g_{\alpha\beta} = \xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha}. \quad (2.26)$$

Portanto, o tensor $\xi_{\alpha;\beta}$ é antisimétrico se ξ^α é um vetor de Killing.

Vetores de Killing podem ser usados para encontrar constantes associadas ao movimento ao longo de uma geodésica. Suponha que u^α é tangente a uma geodésica afim parametrizada por λ . Então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}(u^\alpha \xi_\alpha) &= (u^\alpha \xi_\alpha)_{;\beta} u^\beta \\ &= u_{;\beta}^\alpha u^\beta \xi_\alpha + \xi_{\alpha;\beta} u^\alpha u^\beta \\ &= 0. \end{aligned}$$

Na segunda linha, o primeiro termo desaparece em virtude da equação geodésica e o segundo termo desaparece porque $\xi_{\alpha;\beta}$ é um tensor antissimétrico enquanto $u^\alpha u^\beta$ é simétrico. Portanto, $u^\alpha \xi_\alpha$ é constante ao longo da geodésica.

Como um exemplo, considere um espaço-tempo estático, esfericamente simétrico com métrica:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2d\Omega^2,$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2$. Como a métrica não depende de t nem de ϕ , os vetores:

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_{(t)}^\alpha &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial t}, \\ \tilde{\xi}_{(\phi)}^\alpha &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial \phi},\end{aligned}$$

são vetores de Killing. As quantidades:

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= -u_\alpha \tilde{\xi}_{(t)}^\alpha, \\ \tilde{L} &= u_\alpha \tilde{\xi}_{(\phi)}^\alpha\end{aligned}$$

são então constantes ao longo de uma geodésica à qual u^α é tangente. Se a geodésica é tipo tempo e u^α é a quadri-velocidade de uma partícula que se move nessa geodésica, então \tilde{E} e \tilde{L} pode ser interpretado como energia e momento angular por unidade de massa, respectivamente. Deve-se notar também que a simetria esférica implica a existência de dois vetores de Killing adicionais,

$$\begin{aligned}\xi_{(1)}^\alpha \partial_\alpha &= \text{sen}\phi \partial_\theta + \cot\theta \cos\phi \partial_\phi, \\ \xi_{(2)}^\alpha \partial_\alpha &= -\cos\phi \partial_\theta + \cot\theta \text{sen}\phi \partial_\phi.\end{aligned}$$

é fácil mostrar que estes realmente satisfazem as equações de Killing (2.26).

2.1.5 Plano local

Para um dado ponto P no espaço-tempo, sempre é possível encontrar um sistema de coordenadas $x^{\alpha'}$ tal que:

$$\begin{aligned}g_{\alpha'\beta'}(P) &= \eta_{\alpha'\beta'}, \\ \Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'}(P) &= 0,\end{aligned}\tag{2.27}$$

onde $\eta_{\alpha'\beta'} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ é a métrica de Minkowski. Esse sistema de coordenadas será chamado de plano local de Lorentz em P . Observamos que também não é possível definir as derivadas da conexão como zero quando o espaço-tempo é curvado. A interpretação física do nivelamento-local é que os observadores em queda livre não veem o efeito da gravidade em sua vizinhança imediata, conforme exigido pelo princípio da equivalência de Einstein.

Agora provamos o teorema. Seja x^α um sistema de coordenadas arbitrário e assumimos, sem perda de generalidade, que P é a origem de ambos os sistemas de

coordenadas. Então as coordenadas de um ponto próximo de P são relacionadas por:

$$\begin{aligned}x^{\alpha'} &= A_{\beta}^{\alpha'} x^{\beta} + O(x^2), \\x^{\alpha} &= A_{\beta'}^{\alpha} x^{\beta'} + O(x'^2),\end{aligned}$$

onde $A_{\beta}^{\alpha'}$ e $A_{\beta'}^{\alpha}$ são constantes métricas. É fácil verificar se um é de fato o inverso do outro:

$$\begin{aligned}A_{\mu}^{\alpha'} A_{\beta'}^{\mu} &= \delta_{\beta'}^{\alpha'}, \\A_{\mu'}^{\alpha} A_{\beta}^{\mu'} &= \delta_{\beta}^{\alpha}.\end{aligned}$$

Sob essa transformação, a métrica se torna

$$g_{\alpha'\beta'}(P) = A_{\alpha'}^{\alpha} A_{\beta'}^{\beta} g_{\alpha\beta}(P).$$

Exigimos que o lado esquerdo seja igual a $\eta_{\alpha'\beta'}$. Isso nos dá 10 equações para as 16 componentes desconhecidas da matriz $A_{\alpha'}^{\alpha}$. Uma solução sempre pode ser encontrada, com 6 componentes indeterminados. Isso corresponde à liberdade de executar uma transformação de Lorentz (3 parâmetros de rotação e 3 parâmetros de reforço) que não altera a forma da métrica de Minkowski.

Suponha que uma escolha específica foi feita para $A_{\alpha'}^{\alpha}$. Então, $A_{\alpha'}^{\alpha}$ é encontrado invertendo a matriz e a transformação de coordenadas é conhecida pela primeira ordem. Vamos prosseguir para a segunda ordem:

$$x^{\alpha'} = A_{\beta}^{\alpha'} x^{\beta} + \frac{1}{2} B_{\beta'\gamma}^{\alpha'} x^{\beta} x^{\gamma} + O(x^3),$$

onde os coeficientes constantes $B_{\beta'\gamma}^{\alpha'}$ são simétricos nos índices mais baixos. Recordando a equação (2.13), temos que a conexão se transforma como:

$$\Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'}(P) = A_{\alpha}^{\alpha'} A_{\beta'}^{\beta} A_{\gamma'}^{\gamma} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}(P) - B_{\beta'\gamma}^{\alpha'} A_{\beta'}^{\beta} A_{\gamma'}^{\gamma}.$$

Para colocar o lado esquerdo em zero, basta impor

$$B_{\beta'\gamma}^{\alpha'} = A_{\alpha}^{\alpha'} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}(P).$$

Essas equações determinam $B_{\beta'\gamma}^{\alpha'}$ exclusivamente, e a transformação de coordenadas agora é de segunda ordem. Independentemente dos termos de ordem superior, aplicando as equações (2.27).

2.1.6 Determinante da Métrica

A quantidade $\sqrt{-g}$, onde $g \equiv \det[g_{\alpha\beta}]$, ocorre frequentemente em geometria diferencial. Primeiro notamos que $\sqrt{g'/g}$, onde $g' = \det[g_{\alpha'\beta'}]$, é o jacobiano da transformação, $x^{\alpha} \rightarrow x^{\alpha'}(x^{\alpha})$. Para ver isso, lembre-se do cálculo diferencial comum que,

sob essa transformação, $dx^4 = Jd^4x'$, onde $J = \det[\partial x^\alpha / \partial x^{\alpha'}]$ é o jacobiano. Agora consideremos a transformação da métrica, [9]

$$g_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} g_{\alpha\beta}.$$

Como o determinante de um produto de matrizes é igual ao produto de seus determinantes, essa equação implica, $g' = gJ^2$, o que prova a afirmação.

Como uma aplicação importante, considere a transformação de $x^{\alpha'}$, um plano local de Lorentz em P , para x^α , um sistema de coordenadas arbitrário. O elemento de volume quadridimensional em torno de P é $d^4x' = J^{-1}d^4x = \sqrt{g/g'}d^4x$. Mas desde que $g' = -1$, temos que:

$$\sqrt{-g}d^4x \quad (2.28)$$

é um elemento de volume invariável em torno do ponto arbitrário P . Esse resultado generaliza para uma variedade de qualquer dimensão com métrica de qualquer assinatura; nesse caso $|g|^{1/2}d^n x$ é o elemento de volume invariável, em que n é a dimensão da variedade.

Vamos agora derivar outro resultado útil,

$$\Gamma_{\mu\alpha}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g})_{,\alpha}. \quad (2.29)$$

Considere, para qualquer matriz M , a variação de $\ln |\det M|$ induzida por uma variação de elementos M . Usando a regra do produto para determinantes, temos:

$$\begin{aligned} \delta \ln |\det M| &\equiv \ln |\det(M + \delta M)| - \ln |\det M| \\ &= \ln \frac{\det(M + \delta M)}{\det M} \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$= \ln \det M^{-1}(M + \delta M) \quad (2.31)$$

$$= \ln \det(\mathbf{1} + M^{-1}\delta M), \quad (2.32)$$

onde $\mathbf{1}$ representa uma matriz identidade. Agora introduzimos a identidade:

$$\det(\mathbf{1} + \varepsilon) = 1 + \text{Tr}\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad (2.33)$$

válido para qualquer matriz "pequena", ε . Isto dá:

$$\delta \ln |\det M| = \ln(1 + \text{Tr}M^{-1}\delta M) = \text{Tr}M^{-1}\delta M.$$

Substituindo o tensor métrico no lugar de M dá $\delta \ln |g| = g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}$, ou

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \ln |g| = g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\mu}.$$

isso estabelece a equação (2.29).

A equação (2.29) dá origem à *fórmula da divergência*: Para qualquer campo vetorial A^α ,

$$A^\alpha_{;\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}A^\alpha)_{,\alpha}. \quad (2.34)$$

Um resultado semelhante é válido para qualquer campo tensorial antissimétrico $B^{\alpha\beta}$:

$$B^{\alpha\beta}_{;\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}B^{\alpha\beta})_{,\beta}. \quad (2.35)$$

Essas fórmulas são úteis para o cálculo eficiente de divergências covariantes.

2.1.7 Tensor Levi-Cevita

O símbolo de permutação $[\alpha \beta \gamma \delta]$, definido por:

- +1 se $[\alpha \beta \gamma \delta]$ é uma permutação uniforme de 0123;
- -1 se $[\alpha \beta \gamma \delta]$ é uma permutação ímpar de 0123;
- 0 se quaisquer dois índices forem iguais.

É uma quantidade não-tensorial muito útil. Por exemplo, ele pode ser usado para fornecer uma definição para o determinante: Para qualquer matriz 4×4 $M_{\alpha\beta}$,

$$\begin{aligned} \det[M_{\alpha\beta}] &= [\alpha\beta\gamma\delta]M_{0\alpha}M_{1\beta}M_{2\gamma}M_{3\delta} \\ &= [\alpha\beta\gamma\delta]M_{\alpha 0}M_{\beta 1}M_{\gamma 2}M_{\delta 3}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Qualquer igualdade pode ser estabelecida pelo cálculo da força bruta. A propriedade bem conhecida que $\det[M_{\beta\alpha}] = \det[M_{\alpha\beta}]$, segue diretamente da equação (2.36) [9].

Vamos agora mostrar que a combinação:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sqrt{-g}[\alpha\beta\gamma\delta] \quad (2.37)$$

é um tensor, chamado **tensor Levi-Civita**. Considere a quantidade:

$$[\alpha\beta\gamma\delta] \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} \frac{\partial x^\delta}{\partial x^{\delta'}},$$

que é completamente antissimétrico nos índices iniciados. Portanto, deve ser proporcional ao $[\alpha'\beta'\gamma'\delta']$:

$$[\alpha\beta\gamma\delta] \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} \frac{\partial x^\delta}{\partial x^{\delta'}} = \lambda[\alpha'\beta'\gamma'\delta'],$$

por algum fator de proporcionalidade λ . Colocando $\alpha'\beta'\gamma'\delta' = 0123$, dá:

$$\lambda = [\alpha\beta\gamma\delta] \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{0'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^\delta}{\partial x^{3'}},$$

o que determina λ . Mas o lado direito é apenas o determinante da matriz $\partial x^\alpha / \partial x^{\alpha'}$, isto é, o jacobiano da transformação $x^{\alpha'}(x^\alpha)$. Assim, $\lambda = \sqrt{g'/g}$, e temos:

$$\sqrt{-g}[\alpha\beta\gamma\delta] \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} \frac{\partial x^\delta}{\partial x^{\delta'}} = \sqrt{-g'}[\alpha'\beta'\gamma'\delta'].$$

Isso estabelece o fato de que $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$, de fato se transforma como um tensor tipo - (0,4).

A prova poderia ter começado em vez disso com a relação

$$[\alpha\beta\gamma\delta] \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^{\delta'}}{\partial x^\delta} = \lambda'[\alpha'\beta'\gamma'\delta'],$$

implicando $\lambda' = \sqrt{g/g'}$ e mostrando que:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}[\alpha\beta\gamma\delta], \quad (2.38)$$

transforma-se como um tensor do tipo - (0,4). O sinal de menos é importante. É fácil verificar se esse também é o tensor Levi-Cevita, obtido de $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$, aumentando os quatro índices. Como alternativa, podemos mostrar que $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}g_{\gamma\lambda}g_{\delta\rho}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$. Essa relação implica:

$$\varepsilon_{0123} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}[\mu\nu\lambda\rho]g_{0\mu}g_{1\nu}g_{2\lambda}g_{3\rho} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}g = \sqrt{-g},$$

evidentemente compatível com a equação (2.37).

O tensor Levi-Civita é usado em vários contextos em geometria diferencial.

2.1.8 Curvatura

O tensor de Riemann $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ pode ser definido pela relação:

$$A^\mu_{;\alpha\beta} - A^\mu_{;\beta\alpha} = -R^\mu_{\nu\alpha\beta}A^\nu, \quad (2.39)$$

que vale para qualquer campo vetorial A^α . A avaliação do lado esquerdo produz explicitamente:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} \doteq \frac{1}{2}(g_{\alpha\delta,\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma,\beta\delta} - g_{\beta\delta,\alpha\gamma} + g_{\beta\gamma,\alpha\delta}),$$

e isso implica as relações tensoriais:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} = R_{\gamma\delta\alpha\beta} \quad (2.40)$$

e

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} + R_{\mu\gamma\alpha\beta} + R_{\mu\beta\gamma\alpha} = 0, \quad (2.41)$$

que são válidos em qualquer sistema de coordenadas. Um pouco mais de trabalho na mesma linha revela que o tensor de Riemann satisfaz as **identidades de Bianchi**,

$$R_{\mu\nu\alpha\beta;\gamma} + R_{\mu\nu\gamma\alpha;\beta} + R_{\mu\nu\beta\gamma;\alpha} = 0. \quad (2.42)$$

Além da equação (2.39), o tensor de Riemann satisfaz as relações:

$$p_{\mu;\alpha\beta} - p_{\mu;\beta\alpha} = R_{\mu\alpha\beta}^{\nu} p_{\nu} \quad (2.43)$$

e

$$T_{\nu;\alpha\beta}^{\mu} - T_{\nu;\beta\alpha}^{\mu} = -R_{\lambda\alpha\beta}^{\mu} T_{\nu}^{\lambda} + R_{\nu\alpha\beta}^{\lambda} T_{\lambda}^{\mu}, \quad (2.44)$$

que vale para os tensores arbitrários p_{α} e T_{β}^{α} . A generalização para tensores de níveis mais altos é óbvia: o número de termos de tensores de Riemann no lado direito é igual ao número de índices dos tensores.

As contrações do tensor de Riemann produzem o tensor de Ricci $R_{\alpha\beta}$ e o R escalar de Ricci. Elas são definidas por:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\mu\beta}^{\mu}, \\ R &= R_{\alpha}^{\alpha}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

É fácil mostrar que $R_{\alpha\beta}$ é um tensor simétrico. O **tensor de Einstein** é definido por:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}; \quad (2.46)$$

este também é um tensor simétrico. Em virtude da equação (2.42), o tensor de Einstein satisfaz:

$$G_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0, \quad (2.47)$$

as identidades de Bianchi contraídas.

As Equações de Campo de Einstein,

$$G^{\alpha\beta} = 8\pi T^{\alpha\beta}, \quad (2.48)$$

onde $G^{\alpha\beta}$ deve ser uma combinação linear do tensor métrico com suas derivadas de primeira e segunda ordem. A equação (2.48) relaciona a curvatura do espaço-tempo (representada pelo tensor de Einstein) à distribuição da matéria (representada por $T^{\alpha\beta}$, o tensor energia-tensão). A equação (2.47) implica que o tensor energia-tensão deve ter divergência zero: $T_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0$. Essa é a expressão tensorial para a conservação do momento energia. A equação (2.47) implica também que, das dez equações (2.48), apenas seis são independentes. A métrica pode, portanto, ser determinada em até quatro funções arbitrárias, e isso reflete nossa total liberdade na execução do sistema de coordenadas. Observamos que as equações de campo também podem ser escritas na forma:

$$R^{\alpha\beta} = 8\pi \left(T^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g^{\alpha\beta} \right), \quad (2.49)$$

onde $T \equiv T_{\alpha}^{\alpha}$ é o traço do tensor energia-tensão.

2.2 A SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD

Agora voltamos nossa atenção para resolver as equações do campo de vácuo no caso mais simples, a saber, o da simetria esférica. Como preliminar, nas próximas duas seções, deixamos clara a distinção entre soluções estacionárias e soluções estáticas. Em termos simples, uma solução é estacionária, se for independente do tempo. Isso não significa que a solução não seja de forma alguma evolutiva, mas simplesmente que o vínculo não entra nela explicitamente. Por outro lado, o requisito mais forte de que uma solução é estática significa que ela não pode ser evolutiva. Nesse caso, nada mudaria se, a qualquer momento, atrasássemos o tempo, ou seja, estático significa tempo simétrico sobre qualquer origem do tempo. Pense no movimento de um gás em um tubo, Figura 3. Se estiver sendo bombeado por algum dispositivo independente do tempo, o movimento será não estacionário. Se o gás viaja com velocidade constante em cada ponto do tubo, o movimento é estacionário. Se a velocidade do gás é zero em todos os lugares, o sistema é estático [6].

Uma métrica será estacionária se existir um sistema de coordenadas especial, no qual a métrica seja visivelmente independente do tempo:

$$\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^0} \doteq 0, \quad (2.50)$$

onde x^0 é uma coordenada semelhante ao tempo. Obviamente, em um sistema de coordenadas arbitrário, a métrica provavelmente dependerá explicitamente de todas as coordenadas. Portanto, precisamos tornar a declaração (2.50) independente de coordenadas. Se definirmos um campo vetorial:

$$X^a \doteq \delta_0^a \quad (2.51)$$

no sistema de coordenadas especial, então:

$$\begin{aligned} L_X g_{ab} &= X^c g_{ab,c} + g_{ac} X_{,b}^c + g_{bc} X_{,a}^c \\ &\doteq \delta_0^c g_{ab,c} = g_{ab,0} = 0 \end{aligned}$$

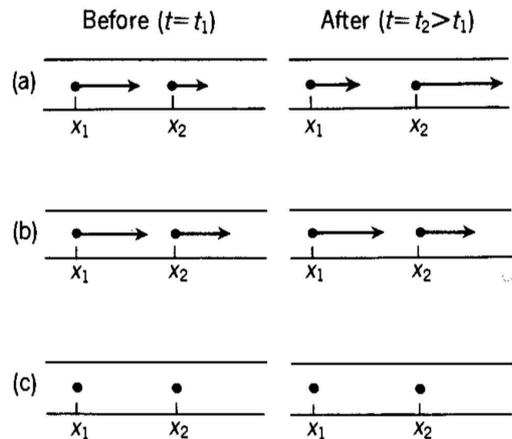
por (2.50). $L_X g_{ab}$ é um tensor, portanto, se desaparecer em um sistema de coordenadas, desaparecerá em todos os sistemas de coordenadas. Portanto, segue-se que X^a é um campo vetorial de Killing. Por outro lado, dado um campo vetorial de Killing tipo tempo X^a , sempre existe um sistema de coordenadas que é adaptado do campo vetorial de Killing, ou seja, no qual (2.51) se mantém e, em seguida,

$$0 = L_X g_{ab} \doteq g_{ab,0},$$

e assim a métrica é estacionária. Portanto, estabelecemos a definição das coordenadas independentes:

Diz-se que um tempo espacial é estacionário se e somente se ele admite um campo vetorial de Killing tipo tempo.

FIGURA 3 – Duas partículas de gás num tubo em : (a) não estacionário, (b) estacionário e (c) fluxo estático.



Fonte: R. D’Inverno - *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, 1998.

2.2.1 Campos vetoriais em hipersuperfície ortogonais

Para discutir soluções estáticas de forma independente das coordenadas, precisamos introduzir o conceito de um campo vetorial de hipersuperfície ortogonal, o que fazemos nesta seção. Começamos com a equação de uma família de hipersuperfícies dadas por:

$$f(x^a) = \mu, \quad (2.52)$$

onde os diferentes membros da família correspondem a diferentes valores de μ , Figura 4. Considere dois pontos vizinhos P e Q com as coordenadas (x^a) e $(x^a + dx^a)$ em S , também temos, por (2.52),

$$\mu = f(x^a + dx^a) = f(x^a) + \frac{\partial f}{\partial x^a} dx^a$$

para a primeira ordem. Subtraindo (2.52) desta equação, encontramos:

$$\frac{\partial f}{\partial x^a} dx^a = 0 \quad (2.53)$$

em P . Se definirmos o campo vetorial covariante n_a para a família de hipersuperfície por:

$$n_a \equiv \frac{\partial f}{\partial x^a}, \quad (2.54)$$

então (2.53), torna-se:

$$n_a dx^a = g_{ab} n^a dx^b = 0,$$

em P , que nos diz que n^a é ortogonal para o campo do vetor contravariante infinitesimal dx^a . Uma vez que dx^a reside em S por construção, segue-se que n^a é ortogonal

para S e, portanto, é conhecido como o campo de vetor normal para S em P , Figura 5. Qualquer outro campo vetorial X^a é dito ser hipersuperfície ortogonal se estiver em todo o lado ortogonal para a família de hipersuperfície, caso em que deve ser proporcional a n^a em todos os lugares, isto é,

$$X^a = \lambda(x)n^a, \quad (2.55)$$

para algum fator de proporcionalidade λ , que geralmente varia de ponto a ponto. Então, as órbitas de X^a são ortogonais à família das hipersuperfícies, Figura 6. De (2.55) e (2.54), a condição hipersuperfície - ortogonal também pode ser escrita:

$$X_a = \lambda f_{,a}, \quad (2.56)$$

e então:

$$X_a \partial_b X_c = \lambda f_{,a} \lambda_{,b} f_{,c} + \lambda^2 f_{,a} f_{,cb}.$$

Tomando a parte totalmente anti-simétrica dessa equação e que o primeiro termo à direita seja simétrico em a e c , e o segundo termo seja simétrico em b e c , de modo que suas partes totalmente anti-simétricas desapareçam, então:

$$X_{[a} \partial_b X_{c]} = 0. \quad (2.57)$$

Mostramos que qualquer campo hipersuperfície-ortogonal satisfaz (2.57). Vamos agora estabelecer um universo parcial, a saber, qualquer campo vetorial de Killing não nulo que satisfaz (2.57) é necessariamente hipersuperfície-ortogonal. Como X^a é um vetor de Killing, ele satisfaz

$$L_X g_{ab} = \nabla_b X_a + \nabla_a X_b = 0.$$

Usando isso, que trocamos os índices nas derivadas covariantes de X_a introduzem um sinal de menos:

$$\nabla_a X_b = -\nabla_b X_a. \quad (2.58)$$

Utilizando isso, os seis termos em (2.57) reduzem para três termos:

$$X_a \nabla_b X_c + X_c \nabla_a X_b + X_b \nabla_c X_a = 0.$$

Contraindo com X^c e escrevendo, $X^2 = X_a X^a$, obtemos:

$$X_a X^c \nabla_b X_c + X^2 \nabla_a X_b + X_b X^c \nabla_c X_a = 0,$$

ou, usando (2.58),

$$X_a X^c \nabla_b X_c + X^2 \nabla_a X_b - X_b X^c \nabla_a X_c = 0.$$

Trocando o índice levantado e abaixado pelo índice c , e usando (2.58) o termo médio, isso se torna:

$$X_a X_c \nabla_b X^c - X^2 \nabla_b X_a - X_b X_c \nabla_a X^c = 0.$$

Adicionando essas duas últimas equações, obtemos:

$$X_a \nabla_b X^2 - X_b \nabla_a X^2 + X^2 (\nabla_a X_b - \nabla_b X_a) = 0,$$

ou, como X^2 é um campo escalar e os termos entre parênteses que envolvem a conexão desaparecem, ou seja,

$$\nabla_{[b} \phi_{a]} = \partial_{[b} \phi_{a]},$$

$$X_a \partial_b X^2 - X_b \partial_a X^2 + X^2 (\partial_a X_b - \partial_b X_a) = 0.$$

Escrevemos isso na forma:

$$X^2 \partial_a X_b - X_b \partial_a X^2 = X^2 \partial_b X_a - X_a \partial_b X^2,$$

ou equivalentemente, dividindo por X^4 ,

$$\partial_a \left(\frac{X_b}{X^2} \right) = \partial_b \left(\frac{X_a}{X^2} \right), \quad (2.59)$$

uma vez que X^a é não nulo por suposição e, portanto, $X^2 \neq 0$. Esta última equação requer que o termo entre parênteses seja um gradiente de algum campo escalar, por exemplo f , isto é,

$$\frac{X_a}{X^2} = f_{,a}, \quad (2.60)$$

e finalmente

$$X_a = X^2 f_{,a}, \quad (2.61)$$

Esta é uma condição hipersuperfície-ortogonal (2.56) com $\lambda = X^2$.

FIGURA 4 – Uma família de hipersuperfícies classificado por μ .

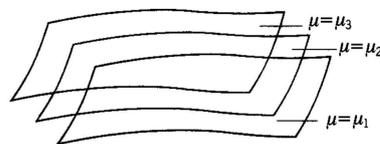
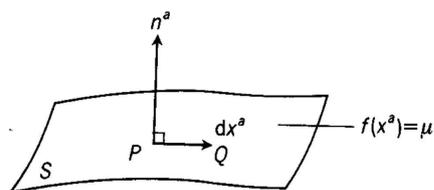
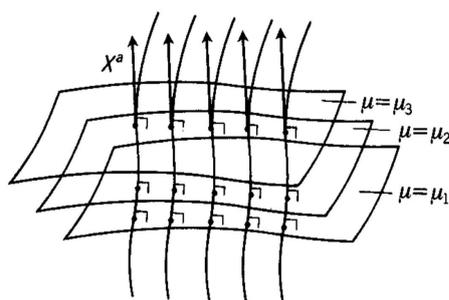


FIGURA 5 – O campo vetorial normal n^a em um ponto P.

Fonte: R. D’Inverno - *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, 1998.

FIGURA 6 – Um campo vetorial hipersuperfície-ortogonal X^a .

Fonte: R. D’Inverno - *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, 1998.

2.2.2 Soluções estáticas

Se uma solução é estacionária, então, em um sistema de coordenadas adaptado a métrica será independente do tempo, mas o elemento de linha ainda continuará em geral a conter termos cruzados em $dx^0 dx^\alpha$. Se, além disso, a métrica for estática, esperamos que esses termos cruzados estejam ausentes pelo seguinte motivo. Considere o intervalo entre dois vetores (x^0, x^1, x^2, x^3) e $(x^0 + dx^0, x^1 + dx^1, x^2, x^3)$ em nosso sistema de coordenadas espacial. Então:

$$ds^2 \doteq g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{01}dx^0 dx^1 + g_{11}(dx^1)^2, \quad (2.62)$$

onde todos os g_{ab} dependem apenas de x^α . Sob uma reversão de tempo:

$$x^0 \rightarrow x'^0 = -x^0, \quad (2.63)$$

o g_{ab} permanece inalterado, mas ds^2 torna-se:

$$ds^2 \doteq g_{00}(dx^0)^2 - 2g_{01}dx^0 dx^1 + g_{11}(dx^1)^2. \quad (2.64)$$

A suposição de que a solução é estática significa que ds^2 é invariável sob uma inversão de tempo sobre qualquer origem do tempo e, portanto, equacionando (2.62) e (2.64), descobrimos que g_{01} desaparece. Da mesma forma, g_{02} e g_{03} devem desaparecer e, portanto, mostramos que não há termos cruzados $dx^0 dx^\alpha$ no elemento de linha no sistema de coordenadas espacial.

Vamos investigar a condição hipersuperfície-ortogonal (2.61) em um espaço-tempo estacionário em um sistema de coordenadas adaptado ao campo vetorial de Killing, tipo tempo, ou seja, $X_a \doteq \delta_0^a$. Então,

$$X_a = g_{ab}X^b \doteq g_{ab}\delta_0^b = g_{0a},$$

$$X^2 = X_aX^a \doteq g_{0a}\delta_0^a = g_{00},$$

então (2.61) dá:

$$g_{0a} \doteq g_{00}f_{,a} \quad (2.65)$$

para algum campo escalar f . Quando $a = 0$, isso produz $f_{,0} \doteq 1$, então a integração dá:

$$f \doteq x^0 + h(x^\alpha),$$

onde h é uma função arbitrária apenas das coordenadas espaciais. Considerar as transformações de coordenadas definidas por:

$$x^0 \rightarrow x'^0 = x^0 + h(x^\alpha), \quad x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = x^\alpha. \quad (2.66)$$

Então encontramos no novo sistema de coordenadas,

$$X'^a \doteq \delta_0^a, \quad (2.67)$$

$$g'_{ab,0} \doteq 0, \quad (2.68)$$

$$g'_{00} \doteq g_{00}, \quad (2.69)$$

$$g'^{0\alpha} \doteq 0. \quad (2.70)$$

A última equação revela que não há termos cruzados em $dx^0 dx^\alpha$ e, portanto, a solução é estática. Portanto, estabelecemos a seguinte definição.

Diz-se que um espaço-tempo é estático se, e somente se, ele admite um campo vetorial de Killing tipo tempo hipersuperfície ortogonal.

Além disso, estabelecemos o seguinte resultado importante.

Em um espaço-tempo estático, existe um sistema de coordenadas adaptado ao campo vetorial de Killing, tipo tempo, no qual a métrica como independente do tempo e sem termos cruzados aparece no elemento de linha que envolve o tempo, isto é, $g_{0\alpha} \doteq 0$.

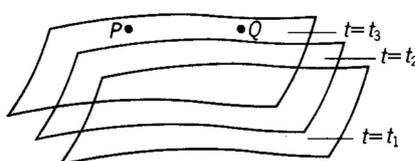
Pode ser demonstrado que ainda existe a liberdade de coordenadas:

$$x^0 \rightarrow x'^0 = Ax^0 + B, \quad x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = h'^\alpha(x^\beta), \quad (2.71)$$

onde A e B são constantes e as funções h^α são arbitrárias. Se as condições de contorno exigem $g_{00} \rightarrow 1$ no infinito espacial, isso requer $A = \pm 1$. Negligenciar a

inversão do tempo, então isso corrige A como 1 e, portanto, definimos uma coordenada de tempo, chamada linha de mundo, que é definida para escrever uma constante aditiva sem importância. Assim, em um espaço-tempo estático, recuperamos a velha idéia newtoniana de um tempo absoluto, no sentido de que a variedade pode ser fatiada de maneira bem definida nas hipersuperfícies t , Figura 7. Existe uma classe privilegiada de observadores que medem o tempo do mundo e, portanto, podem concordar que os eventos sejam simultâneos. As coordenadas correspondentes são gaussianas, pois, $g_{0a} \doteq \delta_a^0$.

FIGURA 7 – Dois eventos "simultâneos" no horário mundial.



Fonte: R. D’Inverno - *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, 1998.

2.2.3 Soluções simétricas esféricas

A simetria esférica pode ser rigorosamente em termos de campos vetoriais de Killing, como segue,

Diz-se que um espaço-tempo é esférico simétrico se, e somente se, ele admite três campos vetoriais de Killing tipo espaço, linearmente independentes, cujas órbitas estão fechadas (isto é, cálculos topológicos) e que satisfazem.

Existe um sistema de coordenadas no qual os vetores de Killing assumem uma forma padrão, conforme expresso no resultado a seguir:

Em um espaço-tempo esfericamente simétrico, existe um sistema de coordenadas (x^α) (chamado cartesiano) no qual os campos de Killing X^a são da forma:

$$\begin{aligned} X^0 &\doteq 0, \\ X^\alpha &\doteq w_\beta^\alpha x^\beta, \\ w_{\alpha\beta} &= -w_{\beta\alpha}. \end{aligned}$$

A quantidade $w_{\alpha\beta}$ depende de três parâmetros que especificam três rotações espaciais. Os resultados levam a uma forma canônica para o elemento de linha. O cálculo é bastante detalhado, portanto, procederemos de maneira diferente e apresentaremos um argumento heurístico para determinar a forma do elemento de linha.

Intuitivamente, a simetria esférica significa que existe um ponto privilegiado, chamado de origem O , de modo que o sistema é invariante sob rotações espaciais resultará em P varrendo uma esfera bidimensional centrada em O . Podemos então introduzir uma coordenada axial, ϕ , e uma coordenada azimutal, θ , na esfera de maneira usual. Largando uma perpendicular de P ao plano equacional, ($z = 0$) em Q , então ϕ é o ângulo que OQ faz com o eixo positivo $-x$ e θ é o ângulo que OP faz com o eixo z positivo, Figura 8. Todos os pontos na esfera bidimensional serão cobertos pelos intervalos de coordenadas:

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad (2.72)$$

$$-\pi < \phi \leq \pi. \quad (2.73)$$

Além disso, o elemento de linha da esfera bidimensional é:

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (2.74)$$

É natural assumir que, em quatro dimensões, podemos aumentar θ e ϕ com uma coordenada tipo tempo arbitrária t e algum parâmetro do tipo radial r , de modo que o elemento de linha se reduz à forma (2.74) em uma esfera bidimensional $t = \text{constante}$, $r = \text{constante}$. A simetria esférica requer que o elemento de linha no formato $(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)$. Além disso, usando um argumento análogo ao que usamos no início da seção 2.2.2, não pode haver termos cruzados em $d\theta$ ou $d\phi$ porque a métrica deve ser invariável separadamente sob as reflexões:

$$\theta \rightarrow \theta' = \pi - \theta \quad (2.75)$$

e

$$\phi \rightarrow \phi' = -\phi \quad (2.76)$$

Nosso ansatz inicial, então, é que existe um sistema de coordenadas espacial,

$$(x^\alpha) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi)$$

em que o elemento de linha tem a forma:

$$ds^2 = A dt^2 - 2B dt dr - C dr^2 - D(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (2.77)$$

onde A, B, C e D ainda são funções indeterminadas de t e r , isto é,

$$A = A(t, r), \quad B = B(t, r), \quad C = C(t, r), \quad D = D(t, r).$$

Se introduzirmos uma nova coordenada radial pela transformação:

$$f \rightarrow r' = D^{1/2},$$

então (2.77) torna-se:

$$ds^2 = A'(t, r')dt^2 - 2B'(t, r')dtdr' - C'(t, r')dr'^2 - r'^2(d\theta^2 + \text{sen}^2d\phi^2). \quad (2.78)$$

Considere o diferencial:

$$A'(t, r')dt - B'(t, r')dr'.$$

A teoria das equações diferenciais ordinárias nos diz que sempre podemos multiplicar isso por um fator de integração, $I = I(t, r')$, o que torna um diferencial perfeito. Usamos esse resultado para definir uma nova coordenada de tempo t' exigindo:

$$dt' = I(t, r')[A'(t, r')dt - B'(t, r')dr'].$$

Elevando ao quadrado, obtemos:

$$dt'^2 = I^2(A'^2dt^2 - 2A'B'dtdr' + B'^2dr'^2),$$

e então,

$$A'dt^2 - 2B'dtdr' = A'^{-1}I^{-2}dt'^2 - A'^{-1}B'^2dr'^2,$$

e o elemento de linha (2.78), torna-se:

$$ds^2 = A'^{-1}I^{-2}dt'^2 - (C' - A'^{-1}B'^2)dr'^2 - r'^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2).$$

Definindo as duas novas funções ν e λ , por:

$$A'^{-1}I^{-2} = e^\nu, \quad (2.79)$$

e

$$C' - A'^{-1}B'^2 = e^\lambda, \quad (2.80)$$

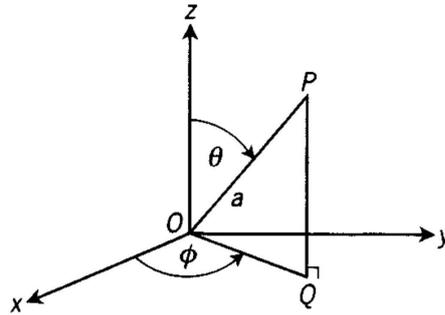
finalmente obtemos a forma:

$$ds^2 = e^\nu dt'^2 - e^\lambda dr'^2 - r'^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (2.81)$$

onde

$$\nu = \nu(t, r), \quad \lambda = \lambda(t, r).$$

As definições de ν e λ em (2.79) e (2.80) são em termos de exponenciais, o que, por serem sempre positivos, garante que a assimetria da métrica seja -2 . De fato, há argumentos rigorosos que confirmam que o elemento de linha esfericamente simétrico mais geral em quatro dimensões (com assinatura -2) pode ser escrito na forma canônica (2.81).

FIGURA 8 – As coordenadas esféricas padrão θ e ϕ .

Fonte: R. D’Inverno - *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, 1998.

2.2.4 A Solução Schwarzschild

Agora usamos as equações de campo de vácuo de Einstein para determinar as funções desconhecidas ν e λ em (2.81) a métrica covariante é:

$$g_{ab} = \text{diag}(e^\nu, -e^\lambda, -r^2, -r^2 \text{sen}^2\theta) \quad (2.82)$$

e, como a métrica é diagonal, sua forma contravariante é:

$$g^{ab} = \text{diag}(e^{-\nu}, -e^{-\lambda}, -r^{-2}, -r^{-2} \text{sen}^{-2}\theta). \quad (2.83)$$

Se denotarmos as derivadas em relação a t e r por ponto e linha, respectivamente, os componentes não nulos do tensor de Einstein são:

$$G_0^0 = e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (2.84)$$

$$G_0^1 = -e^\lambda r^{-1} \dot{\lambda} = -e^{\lambda-\nu} G_1^0, \quad (2.85)$$

$$G_1^1 = -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (2.86)$$

$$G_2^2 = G_3^3 = \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\frac{\nu' \lambda'}{2} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'}{r} - \frac{\nu'^2}{2} - \nu'' \right) + \frac{1}{2} e^{-\nu} \left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{2} \right). \quad (2.87)$$

As identidades contraídas de Bianchi revelam que a equação (2.87) desaparece automaticamente se as equações (2.84), (2.85) e (2.86) desaparecem. Portanto, existem três equações independentes a serem resolvidas, a saber,

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0, \quad (2.88)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) = 0, \quad (2.89)$$

$$\dot{\lambda} = 0. \quad (2.90)$$

Somando (2.88) e (2.89), obtemos:

$$\lambda' + \nu' = 0$$

e integrando dá:

$$\lambda + \nu = h(t), \quad (2.91)$$

onde h é uma função arbitrária da integração. Aqui, λ é puramente uma função de r por (2.90), e então é simplesmente uma equação diferencial ordinária, que escrevemos:

$$e^{-\lambda} - r e^{-\lambda} \lambda' = 1,$$

ou equivalentemente

$$(r e^{-\lambda})' = 1.$$

Integrando, obtemos:

$$r e^{-\lambda} = r + \text{constante}.$$

Escolhendo a constante de integração como $-2m$, para conveniência posterior, obtemos:

$$e^{\lambda} = (1 - 2m/r)^{-1}. \quad (2.92)$$

Portanto, nesta fase, a métrica foi reduzida em (2.91) e (2.92), para:

$$g_{ab} = \text{diag}[e^{h(t)}(1 - 2m/r), (1 - 2m/r)^{-1}, -r^2, -r^2 \text{sen}^2\theta]. \quad (2.93)$$

O estágio final é eliminar $h(t)$. Isso é feito transformando para uma nova coordenada t' , isto é, $t \rightarrow t'$, onde t' é determinado pela relação:

$$t' = \int_c^t e^{\frac{1}{2}h(u)} du, \quad (2.94)$$

onde c é uma constante arbitrária. Em seguida, o único componente da métrica com a mudança é:

$$g'_{00} = (1 - 2m/r).$$

Mostramos que sempre é possível encontrar um sistema de coordenadas no qual a solução esfericamente simétrica mais geral das equações de campo do vácuo é:

$$ds^2 = (1 - 2m/r) dt^2 - (1 - 2m/r)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (2.95)$$

Este é o famoso elemento de linha de Schwarzschild.

2.2.5 Propriedades da solução de Schwarzschild

Restringimos a atenção para a região externa $r > 2m$, onde as coordenadas t e r são tipo tempo e ao espaço, respectivamente. É imediato a partir de (2.95) que $g_{ab,0} \doteq 0$, e portanto a solução é estacionária. Além disso, as coordenadas são adaptadas ao campo vetorial de Killing, $X^a \doteq \delta_0^a$. Como:

$$X_a = g_{ab}X^b \doteq g_{ab}\delta_0^b = g_{0a} = g_{00}\delta_a^0 = (1 - 2m/r, 0, 0, 0),$$

vemos que X^a é hipersuperfície-ortogonal, isto é, $X_a = \lambda f_{,a}$, com:

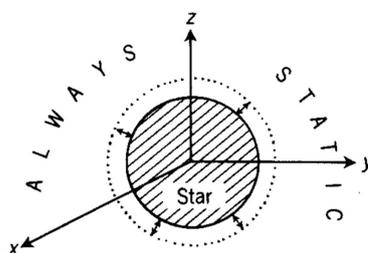
$$\lambda = X^2 \doteq g_{00} \quad e \quad f(x^a) \doteq t = \text{constante}.$$

Assim, o campo vetorial tipo tempo X^a é hipersuperfície ortogonal à família das hipersuperfícies, $t = \text{constante}$ e, portanto, a solução é estática e t é uma linha mundo. Alternativamente, é de forma imediata de (2.95) que a solução é simétrica no tempo, uma vez que é invariante sob a reflexão do tempo, $t \rightarrow t' = -t$, e invariante na conversão no tempo, uma vez que é invariante na transformação, $t \rightarrow t' = t + \text{constante}$, e novamente é estática. Assim, provamos o seguinte resultado inesperado.

Teorema de Birkhoff's : Uma solução de vácuo esféricamente simétrica na região externa é necessariamente estática.

Isso é inesperado, porque na teoria newtoniana a simetria esférica não tem nada a ver com dependência do tempo. Isso destaca o caráter especial das equações diferenciais parciais não lineares e as soluções que elas admitem. Em particular, o teorema de Birkhoff implica que, se uma fonte esférica simétrica como uma estrela muda de forma, mas o faz sempre esférica simétrica, não pode prorrogar distúrbios no espaço circundante. Olhando para o futuro, isso significa que uma estrela esférica simétrica pulsante não pode emitir ondas gravitacionais (Figura 9).

FIGURA 9 – Uma estrela esférica pulsante não pode emitir ondas gravitacionais.



Fonte: R. D'Inverno - *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford University Press, 1998.

Se uma fonte esférica simétrica estiver restrita à região $r \leq a$ para alguma $a > 2m$, a solução externa de Schwarzschild não é necessariamente esférica simétrica, Alguns contra-exemplos são conhecidos. Assim, em geral, uma fonte não precisa herdar a simetria de seu campo externo.

Se tomarmos o limite de (2.95) como $r \rightarrow \infty$, obteremos a métrica do espaço plano da relatividade espacial em coordenadas polares esféricas, isto é,

$$ds^2 = dt^2 dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (2.96)$$

Temos, portanto, que uma solução a vácuo esfericamente simétrica é necessariamente assintoticamente plana. Alguns autores obtêm as soluções de Schwarzschild a partir das suposições iniciais de que a solução é esfericamente simétrica, estática e assintoticamente plana. No entanto, como vimos, não há necessidade de adotar essas duas últimas premissas como prioritárias, porque as equações de campo as impõem a você. Vamos tentar uma interpretação da constante m que aparece na solução, considerando que a teoria newtoniana dá origem a um potencial $\phi = -GM/r$. Inserir isso no limite de campo fraco

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} + O(v/c),$$

dá:

$$g_{00} \simeq 1 + 2\phi/c^2 = 1 - 2GM/c^2 r, \quad (2.97)$$

e, comparando isso com (2.95), vemos que:

$$m = GM/c^2, \quad (2.98)$$

em unidades não relativísticas. Em outras palavras, se interpretarmos a solução de Schwarzschild como devido a uma partícula pontual situada na origem, a constante m é simplesmente a massa do buraco em unidades relativísticas. É evidente a partir de (2.95) que m tem as dimensões do comprimento. Às vezes é conhecida como massa geométrica. Terminamos esta seção resumindo as propriedades que encontramos. A solução de Schwarzschild:

1. é esfericamente simétrica;
2. é estacionária;
3. possui coordenadas adaptadas ao campo vetorial de Killing tipo tempo X^a ;
4. é estática \Leftrightarrow é simétrica e o tempo é invariante na conversão de tempo;
5. é estática \Leftrightarrow tem um campo vetorial de Killing semelhante ao tempo hipersuperfície ortogonal como X^a ;
6. é assintoticamente plana;
7. tem massa geométrica $m = GMc^{-2}$.

2.2.6 Coordenadas Isotrópicas

Nesta seção, buscamos um conjunto alternativo de coordenadas em que as partes de tempo $t = \text{constante}$, são o mais próximo possível do espaço tridimensional euclidiano. Mais especificamente, tentamos escrever o elemento de linha na forma:

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)d\sigma^2,$$

onde $d\sigma^2$ é o elemento de linha do espaço tridimensional euclidiano, a saber,

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

em coordenadas cartesianas, ou equivalentemente,

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}^2\theta d\phi^2,$$

em coordenadas polares esféricas. Nessa forma, a métrica na parte $t = \text{constante}$ é conforme à métrica do espaço tridimensional euclidiano e, portanto, os ângulos entre vetores e proporções de comprimentos são os mesmos para cada métrica.

Consideramos uma transformação na qual as coordenadas θ , ϕ e t permanecem inalteradas

$$r \rightarrow \rho = \rho(r), \quad (2.99)$$

para que ρ seja alguma outra coordenada radial e tentamos colocar a solução na forma:

$$ds^2 = (1 - 2m/r)dt^2 - [\lambda(\rho)]^2[d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)]. \quad (2.100)$$

Poderíamos considerar como (2.95) usando a transformação (2.99), mas é mais fácil proceder da seguinte forma. Comparando (2.100) com (2.95), os coeficientes de $d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2$ devem ser iguais, o que requer

$$r^2 = \lambda^2 \rho^2. \quad (2.101)$$

Igualar os dois elementos radiais produz:

$$(1 - 2m/r)^{-1}dr^2 = \lambda^2 d\rho^2. \quad (2.102)$$

Eliminando λ e criando raízes quadradas, encontramos

$$\frac{dr}{(r^2 - 2mr)^{1/2}} = \pm \frac{d\rho}{\rho}. \quad (2.103)$$

Esta é uma equação diferencial ordinária na qual as variações são separadas. Como exigimos $\rho \rightarrow \infty$ e $r \rightarrow \infty$, pegamos o sinal positivo e, pela integração, encontramos:

$$r = \rho \left(1 + \frac{1}{2}m/\rho \right)^2 \quad (2.104)$$

e assim, de (2.101),

$$\lambda^2 = \left(1 + \frac{1}{2}m/\rho\right)^4 \quad (2.105)$$

Usando (2.104) para eliminar r , descobrimos que a solução de Schwarzschild pode ser escrita da seguinte **forma isotrópica**:

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{1}{2}m/\rho\right)^2}{\left(1 + \frac{1}{2}m/\rho\right)^2} dt^2 - \left(1 + \frac{1}{2}m/\rho\right)^4 [d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)]. \quad (2.106)$$

2.3 TESTES EXPERIMENTAIS DA RELATIVIDADE GERAL

Nesta seção consideraremos o status experimental da Relatividade Geral. Veremos que o status é muito diferente daquele da relatividade especial, que foi submetida a uma série de testes diferentes. De fato, existem poucas teorias cuja base experimental foi tão bem estabelecida. Por outro lado, existem pouquíssimos testes da teoria geral. A principal razão para esse pequeno número é que os campos gravitacionais experimentados em nossa localidade são muito fracos e seus efeitos não são significativamente diferentes dos campos newtonianos correspondentes. Também é discutível até que ponto os testes que temos são testes do conjunto particular de equações de campo da relatividade geral, em oposição a afirmações muito mais fracas, como o princípio da equivalência.

Os primeiros testes da teoria foram os três "testes clássicos" da Relatividade Geral, a saber, a precessão do periélio de Mercúrio, a inclinação da luz e o desvio para o vermelho gravitacional. Esses testes foram aumentados mais recentemente por um quarto teste clássico, o atraso de um sinal de luz em um campo gravitacional. Talvez o teste mais significativo da teoria envolva o movimento orbital do pulsar binário PSR 1913+16, devido à sua indicação indireta de radiação gravitacional. Parece provável que os testes que se mostrem mais conclusivos sejam os que ocorrem de maneira cosmológica, em particular, através da possível detecção de buracos negros e ondas gravitacionais.

Provavelmente, houve pelo menos uma série de teorias relativísticas alternativas da gravitação propostas desde o advento da Relatividade Geral. Essas são as teorias alternativas clássicas. O que mais chamou a atenção até hoje é a teoria de Brans-Dicke, especialmente dos anos 1960, quando houve uma detecção relatada de oblatidade solar. Vamos considerar brevemente a história sobre oblatidade solar nesta seção. Terminaremos com uma breve cosmologia dos principais eventos experimentais ou observacionais relacionados à Relatividade Geral. Embora os testes experimentais sejam poucos, os que existem apoiam a Relatividade Geral como a melhor e mais simples teoria clássica que temos.

2.3.1 Movimento Clássico de Kepler

Primeiro, revisaremos o problema clássico de Kepler, a saber, o movimento de uma partícula de teste no campo gravitacional de um corpo maciço, antes de considerar sua contraparte relativista geral. Parte da suposição de que uma partícula de massa m se move sob a influência de uma força de lei quadrada inversa cujo centro de atração está na origem O , isto é,

$$F = -m \frac{\mu}{r^2} \hat{r}, \quad (2.107)$$

onde μ é uma constante. Então a segunda lei de Newton é:

$$m\hat{r} = -m \frac{\mu}{r^2} \hat{r}. \quad (2.108)$$

O momento angular de m é definido como:

$$L = r \times m\dot{r}, \quad (2.109)$$

e, então:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \dot{r} \times m\dot{r} + r \times m\ddot{r} \\ &= r \times \left(-m \frac{\mu}{r^2} \hat{r} \right) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.110)$$

onde os produtos cruzados de \dot{r} com ele e r com \hat{r} desaparecem porque os vetores são paralelos. Portanto, o momento angular é conservado e

$$L = mh, \quad (2.111)$$

onde h é um vetor constante. Supondo $h \neq 0$, segue de (2.109) que r é sempre perpendicular à h , e portanto, a partícula é restrita a se mover em um plano. Se introduzirmos coordenadas polares planas (R, ϕ) , então a equação de movimento (2.108) se tornará:

$$(\ddot{R} - R\dot{\phi}^2)\hat{R} + \frac{1}{R} \frac{d}{dt}(R^2\dot{\phi})\hat{\phi} = -\frac{\mu}{R^2}\hat{R}. \quad (2.112)$$

Tomando o produto escalar com $\hat{\phi}$ e integrá-lo produz:

$$R^2\dot{\phi} = h, \quad (2.113)$$

que é novamente a conservação do momento angular, onde h é a magnitude do momento angular por unidade de massa. Levando o produto escalar com \hat{R} ao longo de (2.112) dá:

$$\ddot{R} - R\dot{\phi}^2 = -\frac{\mu}{R^2}. \quad (2.114)$$

Estamos interessados em obter a equação da órbita da partícula, que no plano de coordenadas polares é

$$R = R(\phi). \quad (2.115)$$

Se introduzirmos a nova variável $u = R^{-1}$, isso pode ser escrito como $u = u(\phi)$. Encontramos:

$$\begin{aligned} \dot{R} = \frac{dR}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{u} \right) \\ &= -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} \\ &= -\frac{1}{u^2} h u^2 \frac{du}{d\phi} \\ &= -h \frac{du}{d\phi} \end{aligned}$$

por (2.113). Similarmente,

$$\ddot{R} = -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\phi^2}, \quad (2.116)$$

e então (2.114) torna-se a Equação de Binet:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{\mu}{h^2}. \quad (2.117)$$

A equação de Binet é a equação diferencial orbital da partícula e tem solução:

$$u = \frac{\mu}{h^2} + C \cos(\phi - \phi_0), \quad (2.118)$$

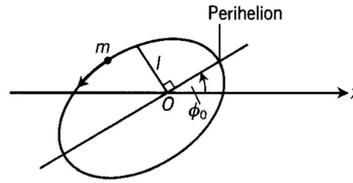
onde C e ϕ_0 são constantes. Isso pode ser escrito em termos de R como:

$$\frac{l}{R} = 1 + e \cos(\phi - \phi_0), \quad (2.119)$$

onde $l = h^2/\mu$ e $e = Ch^2/\mu$. Esta é a equação polar de uma seção cônica na qual l (lateral semi-reta ou semi-latus rectum) determina a escala, e (excentricidade) a forma, e ϕ_0 a orientação (em relação ao eixo-x). Em particular, se $0 < e < 1$, então a canônica é uma elipse, Figura 10, e o ponto de aproximação mais próximo da origem é chamado **periélio**. O movimento de uma partícula de teste no campo de um corpo massivo é chamado de **problema de um corpo**. Estabeleceremos o resultado clássico de que, na teoria newtoniana, o problema de dois corpos de massa de dois pontos que se movem sob sua atração gravitacional mútua pode ser reduzida a um problema de um corpo. Considere duas massas m_1 e m_2 com os vetores de posição r_1 e r_2 , respectivamente. (Figura 11) Definimos o vetor de posição de m_1 (digamos) em relação a m_2 por:

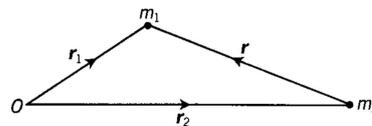
$$r = r_1 - r_2.$$

FIGURA 10 – Movimento de Kepler em uma elipse.



Fonte: R. D’Inverno - *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, 1998.

FIGURA 11 – O problema dos dois corpos.



Fonte: R. D’Inverno - *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, 1998.

Se F_{12} é a força em m_1 devido a m_2 , e F_{21} a força em m_2 devido a m_1 , então pela terceira lei de Newton,

$$F_{21} = -F_{12}. \quad (2.120)$$

Usando a segunda lei de Newton, (2.120), e a lei universal da gravitação $F = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$, obtemos:

$$F_{12} = m_1 \ddot{r}_1 = -m_2 \ddot{r}_2 = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \hat{r},$$

e então

$$\ddot{r} = \ddot{r}_1 - \ddot{r}_2 = -\frac{G m_2}{r^2} \hat{r} - \frac{G m_1}{r^2} \hat{r} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^2} \hat{r}.$$

Finalmente encontramos que a equação de movimento pode ser escrito como :

$$F_{12} = m \ddot{r} = -m \frac{\mu}{r^2} \hat{r}, \quad (2.121)$$

onde m , a **massa reduzida**, é dada por:

$$m = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \quad (2.122)$$

e

$$\mu = G(m_1 + m_2). \quad (2.123)$$

Comparando (2.121) com (2.108), vemos que esse é o problema de um corpo que discutimos anteriormente. No modelo mais simples de movimento planetário, consideramos m_2 como a massa do sol e m_1 como a massa do planeta. Então, adequadamente interpretado, o movimento de um planeta é novamente uma elipse de Kepler.

2.3.2 Avanço do periélio de Mercúrio

Agora, examinamos o problema do corpo único na relatividade geral. Assumimos que o corpo maciço central produz um campo gravitacional esfericamente simétrico. A solução apropriada na relatividade geral é então a solução de Schwarzschild. Além disso, uma partícula de teste se move em uma geodésica tipo tempo, e assim começamos estudando algumas das geodésicas da solução de Schwarzschild. A abordagem mais simples é empregar o método variacional. Deixando um ponto denotar diferenciação em relação ao tempo próprio τ , descobrimos então, para geodésicas tipo tempo,

$$2K = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 = 1. \quad (2.124)$$

Em seguida, elaboramos as equações de Euler-Lagrange. É suficiente restringir a atenção às três equações mais simples, que são dadas quando $a = 0, 2, 3$ em $\frac{\partial K}{\partial x^a} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial K}{\partial \dot{x}^a} = 0$, e que são:

$$\frac{d}{d\tau} \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} \right] = 0, \quad (2.125)$$

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \dot{\theta}) - r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = 0, \quad (2.126)$$

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0. \quad (2.127)$$

Isso ocorre porque precisamos de quatro equações diferenciais para determinar nossas quatro incógnitas, a saber,

$$t = t(\tau), \quad r = r(\tau), \quad \theta = \theta(\tau), \quad \phi = \phi(\tau).$$

No entanto, (2.124) é ele próprio parte integrante do movimento e, juntamente com (2.125) - (2.127), fornecem as quatro equações necessárias. Vimos na teoria newtoniana que o movimento correspondente está confinado num plano. Vamos ver se o movimento plano é possível na relatividade geral. Especificamente, consideramos o movimento no plano equatorial $\theta = 1/2\pi$ (o plano (x, y)). Neste plano, $\dot{\theta} = 0$, e portanto, por (2.126), segue-se que $\ddot{\theta} = 0$. Diferenciando (2.126), podemos mostrar que todas as derivadas superiores de θ devem desaparecer também e, portanto, segue-se que o movimento planar é possível. Então (2.127) pode ser integrado diretamente para dar:

$$r^2 \dot{\phi} = h, \quad (2.128)$$

onde h é uma constante. Isso é conservação do momento angular (comparando com (2.113) e observando que, no plano equatorial, a coordenada polar esférica r é a mesma que a coordenada polar do plano R). Da mesma forma, (2.125) fornece:

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} = k \quad (2.129)$$

onde k é uma constante. Substituindo em (2.124), obtemos:

$$k^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2 = 1. \quad (2.130)$$

Prosseguimos como fizemos na teoria clássica e definimos $u = r^{-1}$, o que leva a:

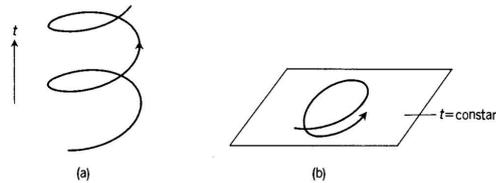
$$\dot{r} = -h \frac{du}{d\phi},$$

então, usando (2.128), encontramos (2.130), torna-se:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = \frac{k^2 - 1}{h^2} + \frac{2m}{h^2}u + 2mu^3. \quad (2.131)$$

Esta é uma equação diferencial de primeira ordem para determinar a órbita de uma partícula de teste ou mais precisamente usando a trajetória do projétil do corpo de teste (Figura 12), $t = \text{constante}$. Usaremos um método de aproximação para resolvê-lo.

FIGURA 12 – Movimento de uma partícula de teste (a) em um espaço-tempo e (b) projetado para $t = \text{constante}$.



Fonte: R. D’Inverno - *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, 1998.

Diferenciando (2.131), obtemos a equação de segunda ordem:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2 \quad (2.132)$$

Esta é a versão relativística da equação de Binet (2.117) e difere do resultado newtoniano pela presença do último termo. Para órbitas planetárias, este último termo é pequeno, porque a proporção dos dois termos no lado direito de (2.132) é de $3h^2/r^2$, o que para Mercúrio, por exemplo, é igual a 10^{-7} . Nesta suposição, podemos resolver a equação aproximadamente por um método de perturbação. Introduzimos o parâmetro:

$$\epsilon = \frac{3m^2}{h^2}, \quad (2.133)$$

que em unidades não-relativísticas é adimensional (lembre-se que definimos $c = 1$). Se denotarmos diferenciação em relação à ϕ por um primo, então (2.132) se tornará:

$$u'' + u = \frac{m}{h^2} + \epsilon \left(\frac{h^2 u^2}{m}\right). \quad (2.134)$$

Assumimos que isso tem uma solução da forma:

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + O(\epsilon^2). \quad (2.135)$$

Substituindo em (2.134), encontramos:

$$u_0'' + u_0 - \frac{m}{h^2} + \epsilon \left(u_1'' + u_1 - \frac{h^2 u_0^2}{m} \right) + O(\epsilon^2) = 0. \quad (2.136)$$

Se igualarmos os coeficientes de potências diferentes de ϵ a zero, então a solução de ordem zero u_0 é a seção canônica usual (2.118):

$$u_0 = \frac{m}{h^2} (1 + e \cos \phi),$$

onde, por conveniência, pegamos $\phi_0 = 0$. A equação de primeira ordem é:

$$u_1'' + u_1 = \frac{h^2}{m} u_0^2, \quad (2.137)$$

e assim substituindo por u_0 obtemos:

$$\begin{aligned} u_1'' + u_1 &= \frac{m}{h^2} (1 + e \cos \phi)^2 \\ &= \frac{m}{h^2} (1 + 2e \cos \phi + e^2 \cos^2 \phi) \\ &= \frac{m}{h^2} \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \right) + \frac{2me}{h^2} \cos \phi + \frac{me^2}{2h^2} \cos 2\phi. \end{aligned} \quad (2.138)$$

Se tentarmos uma solução específica da forma:

$$u_1 = A + B \phi \sin \phi + C \cos 2\phi, \quad (2.139)$$

então encontramos,

$$A = \frac{m}{h^2} \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \right), \quad B = \frac{me}{h^2}, \quad C = -\frac{me^2}{6h^2}. \quad (2.140)$$

Assim, a solução geral de (2.134) a primeira ordem é:

$$u \simeq u_0 + \epsilon \frac{m}{h^2} \left[1 + e \phi \sin \phi + e^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2\phi \right) \right]. \quad (2.141)$$

A conexão mais importante para u_0 é o termo que envolve $e \phi \sin \phi$, porque após cada revolução ele se torna cada vez maior. Se negligenciarmos as outras correções, isso se tornará:

$$u \simeq \frac{m}{h^2} [1 + e \cos \phi + \epsilon e \phi \sin \phi],$$

ou

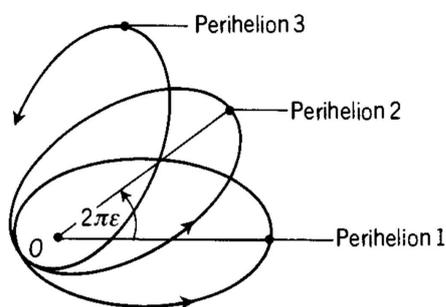
$$u \simeq \frac{m}{h^2} [1 + e \cos[\phi(1 - \epsilon)]], \quad (2.142)$$

novamente negligenciando os termos da ordem ϵ^2 . Assim, a órbita do corpo de teste é apenas aproximadamente uma elipse. A órbita ainda é periódica, mas não mais do período 2π ; mas sim do período:

$$\frac{2\pi}{1 - \epsilon} \simeq 2\pi(1 + \epsilon). \quad (2.143)$$

Em termos intuitivos simples, um planeta viaja em uma elipse, mas o eixo da elipse gira, movendo-se em uma quantidade de $2\pi\epsilon$ entre dois pontos de aproximação mais próxima, esta é a famosa **precessão do periélio** (Figura13).

FIGURA 13 – Precessão do periélio.



Fonte: R. D'Inverno - *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford University Press, 1998.

Em unidades não-relativísticas, isso se torna:

$$2\pi\epsilon \simeq \frac{24\pi^3 a^2}{c^2 T^2 (1 - e^2)}, \quad (2.144)$$

onde a é o eixo semi-principal da elipse e T é o período da órbita.

Agora, de fato, na teoria newtoniana, há também um avanço do periélio. Isso ocorre porque o sistema planetário não é um sistema de dois corpos, mas um sistema de um corpo, e todos os outros planetas produzem um efeito de perturbação no movimento de um planeta em particular (efeito semelhante à perturbação em (2.132)). Por exemplo, o planeta Júpiter produz uma perturbação mensurável porque sua massa é relativamente grande, sendo cerca de 0,1% do Sol. Mercúrio tem uma órbita com alta excentricidade e pequeno período (2.144), e a posição do periélio pode ser determinada com precisão pelo observador. Antes da relatividade geral, havia uma discrepância entre a previsão clássica e a mudança observada de cerca de 43 segundos de arco por século. Embora essa seja uma diferença muito pequena, é muito significativa em uma escala astrofísica e representa cerca de cem vezes o provável erro observacional. Essa discrepância preocupava os astrônomos desde meados do século passado. De fato, na tentativa de explicar a discrepância, sugeriu-se a existência de outro planeta, que recebeu o nome de Vulcano, cuja órbita estava dentro da órbita de Mercúrio. (De fato, há um famoso incidente de sua "observação" relatada por um astrônomo francês). No

entanto, Vulcano não existe, e a relatividade geral parece explicar a discrepância, pois fornece uma previsão teórica de 42,98 segundos de arco por século. A concordância da precessão residual do periélio com os outros planetas não é tão acentuada por que suas procissões observadas são muito pequenas e alguns dos dados observacionais envolvidos não são suficientemente precisos. Uma exceção é uma medida em 1971 da precessão residual do planeta Icarus, que mais uma vez está de acordo com os valores previstos da relatividade geral. Como aparece na tabela:

TABELA 1 – Valores teóricos e de observação da precessão residual do periélio

Planeta	Predição GR	Observado
Mercúrio	43.0	43.1 ± 0.5
Vênus	8.6	8.4 ± 4.8
Terra	3.8	5.0 ± 1.2
Icarus	10.3	9.8 ± 0.8

Fonte: R. D'Inverno - *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford University Press, 1998.

2.3.3 Curvatura da Luz

Em seguida, consideraremos o caso da trajetória de um raio de luz em um campo gravitacional esfericamente simétrico. O cálculo é essencialmente o mesmo que o indicado na última seção, exceto que um raio de luz viaja em uma geodésica nula, e portanto, um ponto agora denota diferenciação em relação a um parâmetro afim e o lado direito de (2.124) é zero. O análogo de (2.132) é encontrado como:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3mu^2. \quad (2.145)$$

No limite da relatividade especial, m desaparece e a equação se torna:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 0, \quad (2.146)$$

cuja solução geral pode ser escrita na forma:

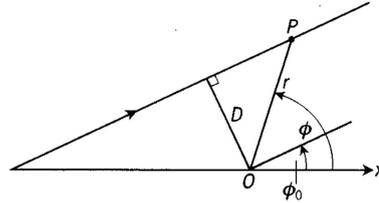
$$u = \frac{1}{D} \text{sen}(\phi - \phi_0), \quad (2.147)$$

onde D é uma constante. Esta é a equação de uma linha reta, pois ϕ vai de ϕ_0 à $\phi_0 + \pi$, onde D é a distância da aproximação mais próxima da origem. O movimento da linha reta (Figura 14) é o mesmo que é previsto pela teoria newtoniana.

A equação de um raio de luz no espaço-tempo de Schwarzschild (2.145) pode novamente ser pensada como uma perturbação da equação clássica (2.146). Entretanto, desta vez tratamos a quantidade sem dimensões mu ou m/r como pequena. Portanto, buscamos uma solução de aproximação da forma:

$$u = u_0 + 3mu_1, \quad (2.148)$$

FIGURA 14 – Movimento em linha reta de um raio de luz na relatividade esférica.



Fonte: R. D’Inverno - *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, 1998.

onde u_0 é a solução (2.147). Novamente, por conveniência, podemos tornar $\phi_0 = 0$. Então, se negligenciarmos os termos de ordem $(mu)^2$, e a equação para u_1 se torna:

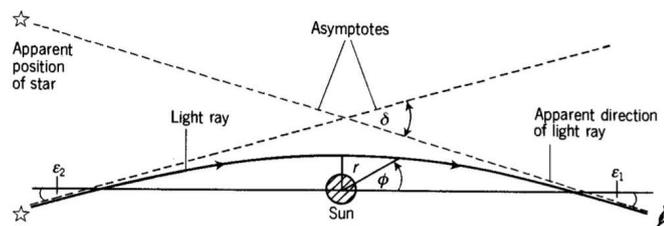
$$u_1'' + u_1 = u_0^2 = \frac{\text{sen}^2 \phi}{D^2}. \quad (2.149)$$

Isso tendo $(1 + C \cos \phi + \cos^2 \phi)/3D^2$ como solução, onde C é uma constante arbitrária de integração e, portanto, a solução geral de (2.145) é aproximadamente:

$$u \simeq \frac{\text{sen} \phi}{D} + \frac{m(1 + C \cos \phi + \cos^2 \phi)}{D^2}. \quad (2.150)$$

Como m/D é pequeno, isso é claramente uma perturbação do movimento da linha reta. Estamos interessados em determinar o ângulo de deflexão, diz δ , para um raio de luz na presença de uma fonte esférica simétrica, como o Sol. Muito longe da fonte, $r \rightarrow \infty$ e portanto $u \rightarrow 0$, que requer que o lado direito de (2.150) desapareça. Vamos tomar os valores de ϕ para os quais $r \rightarrow \infty$, ou seja, os ângulos das assíntotas, sejam $-\epsilon_1$ e $\pi + \epsilon_2$, respectivamente, como mostra a FIGURA 15.

FIGURA 15 – Deflexão da luz em um campo gravitacional.



Fonte: R. D’Inverno - *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, 1998.

Usando as fórmulas de ângulo pequeno para ϵ_1 e ϵ_2 , obtemos:

$$\begin{aligned} -\frac{\epsilon_1}{D} + \frac{m}{D^2}(2 + C) &= 0, \\ -\frac{\epsilon_2}{D} + \frac{m}{D^2}(2 - C) &= 0 \end{aligned}$$

Adicionando, encontramos:

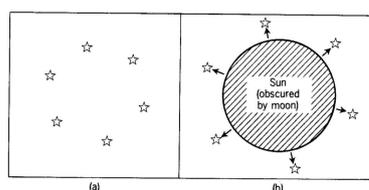
$$\delta = \epsilon_1 + \epsilon_2 = \frac{4m}{D}, \quad (2.151)$$

ou, em unidades não-relativísticas,

$$\delta = \frac{4GM}{c^2 D} \quad (2.152)$$

A deflexão prevista para um raio de luz que apenas toca o Sol é de 1,75 segundos de arco. Tentativas foram feitas para medir essa deflexão em um momento de eclipse total, quando a luz do Sol é bloqueada pela Lua, para que a posição aparente das estrelas possa ser registrada. Então, se as fotografias de um campo estelar nas proximidades do Sol em um momento de eclipse total forem comparadas com fotografias da mesma região do céu tiradas no momento em que o Sol não estiver presente, elas revelam que as estrelas parecem se mover radialmente devido à deflexão da luz (Figura 16).

FIGURA 16 – Posição das estrelas em um campo (a) quando o sol está ausente e (b) durante o eclipse total.



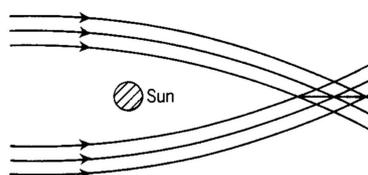
Fonte: R. D’Inverno - *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, 1998.

A primeira expedição a registrar um eclipse total foi em 1919, realizada no interior do Ceará, em Sobral, sob a liderança de Sir Arthur Eddington. O fato de isso ter ocorrido logo após o final da Primeira Guerra Mundial (e, além disso, que a expedição foi liderada por um cientista inglês tentando confirmar a teoria de um cientista alemão) capturou a imaginação de um mundo cansado da guerra. Quando Eddington relatou que as observações confirmaram a teoria de Einstein, tornando-se uma espécie de celebridade e os jornais da época traziam artigos populares tentando explicar como agora vivíamos em um mundo quadridimensional curvado. Einstein estava tão convencido de que sua teoria estava certa que, segundo relatos, ele teria sentido pena de Deus se as observações tivessem discordado da teoria. De fato, acredita-se agora que as observações não foram tão claras quanto pareciam, por causa de problemas associados a coroa solar, erros sistemáticos e emulsões fotográficas. Ao todo, foram realizadas sete tentativas de fazer mediações do eclipse. Os resultados variam acentuadamente de 0,7 à 1,55 vezes a previsão de Einstein. Portanto, o melhor que se pode dizer é que os resultados estão em concordância qualitativa com a previsão de Einstein, mas são incertos em termos de concordância quantitativa. Com o advento de grandes radiotelescópios e a descoberta de fontes pontuais chamadas **quasares** (objetos quase estelares), que emitem grandes quantidades de radiação eletromagnética, a deflexão agora pode ser medida usando técnicas interferométricas

quando essa fonte passa perto do Sol. As medições iniciais variam de $1,57$ a $1,82 \pm 0,2$ segundos de arco, mas uma melhoria significativa na precisão dessas medições deve ser possível.

Se considerarmos uma família de curvas que representam os raios de luz que se aproximam paralelamente de uma fonte distante, a presença de um objeto maciço como o Sol faz com que os raios de luz converjam e produzam uma linha cóustica no eixo $\phi = 0$. Dessa maneira, um campo gravitacional esférico simétrico atua como uma lente gravitacional (Figura 17).

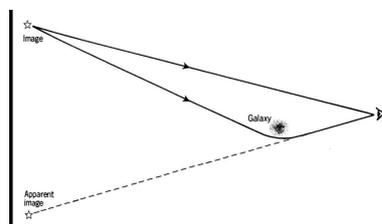
FIGURA 17 – O efeito de lente gravitacional de um campo de Schwarzschild.



Fonte: R. D’Inverno - *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, 1998.

Além disso, fontes distantes do tipo ponto podem produzir imagens duplas (Figura 18).

FIGURA 18 – Representação esquemática do efeito de imagem dupla da lente gravitacional.



Fonte: R. D’Inverno - *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, 1998.

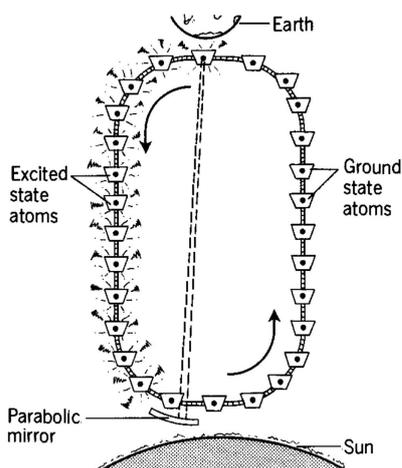
Houve um interesse considerável em 1980, quando os astrônomos relataram pela primeira vez a identificação do que anteriormente era considerado dois quasares distantes (conhecido como $0957 + 561A, B$), separados por 6 segundos de arco. A evidência é que existe uma galáxia, aproximadamente um quarto do caminho de nós até o quasar, que é o principal componente de uma lente gravitacional.

2.3.4 Desvio para o vermelho gravitacional

O terceiro teste clássico é o desvio gravitacional para o vermelho. Inicialmente, pensava-se ser um teste direto da relatividade geral, pois empregava a solução de Schwarzschild. No entanto, agora está claro que qualquer teoria relativística da gravitação consistente com o princípio da equivalência preverá um desvio para o vermelho. Esboçamos abaixo um experimento mental que leva diretamente à existência de um

desvio gravitacional para o vermelho. Considere uma cadeia interminável que ocorre entre a Terra e o Sol carregando baldes contendo átomos em um estado excitado de um lado e um número igual de átomos no estado fundamental do outro lado (FIGURA 19).

FIGURA 19 – Um perpetuum gravitacional móvel?



Fonte: R. D’Inverno - *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, 1998.

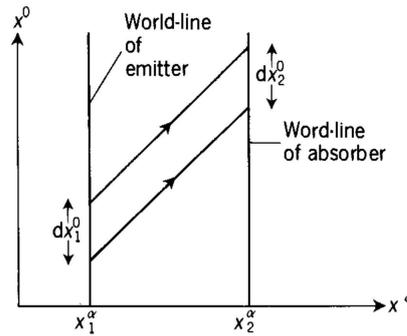
Como os átomos excitados possuem maior energia, eles devem ter maior massa (usando $E = mc^2$). Serão mais pesados que os átomos do estado fundamental e, pelo princípio da equivalência, cairão em direção ao Sol, cujo campo gravitacional predomina. Suponha que tenhamos um dispositivo que retorne um átomo que chega ao Sol ao seu estado fundamental, colete a energia emitida irradiada em um espelho e a reflita de volta à Terra, onde é usado para excitar um átomo que entra no estado fundamental. Em seguida, a corrente rotativa funcionará indefinidamente. Dessa maneira, construímos uma máquina móvel perpétua ou de **movimento perpétuo**. Tal dispositivo contradiz o princípio da conservação de energia, a pedra angular da física e, portanto, algo deve estar errado com o argumento. Ele se decompõe porque a radiação que chega à Terra não é suficientemente energética para excitar o átomo do estado fundamental. Em outras palavras, é desclassificado subindo o campo gravitacional: a radiação foi deslocada para o vermelho.

Devemos obter uma expressão quantitativa para a mudança vermelha no caso especial de um espaço-tempo estático. As coordenadas são tomadas para serem:

$$(x^a) = (x^0, x^\alpha),$$

onde x^0 é tempo mundo e x^α são coordenadas espaciais. Consideramos dois observadores carregando relógios atômicos ideais cuja linha mundo é $x^\alpha = x_1^\alpha$ e $x^\alpha = x_2^\alpha$, respectivamente (ver FIGURA 20).

FIGURA 20 – Emissão e recepção de cristas de ondas sucessivas de um sinal.



Fonte: R. D’Inverno - *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, 1998.

Deixe o primeiro observador possuir um sistema atômico que está enviando radiação ao segundo observador. Denotamos a separação do tempo entre as cristas de ondas sucessivas, medida pelo primeiro relógio por $d\tau$ em termos do tempo próprio e por dx_1^0 em termos do tempo de coordenadas. Resulta da definição de tempo próprio que:

$$d\tau^2 = g_{ab}(x_1^\alpha) dx_1^a dx_1^b = g_{00}(x_1^\alpha) (dx_1^0)^2, \quad (2.153)$$

já que g_{ab} só pode depender das coordenadas espaciais. Que o intervalo correspondente de recepção registrado pelo segundo observador seja $\alpha d\tau$ no tempo próprio e dx_2^0 no tempo coordenado. Da mesma forma,

$$(\alpha d\tau)^2 = g_{00}(x_2^\alpha) (dx_2^0)^2. \quad (2.154)$$

No entanto, a suposição de que o espaço-tempo é estático significa que:

$$dx_1^0 = dx_2^0, \quad (2.155)$$

porque, caso contrário, haveria um acúmulo ou esgotamento das cristas de ondas entre dois observadores, violando a suposição estática. Dividindo (2.153) e (2.154), encontramos:

$$\alpha = \left(\frac{g_{00}(x_1^\alpha)}{g_{00}(x_2^\alpha)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.156)$$

O fator α registra quantas vezes o segundo relógio passou entre a recepção das duas cristas de onda. Segue-se que, se o sistema atômico possui frequência característica ν_0 , o segundo observador medirá uma frequência para o primeiro relógio $\bar{\nu}_0$, onde:

$$\bar{\nu}_0 = \frac{\nu_0}{\alpha} = \nu_0 \left(\frac{g_{00}(x_1^\alpha)}{g_{00}(x_2^\alpha)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.157)$$

Então, em particular,

$$g_{00}(x_1^\alpha) < g_{00}(x_2^\alpha) \Rightarrow \bar{\nu}_0 < \nu_0, \quad (2.158)$$

o que significa que a frequência é deslocada para o vermelho. Definimos a **mudança de frequência**, para ser:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\bar{\nu}_0 - \nu_0}{\nu_0}, \quad (2.159)$$

que, no caso do limite de campo fraco $g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} + O(v/c)$, ou seja,

$$g_{00} \simeq 1 + \frac{2\phi}{c^2},$$

dá

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \simeq \frac{\phi_1 - \phi_2}{c^2}. \quad (2.160)$$

Observe que obtivemos essa expressão sem recorrer as equações de campo. No caso especial da solução de Schwarzschild, isso se torna em unidades não-relativísticas,

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \simeq -\frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (2.161)$$

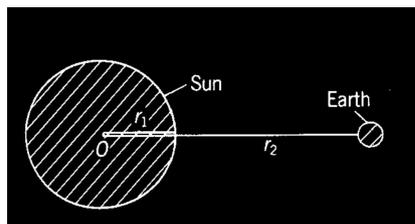
Então,

$$r_1 < r_2 \Rightarrow \Delta\nu < 0, \quad (2.162)$$

e assim a frequência é deslocada para o vermelho.

Se considerarmos r_1 como raio observado do Sol e r_2 como raio da órbita da Terra (FIGURA 21),

FIGURA 21 – Observação do deslocamento para o vermelho dos átomos perto da borda do Sol.



Fonte: R. D’Inverno - *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, 1998.

então (negligenciando o campo gravitacional da Terra):

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \simeq -2.12 \times 10^{-6}. \quad (2.163)$$

Observações dos espectros do Sol perto de sua borda dão resultados dessa ordem, mas há uma grande dificuldade em interpretar os resultados geralmente devido à falta de conhecimento da estrutura detalhada do Sol e da atmosfera solar. Comentários semelhantes são válidos sobre as anãs brancas, que, por causa de seus pequenos raios em comparação com suas massas, têm uma mudança mais pronunciada.

Como existem dificuldades associadas às medições astronômicas do desvio gravitacional para o vermelho, tem havido interesse na possibilidade de um teste terrestre. Essa é uma tarefa difícil, porque a mudança esperada em uma distância vertical de 100 pés, digamos, é apenas da ordem de 10^{-15} . Felizmente, a descoberta do efeito Mössbauer¹, em 1958, deu um método de produção e detecção de raios gama monocromáticos para 1 parte em 10^{12} , e portanto, viabiliza um teste terrestre. Pound e Rebka realizaram esse teste em 1960. Eles colocaram um emissor de raios gama na parte inferior de uma torre vertical de 72 pés com um observador na parte superior. Os raios gama emitidos na parte inferior sofreram um desvio gravitacional para o vermelho, foram observados menos favoravelmente. Movendo o emissor para cima a uma pequena velocidade medida, foi produzido um deslocamento Doppler compensatório que permite que os raios fossem absorvidos ressonantemente. O resultado experimental deu 0.997 ± 0.009 vezes o deslocamento previsto de 4.92×10^{-15} , isso é, concordância melhor que 1%. Outras experiências desde 1960 mediram a mudança na taxa de relógios atômicos transportados em aeronaves, foguetes e satélites; estes produziram concordância com as previsões teóricas quase na mesma ordem de precisão. Um exemplo é a mudança experimentada pelos sinais de rádio da sonda espacial Voyager I em seu vôo após Saturno em 1980. A precisão foi aumentada em mais duas ordens de magnitude em relação ao resultado de 1960 em 1976, quando um relógio de hidrogênio foi disparado em um foguete Scout para uma altitude de cerca de 10.000km e comparada com um relógio semelhante no chão. É intrigante notar que o comprimento do foguete Scout era quase exatamente o mesmo que a altura da torre do Laboratório de Física Jefferson da universidade de Havard usada para o experimento de 1960.

2.3.5 Atraso do tempo da luz

Um quarto teste que também pode ser considerado teste clássico de relatividade geral foi proposto por Shapiro em 1964. A ideia é usar métodos de radar para medir a viagem no tempo de um sinal de luz em um campo gravitacional. Como o espaço-tempo é curvado na presença de um campo gravitacional, esse tempo de viagem é maior do que seria no espaço plano, e a diferença pode ser testada experimentalmente.

Começamos considerando pelo caminho de um raio de luz no plano equatorial $\theta = \frac{1}{2}\pi$ no espaço-tempo de Schwarzschild onde, usando $ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)$:

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\phi^2 = 0. \quad (2.164)$$

¹ O efeito Mössbauer é um fenômeno descoberto pelo físico alemão Rudolf Mössbauer em 1957. Envolve emissão ressonante e sem recuo e absorção de fótons de radiação gama por átomos ligados em uma estrutura sólida e forma a base da espectroscopia Mössbauer.

Para encontrar o tempo de viagem de um raio de luz, precisamos eliminar ϕ em termos de r e, assim, obter uma equação diferencial para dt/dr . Poderíamos usar ou solucionar (2.150), mas, como trabalharemos apenas de primeira ordem em m/r , é suficiente adotar a aproximação linear:

$$r \operatorname{sen} \phi = D.$$

Diferenciando, temos:

$$r \cos \phi d\phi + dr \operatorname{sen} \phi = 0,$$

a fim de que

$$r d\phi = -\tan \phi dr$$

e

$$r^2 d\phi^2 = \tan^2 \phi dr^2 = \frac{D^2}{r^2 - D^2} dr^2. \quad (2.165)$$

Substituindo em (2.164), encontramos

$$dt^2 = \left(\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-2} + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \frac{D^2}{r^2 - D^2} \right) dr^2.$$

Expandindo em potências de m/r , temos, em primeira ordem,

$$\begin{aligned} dt^2 &\simeq \left(1 + \frac{4m}{r} + \left(1 + \frac{2m}{r}\right) \frac{D^2}{r^2 - D^2} \right) dr^2 \\ &= \left(\frac{r^2 + 4mr - 2mD^2/r}{r^2 - D^2} \right) dr^2 \\ &= \frac{r^2}{r^2 - D^2} \left(1 + \frac{4m}{r} - \frac{2mD^2/r}{r^3} \right) dr^2. \end{aligned}$$

Tomando raízes quadradas, obtemos:

$$dt \simeq \frac{\pm r}{(r^2 - D^2)^{1/2}} \left(1 + \frac{4m}{r} - \frac{2mD^2}{r^3} \right)^{1/2} dr,$$

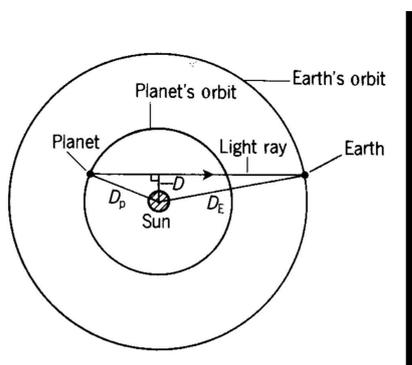
que, de novo na primeira ordem dá:

$$dt \simeq \frac{\pm r}{(r^2 - D^2)^{1/2}} \left(1 + \frac{2m}{r} - \frac{mD^2}{r^3} \right) dr. \quad (2.166)$$

Estamos interessados no tempo de viagem para um sinal entre um planeta e a Terra. Integrando, descobrimos que o tempo de viagem é:

$$\begin{aligned} T &= [(D_P^2 - D^2)^{1/2} + (D_E^2 - D^2)^{1/2}] \\ &+ 2m \ln \left\{ \frac{[(D_P^2 - D^2)^{1/2} + D_P][(D_E^2 - D^2)^{1/2} + D_E]}{D^2} \right\} \\ &- m \left[\frac{(D_P^2 - D^2)^{1/2}}{D_P} + \frac{(D_E^2 - D^2)^{1/2}}{D_E} \right], \end{aligned} \quad (2.167)$$

FIGURA 22 – Um raio de luz viajando de um planeta para a Terra no campo gravitacional do Sol.



Fonte: R. D’Inverno - *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, 1998.

onde D é a aproximação mais próxima do Sol, D_P é o raio da órbita do planeta e D_E é o raio da órbita da Terra (veja FIGURA 22).

O primeiro termo entre colchetes em (2.167) representa o resultado espaço plano (como deve ser claro na figura e também configuramos $m = 0$).

A verificação experimental do atraso consiste no envio de sinais de radar pulsado da Terra para Vênus e Mercúrio e cronometrando os ecos conforme as posições da Terra e do planeta mudam em relação ao Sol. Para Vênus, o atraso medido é de cerca de $200\mu s$, o que concorda com a previsão teórica superior a 5%.

2.3.6 Uma cronologia de eventos experimentais e observacionais

Terminamos as nossas considerações sobre a relatividade experimental em uma breve cronologia dos eventos experimentais e observacionais mais importantes relacionados à Relatividade Geral.

- **1919 Expedição Eclipse:** Realizada no interior do Ceará, em Sobral, que cientistas brasileiros e ingleses ajudaram o famoso físico alemão, Albert Einstein, a comprovar a Teoria da Relatividade Geral. Esta proeza foi alcançada em 29 de maio de 1919, com as fotografias de um eclipse solar, tiradas na cidade de Sobral e na Ilha do Príncipe (África), foram fundamentais para comprovar a deflexão da luz pela gravidade, prevista por essa teoria. Tendo grande repercussão na imprensa brasileira, européia e nos Estados Unidos, transformando Einstein em celebridade mundial. Completa 102 anos este ano a expedição em Sobral.
- **1922 Experimentos de equilíbrio de torção de Eötvös Expedição Eclipse:** Eötvös era um famoso físico experimental que mediu a correlação entre massa inercial e massa gravitacional, demonstrando que as duas eram a mesma coisa, com muita precisão. Um experimento muito preciso usando um equilíbrio de torção,

começando por volta de 1885, continuando em 1906 até 1922 quando Pekár e Fekete publicaram as medições completas do Equilíbrio de Eötvös, que é um dispositivo comumente usado hoje em prospecção procurando por concentrações de massas locais.

- **1936 Expedição Eclipse:** Expedição do Comitê Conjunto Permanente de Eclipse das Sociedades Astronômicas Reias e da Universidade de Aberdeen, que foi realizada em Osmk, observaram o eclipse solar total de 19 de junho de 1936, em excelentes condições.
- **1947 Expedição Eclipse:** Trabalho realizado em Bocaiúva, Minas Gerais, durante o fim da Segunda Guerra Mundial. Aterrisaram aviões militares com toneladas de equipamentos, dezenas de cientistas de diversas nações e muitos jornalistas do mundo todo. O alvo era o eclipse solar fotografando-o nas suas várias fases em plena estratosfera e colhendo resultados satisfatórios.
- **Década de 1930 A Gravitação Teleparalela, ou Teleparalelismo,** é criada para descrever a gravitação através da torção do universo, e não através da curvatura, como a Relatividade Geral. O Teleparalelismo se encaixa dentro do esquema das Teorias de Gauge, que explicam, por relações de simetria, as demais interações da natureza – a eletromagnética, a Força Fraca e a Força Forte. Tendo como uma das principais características ser diferente da Relatividade Geral, ele permite separar a gravitação de efeitos inerciais;
- **1952 Expedição Eclipse:** Um eclipse total solar que durou 3 minutos e 9 segundos no máximo, criando um espetáculo incrível para os observadores em um caminho de até 138 km de largura, em 25 de fevereiro de 1952. Artigo publicado pelo Prof R.O.Redman, F.R.S., na Revista Nature.
- **1960** Experimentos de anisotropia em massa Hughs-Drever;
Experimento gravitacional de desvio para o vermelho de Pound-Rebka;
- **1962** Experimentos em Princeton de Eötvös;
- **1965** Descoberta da radiação cósmica de fundo em microondas de 3K;
- **1966** Detecção relatada de oblatidade solar;
- **1967** Descoberta de pulsares;
- **1968** Medições de radar planetário de atraso de tempo;
Primeiras medições de desvio de rádio;
- **1970 Cygnus X1:** primeiro candidato a buraco negro;
Mariner 6 e 7 medições de atraso;

- **1972** Experiências em Moscou de Eötvös;
- **1973 Expedição Eclipse:** Eclipse solar de 24 de dezembro de 1973, de forma anular, ou seja, o diâmetro aparente da Lua é menor que o do Sol, fazendo com que o Sol pareça com um anel, onde a duração da anularidade no eclipse máximo foi de 12 minutos, 2,37 segundos no Oceano Atlântico perto da costa brasileira. Foi o eclipse mais longo depois do eclipse solar de 14 de dezembro de 1955.
- **1974** Descoberta do pulsar binário;
- **1976** Experimento gravitacional de deslocamento para o vermelho do foguete; Resultados Mariner 9 e Viking com atraso de tempo;
- **1978** Medição da diminuição do período de órbita no pulsar binário;
- **1979** Foguete Scout medições de desvio para o vermelho do relógio maser;
- **1980** Descoberta de lentes gravitacionais.
- **2015** Detecções diretas de ondas gravitacionais no Observatório Avançado de Ondas Gravitacionais por Interferômetro Laser- Ligo e Virgo;
- **2018** Observação da Órbita completa da estrela SO-2 em torno do Buraco Negro Supermassivo que habita a Via Láctea e a Teoria da Relatividade Geral de Einstein pela equipe da Astrofísica Andrea Ghez, da UCLA (Universidade da Califórnia em Los Angeles).

3 TELEPARALELISMO EQUIVALENTE À RELATIVIDADE GERAL (TERG)

O equivalente teleparalelo da Relatividade Geral (TERG) é uma formulação geométrica alternativa da Relatividade Geral de Einstein. Pode ser formulado em termos dos campos tetrada $e^a{}_\mu$ e desde uma conexão independente $SO(3, 1)$ (Lorentz) $w_{\mu ab}$, ou em termos apenas dos campos tetrada.

Uma teoria teleparalela construída unicamente a partir de $e^a{}_\mu$ preserva as características físicas da teoria. Dado um conjunto de campos tetrada, será possível construir o tensor geométrico $g_{\mu\nu}$, os símbolos de Christoffel ${}^0\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, e a conexão livre da Torção de Levi-Civita ${}^0w_{\mu ab}(e)$ a ser definida adiante. Também é possível construir a conexão Weitzenböck $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = e^{a\lambda}\partial_\mu e_{a\nu}$ [10]. O tensor de curvatura construído a partir do último identicamente nulo. No campo de uma teoria construída apenas a partir dos campos de tetrada, será possível tratar de questões das geometrias de Weitzenböck e Riemanniana. Portanto, a tetrada da gravidade é uma estrutura geométrica mais geral do que (e consistente com) a geometria Riemanniana.

O teleparalelismo é um cenário geométrico onde é possível estabelecer a noção de paralelismo distante. Para este propósito, é necessário uma estrutura fixa, mas no TERG é permitido qualquer estrutura em vista das equações de campo. Em um espaço-tempo dotado de um conjunto de campos tetrada; dois vetores em pontos distantes são chamados de paralelos se tiverem componentes idênticos em relação às tetradas locais nos pontos considerados [11]. Assim, considere um campo vetorial $V^\mu(x)$. No ponto x^λ seus componentes tetrada são $V^a(x) = e^a{}_\mu(x)V^\mu(x)$. Para os componentes tetrada $V^a(x + dx)$ em $x^\lambda + dx^\lambda$, é fácil ver que $V^a(x + dx) = V^a(x) + \nabla V^a(x)$, onde $\nabla V^a(x) = e^a{}_\mu(\nabla_\lambda V^\mu)dx^\lambda$. A derivada covariante ∇ é construída a partir da conexão Weitzenböck. Portanto, o desaparecimento dessa derivada covariante define uma condição para o paralelismo absoluto no espaço-tempo. Como $\nabla_\lambda e^a{}_\mu \equiv 0$, as tetradas constituem um conjunto de campos auto-paralelos. A falta de simetria $SO(3, 1)$ local não significa que uma determinada estrutura seja distinguível. Todas as estruturas físicas são soluções das equações de campo. A geometria teleparalela pode ser estendida como um caso limitante das geometrias mais gerais de Riemann-Cartan [12, 13], que são definidas por configurações arbitrárias dos tensores de curvatura e de torção [14]. As grandezas geométricas mais simples que são obtidas a partir dos campos de tetrada é o tensor geométrico $g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab}$, onde η_{ab} é o tensor espaço-tempo métrico plano e o tensor de torção $T_{a\mu\nu} = \partial_\mu e_{a\nu} - \partial_\nu e_{a\mu}$. O tensor $T_{\lambda\mu\nu} = e^a{}_\lambda T_{a\mu\nu}$ é precisamente a torção da conexão de Weitzenböck. Fora do $T_{abc} = e^a{}_\mu e^b{}_\nu T_{a\mu\nu}$ pode-se construir os três invariantes de Weitzenböck: $I_1 = AT^{abc}T_{abc}$, $I_2 = BT^{abc}T_{abc}$ e $I_3 = CT^a T_a$, onde $T_a = T^b{}_{ba}$, e A, B, C são constantes numéricas arbitrárias. Valores arbitrários das constantes A, B

e C levam a teorias arbitrárias de gravidade teleparalelas, definidas pela densidade da Lagrangiana $L = e(AI_1 + BI_2 + CI_3)$, onde $e = \det(e_\mu^a)$. No período entre 1928 e 1931, Einstein observou que as equações de campo obtidas a partir da teoria para a qual $A = 1/4$, $B = 1/2$ e $C = -1$ são simétricas nos dois índices de espaço-tempo livre, e que a teoria linearizada resultante descreve os valores fracos do campo gravitacional. Ele permitiu que as três constantes adquirissem valores ligeiramente diferentes dos valores acima, e buscou a formulação de uma teoria de campo unificada de gravitação e eletromagnetismo.

Este capítulo tem como objetivo resumir o trabalho que vem sendo desenvolvido desde 1994 em que estabelece o TERG, enfatizando o papel crucial dos campos de tetrada como estruturas adaptadas a observadores arbitrários no espaço-tempo. As estruturas aceleradas são com torção. Os campos de tetrada descrevem ao mesmo tempo o campo gravitacional e a estrutura. Em particular, o tensor de torção $T_{a\mu\nu}$ desempenha um papel importante na definição do tensor de aceleração inercial, uma quantidade que evidentemente depende da estrutura trabalhada. É natural considerar o TERG como uma descrição alternativa do campo gravitacional, porque a teoria é construída a partir de $T_{a\mu\nu}$. Argumentaremos que a dependência da estrutura de grandezas como o vetor de energia-momento gravitacional é uma característica fisicamente consistente, uma vez que os conceitos válidos na teoria da relatividade especial também são válidos na teoria geral, pois não há divisão clara dos conceitos físicos nas teorias geral e especial da relatividade. A introdução do campo gravitacional não modifica a dependência de estruturas da energia de uma partícula em relatividade especial (que é o componente zero de um vetor) e, portanto, a energia gravitacional de um buraco negro, por exemplo, vista como uma partícula em distâncias muito grandes, também deve ser dependente da estrutura. Também revisaremos brevemente a formulação hamiltoniana do TERG, que é de fundamental importância para uma compreensão completa da teoria.

3.0.1 Os campos de tetrada e a estrutura de referência

Um conjunto de campos de tetrada é definido por quatro campos vetoriais ortogonais e linearmente independentes no espaço-tempo, $e^a = e_\mu^a dx^\mu = \{e_\mu^{(0)}, e_\mu^{(1)}, e_\mu^{(2)}, e_\mu^{(3)}\}$, que estabelece a estrutura de referência local de um observador que se move ao longo de uma trajetória C , representada pela linha mundo $x^\mu(\tau)$ [15–17] (τ é o tempo próprio do observador). Os componentes $e_\mu^{(0)}$ e $e_\mu^{(i)}$ são vetores tipo tempo e espaciais, respectivamente; e_μ^a se transforma como campos vetoriais covariantes sob transformações de coordenadas e como campos vetoriais contravariantes nas transformações $SO(3, 1)$ (Lorentz), ou seja, $\tilde{e}_\mu^a = \Lambda^a_b e_\mu^b$, onde as matrizes Λ^a_b são representações do grupo $SO(3, 1)$ e satisfazem $\Lambda^a_c \Lambda^b_d \eta_{ab} = \eta_{cd}$. O tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é obtido pela relação $e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} = g_{\mu\nu}$. Os campos tetrada permitem a projeção de vetores e tensores no espaço-tempo na estrutura local de um observador. Para medir as grandezas dos campos

com magnitude e direção, o observador deve projetar essas quantidades no quadro transportado pelo observador. A projeção de um vetor $V^\mu(x)$ em uma posição x^μ , em uma estrutura específica, é determinada por $V^a(x) = e_\mu^a(x)V^\mu(x)$. Dada a linha mundo C de um observador, representada por $x^\mu(\tau)$, a velocidade do observador ao longo de C é denotada por $u^\mu(\tau) = dx^\mu/d\tau$. Identificamos a velocidade do observador com o componente $a = (0)$ de e_a^μ . Assim, $e_{(0)}^\mu = u^\mu(\tau)/c$.

A aceleração a^μ do observador é dada pela derivada absoluta de u^μ ao longo de C ,

$$a^\mu = \frac{Du^\mu}{d\tau} = c \frac{De_{(0)}^\mu}{d\tau} = cu^\alpha \nabla_\alpha e_{(0)}^\mu \quad (3.1)$$

onde a derivada covariante é construída a partir dos símbolos de Christoffel ${}^0\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$. A última igualdade segue de:

$$\begin{aligned} \frac{De_{(0)}^\mu}{d\tau} &= \frac{de_{(0)}^\mu}{d\tau} + {}^0\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} e_{(0)}^\beta \\ &= \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{\partial e_{(0)}^\mu}{\partial x^\alpha} + {}^0\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} e_{(0)}^\beta \\ &= u^\alpha \nabla_\alpha e_{(0)}^\mu. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Assim, e_a^μ caracteriza a velocidade e aceleração de um observador ao longo da linha mundo. Portanto, um determinado conjunto de campos tetrada, para os quais $e_{(0)}^\mu$ descreve uma congruência de curvas tipo tempo, é adaptada a uma classe específica de observadores, ou seja, para observadores caracterizados pelo campo de velocidade $u^\mu = ce_{(0)}^\mu$ dotado com aceleração a^μ . Se $e_\mu^a \rightarrow \delta_\mu^a$ no limite $r \rightarrow \infty$, então e_μ^a está adaptado para observadores estáticos no infinito espacial.

A caracterização geométrica dos campos de tetrada como quadro de um observador pode ser dada considerando a aceleração do quadro ao longo de um caminho arbitrário, $x^\mu(\tau)$, do observador. A aceleração de todo o quadro é determinada pela derivada absoluta de e_a^μ ao longo de $x^\mu(\tau)$. Assim, assumindo que o observador carrega uma estrutura de tetrada ortonormal e_a^μ , a aceleração da estrutura ao longo do caminho é dada por [18, 19]:

$$\frac{De_a^\mu}{d\tau} = \phi_a^b e_b^\mu, \quad (3.3)$$

onde ϕ_{ab} é o tensor de aceleração antissimétrico. De acordo com as referências [18, 19], em analogia com o tensor de Faraday, podemos identificar $\phi_{ab} \rightarrow (a/c, \Omega)$, onde a é a aceleração translacional ($\phi_{(0)(i)} = a_{(i)}/c$) e Ω é a frequência de rotação da estrutura espacial local em relação a uma estrutura transportada Fermi-Walker não rotativa. Segue da equação (3.3) que

$$\phi_a^b = e_\mu^b \frac{De_a^\mu}{d\tau} = e_\mu^b u^\lambda \nabla_\lambda e_a^\mu. \quad (3.4)$$

O vetor de aceleração a^μ definido pela equação (3.1) pode ser projetada em quadro, a fim de produzir:

$$a^b = e_\mu^b a^\mu = c e_\mu^b u^\alpha \nabla_\alpha e_{(0)}^\mu = c \phi_{(0)}^b. \quad (3.5)$$

Assim, a^μ e $\phi_{(0)(i)}$ não são diferentes acelerações de translação da estrutura. A expressão de a^μ dada pela equação (3.1) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \frac{a^\mu}{c} &= u^\alpha \nabla_\alpha e_{(0)}^\mu = u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu \\ &= \frac{dx^\alpha}{ds} \left(\frac{\partial u^\mu}{\partial x^\alpha} + {}^0\Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\beta \right) \\ &= \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + {}^0\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde ${}^0\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ são os símbolos de Christoffel. Vemos que se $u^\mu = c e_{(0)}^\mu$ representa uma trajetória geodésica, o quadro está em queda livre e $a^\mu/c = \phi_{(0)(i)} = 0$. Portanto, concluímos que os valores não nulos das últimas quantidades representam acelerações inerciais do quadro.

Como as tétradas são vetores ortonormais, podemos reescrever a equação (3.4) como $\phi_a^b = -u^\lambda e_a^\mu \nabla_\lambda e_\mu^b$, onde $\nabla_\lambda e_\mu^b = \partial_\lambda e_\mu^b - {}^0\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma e_\sigma^b$. Agora consideramos a identidade:

$$\partial_\lambda e_\mu^b - {}^0\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma e_\sigma^b + {}^0\omega_{\lambda\mu}^b c e_\mu^c = 0,$$

onde ${}^0\omega_{\lambda\mu}^b$ é a conexão Levi-Civita compatível com métricas e sem torção,

$${}^0\omega_{\mu ab} = -\frac{1}{2} e_\mu^c (\Omega_{abc} - \Omega_{bac} - \Omega_{cab}),$$

$$\Omega_{abc} = e_{a\nu} (e_b^\mu \partial_\mu e_c^\nu - e_c^\mu \partial_\mu e_b^\nu), \quad (3.7)$$

e a expressão ϕ_a^b como $\phi_a^b = c e_{(0)}^\mu ({}^0\omega_{\mu a}^b)$. Por fim consideramos a identidade ${}^0\omega_{\mu b}^a = -K_{\mu b}^a$, onde $K_{\mu b}^a$ é o tensor de contorção definido por

$$K_{\mu ab} = \frac{1}{2} e_a^\lambda e_b^\nu (T_{\lambda\mu\nu} + T_{\nu\lambda\mu} + T_{\mu\lambda\nu}) \quad (3.8)$$

e

$$T_{\lambda\mu\nu} = e_\lambda^a T_{a\mu\nu}$$

(seção 3.1 da referência [20]; a identidade pode ser obtida por cálculo direto). Após algumas manipulações matemáticas obtemos:

$$\phi_{ab} = \frac{c}{2} [T_{(0)ab} + T_{a(0)b} - T_{b(0)a}]. \quad (3.9)$$

A expressão acima claramente não é invariável nas transformações locais $SO(3, 1)$, mas é invariante nas transformações de coordenadas. Os valores de ϕ_{ab} para determinados campos da tetrada podem ser usados para caracterizar o quadro. Interpretarmos ϕ_{ab} como acelerações inerciais ao longo da trajetória $x^\mu(\tau)$.

Portanto, dado qualquer conjunto de campos tetrada para um espaço-tempo arbitrário, sua interpretação geométrica pode ser obtida:

- (i) identificando adequadamente a velocidade $u^\mu = ce_{(0)}^\mu$ do campo de observadores, juntamente com a orientação no espaço tridimensional dos componentes $e_{(1)}^\mu$, $e_{(2)}^\mu$ e $e_{(3)}^\mu$ ou;
- (ii) pelos valores do tensor aceleração $\phi_{ab} = -\phi_{ba}$, que caracterizam o estado inercial do quadro.

A condição $e_{(0)}^\mu = u^\mu/c$ corrige apenas os três componentes $e_{(0)}^1$, $e_{(0)}^2$, $e_{(0)}^3$, porque o componente $e_{(0)}^0$ é determinado pela condição de normalização $u^\mu u^\nu g_{\mu\nu} = -c^2$. Nos dois casos, a fixação do quadro requer a fixação de 6 componentes dos campos de tetrada.

As estruturas de transporte de Fermi-Walker definem um padrão de não rotação para observadores acelerados. São estruturas para as quais a frequência de rotação $\phi_{(i)(j)}$ desaparece [16]. Suponha que uma estrutura seja dada de modo que $\phi_{(j)(k)} \neq 0$, pode transformar essa estrutura em uma estrutura de transporte de Fermi-Walker por meio do seguinte procedimento. Primeiro, notamos que, em termos do tensor de torção as quantidades $\phi_{(j)(k)}$ são escritas como:

$$\phi_{(i)(j)} = \frac{1}{2}[e_{(i)}^\mu e_{(j)}^\nu T_{(0)\mu\nu} + e_{(0)}^\mu e_{(j)}^\nu T_{(i)\mu\nu} - e_{(0)}^\mu e_{(i)}^\nu T_{(j)\mu\nu}]. \quad (3.10)$$

Sob uma transformação local de Lorentz dos componentes espaciais, temos

$$\tilde{e}_{(i)}^\mu = \Lambda_{(i)}^{(k)} e_{(k)}^\mu, \quad (3.11)$$

$$\tilde{T}_{(i)\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{e}_{(i)\nu} - \partial_\nu \tilde{e}_{(i)\mu},$$

$$= \Lambda_{(i)}^{(k)} T_{(k)\mu\nu} + [\partial_\mu \Lambda_{(i)}^{(k)}] e_{(k)\nu} - [\partial_\nu \Lambda_{(i)}^{(k)}] e_{(k)\mu}. \quad (3.12)$$

Os coeficientes $\{\Lambda_{(i)}^{(j)}(x)\}$ das componentes espaciais da transformação local de Lorentz são corrigidas exigindo $\tilde{\phi}_{(i)(j)} = 0$. É possível mostrar que, para os dados que não são nulas das quantidades $\phi_{(j)(k)}$, a condição $\tilde{\phi}_{(i)(j)} = 0$ é alcançada desde que os coeficientes $\Lambda_{(i)}^{(j)}$ da transformação de Lorentz satisfaçam a equação [16]

$$e_{(0)}^\mu \Lambda_{(m)}^{(j)} \partial_\mu \Lambda_{(j)(k)} - \phi_{(k)(m)} = 0. \quad (3.13)$$

Assim, dada uma estrutura arbitrária, é possível, pelo menos formalmente, girar e obter uma estrutura de transporte de Fermi-Walker. Observamos que a transformação local de Lorentz (3.11) não afeta o componente $e_{(0)}^\mu$.

3.0.2 A formulação lagrangiana do TERG

Teorias teleparalelas da gravidade são construídas a partir dos campos de tetrada $e_{a\mu}$ e o tensor de torção $T_{a\mu\nu} = \partial_\mu e_{a\nu} - \partial_\nu e_{a\mu}$. A classe de teorias cuja equações de campo são equações diferenciais de segunda ordem são estabelecidas a partir da densidade lagrangiana construída a partir dos invariantes Weitzenböck $T^{abc}T_{abc}$, $T^{abc}T_{bac}$ e $T^a T_a$, onde $T_a = T_{ba}^b$. A equivalência de uma teoria teleparalela em particular com a relatividade geral de Einstein é verificada por meio de identidades entre os campos tetrada, o tensor de torção, o tensor de contorsão e a conexão $SO(3,1)$ (Lorentz) ${}^0\omega_{\mu ab}$, que é a conexão Levi-Civita sem torção. Primeiro apresentaremos as identidades e depois discutiremos as equações de campo, as equações de balanço e o tensor de momento de energia do campo gravitacional.

3.0.2.1 Identidades Geométricas

A identidade mais importante relaciona a conexão Levi-Civita de ${}^0\omega_{\mu ab}$ dada pela equação (3.7) com o tensor de contorção $K_{\mu ab}$, definido por

$$K_{\mu ab} = \frac{1}{2} e_a^\lambda e_b^\nu (T_{\lambda\mu\nu} + T_{\nu\lambda\mu} + T_{\mu\lambda\nu}). \quad (3.14)$$

A identidade lê

$${}^0\omega_{\mu ab} = -K_{\mu ab}. \quad (3.15)$$

Essa identidade pode ser obtida por cálculos diretos ou por meio do procedimento a seguir. Vamos considerar uma variedade pseudo-riemanniano quadridimensional dotada de um conjunto de campos tetrada e_μ^a e uma conexão independente e arbitrária $SO(3,1)$, $\omega_{\mu ab}$. Essas quantidades definem a torção e os tensores de curvatura de acordo com

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}^a(e, \omega) = \partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a + \omega_{\mu b}^a e_\nu^b - \omega_{\nu b}^a e_\mu^b, \quad (3.16)$$

$$R_{b\mu\nu}^a(\omega) = \partial_\mu \omega_{\nu b}^a - \partial_\nu \omega_{\mu b}^a + \omega_{\mu c}^a \omega_{\nu b}^c - \omega_{\nu c}^a \omega_{\mu b}^c, \quad (3.17)$$

respectivamente (nossa notação é a mesma que na referência [21]). A equação que define $\mathcal{T}_{a\mu\nu}(e, \omega)$ pode ser resolvido para $\omega_{\mu ab}$. Após várias manipulações, onde levamos em consideração a antisimetria $\omega_{\mu ab} = -\omega_{\mu ba}$, é possível obter a identidade

$$\omega_{\mu ab} = {}^0\omega_{\mu ab}(e) + \mathcal{K}_{\mu ab}, \quad (3.18)$$

onde

$$\mathcal{K}_{\mu ab} = \frac{1}{2} e_a^\lambda e_b^\nu (\mathcal{T}_{\lambda\mu\nu} + \mathcal{T}_{\nu\lambda\mu} + \mathcal{T}_{\mu\lambda\nu}). \quad (3.19)$$

É possível verificar se a conexão arbitrária $\omega_{\mu ab}$ não desempenha nenhum papel na dinâmica dos campos tetrada no TERG, como concluímos nas equações (3.6) e (3.9) da referência [22]. Portanto, dispensamos essa conexão e exigimos que ela desapareça: $\omega_{\mu ab}$. Como conseqüência, $\mathcal{T}_{a\mu\nu}$ reduz para $T_{a\mu\nu}$ e equação (3.18) para a equação (3.15).

A derivada covariante dos campos de tetrada em relação aos símbolos de Christoffel e a conexão Levi-Civita ${}^0\omega_{\mu ab}$ está desaparecendo identicamente,

$$D_\mu e_\nu^a = \partial_\mu e_\nu^a + {}^0\omega_{\mu b}^a e_\nu^b - {}^0\Gamma_{\mu\nu}^\sigma e_\sigma^a \equiv 0. \quad (3.20)$$

Baixamos o índice na equação acima, multiplicamos todos os termos por $e^{a\lambda}$ e obtemos:

$$e^{a\lambda} \partial_\mu e_{a\nu} = {}^0\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - e^{a\lambda} ({}^0\omega_{\mu ab}) e_\nu^b. \quad (3.21)$$

O lado esquerdo é a conexão Weitzenböck, que denotamos como antes por $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$. Tendo em conta a equação (3.15), obtemos a identidade:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = {}^0\Gamma_{\mu\nu}^\lambda + e^{a\lambda} K_{\mu ab} e_\nu^b. \quad (3.22)$$

Com a ajuda das identidades acima, podemos escrever a densidade da curvatura escalar $eR(e) = ee^{a\mu} e^{b\nu} R_{ab\mu\nu}$ construído a partir da conexão Levi-Civita ${}^0\omega_{\mu ab}$, em termos dos campos de tetrada e do tensor de torção $T_{a\mu\nu} = \partial_\mu e_{a\nu} - \partial_\nu e_{a\mu}$. Tendo em conta a equação (3.15) na expressão de $eR(e)$, obtemos:

$$eR(e) = -e \left(\frac{1}{4} T^{abc} T_{abc} + \frac{1}{2} T^{abc} T_{bac} - T^a T_a \right) + 2\partial_\mu (e T_\mu) \quad (3.23)$$

onde $T_\mu = T_{\alpha\mu}^\alpha$.

A identidade (3.23) também é obtida por meio da equação (3.22). Primeiro notamos que o tensor de curvatura construído a partir da conexão Weitzenböck desaparece identicamente, $R_{\mu\nu\alpha\beta}(\Gamma) = 0$. Então consideramos a forma padrão da densidade da curvatura escalar em termos do tensor métrico e dos símbolos de Christoffel, $\sqrt{-g} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta}({}^0\Gamma)$, fazemos uso da equação (3.22) e, eventualmente, chegamos à equação (3.23).

Observamos finalmente que, desde o lado esquerdo da equação (3.23) é invariável sob transformações locais de $SO(3, 1)$, o lado direito da equação (incluindo a divergência total) também é invariável sob as mesmas transformações.

3.0.3 As equações de campo do TERG e o tensor energia-momento gravitacional

Introduzimos o tensor Σ^{abc} definido por [22]:

$$\Sigma^{abc} T_{abc} = \frac{1}{4} (T^{abc} + T^{bac} + T^{cab}) + \frac{1}{2} (\eta^{ac} T^b - \eta^{ab} T^c), \quad (3.24)$$

que produz a combinação quadrática do tensor de torção,

$$\Sigma^{abc}T_{abc} = \frac{1}{4}T^{abc}T_{abc} + \frac{1}{2}T^{abc}T_{bac} - T^a T_a. \quad (3.25)$$

Assim, a identidade (3.23) pode ser reescrita como:

$$eR(e) = -e\Sigma^{abc}T_{abc} + 2\partial_\mu(eT^\mu). \quad (3.26)$$

Exceto pela divergência total, a densidade escalar quadrática $e\Sigma^{abc}T_{abc}$ é equivalente à densidade da curvatura escalar $eR(e)$.

Portanto, definimos a densidade lagrangiana do TEGR como [20, 22]:

$$L(e) = -\kappa e\Sigma^{abc}T_{abc} - \frac{1}{c}L_M, \quad (3.27)$$

onde L_M representa a densidade Lagrangiana dos campos de matéria, $k = c^3/16\pi G$ ou, em unidades naturais, $k = 1/16\pi$ (G é a constante gravitacional). A ausência na densidade de lagrangiana da divergência total que surge no lado direito da equação (3.26) evita a invariância da equação (3.27) em transformações locais e arbitrárias de $SO(3, 1)$. No entanto, se as matrizes da comunidade local as transformações $SO(3, 1)$ caem suficientemente rápido no infinito tipo espaço, então a integral de ação formada pela combinação quadrática $e\Sigma^{abc}T_{abc}$ é invariável sob essas transformações especiais [23]. Assumimos nesta revisão que a densidade lagrangiana acima é construída para tempos espaciais assintoticamente planos. A densidade lagrangiana para espaços-tempo mais gerais podem ser construídas com termos de superfície adequadas (como na formulação métrica comum da relatividade geral) que produzem uma ação invariante integral S , cuja variação δS leva às equações de campo esperadas.

As equações de campo derivadas de variações arbitrárias de $L(e)$ em relação a $e^{a\mu}$ são dadas por [20, 22]:

$$e_{a\lambda}e_{b\lambda}\partial_\nu(e\Sigma^{b\lambda\nu}) - e\left(\Sigma_a^{b\nu}T_{b\nu\mu} - \frac{1}{4}e_{a\mu}T_{bcd}\Sigma^{bcd}\right) = \frac{1}{4\kappa}eT_{a\mu}, \quad (3.28)$$

onde $T_{a\mu}$ é definido por $\delta L_M/\delta e^{a\mu} = eT_{a\mu}$. Embora a densidade lagrangiana não é invariável sob transformações arbitrárias de $SO(3, 1)$, as equações de campo (3.28) são covariantes sob transformações locais do grupo $SO(3, 1)$.

A teoria definida pela densidade lagrangiana (3.27) é equivalente à relatividade geral de Einstein, porque pode ser demonstrado que é o lado esquerdo da equação (3.28) reescrito de forma idêntica como $\frac{1}{2}e[R_{a\mu}(e) - \frac{1}{2}e_{a\mu}R(e)]$. Para provar a identidade, é mais fácil começar com o lado esquerdo da equação (3.28) e chegar na última expressão. Para esse fim, as três identidades a seguir são úteis. Vamos definir ${}^0\omega^\mu \equiv {}^0\omega_\lambda^{\lambda\mu}$. As identidades:

$$\begin{aligned} T_\mu &= -{}^0\omega_\mu, \\ T_{\mu\lambda\nu} &= {}^0\omega_{\lambda\nu\mu} - {}^0\omega_{\nu\lambda\mu}, \\ \Sigma_{\mu bc} &= \frac{1}{2}({}^0\omega_{\mu bc} - e_{b\mu}^0\omega_c + e_{c\mu}^0\omega_b), \end{aligned} \quad (3.29)$$

são úteis na obtenção de $\frac{1}{2}e [R_{a\mu}(e) - \frac{1}{2}e_{a\mu}R(e)]$ por meio de manipulações algébricas do lado esquerdo de (3.28). Observamos que, por meio dessas identidades, é possível sempre transformar a forma padrão das equações de Einstein por um espaço-tempo geral (não assintoticamente plano) nas equações de campo do TERG.

Na referência [24] é mostrado que o acoplamento de um campo de spinor de Dirac com o campo gravitacional, no âmbito da densidade Lagrangiana (3.27), é consistente. O acoplamento é estabelecido considerando-se ${}^0\omega_{\mu ab} = -K_{\mu ab}$ na derivada covariante do campo Dirac. Usando equação de Dirac resultante, pode ser demonstrado que o tensor energia-momento para o campo de Dirac é simétrico.

Os índices na equação de campo (3.28) podem ser convertidos em índices de espaço-tempo e, portanto, o lado esquerdo da última equação se torna proporcional para $(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R)$. Consequentemente, um tensor métrico $g_{\mu\nu}$ que é uma solução das equações de Einstein também é uma solução da equação (3.28) para uma determinada métrica espaço-tempo, existindo uma infinidade de quadros permitidos. Portanto, todos os resultados físicos determinam as considerações da derivada de um tensor métrico espaço-tempo, que é a solução das equações de Einstein que são válidas na presente formulação do TERG. Em particular, o acoplamento do campo gravitacional com o campo eletromagnético pode ser estabelecido da maneira padrão de acordo com $e g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}$, onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor de Faraday. Assim, o campo eletromagnético pode acoplar torção, mas neste contexto o conceito de torção não é o mesmo que na teoria de Einstein-Cartan, onde a torção é normalmente considerada como uma quantidade geométrica adicional em uma teoria métrica.

A equação (3.28) pode ser reescrita

$$\partial_\nu(e\Sigma^{a\lambda\nu}) = \frac{1}{4\kappa}ee_\mu^a(t^{\lambda\mu} + T^{\lambda\mu}), \quad (3.30)$$

onde $T^{\lambda\mu} = e_\alpha^\lambda T^{a\mu}$ e $t^{\lambda\mu}$ é definido por:

$$t^{\lambda\mu} = \kappa(4\Sigma^{bc\lambda}T_{bc}^\mu - g^{\lambda\mu}\Sigma^{bcd}T^{bcd}). \quad (3.31)$$

O tensor $\Sigma^{a\mu\nu}$ é anti-simétrico nos últimos dois índices, $\Sigma^{a\mu\nu} = -\Sigma^{a\nu\mu}$, e a partir desta propriedade, segue-se que $\partial_\lambda\partial_\nu(e\Sigma^{a\lambda\nu}) \equiv 0$. Portanto,

$$\partial_\lambda[ee_\mu^a(t^{\lambda\mu} + T^{\lambda\mu})] = 0. \quad (3.32)$$

Na formulação métrica padrão da relatividade geral, não existe uma equação equivalente a (3.32). A equação acima produz a continuidade, ou equação de equilíbrio,

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x ee_\mu^a(t^{0\mu} + T^{0\mu}) = - \oint_S dS_j [ee_\mu^a(t^{j\mu} + T^{j\mu})], \quad (3.33)$$

onde a integração é realizada em um volume tridimensional V , delimitada pela superfície S .

Os tensores $t^{\lambda\mu}$ e $T^{\lambda\mu}$ aparecem na mesma parte nas equações (3.32) e (3.33). Somos levados a interpretar $t^{\lambda\mu}$ como tensor do momento da energia gravitacional, e a quantidade no lado esquerdo da equação (3.33)

$$P^a = \int_V d^3x e e_{mu}^a (t^{0\mu} + T^{0\mu}), \quad (3.34)$$

como o momento-energia total contido no volume V [25,26]. Na vista da equação do campo (3.30), P^a um pode ser reescrito como

$$P^a = - \int_V d^3x \partial_j \overset{aj}{\Pi} = - \oint_S dS_j \overset{aj}{\Pi}, \quad (3.35)$$

onde $\overset{aj}{\Pi} = -4ke \sum^{a0j}$. A expressão acima é a definição para o momento-energia gravitacional apresentado nas referências [25,26], obtido na estrutura das equações do campo de vácuo na forma hamiltoniana. Isto é, invariante sob transformações das coordenadas do espaço tridimensional, reparametrizações sob o tempo e sob transformações globais de $SO(3,1)$. No vácuo, a equação (3.35) representa o vetor gravitacional de momento-energia $P^a = (E/c, P)$. Expressões para a energia, momento e momento angular do campo gravitacional surgem no contexto das equações de restrição da formulação da teoria Hamiltoniana. A definição do momento angular gravitacional, a ser apresentado adiante, só pode ser obtido na estrutura hamiltoniana.

Vemos que a equação (3.32) é uma verdadeira conservação do momento-energia. E se deixamos $V \rightarrow \infty$, no lado direito da equação (3.33) chega a zero se as informações relevantes as quantidades de campo caem suficientemente rápido no infinito espacial. Inspeccionando o lado direito da equação (3.33), definimos [20]:

$$\Phi_g^a = \oint_S dS_j (e e_{\mu}^a t^{j\mu}), \quad (3.36)$$

como o fluxo gravitacional do momento-energia, e

$$\Phi_m^a = \oint_S dS_j (e e_{\mu}^a T^{j\mu}), \quad (3.37)$$

como o fluxo de energia-momento da matéria. Portanto, o componente $a = (0)$ da equação (3.33), obtemos:

$$\frac{dP^{(0)}}{dt} = -\Phi_g^{(0)} - \Phi_m^{(0)}. \quad (3.38)$$

As expressões e definições acima são consequência das equações de campo (3.28) ou (3.30) apenas. Nenhuma consideração é feita para integrais de ação, termos de superfície ou limites.

Este formalismo pode ser usado para obter a pressão gravitacional no horizonte de eventos externos do buraco negro de Kerr [27]. No vácuo, a equação de conservação (3.33) é escrita como:

$$\frac{dP^a}{dt} = - \oint_S dS_j [e e_{\mu}^a t^{j\mu}]. \quad (3.39)$$

Considerando a equação de campo (3.30), o lado direito da equação acima torna-se

$$\frac{dP^a}{dt} = -4\kappa \oint_S dS_j \partial_\nu (e \Sigma^{aj\nu}). \quad (3.40)$$

Restringindo agora o índice a para $a = (i)$, onde $i = 1, 2, 3$, encontramos:

$$\frac{dP^{(i)}}{dt} = - \oint_S dS_j \Omega^{(i)j} = - \oint_S dS_j [e e_\mu^{(i)} t^{j\mu}], \quad (3.41)$$

onde

$$\Omega^{(i)j} = 4\kappa \partial_\nu (e \Sigma^{(i)j\nu}). \quad (3.42)$$

O lado esquerdo da equação (3.41) representa o momento do campo dividido pelo tempo e, portanto, tem dimensão de força ($\Omega^{(i)j}$) não deve ser confundido com ϕ_{ab} dado pela equação (3.9). Como no lado direito dS_j é um elemento de área, vemos que $-\Omega^{(i)j}$, representa a pressão ao longo da direção (i) , sobre o elemento da área orientada ao longo da direção j . Em coordenadas cartesianas o índice $j = 1, 2, 3$ representa as direções x, y, z , respectivamente. Na referência [27] a pressão gravitacional no horizonte de eventos externos do buraco negro de Kerr foi avaliado na análise da relação termodinâmica $TdS = dE + pdV$.

É importante ressaltar que o vetor energia-momento respeita a simetria de Lorentz e é invariante sob a formação de coordenadas.

É possível usar a densidade lagrangiana do TERG acima para estabelecer uma função de Green de dois pontos, considerando as tetradas como campos observáveis no espaço-tempo. Assim, de:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (3.43)$$

e a expressão,

$$eR(e) \equiv -e \left(\frac{1}{4} T^{abc} T_{abc} + \frac{1}{2} T^{abc} T_{bac} - T^a T_a \right) + 2\partial_\mu (e T^\mu), \quad (3.44)$$

o propagador de gráviton é [28]:

$$\langle e_{b\lambda}, e_{d\gamma} \rangle = \Delta_{bd\lambda\gamma} = \frac{i\eta_{bd}}{\kappa q^\lambda q^\gamma}. \quad (3.45)$$

Então a função de Green fica:

$$G_0(x, x') = -i \Delta_{bd\lambda\gamma} g^{\lambda\gamma} \eta^{bd}. \quad (3.46)$$

Explicitamente, isto é:

$$G_0(x, x') = \frac{-i64\pi}{q^2}, \quad (3.47)$$

com $q = x - x'$, onde x e x' são quadri-vetores. Com a aproximação do campo fraco, o tensor energia-momento gravitacional $t^{\lambda\mu}$, torna-se:

$$t^{\lambda\mu}(x) = \kappa \left[g^{\mu\alpha} \partial^\gamma e^{b\lambda} \partial_\gamma e_{b\alpha} - g^{\mu\gamma} \partial^\alpha e^{b\lambda} \partial_\gamma e_{b\alpha} - g^{\mu\alpha} (\partial^\lambda e^{b\gamma} \partial_\gamma e_{b\alpha} - \partial^\lambda e^{b\gamma} \partial_\alpha e_{b\gamma}) - 2g^{\lambda\mu} \partial^\gamma e^{b\alpha} (\partial_\gamma e_{b\alpha} - \partial_\alpha e_{b\gamma}) \right]. \quad (3.48)$$

Para evitar divergências, adotamos a procedimento habitual para escrever o tensor de impulso de energia em diferentes pontos do espaço-tempo e depois tomando o limite adequado. Consequentemente:

$$\begin{aligned} \langle t^{\lambda\mu}(x) \rangle &= \langle 0 | t^{\lambda\mu}(x) | 0 \rangle, \\ &= \lim_{x'^\mu \rightarrow x^\mu} 4i\kappa (-5g^{\lambda\mu} \partial'^\gamma \partial_\gamma + 2g^{\mu\alpha} \partial'^\lambda \partial_\alpha) G_0(x - x'), \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde:

$$\langle e_c^\lambda(x), e_{b\alpha}(x) \rangle = i\eta_{cb} \delta_\alpha^\lambda G_0(x - x).$$

É importante notar que na aproximação de campo fraco o TERG se torna um campo usual que é muito diferente da formulação da métrica que não pode dissociar a métrica do espaço-tempo.

3.0.4 Teorias da gravidade $f(T)$

A estrutura teleparalela permite a formulação de uma classe interessante de teorias alternativas da gravidade, conhecidas como teorias $f(T)$, onde f é uma função de $T = \Sigma^{abc} T_{abc}$. Uma das primeiras tentativas foi a construção de uma teoria do tipo Born-Infeld, com o objetivo de chegar a soluções livres de singularidade das equações de campo, assim como na formulação Born-Infeld da eletrodinâmica. Essa abordagem foi realizada por Ferraro e Fiorini [29, 30], que propuseram a teoria definida pela densidade lagrangiana

$$L = -\frac{\lambda c^3}{16\pi G} e \left[\sqrt{1 + \frac{2\Sigma^{abc} T_{abc}}{\lambda}} - 1 \right] \quad (3.50)$$

onde λ é um parâmetro de Born-Infeld que controla a escala na qual as soluções deformadas diferem das soluções da teoria padrão (obtida no limite $\lambda \gg \Sigma^{abc} T_{abc}$). Ferraro e Fiorini investigaram soluções de buracos negros, e o modelo cosmológico espacialmente plano de Friedmann-Robertson-Walker.

Talvez a aplicação mais interessante das teorias $f(T)$ seja a tentativa para explicar a expansão acelerada do universo. Atualmente existe uma variedade de modelos teóricos que propõem uma explicação da expansão cósmica, sugerida por recentes observações cosmológicas de Supernovas. A gravidade teleparalela modificada permite uma compreensão alternativa deste importante problema, sem recorrer aos

conceitos de energia escura, modelos inflacionários, gravidade unimodular ou teorias da gravidade com uma constante cosmológica. Uma característica relevante desses modelos é que as equações de campo da teoria são sempre equações diferenciais de segunda ordem, independentemente da forma funcional de $f(T)$ (esse recurso não é compartilhado pelos modelos $f(R)$ correspondentes, em que R é a curvatura escalar). As equações de Friedmann são ligeiramente modificadas e podem ser resolvidas numericamente para produzir resultados muito interessantes. As equações de campo também permitem a investigação da existência de estrelas relativísticas na estrutura de teorias $f(T)$ [31] e soluções de buracos de minhoca em alguns modelos viáveis [32].

3.1 A FORMULAÇÃO HAMILTONIANA DO TERG

A formulação hamiltoniana é de fundamental importância na análise da estrutura de qualquer teoria física. Na teoria de campo, revela a existência das equações diferenciais hiperbólicas (equações de evolução no tempo), das equações diferenciais elípticas (equações de restrição), das quantidades de campo dinâmicas e não dinâmicas e dos radiantes graus de liberdade da teoria. Uma teoria física definida deve necessariamente ter sido bem definida e consistente na formulação hamiltoniana. A relevância da formulação hamiltoniana da relatividade geral é clara a partir do trabalho de Arnowitt, Deser, Misner (ADM) [34]. A formulação ADM é usada em abordagens para a quantização do campo gravitacional, bem como no estabelecimento do problema do valor inicial para configurações como buracos negros binários, com o objetivo de investigar a evolução temporal do sistema. Com o uso da análise numérica e ferramentas computacionais, a formulação hamiltoniana permite a investigação da natureza não linear de campo forte do campo gravitacional.

A formulação hamiltoniana do TERG é formulada por meio do seguinte procedimento. Começamos com a densidade Lagrangiana (3.27) e fazemos $L_M = 0$. A idéia é escrever a densidade lagrangiana L na forma $p\dot{q} - H$, onde H é reconhecido como a densidade hamiltoniana. O procedimento requer a realização da transformação de Legendre. Como na formulação da ADM, este é um passo não trivial. O procedimento exige a capacidade de identificar os multiplicadores de Lagrange como componentes não dinâmicos dos campos de tetrada e as restrições primárias dos componentes do momento. A formulação Hamiltoniana do TERG foi abordada pela primeira vez na referência [22], onde a condição Schwinger do medidor de tempo foi imposta aos campos de tetrada para simplificar os cálculos. A formulação hamiltoniana resultante é muito semelhante à formulação ADM. Em particular, as restrições algébricas assemelham-se às expressões correspondentes da formulação da ADM.

A formulação Hamiltoniana completa do TERG foi estabelecida na referência [35], mas uma formulação refinada foi apresentada na referência [36]. A álgebra de

restrição apresentada nesta última referência é semelhante à álgebra do grupo de Poincaré. A formulação hamiltoniana da gravidade unimodular no domínio do TERG foi investigado na referência [36]. Vamos dispensar a condição de unificação modular no tensor métrico e seguir a referência [36] nesta breve apresentação da formulação hamiltoniana do TERG.

Na construção atual da formulação hamiltoniana, lidamos diretamente com os componentes espaço-tempo dos campos tétricos e tensores métricos. Não realizamos uma decomposição 3+1 das quantidades do último campo, ou seja, os campos tetrada e o tensor métrico não são projetados em hipersuperfícies tridimensionais tipo espaço. A partir da densidade lagrangiana (3.27), obtemos o momento conjugado canonicamente a $e_{a\mu}$. Lê:

$$\Pi^{a\mu} = \frac{\delta L}{\delta \dot{e}_{a\mu}} = -4\kappa e \Sigma^{a0\mu}, \quad (3.51)$$

onde o ponto acima de $e_{a\mu}$ representa a derivada do tempo. Dado que

$$\Sigma^{abc} = -\Sigma^{acb},$$

temos $\dot{\Pi}^{a0} = 0$, o que é uma consequência do fato de não haver derivada temporal de e_{a0} [36].

Primeiro obtemos o Hamiltoniano primário $H_0 = \Pi^{ai} \dot{e}_{ai} - L$. É dado por:

$$\begin{aligned} H_0(e_{ai}, \Pi^{ai}, e_{a0}) = & -e_{a0} \partial_i \Pi^{ai} - \frac{\kappa e}{4g^{00}} \left(g_{i\kappa} g_{jl} P^{ij} P^{\kappa l} - \frac{1}{2} P^2 \right) \\ & + \kappa e \left(\frac{1}{4} g^{i\kappa} g^{jl} T_{ij}^a T_{a\kappa l} + \frac{1}{2} g^{jl} T_{ij}^\kappa T_{\kappa l}^i - g^{il} T_{ji}^j T_{\kappa l}^\kappa \right). \end{aligned} \quad (3.52)$$

A quantidade P^{ij} é definido por:

$$P^{\kappa i} = \frac{1}{\kappa e} \Pi^{(\kappa i)} - \Delta^{\kappa i}, \quad (3.53)$$

onde

$$\Delta^{\kappa i} = -g^{0m} (g^{\kappa i} T_{mj}^i + g^{ij} T_{mj}^\kappa - 2g^{i\kappa} T_{mj}^j) - (g^{\kappa m} g^{0i} + g^{im} g^{0\kappa}) T_{mj}^j.$$

A definição de momento Π^{ai} leva a vínculos primários $\Gamma^{ab} = 0$,

$$\Gamma^{ab} = -\Gamma^{ba} = \Pi^{[ab]} + 4\kappa e (\Sigma^{a0b} - \Sigma^{b0a}), \quad (3.54)$$

e para $\dot{\Pi}^{a0} = 0$. Restrições secundárias $C^a = 0$ surgem da evolução temporal das principais restrições $\dot{\Pi}^{a0}$, isto é, exigindo que $\dot{\Pi}^{a0}$ desapareça fracamente. As restrições Γ_{ab} não produzem restrições secundárias. A densidade hamiltoniana completa é dada por:

$$H(e_{a\mu}, \Pi^{a\mu}, \lambda_{ab}, \lambda_a) = e_{a0} C^a + \lambda_{ab} \Gamma^{ab} + \lambda_a \Pi^{a0}, \quad (3.55)$$

onde λ_{ab} e λ_a são multiplicadores de Lagrange que são determinados com precisão pelas equações da evolução. A expressão completa de C^a pode ser apresentado numa forma simplificada como [36]:

$$C^a = e^{a0}H_0 + e^{ai}H_i, \quad (3.56)$$

onde H_i é definido por

$$H_i = -e_{ai}\partial_\kappa\Pi^{a\kappa} - \Pi^{a\kappa}T_{a\kappa i}. \quad (3.57)$$

Segue da equação (49) que $e_{a0}C^a = H_0$. É importante observar, no entanto, que a restrição C^a também pode ser reescrita como

$$C^a = -\partial_i\Pi^{ai} - h^a, \quad (3.58)$$

onde h^a é obtido das equações (45) e (49). Esta forma de C^a será crucial na seção a seguir.

Os colchetes de Poisson das restrições C^a e Γ^{ab} são dados por [36]

$$\{C^a(x), C^b(y)\} = 0, \quad (3.59)$$

$$\{C^a(x), \Gamma^{bc}(y)\} = (\eta^{ab}C^c - \eta^{ac}C^b)\delta(x - y), \quad (3.60)$$

$$\{\Gamma^{ab}(x), \Gamma^{cd}(y)\} = (\eta^{ad}\Gamma^{bc} + \eta^{bc}\Gamma^{ad} - \eta^{ac}\Gamma^{bd} - \eta^{bd}\Gamma^{ac})\delta(x - y). \quad (3.61)$$

Todos os parênteses de Poisson das restrições Π^{a0} com C^a e Γ^{ab} desaparecem fortemente. Em vista da álgebra de restrição acima, vemos que as restrições C^a , Γ^{ab} e Π^{a0} constituem um conjunto de restrições de primeira classe. Assim, a formulação hamiltoniana matemática do TERG está matematicamente bem estabelecida, e o problema de valor inicial está bem definido.

As restrições C^a e Γ^{ab} são escritas com índices latinos por questões experimentais $SO(3, 1)$ e, conseqüentemente, as densidades de momento-energia gravitacional e de momento angular, a serem discutidos na próxima seção, também são escritas com esses índices. Além disso, a álgebra dada pelas equações (52-54) é muito semelhante a álgebra do grupo Poincaré. Esses recursos justificam o uso dos índices de $SO(3, 1)$ na rotulagem das restrições.

Os graus físicos de teoria da liberdade podem ser contados seguindo o caminho. O par de quantidades de campos dinâmicos (e_{ai}, Π^{ai}) exhibe $12 + 12 = 24$ graus de liberdade. As restrições $4 + 6$ de primeira classe (C^a, Γ^{ab}) geram simetrias da ação e, assim, reduzem $10 + 10 = 20$ graus de liberdade. Portanto, na teoria do espaço de fase, existem 4 graus de liberdade, como esperado.

3.2 MOMENTO-ENERGIA E MOMENTO ANGULAR DO CAMPO GRAVITACIONAL

As definições de energia, momento e momento angular do campo gravitacional constituem um problema de longa data na teoria geral da relatividade. Essas definições são necessárias para se obter uma ampla compreensão da teoria. A primeira abordagem para uma solução deste problema consistiu na derivação de pseudo-tensores de energia-momento. Contudo, a solução apresentada por essa abordagem não é satisfatória por pelo menos duas razões importantes. A primeira é que os pseudo-tensores não estão bem definidos com relação as transformações de coordenada. Como consequência, os resultados obtidos retidos por pseudo-tensores são "válidos" apenas em um sistema de coordenadas. A segunda razão é que existem vários pseudo-tensores disponíveis na literatura e não há explicação para o porquê de um pseudo-tensor ser melhor do que o outro. O princípio da equivalência é às vezes invocado para justificar a inexistência de uma expressão bem definida para a densidade de energia gravitacional. A ideia é que, como se pode transformar num tensor métrico arbitrário ao tensor métrico de Minkowski em qualquer linha mundo de um observador, uma expressão bem definida para a densidade de energia gravitacional não pode existir, uma vez que se pode "remover" o campo gravitacional ao longo desta linha mundo. O problema com esse argumento é que a transformação em consideração pode ser realizada também em qualquer trajetória espacial, independentemente do tensor métrico obedecer a qualquer equação de campo. A redução do tensor métrico ao tensor métrico de Minkowski em qualquer linha mundo é uma característica da geometria diferencial e não é manifestação de nenhum princípio físico [37]. Além disso, essa crítica não se aplica à estrutura teleparalela, porque o tensor de torção não pode desaparecer em um ponto no espaço-tempo por meio de uma transformação de coordenadas.

Um passo importante em direção ao conceito de momento-energia gravitacional foi fornecido pelo trabalho de Arnowitt, Deser e Misner [34]. Nesse contexto, o momento-energia gravitacional total é dado por integrais de superfície, construído a partir dos componentes do tensor métrico no infinito espacial, e é válido apenas para tempos espaciais assintoticamente planos. O momento-energia ADM apareceu pela primeira vez na construção da formulação hamiltoniana da relatividade geral. Deve estar presente na teoria hamiltoniana total (a integral das restrições Hamiltoniana e vetorial, multiplicada pelas funções lapse e shift, respectivamente), de modo que o Hamiltoniano total possui derivadas funcionais bem definidas em relação às variáveis do espaço de fase. Nesse caso, o hamiltoniano total gera as equações corretas de movimento [38]. É importante mencionar que a busca pela densidade de energia gravitacional dentro da formulação Hamiltoniana da relatividade geral foi sugerido a seguir de uma transformação canônica das variáveis do espaço de fase da formulação ADM, para novas variáveis que seriam classificadas como **(i)** incorporar variáveis e **(ii)** os

verdadeiros graus gravitacionais de liberdade [39]. Após essa transformação, seria de se esperar que as restrições fossem escritas como $H_A = P_A + h_A = 0$, ($A = 0, 1, 2, 3$), em que P_A é o momento de incorporação e h_A é a densidade de energia gravitacional e o fluxo de energia transportado pelos verdadeiros graus gravitacionais da liberdade [40]. No entanto, essa sugestão nunca foi implementado na formulação métrica do ADM.

Fica claro nas análises dos pseudo-tensores e do momento-energia gravitacionais fornecido pela abordagem ADM, que a densidade de energia gravitacional deve ser dada pelas derivadas de segunda ordem do tensor métrico. No entanto, não existe uma expressão covariante não trivial construída a partir do tensor métrico que produz, ao mesmo tempo, uma densidade escalar que pode ser interpretada como a densidade de energia gravitacional, e a energia total da ADM, quando integrada em todo o sistema espacial tridimensional. Essa é uma limitação da formulação métrica da relatividade geral. Acontece que essa expressão existe em uma teoria formulada em termos do tensor de torção.

No TERG, as equações de campo da teoria (Euler-Lagrange e primeiras equações de restrição de classe) são interpretadas como equações que definem a energia, momento e momento angular do campo gravitacional. Verificamos que, no contexto das equações de campo de Euler-Lagrange, podemos obter definições (34) e (35), juntamente com as equações de equilíbrio (33), (38) e (40), que estabelecem a conservação do momento-energia gravitacional. Na estrutura hamiltoniana, um recurso semelhante ocorre. A interpretação de uma equação de restrição como uma equação de energia para um sistema físico não é uma característica específica do TERG. Ocorre, por exemplo, na consideração da ação de Jacobi [41] para uma partícula não-relativista parametrizada. Para deixar claro esse recurso, consideremos uma partícula de massa m descrita no espaço de configuração por coordenadas generalizadas q^i , $i = 1, 2, 3$. A partícula está sujeita ao potencial $V(q)$ e possui energia constante E . Denotando $\dot{q}^i = dq^i/dt$, onde t é um número parâmetro crescente monotonicamente entre os pontos inicial e final (fixos) do caminho, a integral de Jacobi para esta partícula pode ser escrita como [42]

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{mg_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j} \sqrt{2[E - V(q)]}. \quad (3.62)$$

A ação é finalizada variando o caminho do espaço de configuração e exigindo $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$. Podemos simplificar o integrando escrevendo:

$$dt \sqrt{mg_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j} = \sqrt{mg_{ij}dq^i dq^j},$$

que mostra que a ação é invariante em reparametrizações do tempo t . Assim, na formulação do princípio da ação de Jacobi, é a energia E da partícula que é fixa, não seus instantes inicial e final de tempo. Em vista do tempo de reparametrização da ação

integral, o hamiltoniano construído a partir do período lagrangiano acima desaparece identicamente, o que é uma característica das teorias invariantes de reparametrização. Se denotarmos p^i como o momento conjugado a q^i achamos:

$$p_i = (g_{ij}\dot{q}^j/\sqrt{m})\sqrt{2(E-V)/\dot{q}^2},$$

o que leva à restrição

$$C(q, p) \equiv \frac{1}{2m}g^{ij}p_i p_j + V(q) - E \approx 0. \quad (3.63)$$

A equação de movimento obtida a partir da integral de ação deve ser complementada pela equação de restrição $C = 0$, para ser equivalente a Equação de movimento de Newton com energia fixa E [42]. Portanto, vemos que a equação de restrição define a energia da partícula. Essa é exatamente a característica que ocorre no TERG: as definições de momento e momento angular do campo gravitacional surgem a partir das equações de restrição da teoria [26, 43]. Essas definições são viáveis desde que produzam valores consistentes na consideração de informações relevantes e configurações de campo gravitacional compreendidas.

3.2.1 Momento-energia gravitacional

Vamos considerar a expressão da equação de restrição $C^a = 0$, onde C^a é dada pela equação (3.58). O primeiro termo no lado direito da equação (3.58) é $-\partial_i \Pi^{ai}$. Lembramos que o momento Π^{ai} é uma densidade tal que $\Pi^{ai} = -4\kappa e \sum^{a0i}$, de acordo com a equação (3.51). Na formulação métrica da relatividade geral, não existe qualquer quantidade do tipo de $-\partial_i \Pi^{ai} = h^a$, isto é, uma divergência total não trivial. O surgimento de uma densidade na forma de uma divergência total é a motivação para considerar a forma integral da equação de restrição $C^a = 0$,

$$-\partial_i \Pi^{ai} = h^a, \quad (3.64)$$

como uma equação para o momento da energia gravitacional. Este é exatamente o argumento apresentado nas referências [26, 44]. Por isso, definimos:

$$P^a = - \int_V d^3x \partial_i \Pi^{ai} = - \oint_S dS_i \Pi^{ai}, \quad (3.65)$$

como o momento-energia gravitacional total. Esta é a expressão exata (3.35), obtido no domínio da formulação lagrangiana. Lembramos que a equação (3.65) foi apresentado pela primeira vez na referência [25]. Os componentes do vetor P^a são $(E/c, P)$. Se assumirmos que os campos de tetrada satisfazem as condições de limites assintóticos:

$$e_{a\mu} \simeq \eta_{a\mu} + \frac{1}{2}h_{a\mu}(1/r), \quad (3.66)$$

no infinito espacial, ou seja, no limite $r \rightarrow \infty$, então a energia gravitacional total $E = cP^{(0)}$ é a energia ADM [26],

$$E = \frac{c^4}{16\pi G} \int_{S \rightarrow \infty} dS_\kappa (\partial_i h_{i\kappa} - \partial_\kappa h_{ii}) = E_{ADM}. \quad (3.67)$$

A definição (3.65) foi aplicada a várias configurações do campo gravitacional e todos os resultados são consistentes. Nesta tese, reconsideraremos apenas um resultado importante que se segue da equação (3.65). É importante, no entanto, para resolver o problema da regularização da definição (3.65).

A maioria dos conjuntos de campos tetrada adaptados a observadores comuns satisfazem as condições de contorno assintóticas (3.66). É claro que, quando aplicamos o desaparecimento dos parâmetros físicos do tensor métrico, como massa, momento angular e carga, o espaço-tempo em consideração é reduzido ao espaço-tempo plano e, neste caso, espera-se que os componentes do tensor de torção $T_{a\mu\nu}$ desapareçam. De fato, todos os componentes $T_{a\mu\nu}$ desaparecem se forem obtidos a partir dos campos tetrada que satisfazem (3.66), quando exigimos o desaparecimento dos parâmetros físicos.

No entanto, os campos tetrada nem sempre têm o mesmo comportamento assintótico do tensor métrico. Quando este for o caso, podemos ter $T_{a\mu\nu} \neq 0$ mesmo para o espaço-tempo plano. Um exemplo é dado pelo seguinte conjunto de campos de tetrada,

$$E_\mu^a(t, r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \sin\theta \end{pmatrix}. \quad (3.68)$$

Os campos de tetrada acima produzem o elemento de linha para o espaço-tempo plano em coordenadas esféricas. A partir desse conjunto de campos de tetrada, obtemos três componentes: $T_{(2)12} = 1$, $T_{(3)13} = \sin\theta$ e $T_{(3)23} = r \cos\theta$. Transformando a equação (3.68) em coordenadas cartesianas, vemos claramente que este último não exibe as condições de contorno dadas da equação (3.66) [17].

Vamos denotar o conjunto de tétradas planas que exibe o recurso acima como E_μ^a , e o momento construído a partir de E_μ^a por $\prod^{ai}(E)$. A forma do momento-energia regular gravitacional P^a é definido por [17]

$$P^a = - \int_V d^3x \partial_\kappa [\Pi^{a\kappa}(e) - \Pi^{a\kappa}(E)]. \quad (3.69)$$

Esta definição garante que o momento-energia do espaço-tempo plano sempre desapareça. Os campos tetrada E_μ^a são obtidos dos campos físicos e_μ^a apenas exigindo o desaparecimento dos parâmetros (m, a, q, \dots) . Observamos que expressões regularizadas como a equação (3.69) são úteis na investigação de modelos cosmológicos, onde não se dispõe das condições de limites assintóticos [45].

A avaliação da definição (3.65) é realizada no espaço de configuração. A definição é invariante sob

- (i) transformações gerais de coordenadas do espaço tridimensional,
- (ii) reparametrizações temporais e
- (iii) covariantes sob transformações globais de $SO(3, 1)$.

A não covariância da equação (3.65) no grupo local $SO(3, 1)$ reflete a dependência de quadros da definição. No TERG cada conjunto de campos tetrada é interpretado como um quadro de referência no espaço-tempo. Quantidades integrais como P^a não podem ser covariantes nas transformações locais $SO(3, 1)$.

A invariância das quantidades de campo nas transformações locais de $SO(3, 1)$ (Lorentz) implica que a medição dessas quantidades é a mesma em quadros inerciais e acelerados. Este não é um recurso esperado dos conceitos como energia, momento e momento angular. A energia é sempre o componente zero de um vetor de momento-energia. Não pode ser invariante sob qualquer tipo de transformação $SO(3, 1)$.

Vale a pena recordar uma situação física simples em que o quadro ocorre a dependência do momento-energia gravitacional. Para esse fim, consideramos um buraco negro de massa m e um observador muito distante do buraco negro. O buraco negro aparecerá para esse observador como uma partícula de massa m , com energia $E = cP^{(0)} = mc^2$. O parâmetro m é a massa restante do buraco negro, ou seja, a massa do buraco negro no quadro onde o buraco negro está em repouso. Se, no entanto, o observador estiver se movendo na velocidade v em relação a um buraco negro, então sua energia gravitacional total será $E = \gamma mc^2$, onde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. A energia gravitacional é de fato o componente zero do vetor gravitacional do momento-energia. Este exemplo é uma consequência da teoria da relatividade especial e demonstra a dependência do sistema de referência do momento-energia gravitacional. A dependência do sistema de referência não é restrita para observadores no infinito espacial. Isso vale para observadores localizados em todos os lugares no espaço tridimensional.

Por fim, mencionamos que a avaliação do P^a em um observador caindo livremente no espaço-tempo de Schwarzschild leva a um desaparecimento do momento-energia gravitacional, ou seja, $P^a = 0$ [46]. Este resultado está de acordo com o padrão descrito do princípio da equivalência, uma vez que os efeitos locais da gravidade não são medidos por um observador em queda livre. Esse observador não pode medir sua própria aceleração gravitacional. Os campos tetrada que estabelecem o quadro observado em queda livre está relacionado a quadros estacionários, por exemplo, por uma transformação de quadro, não por transformação de coordenadas.

3.2.2 Momento angular gravitacional

No TERG, a definição do momento angular gravitacional também é obtida a partir das equações de vínculo da teoria, em semelhança com a definição do momento-energia gravitacional discutido na seção 3.2.1. As restrições primárias na densidade Hamiltoniana, Γ^{ab} , produzem as equações $\Gamma^{ab} = 0$ ou

$$2\Pi^{[ab]} + 4\kappa e(\Sigma^{a0b} - \Sigma^{b0a}) = 0. \quad (3.70)$$

Portanto, definimos a densidade do momento angular gravitacional como

$$M^{ab} = 2\Pi^{[ab]} = -4\kappa e(\Sigma^{a0b} - \Sigma^{b0a}), \quad (3.71)$$

e o momento angular total do campo gravitacional, contido em um volume V do espaço tridimensional, de acordo com [43, 47]

$$L^{ab} = - \int_V d^3x M^{ab}. \quad (3.72)$$

A expressão acima pode ser calculada a partir das quantidades de campo no espaço de configuração da teoria. Em contraste com a expressão do momento-energia gravitacional, a equação (3.72) não surge sob a forma de um divergência total.

Na descrição newtoniana da mecânica clássica, o momento angular da fonte é dependente do sistema de referência. Esse recurso também se aplica à mecânica relativística. Se o momento angular da fonte em geral é dependente do quadro, é razoável considerar que o momento angular do campo também depende do quadro. Diferentemente de outras definições de momento angular gravitacional, formuladas em termos de integrais de superfície no infinito espacial e dependem apenas do comportamento assintótico do tensor métrico, a definição considerada aqui depende naturalmente do quadro, uma vez que é covariante sob transformações globais de $SO(3, 1)$ dos campos tetrada. Na presente estrutura, os observadores que estão em movimento rotacional em torno da fonte rotativa mede o momento angular do campo gravitacional de maneira diferente dos observadores estáticos. Observadores rotativos e estáticos também obtêm valores diferentes para o momento angular da fonte. Na mecânica newtoniana, o momento angular da fonte, no quadro de observadores que co-gire com a fonte, desaparece.

Vamos considerar um elemento de linha geral para um espaço-tempo com simetria axial,

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{11}dr^2 + g_{22}d\theta^2 + g_{33}d\phi^2 + 2g_{03}d\phi dt, \quad (3.73)$$

onde todos os componentes métricos dependem das coordenadas esféricas r e θ : $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(r, \theta)$. Aqui vamos adotar $c = 1$. Um quadro relevante é determinado pelo

conjunto de campos tetrada adaptados a observadores estacionários. Esse quadro é estabelecido pelas condições:

$$e_{(0)}^i = u^i = 0, \quad (3.74)$$

em coordenadas esféricas. Também escolhamos o componente $e_{(3)}^\mu$ a ser orientado assintoticamente ($r \rightarrow \infty$) com o vetor unitário \hat{z} ao longo do eixo z , ou seja,

$$e_{(3)}^\mu(t, x, y, z) \cong (0, 0, 0, 1). \quad (3.75)$$

O sistema de referência resultante nas coordenadas (t, r, θ, ϕ) lê [47]

$$e_{a\mu} = \begin{pmatrix} -A & 0 & 0 & -C \\ 0 & \sqrt{g_{11}} \text{sen}\theta \cos\phi & \sqrt{g_{22}} \cos\theta \cos\phi & -Dr \text{sen}\theta \text{sen}\phi \\ 0 & \sqrt{g_{11}} \text{sen}\theta \text{sen}\phi & \sqrt{g_{22}} \cos\theta \text{sen}\phi & Dr \text{sen}\theta \cos\phi \\ 0 & \sqrt{g_{11}} \cos\theta & -\sqrt{g_{22}} \text{sen}\theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.76)$$

As funções A , C e D são definidas por

$$A(r, \theta) = (-g_{00})^{1/2}, \quad C(r, \theta) = -\frac{g_{03}}{(-g_{00})^{1/2}}, \quad (3.77)$$

$$D(r, \theta) = \left[\frac{-\delta}{(r^2 \text{sen}^2\theta) g_{00}} \right],$$

onde $\delta = g_{03}g_{03} - g_{00}g_{33}$.

Usamos a definição (3.71) para calcular os componentes do M^{ab} . É possível para verificar se apenas dois componentes não desaparecem. Esses componentes eventualmente surgem como divergências totais. Nós encontramos [47]

$$M^{(1)(2)} = 2\kappa \left[\partial_1 \left(\frac{g_{03} \sqrt{g_{22}} \text{sen}\theta}{\sqrt{-g_{00}}} \right) + \partial_2 \left(\frac{g_{03} \sqrt{g_{11}} \cos\theta}{\sqrt{-g_{00}}} \right) \right], \quad (3.78)$$

e

$$M^{(0)(3)} = 2\kappa \left[\partial_1 \left(\frac{\delta^{1/2} \sqrt{g_{22}} \text{sen}\theta}{\sqrt{-g_{00}}} \right) - \partial_2 \left(\frac{\delta^{1/2} \sqrt{g_{11}} \cos\theta}{\sqrt{-g_{00}}} \right) \right], \quad (3.79)$$

Para obter o momento angular total do campo gravitacional, no quadro determinado pela equação (3.76), avaliamos a integral da equação (3.78) como integral de superfície, de modo que a superfície de integração S , determinada pelas condições $r = \text{constante}$, está localizado no infinito espacial. Nós obtemos

$$L^{(1)(2)} = - \int d^3x M^{(1)(2)} = -2\kappa \oint_{s \rightarrow \infty} d\theta d\phi \left(\frac{g_{03} \sqrt{g_{22}} \text{sen}\theta}{\sqrt{-g_{00}}} \right) \quad (3.80)$$

Podemos então verificar se, para um dado tensor métrico espaço-tempo, o momento angular gravitacional total é finito, desaparece ou diverge. Se for dado $g_{\mu\nu}$ em coordenadas esféricas e se o seguinte comportamento assintótico for verificado,

$$\begin{aligned} g_{03} &\cong O(1/r) + \dots \\ g_{22} &\cong r^2 + O(r) + \dots \\ -g_{00} &\cong 1 + O(1/r) + \dots \end{aligned} \quad (3.81)$$

então a expressão (3.80) será finita.

Na referência [47] um modelo específico para uma estrela rotativa de nêutrons foi investigado em detalhe. Verificou-se que o momento angular do campo é dado em termos do momento angular da fonte J_S de acordo com a equação $L^{(1)(2)} = (2/3)J_S$. Esse resultado parece ser geral e também é verificado para o espaço-tempo de Kerr, no quadro de observadores estáticos, onde encontramos $L^{(1)(2)} = (2/3)ma = (2/3)J$.

A quantidade $L^{(0)(3)}$ é interpretado como o centro de massa gravitacional. Ele desapareceu para a estrela rotativa de nêutrons investigada na referência [47]. O modelo determinado por (3.73) é arbitrário no sentido de que o tensor métrico depende arbitrariamente de θ . Tendo em vista a simetria axial do modelo, é natural que o centro de massa gravitacional desapareça ao longo das direções x e y , mas devido à dependência θ do tensor métrico, a integral de (3.79) não desaparece em geral.

Em semelhança com a definição do momento-energia gravitacional regular, também podemos estabelecer uma definição para o momento angular gravitacional regular. Em vista da equação (3.69), podemos estender a definição do momento angular gravitacional como

$$L^{ab} = - \int_V d^3x [M^{ab}(e) - M^{ab}(E)], \quad (3.82)$$

onde E_μ^a é definido exatamente como na Seção 3.2.1.

Com o objetivo de analisar a dependência de quadros do momento angular gravitacional, vamos considerar a forma geral (e simples) do elemento de linha que descreve uma estrela de nêutrons rotativa, por exemplo. Este elemento de linha é dado por [47]

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \beta^2 dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta (d\phi - \Omega dt)^2, \quad (3.83)$$

onde α , β e Ω são funções apenas da coordenada radial r . Novamente adotamos $c = 1$. O raio da estrela é denotado por R . Essas quantidades são definidas para o interior ($r < R$) e para o exterior ($r > R$) da estrela. Na região exterior, temos $\Omega(r) = 2GJ_S/r^3$. Em vez de adotar o quadro determinado pela equação (3.74), vamos considerar um quadro que satisfaça a condição de gauge de tempo de Schwinger,

$$e_{(i)}^0 = 0, \quad (3.84)$$

juntamente com a condição (3.75). Nas coordenadas (t, r, θ, ϕ) , o quadro mostra [47]

$$e_{a\mu} = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ \Omega r \text{sen} \theta \text{sen} \phi & \beta \text{sen} \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \text{sen} \theta \text{sen} \phi \\ -\Omega r \text{sen} \theta \cos \phi & \beta \text{sen} \theta \text{sen} \phi & r \cos \theta \text{sen} \phi & r \text{sen} \theta \cos \phi \\ 0 & \beta \cos \theta & -r \text{sen} \theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.85)$$

Esse sistema de referência é adaptado ao campo de observadores cuja velocidade $e_{(0)}^\mu$ é dada por

$$e_{(0)}^\mu(t, r, \theta, \phi) = \frac{1}{\alpha}(1, 0, 0, \Omega(r)). \quad (3.86)$$

$\Omega(r)$ é a velocidade de arrasto dos quadros inerciais que giram sob a ação da estrela de nêutrons. A expressão acima para $e_{(0)}^\mu$ descreve o campo de velocidade dos observadores que são arrastados em movimento circular ao redor da estrela. Acontece que o momento angular do campo gravitacional calculado a partir de (3.85) desaparece [47],

$$L^{(1)(2)} = 0, \quad (3.87)$$

desde $M^{(1)(2)} = 0$. De fato, todos os componentes do M^{ab} desaparecem. Essa classe de observadores é conhecido na literatura como observadores de momento angular zero (ZAMOs). Eles seguem trajetórias com coordenadas radiais constantes r e com velocidade angular dada pela velocidade de arrasto dos quadros inerciais.

O resultado dado pela equação (3.87) mostra que os observadores que estão em rotação o movimento ao redor da fonte rotativa mede o momento angular gravitacional de maneira diferente dos observadores estáticos. Uma explicação para este resultado deve levar em consideração o momento angular da fonte, que é diferente para os observadores em repouso e para aqueles que giram em torno da fonte. Na teoria newtoniana, o momento angular da fonte, no quadro de observadores que giram na mesma frequência angular, desaparece. Nós sabemos que esse recurso vale para um corpo rígido na mecânica newtoniana, onde o momento angular depende não apenas do quadro, mas também da origem da moldura. Observadores cuja velocidade angular ao redor da fonte rotativa é o mesmo que a velocidade de arrasto $\Omega(r)$ não mede essa velocidade de arrasto (e possivelmente outros efeitos de arrasto) e, portanto, para esses observadores, o momento angular gravitacional desaparece.

Descrevemos a relatividade geral em termos do campo tetrada $e_{a\mu}$ e do tensor de torção $T_{\alpha\mu\nu} = \partial_\mu e_{\alpha\nu} - \partial_\nu e_{\alpha\mu}$. Os campos tetrada constituem o quadro adaptado aos observadores no espaço-tempo. Todos os observadores são permitidos, e para cada um existe um quadro adaptado à sua linha mundo. Essa descrição alternativa não implica uma dinâmica alternativa para a métrica do tensor. Os campos tetrada satisfazem as equações de campo estritamente equivalentes as Equações de Einstein. Nesta descrição geométrica, os campos tetrada produzem várias novas definições que não podem ser estabelecidas na formulação do sistema métrico comum. As equações de campo levam a uma equação de conservação real e definições consistentes de energia, momento e momento angular do campo gravitacional. Na análise de algumas configurações padrão do campo gravitacional, essas definições levam a resultados consistentes com a configuração física. As definições não são invariantes ou transformações covariantes locais do $SO(3, 1)$, mas apenas covariante nas transformações

globais. Invariância de quantidades de campo sob transformações locais de $SO(3, 1)$ implica que a medição dessas quantidades é a mesma em termos inerciais e quadros acelerados. Essa invariância não é uma característica natural de conceitos como energia, momento e momento angular. A energia é sempre o componente zero de um vetor de momento-energia.

Embora a gravidade teleparalela tenha sido abordada pela primeira vez por Hayashi e Shirafuji [48, 49] em uma estrutura geométrica semelhante à adotada aqui, pode ser considerado um caso limitante da estrutura mais geral das teorias métricas-afins da gravidade. Existe uma ambiguidade na determinação dos multiplicadores de Lagrange [50]. Além disso, em nossa opinião, a invariância local de Lorentz não é uma característica natural do paralelismo distante, ou teleparalelismo.

Em resumo, o TERG é uma descrição simples e consistente do campo gravitacional. Ele incorpora todas as características físicas da formulação métrica padrão e permite definições para a energia, momento e momento angular do campo gravitacional que satisfazem a álgebra do grupo Poincaré no espaço de fase da teoria.

4 DINÂMICA DO CAMPO TÉRMICO (DCT)

4.1 PRINCÍPIOS GERAIS DA TERMODINÂMICA

A termodinâmica é a parte da física que estuda as leis que regem as relações entre calor, trabalho e outras formas de energia, mais especificamente a transformação de um tipo de energia em outra, a disponibilidade de energia para realização de trabalho e a direção das trocas de calor.

Durante o século passado, a apresentação desta teoria seguiu os desenvolvimentos históricos, com leis e exemplos baseados e explicados considerando fundamentalmente os problemas clássicos de engenharia térmica. Seguindo essa tendência, ainda é comum ver a formulação da segunda lei com base nas prescrições de Kelvin e Clausius. Historicamente, com essa lei, usando o ciclo de Carnot e o teorema de Clausius, a existência de uma função de estado chamada entropia (do grego, transformação) é então formulada. Tisza [51, 52] e Callen [53], usaram a função de entropia e a noção de um princípio extremo como ponto de partida ontológica para construir a teoria termodinâmica. Este procedimento abastece um físico com um formalismo legível, fornecendo uma maneira de abranger o efeito do tempo no contexto das abordagens térmicas e, no entanto, trazendo noções de leis térmicas para o domínio de teoria quântica de campos.

Quanto à estrutura teórica do formalismo térmico, vale ressaltar que é semelhante à teoria de um sistema mecânico, primeiro introduzimos uma definição para a noção de estado térmico e, depois, as mudanças nos estados são analisadas com leis causais. Embora, em equilíbrio, o tempo termodinâmico não desempenha um papel como na mecânica, ainda podemos distinguir os aspectos cinemáticos e dinâmicos da teoria. Os cinemáticos estão relacionados às definições de variáveis termodinâmicas (térmicas), à mensurabilidade, à definição do estado de um sistema térmico e definição de processos específicos. Os aspectos dinâmicos estão relacionados às mudanças no estado e às leis que regulam tais mudanças. Esse esquema também funciona quando o tempo é um parâmetro relevante, de modo que ocorrem processos sem equilíbrio.

4.1.1 Aspectos cinemáticos da física térmica

Nesta seção, consideraremos a termodinâmica não-relativística. Então temos que a descrição teórica de um sistema físico é realizada definindo os pontos no espaço e no tempo em que os processos de medição e testes de tal teoria devem acontecer. Isso nos traz à noção usual de um quadro de referência, definido pela transformação de um ponto para outro em espaço e tempo. Um aspecto importante associado à

introdução de uma estrutura de referência é que as noções de espaço e tempo são definidas simultaneamente, mas para processos térmicos de equilíbrio, o espaço desempenha apenas um papel significativo e é a definição adequada de uma régua. Assumimos como estrutura de referência o sistema de laboratório, sem considerar nenhuma mudança de coordenadas. As características de um sistema térmico são dadas por um conjunto de variáveis macroscópicas previamente selecionadas por um observador localizado no laboratório. Essas variáveis são, por exemplo, energia interna (E), pressão (P), volume (V), entre outros. A definição de tais variáveis térmicas são dadas juntamente com o processo de medição através do uso de restrições e paredes. O volume é medido por régua; a temperatura, que é interpretada inicialmente como uma quantidade que fornece o grau de calor de um corpo (fluido calorífico), e é medida por termômetros. As paredes definem um volume quando seus tamanhos são fixos, já as paredes restritivas a qualquer tipo de energia dá origem a um sistema isolado, mas quando as paredes de um sistema permitem um fluxo muito lento de energia para um sistema apenas através de trabalho mecânico, as paredes são chamadas adiabáticas. As paredes são chamadas de **diatérmicas** quando mudanças na energia entre dois sistemas são permitidos através de uma diferença de temperatura.

Existem dois tipos de variáveis térmicas e para percebermos isso, consideraremos uma análise macroscópica do sistema homogêneo, dividido em vários subsistemas semelhantes. Uma variável é considerada extensiva quando seu valor é igual à soma dos valores de cada subsistema. Exemplos desse tipo de variáveis são: energia, volume e número de mols. Uma variável é considerada intensiva se seu valor for independente dos subsistemas. Como exemplos temos temperatura, pressão e todas as densidades definidas a partir das variáveis extensas como: densidade de energia, densidade de volume e assim por diante.

O estado de um sistema macroscópico é definido especificando um conjunto de variáveis, ou seja, por uma função de estado do sistema. Geralmente, a evolução de um sistema isolado é encontrado após algum tempo quando o sistema atinge um estado final no qual suas variáveis não mudam mais no tempo, tal estado é chamado **estado de equilíbrio térmico** e é definido por um conjunto de parâmetros extensos, incluindo necessariamente energia. Um estado de equilíbrio será denotado por $x = x_0, x_1, \dots, x_r$, com $x_0 = E$. Um sistema simples é definido pela configuração $x_1 = V, x_2 = N_1, x_3 = N_2, \dots$, onde N_1, N_2, \dots são os números de mols de diferentes substâncias.

A mensurabilidade de variáveis como V e N , como dissemos, seguem métodos padrão, já a medição da energia E , no entanto, requer uma discussão detalhada. Primeiro precisamos lembrar que a noção de energia tem sua origem na mecânica, ou seja, a energia é definida em termos da noção de trabalho, medida no sistema

MKS¹ em Joules, J , com $1J = 1Nm$, de modo que a diferença entre dois níveis de energia de um sistema está fisicamente associada à alteração do estado mecânico. Portanto, mesmo tratando um sistema térmico, a energia interna deve ser medida por um processo que envolve trabalho mecânico. O conceito de conservação de energia, no entanto, é apoiado pelo experimento de Joule.

Existem fluxos de energia de ou para um sistema condicionado pela diferença de temperatura, através das paredes diatérmicas, esse fluxo é chamado de **calor** e foi inicialmente medido em unidades arbitrárias chamadas **calorias (Cal)**. Com Joule, a energia de cada conteúdo cal foi estabelecido experimentalmente resultando em $1Cal = 4,184J$.

Se tratarmos estados de equilíbrio, assumimos que dois estados arbitrários podem ser conectados entre si através de um processo composto por uma infinidade de estados intermediários, são chamados quase-estáticos. Essa noção é necessária para que possamos definir corretamente uma quantidade térmica diferenciável. O trabalho

TABELA 2 – Trabalhos mecânicos e Forças generalizadas

Trabalho infinitesimal dW	Tipos de Forças
$-PdV$	Pressão P
$\sum_{j=1}^l \mu_j dN_j$	Potencial químico μ_j
$\mu_0 H_{ext} \cdot dI_j$	Campo Magnético H
$E_{ext} \cdot dp$	Campo Elétrico E

Fonte: Khanna, F.C.; Malbouisson, A.P.C.; Malbouisson, J.M.C.; Santana, A.E. - Thermal Quantum Field Theory (Algebraic Aspects and Applications), World Scientific, 2009.

mecânico associado a um sistema descrito pelos parâmetros $x = E, x_1, \dots, x_r$ pode ser escrito como:

$$dW = f \cdot dx = \sum_{j=1}^l f_j dx_j, \quad l \leq r \quad (4.1)$$

onde f_j é a força generalizada aplicada e x_j é o parâmetro extensivo correspondente modificado pela ação de f_j . Expressões para trabalhos mecânicos são dadas na seção seguinte para sistemas diferentes, onde P significa pressão; μ_j para o potencial químico²; μ_0 para a permissividade do vácuo³; H para o campo magnético externo; I_j para o momento dipolo magnético⁴, em que $\mu_0 H_{ext}$ é a força associada à variável extensa I_j ; E_{ext} para o campo elétrico⁵ e p o momento do dipolo elétrico⁶. Até agora,

¹ MKS: Sistema Internacional de Unidades que corresponde as iniciais dos símbolos das três unidades de base usadas: comprimento, massa e tempo (LMT).

² Pode ser considerado a força motriz para a difusão de átomos, num sentido amplo da palavra.

³ É o quociente dos campos nesse meio.

⁴ É uma medida da intensidade da fonte magnética.

⁵ É uma grandeza física vetorial que mede o módulo da força elétrica exercida sobre cada unidade de carga elétrica colocada em uma região do espaço sobre a influência de uma carga geradora de campo elétrico.

⁶ É a medida da polaridade de um sistema de cargas elétricas.

as características de um sistema térmico foram baseadas em aspectos envolvendo as definições de um estado térmico, sem uma especificação das leis que descrevam as mudanças no estado. Essa caracterização dinâmica é objetivo da seção a seguir.

4.1.2 Aspectos dinâmicos da física térmica

4.1.2.1 Primeira Lei da Termodinâmica

Para estabelecer as leis que controlam a evolução de um estado de equilíbrio térmico, primeiro consideramos um fluxo infinitesimal de energia para um sistema via trabalho (dW) e calor (dQ) e vamos assumir a conservação de energia. Então do experimento de Joule, podemos escrever as mudanças infinitesimais na energia interna (dE) no seguinte caminho:

$$dE = dQ + dW. \quad (4.2)$$

Essa expressão é chamada de **primeira lei da termodinâmica**, princípio da conservação de energia aplicada à termodinâmica, o que torna possível prever o comportamento de um sistema gasoso ao sofrer uma transformação termodinâmica. Observe que o conteúdo do diferencial matemático pode ser assumido para dE , pois E pode ser tomado como uma função de variáveis do sistema térmico - uma função do estado. Mas este não é o caso de dQ e dW , que expressam apenas pequenos fluxos para o sistema, por isso é usado como δQ . Conhecendo esta lei, podemos agora observar seu comportamento:

- **Primeiro:** recebe calor quando realiza trabalho, por consequência a energia interna aumenta, ou seja, > 0 .
- **Segundo:** cede calor quando recebe trabalho, por consequência a energia interna diminui, ou seja, < 0 .
- **Terceiro:** não troca calor, então não realiza e nem recebe trabalho, por consequência a energia interna não varia, ou seja, $= 0$.

4.1.2.2 Segunda Lei da Termodinâmica

A primeira lei não é suficiente para tratar todos os processos térmicos, então para isso, um resultado experimental é prescrito, se dois sistemas simples forem estabelecidos em contato térmico, o fluxo de calor ocorrerá do sistema mais quente para o mais frio. A reversão desse processo, sem qualquer intervenção externa, não é observada, embora não contradiga a primeira lei. Para discorrer sobre esta questão, consideramos um sistema em um estado dado pelo conjunto: $x = E, x_1, \dots, x_r$ e assumimos a existência de uma função de estado: $S = S(E, x_1, \dots, x_r)$ que é chamado

de entropia. A entropia, $S(E, x_1, \dots, x_r)$ é definida como uma função extensa, analítica e monotonicamente crescente na variável E . Além disso, na ausência de restrições internas, valores de variáveis extensas são aqueles que tornam S máximo para um estado de equilíbrio. Quer dizer,

$$\begin{aligned}\delta S|_{\text{equilíbrio}} &= 0, \\ \delta^2 S|_{\text{equilíbrio}} &< 0\end{aligned}$$

. Este princípio é chamado de **segunda lei da termodinâmica**.

Com a segunda lei, os processos térmicos podem ser classificados como reversíveis ou irreversíveis. Um processo irreversível é aquele que, se considerado reversível, tenderia a minimizar S , contradizendo a segunda lei. Um exemplo desse processo é a expansão livre de um gás, que é um processo sem equilíbrio. No caso do equilíbrio, um processo é reversível quando pode ser recuperado quase estaticamente através de um conjunto de estados de equilíbrio. Nesse caso, a entropia é constante, de acordo com a segunda lei.

4.1.2.3 Terceira Lei da Termodinâmica

A terceira lei afirma que, por várias etapas finitas, é impossível diminuir a temperatura para $T = 0$. Uma consequência desse princípio é que, se um sistema, em um estado caracterizado por uma variável x (finito), é resfriado para outro estado caracterizado por $x + \delta x$, então em $T = 0$, $\delta S|_a = 0$ ou:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{T \rightarrow 0} = 0. \quad (4.3)$$

Um resultado experimental derivado desse princípio é que

$$\lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T \rightarrow 0} = - \lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = 0.$$

Essa lei, formulada por Walther Nerst em 1905, às vezes é interpretada na mecânica estatística como uma condição de entropia, explicando melhor, a entropia teria a tendência de apresentar um valor mínimo, caso a temperatura de uma substância pura fosse igual ou aproximada a zero absoluto, ou seja, fixando o valor da entropia como $S = 0$ em $T = 0$ [53, 54].

4.2 FUNÇÃO DE PARTIÇÃO E INTEGRAL DE CAMINHO

O objetivo central desta seção é mostrar que a função de partição pode ser usada para introduzir a noção de função geradora, uma ferramenta importante para realizar cálculos em sistemas quânticos, dando origem a métodos perturbativos poderosos. Esse fato abre portas para trazer a termodinâmica para o reino da teoria quântica de campos.

O conceito de integral de caminho foi apresentado pela primeira vez por Wiener [55, 56], no contexto de problemas estocásticos⁷. Feynman [57, 58] baseado em uma generalização do trabalho de Dirac [59], desenvolveu a idéia de integral de caminho como um esquema geral para quantização. O conceito de função geradora foi introduzido por Heisenberg e Euler [60], e Schwinger [61] utilizou tal noção com o formalismo da integral de caminho, propondo uma teoria de partículas e fontes. Foi também Schwinger [62] que, pretendendo escrever férmions por meio de um formalismo da integral de caminho, introduziu os números de Grassmann na física.

Aqui, apresentamos um esboço para o uso do método da função geradora, com sua extensão para campos quânticos em temperatura zero [63–67].

4.2.1 Função de partição e o propagador

A média estatística de um observável A , no conjunto canônico é dada por:

$$\langle A \rangle = \text{Tr}[\rho(\beta)A] = \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr}[e^{\beta H} A], \quad (4.4)$$

onde a função de partição é:

$$Z(\beta) = \text{Tr}(e^{-\beta H}), \quad (4.5)$$

$\beta = 1/T$ é o inverso da temperatura (tomamos $k_B = 1$ em todo lugar), e H é o hamiltoniano. O principal papel da função de partição é funcionar como uma soma de estados, fornecendo a normalização de ρ .

A função de partição também fornece uma maneira de calcular a energia do estado fundamental em temperatura zero. Para uma base em que o hamiltoniano é diagonal, temos:

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr} e^{-\beta H} H = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | e^{-\beta \epsilon_n} H | \rangle \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \left[\epsilon_0 e^{-\beta \epsilon_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n e^{-\beta \epsilon_n} \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Considerando $\beta = 1/T \rightarrow \infty$ (equivalente a tomar $T \rightarrow 0$), o termo principal na equação (4.6) é apenas a energia do estado fundamental. Algumas quantidades básicas como energia livre, pressão e entropia são calculadas diretamente de Z . Na verdade, a partir da definição da energia interna, temos:

$$\langle H \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr}(e^{-\beta H} H) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z(\beta). \quad (4.7)$$

A energia livre de Helmholtz fica:

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z(\beta),$$

⁷ Cujo estado é indeterminado, com origem em eventos aleatórios.

que é consistente com a entropia dada por:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{T}F + \frac{1}{T}E = \beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} F \\ &= -\beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{\beta} \ln Z(\beta) \right). \end{aligned}$$

A pressão é então escrita como:

$$P = -\frac{\partial}{\partial V} F = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial V} \ln Z(\beta).$$

Outro resultado importante a respeito da natureza do conjunto canônico (ou mesmo o grande canônico) são as condições de Kubo-Martin-Schwinger (KMS) [68, 69] que afirmam que a média estatística de um operador na imagem de Heisenberg, digamos $A_H(t) = e^{-itH} A(0) e^{itH}$, é periódico no tempo com um período $i\beta$ (o subscrito “H” em $A_H(t)$ representa a imagem de Heisenberg). Este resultado pode ser comprovado diretamente a partir da média estatística:

$$\begin{aligned} \langle A_H(t) \rangle &= Tr[\rho(\beta)A(t)] = \frac{1}{Z(\beta)} Tr[e^{-\beta H} A(t)] \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} Tr[e^{-\beta H} e^{-itH} A(0) e^{itH}] \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} Tr[e^{-\beta H} A_H(t - i\beta)] \equiv \langle A_H(t - i\beta H) \rangle. \end{aligned}$$

A mudança no argumento de A_H , $t \rightarrow t - i\beta$ é chamada de rotação Wick do eixo do tempo. Vamos investigar a consequência da condição KMS⁸ para a função de partição. Para isso, utilizamos o traço na equação (4.5) usando a representação de posição; ou seja,

$$Z(\beta) = Tr e^{-\beta H} = \int dq \langle q | e^{-\beta H} | q \rangle. \quad (4.8)$$

Definindo:

$$Z_{ba} = \langle q_b | e^{-\beta H} | q_a \rangle, \quad (4.9)$$

encontramos:

$$Z(\beta) = \int dq_a Z_{aa}.$$

Agora examinamos o significado da quantidade Z_{ab} . Introduzindo uma rotação Wick, definida pela identificação:

$$\beta \rightarrow i(t_b - t_a),$$

⁸ As condições de Kubo-Martin-Schwinger (KMS)

de tal modo que

$$Z_{ba} = \langle q_b | e^{-\beta H} | q_a \rangle = \langle q_b | e^{-i(t_b - t_a)H} | q_a \rangle \equiv \langle q_b t_b | q_a t_a \rangle, \quad (4.10)$$

onde

$$|q_a t_a\rangle = e^{it_a H} |q_a\rangle, \quad |q_b t_b\rangle = e^{it_b H} |q_b\rangle.$$

O conjunto de estados $|qt\rangle = e^{itH}|q\rangle$ formam uma base completa, com a relação de integrais:

$$\int dq |q\rangle \langle q| = \int dq |qt\rangle \langle qt| = 1.$$

Tal base pode ser usada para construir um estado da imagem de Schrödinger $|\psi(t)\rangle$, na representação de posição, a partir de um estado na imagem de Heisenberg $|\psi\rangle_H$. Na verdade, desde que:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-itH} |\psi(0)\rangle = e^{-itH} |\psi\rangle_H,$$

temos

$$\psi(q, t) = \langle q | \psi(t) \rangle = \langle qt | \psi \rangle_H.$$

Este resultado mostra o conteúdo físico da equação (4.10), ou seja, $Z_{ba} = \langle q_b t_b | q_a t_a \rangle$ é uma amplitude de transição de $|q_a t_a\rangle$ para $|q_b t_b\rangle$. A função Z_{ba} é chamada de propagador, por considerar uma amplitude arbitrária em um tempo t_a , $\psi(q_a, t_a) = \langle q_a t_a | \psi \rangle$, e usando a relação de completude, obtemos:

$$\begin{aligned} \langle q_b t_b | \psi \rangle &= \int dq_a \langle q_b t_b | q_a t_a \rangle \langle q_a t_a | \psi \rangle \\ &= \int dq_a Z_{ba} \psi(q_a, t_a). \end{aligned}$$

Nesta expressão Z_{ba} descrevemos como o estado $|\psi(t)\rangle$ evolui de $|\psi\rangle$ em t_a e q_a para $|\psi\rangle$ em t_b e q_b , com $t_b > t_a$ garantimos causalidade. A quantidade fundamental aqui é o propagador Z_{ba} . Sabendo sobre Z_{ba} , descobrimos que Z_{aa} é o propagador em um intervalo de tempo fechado. No caso da função de partição temos então uma rotação Wick, com período β . Os resultados apresentados acima mostram uma estreita associação de Z não só com as grandezas térmicas, mas também com as não térmicas, exigindo então uma análise detalhada de Z_{ba} .

4.2.2 Integral de caminho na mecânica quântica

Para calcular o propagador Z_{ba} , dividimos o intervalo de tempo de t_a a t_b em ponto n , resultando em $n + 1$ onde $\delta t_j = t_{j+1} - t_j$; $j = 1, 2, \dots, n$, com $n \rightarrow \infty$, e

$\delta t \rightarrow 0$. Em cada ponto j , caracterizado por t_j e q_j , usamos uma relação de completude $\int dq_j |q_j t_j\rangle \langle q_j t_j| = 1$ em $\langle q_b t_b | q_a t_a \rangle$, resultando na expressão:

$$\langle q_b t_b | q_a t_a \rangle = \int dq_1 \dots dq_n \langle q_b t_b | q_n t_n \rangle \langle q_n t_n | q_{n-1} t_{n-1} \rangle \dots \langle q_1 t_1 | q_a t_a \rangle. \quad (4.11)$$

O propagador em um pequeno intervalo arbitrário δt_j resulta em:

$$\begin{aligned} Z_{j+1,j} &= \langle q_{j+1} t_{j+1} | q_j t_j \rangle \\ &= \langle q_{j+1} | e^{-i\delta t_j H} | q_j \rangle = \langle q_{j+1} | 1 - i\delta t_j H | q_j \rangle \\ &= \delta(q_{j+1} - q_j) - i\delta t_j \langle q_{j+1} | H | q_j \rangle. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Consideramos o sistema unidimensional de uma partícula em um potencial $V(\hat{q})$. Então o hamiltoniano fica:

$$H(\hat{q}, \hat{p}) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}),$$

onde $\hat{q}|q_j\rangle = q_j|q_j\rangle$ e $\hat{p}|p_j\rangle = p_j|p_j\rangle$, com

$$\langle q_j | p_i \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i q_j p_i},$$

e

$$\langle q_j | q_i \rangle = \delta(q_j - q_i) = \frac{1}{2\pi} \int dp e^{ip(q_j - q_i)}. \quad (4.13)$$

Finalmente, obtemos,

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} | \frac{\hat{p}^2}{2m} | q_j \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int dp e^{ip\delta q_j} \frac{p^2}{2m}, \\ \langle q_{j+1} | V(\hat{q}) | q_j \rangle &= V(Q_j) \frac{1}{2\pi} \int dp e^{ip\delta q_j} \end{aligned}$$

onde $\delta q_j = q_{j+1} - q_j$, e $Q_j = (q_{j+1} + q_j)/2$. Reunindo esses resultados, obtemos:

$$\langle q_{j+1} | H | q_j \rangle = \frac{1}{2\pi} \int dp e^{ip\delta q_j} H(Q_j, p).$$

Usando a representação integral para a função δ , a equação (4.13), obtemos da equação (4.12),

$$\begin{aligned} Z_{j+1,j} &= \frac{1}{2\pi} \int dp e^{ip\delta q_j} - i\delta t_j \frac{1}{2\pi} \int dp e^{ip\delta q_j} H(Q_j, p) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dp e^{ip\delta q_j} [1 - i\delta t_j H(Q_j, p)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dp e^{i\delta t_j [p\delta q_j / \delta t_j - H(Q_j, p)]} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dp e^{i\delta t_j [pv_j - \frac{p^2}{2m} - V(Q_j)]}. \end{aligned}$$

Completando o quadrado na variável de integração p , e usando a integral de Gauss:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2+bx+c} = \exp\left(\frac{b^2}{4ac} + c\right) \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

obtemos:

$$Z_{j+1,j} = \left(\frac{m}{2\pi i \delta t_j}\right)^{1/2} \exp\left\{i\delta t_j \left[\frac{1}{2}mv_j^2 - V(Q_j)\right]\right\}.$$

Substituindo esse resultado na equação (4.11), e tomando o limite $n \rightarrow \infty$, obtemos:

$$\begin{aligned} Z_{ba} &= \langle q_b t_b | q_a t_a \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \delta \tau}\right)^{(n+1)/2} \\ &\times \int \prod_{j=1}^n dq_j \exp\left\{i \sum_{j=0}^n \delta \tau \left[\frac{1}{2}m\dot{q}_j^2 - V(Q_j)\right]\right\}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde definimos: $\delta \tau \equiv \delta t_j$, $q_b \equiv q_{n+1}$ e $q_a \equiv q_0$. Este limite leva a:

$$Z_{ba} = \langle q_b t_b | q_a t_a \rangle = \mathcal{N} \int Dq e^{iS_{ab}}, \quad (4.15)$$

onde $|$ é um fator de normalização,

$$Dq \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n dq_j$$

é a medida de integração e:

$$S_{ab} = \int_{t_a}^{t_b} dt L(q, \dot{q}), \quad (4.16)$$

é a ação definida pelo Lagrangiano

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q). \quad (4.17)$$

É importante enfatizar que esta derivação de Z_{ba} expressa uma soma (uma integração funcional) ao longo de diferentes trajetórias de um sistema clássico; e, por sua vez, um esquema de quantização é fornecido usando a ação clássica S_{ab} , chamado de formalismo integral de caminho e pode ser generalizado para campos quânticos.

4.2.3 Campos clássicos

O que foi feito na equação (4.16) é, na física clássica, a ferramenta fundamental para derivar equações de movimento por meio de um princípio de extremo. Na verdade, assumindo a condição $\delta S_{ab} = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \delta S_{ab} &= \int_{t_a}^{t_b} dt \delta L(q, \dot{q}) = \int_{t_a}^{t_b} dt [L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}) - L(q, \dot{q})] \\ &= \int_{t_a}^{t_b} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde definimos $\delta q(t) = \epsilon \sigma(t)$, com ϵ sendo uma quantidade infinitesimal e $\sigma(t)$ é uma função arbitrária, mas analítica de t , de modo que:

$$\delta \dot{q}(t) = \delta \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \delta q(t).$$

Usando este resultado na equação (4.18) e realizando uma integral por partes, obtemos:

$$\delta S_{ab} = \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q = 0,$$

onde a condição de extremo é fixo, isto é, $\delta q(t_a) = \delta q(t_b) = 0$, foi usada. Como $\delta q(t) = \epsilon \sigma(t)$ é uma quantidade arbitrária, obtemos a equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q}.$$

Para L dado na equação (4.17) obtemos a Segunda lei de Newton: $m\ddot{q} = -\partial V/\partial q$. Este procedimento pode ser generalizado para um número arbitrário de parâmetros, considerando $q(\tau) = q(\tau^0, \tau^1, \dots, \tau^r)$, e $\mathcal{L}(q, \partial q) = \mathcal{L}(q, \partial_0 q, \partial_1 q, \dots, \partial_r q)$, onde $\partial_\alpha q = \partial q / \partial \tau^\alpha$. Ou seja:

$$S = \int_{\Gamma} d^r \tau \mathcal{L}(q, \partial q), \quad (4.19)$$

onde $\mathcal{L}(q, \partial q)$ é a densidade Lagrangiana. Como antes, assumimos a condição extrema agora definida por uma hipersuperfície Γ , $\delta q(\tau)|_{\Gamma}$. De $\delta S = 0$, derivamos:

$$\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha q)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}; \quad \alpha = 0, 1, \dots, r, \quad (4.20)$$

onde há uma soma sobre os índices repetidos. Se q , tem mais de um componente, então na equação (4.20) temos que substituir q por q_j , onde o subíndice $j = 1, 2, \dots$ representa o número de componentes de q . Uma interpretação física deste método é realizada quando especificamos a natureza dos parâmetros τ e da função q . Para isso, assumimos que τ é um quadri vetor no espaço-tempo de Minkowski (\mathcal{M}^{3+1}) com $\tau^0 \equiv x^0 = ct$; $\tau^1 \equiv x^1$, $\tau^2 \equiv x^2$, $\tau^3 \equiv x^3$, ou seja, $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. O tensor métrico é dado por:

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

de forma que $g = g^{-1}$; com $(g^{\mu\nu})^{-1} \equiv g_{\mu\nu}$, $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$ e $x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$. A coordenada canônica generalizada, $q(x)$, é então um campo, definindo alguma quantidade em um ponto x do espaço-tempo. Para um campo escalar, em vez de q , uma letra grega $\phi(x) = \phi(t, x)$ é usada. Nesse caso, a equação (4.20) lê:

$$\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}; \quad (4.21)$$

onde $\alpha = 0, 1, 2, 3$. A densidade Lagrangiana é então especificada por condições de simetria, impondo restrições na forma dos diferentes modelos. Para campos relativísticos, a invariância de Lorentz é a simetria básica levada em consideração. Isso corresponde à invariância sob um conjunto de transformações lineares em \mathcal{M}^{3+1} que preserva o produto escalar entre os vetores, $x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\nu x^\mu$. Escrevendo a transformação linear como:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu,$$

a invariância do produto escalar requer a invariância da métrica, $\Lambda^T g \Lambda = g$, onde Λ^T é a transposta da matriz Λ , com componentes dados por:

$$\Lambda^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}.$$

Então temos $\det \Lambda = \pm 1$. Para $\det \Lambda = 1$, o mapa de Lorentz é chamado de transformações de Lorentz próprias, que é o grupo conectado à identidade. Para transformações infinitesimais adequadas, escrevemos:

$$x'^\mu = x^\mu + w^\mu_\nu x^\nu$$

onde $w_{\rho\nu} = g_{\rho\mu} w^\mu_\nu$ é uma matriz anti-simétrica. Neste caso, uma transformação de Lorentz finita em uma representação infinita dimensional (ou seja, atuando sobre, por exemplo, funções analíticas definidas em \mathcal{M}^{3+1}) pode ser escrita como:

$$\Lambda = \exp[w_{\mu\nu} M^{\mu\nu}],$$

onde $M^{\mu\nu}$ são os geradores das transformações de Lorentz dadas por:

$$M^{\mu\nu} = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu).$$

Usando essa simetria e a densidade Lagrangiana sendo um escalar de Lorentz real, uma variedade de modelos pode ser proposta. Um simples, para um campo escalar real, é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + J\phi. \quad (4.22)$$

Usando a equação de Euler-Lagrange, derivamos:

$$\partial_\alpha \partial^\alpha \phi + m^2 \phi = J,$$

que é a equação de Klein-Gordon que descreve uma partícula com massa m , com um termo fonte, J .

4.2.4 Integral de caminho para um campo escalar

Nesta seção, generalizamos a equação (4.15) para um campo escalar, usando S dado na equação (4.19) e o Lagrangiano na equação (4.22), resultando em:

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= \mathcal{N} \int D\phi e^{iS_{ab}} = \mathcal{N} \int D\phi \exp \left\{ i \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + J\phi \right] \right\} \\ &= \mathcal{N} \int D\phi \exp \left\{ -i \int d^4x \left[\frac{1}{2} \phi (\square + m^2) \phi - J\phi \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde usamos o índice 0 em $Z_0[J]$ para indicar campos livres. Para lidar com essa expressão, desenvolvemos alguns elementos da função da integral.

Começando com o produto de r integrais gaussianas que é dado por:

$$\int e^{-a_1 w_1^2/2} e^{-a_2 w_2^2/2} \dots e^{-a_r w_r^2/2} dw_1 \dots dw_r = \frac{(2\pi)^{r/2}}{\prod_{i=1}^r a_i^{1/2}}, \quad (4.24)$$

onde $a_i > 0$, para $i = 1, \dots, r$. Definindo:

$$A = (A_{ij}) = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_r \end{pmatrix};$$

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_r \end{pmatrix},$$

$$(w, Aw) = \sum_{i,j=1}^r w_i A_{ij} w_j = \sum_{i=1}^r a_i w_i^2 \quad (4.25)$$

e a equação (4.24), fica:

$$\int e^{-(w, Aw)/2} dw = \frac{1}{(\det A)^{1/2}}, \quad (4.26)$$

onde a medida da integral é dada por $dw = dw_1 \dots dw_r / (2\pi)^{r/2}$. Analisando integrais do tipo $\int dw \exp(-f(w))$, onde

$$f(w) = \frac{1}{2}(w, Aw) + (b, w) + c, \quad (4.27)$$

com b e c sendo vetores de componente r . O mínimo de $f(w)$ é calculado por:

$$df = \sum_{i=1}^r \frac{\partial f}{\partial w_i} dw_i = \sum_{i,j=1}^r w_i A_{ij} + \sum_{i=1}^r c_i = 0,$$

que tem a solução $w^0 = -A^{-1}b$. Então a equação (4.27) é reescrita como:

$$f(w) = f(w^0) + \frac{1}{2}(w - w^0, A(w - w^0)),$$

E da equação (4.26) temos:

$$\int e^{-[(w, Aw)/2 + (b, w) + c]} dw = e^{(b, A^{-1}b)/2 - c} \frac{1}{(\det A)^{1/2}}.$$

Tomando o limite contínuo, escrevemos $w_i \rightarrow w(x)$; $A_{ij} \rightarrow A(x, y)$ de modo que

$$(Aw)_j = \sum_{i=1}^r w_i A_{ij} \rightarrow (Ab)(x) = \int A(x, y)b(y)dy,$$

$$(w, Aw) = \sum_{i,j=1}^r w_i A_{ij} w_j \rightarrow \int w(x)A(x, y)w(y)dx dy$$

e

$$\int dw \dots = \int dw_1 \dots dw_r / (2\pi)^{r/2} \rightarrow \int Dw(x) \dots$$

Esses resultados são generalizados para mais de um parâmetro, de modo que x pode ser considerado um quadrivetor. Portanto, a equação (4.23) identificando: $w(x) = \phi(x)$; $A = i(\square + m^2)$; $b = -iJ$; $c = 0$, torna-se,

$$Z_0[J] = \mathcal{N} \exp \left[\frac{i}{2} \int J(x)(\square + m^2)^{-1} J(y) d^4x d^4y \right] [\det i(\square + m^2)]^{1/2}, \quad (4.28)$$

onde

$$[\det i(\square + m^2)]^{1/2} = \int D\phi \exp \left\{ i \int d^4x \left[\frac{1}{2} \phi(\square + m^2)\phi \right] \right\},$$

Este fator pode ser incorporado ao fator de normalização \mathcal{N} . Além disso, usando a notação acima, a equação $(\square + m^2)G_0(x - y) = -i\delta(x - y)$, é escrito numa forma do operador como:

$$G_0(x - y) = -(\square + m^2)^{-1}.$$

Então a equação (4.28), fica:

$$Z_0[J] = \mathcal{N} \exp \left[\frac{-i}{2} \int J(x)G_0(x - y)J(y) d^4x d^4y \right].$$

Aqui J é arbitrário. Este fato é usado para tomar $Z_0[J]$ como uma função geradora do propagador e isso é conseguido tomando derivadas funcionais.

Uma função $F[w(x)]$ é um mapeamento de funções analíticas no campo real. A derivada de $F[w(x)]$ em relação a $w(y)$ é definida como uma generalização da derivada ordinária de funções, por

$$\frac{\delta F[w(x)]}{\delta w(y)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \{ F[w(x) + \varepsilon \delta(x - y)] - F[w(x)] \}.$$

Vamos testar a veracidade de tal definição usando dois exemplos. Consideramos:

$$F[w(x)] = \int H(x, y)w(x)dx,$$

onde $H(x, y)$ é uma dada função arbitrária. Então nós temos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F[w(x)]}{\delta w(z)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \int H(x, y)[w(x) + \varepsilon \delta(x - z)]dx - \int H(x, y)w(x)dx \right\} \\ &= \int H(x, y)\varepsilon \delta(x - z)dx = H(z, y). \end{aligned}$$

Considerando:

$$F[w] = F[w(x)] = \exp \left[\int H(x, y)w(x)dx \right]. \quad (4.29)$$

Neste caso temos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F[w]}{\delta w(z)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \exp \left[\int H(x, y)[w(x) + \varepsilon \delta(x - z)]dx \right] - \exp \left[\int H(x, y)w(x)dx \right] \right\} \\ &= H(z, y) \exp \left[\int H(x, y)w(x)dx \right] = H(z, y)F[w]. \end{aligned}$$

Esses resultados podem ser aplicados para calcular as derivadas de $Z_0[J]$ em relação a J , envolvendo agora uma integral dupla:

$$\begin{aligned} \frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(z)} &= \left\{ \frac{\mathcal{N}}{\varepsilon} \exp \left[\frac{-i}{2} \int J(x) + \varepsilon \delta(x - z)]G_0(x - y)[J(y) + \varepsilon \delta(y - z)]d^4x d^4y \right] \right\}_{\varepsilon \rightarrow 0} \\ &\quad - \left\{ \frac{\mathcal{N}}{\varepsilon} \exp \left[\frac{-i}{2} \int J(x)G_0(x - y)J(y)d^4x d^4y \right] \right\}_{\varepsilon \rightarrow 0} \\ &= \left[\frac{-i}{2} \int J(x)G_0(x - y)\delta(x - y)d^4x d^4y \frac{-i}{2} \int \delta(x - z)G_0(x - y)J(y)d^4x d^4y \right] Z_0[J] \\ &= -i \int J(x)G_0(x - z)d^4x Z_0[J] \end{aligned}$$

e

$$\frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(z)\delta J(z')} = -iG_0(z - z')Z_0[J] + (-i)^2 \left[\int J(x)G_0(x - z)d^4x \right]^2 Z_0[J].$$

A partir dessas expressões, $Z_0[J]$ é considerado uma função geradora de $G_0(z - z')$ se definirmos a constante de normalização como $\mathcal{N} = 1$, tal que, $Z_0[J = 0] = 1$; então encontramos:

$$\frac{\delta^2 Z_0[J]}{i\delta J(z)i\delta J(z')} \Big|_{J=0} = iG_0(z - z') = \langle 0|T[\phi(z)\phi(z')]|0 \rangle. \quad (4.30)$$

O formalismo da integral de caminho e as funções geradoras são as ferramentas fundamentais para a construção de teorias quânticas para campos de bósons, férmions e gauge tanto em temperatura zero quanto finita.

4.3 DINÂMICA DA TERMODINÂMICA: BASE ALGÉBRICA DE SIMETRIA CINEMÁTICA

Nesta seção são apresentadas as principais idéias da DCT. Posteriormente, apresentamos uma derivação da teoria baseada em argumentos gerais de simetria. Isso fornece não apenas uma base de simetria para DCT, mas também para a mecânica estatística, uma vez que podemos derivar a equação de Liouville-von Neumann. Este procedimento aponta o caminho para explorar representações de teoria de grupo para derivar propriedades da física térmica (relativística e não relativística). O aspecto central é, então, apresentar o formalismo da física estatística como um referencial teórico, a partir da simetria.

4.3.1 Espaço térmico de Hilbert

Os Espaços de Hilbert foram criados por David Hilbert, que os estudou no contexto de equações diferenciais. Foi John von Neumann quem criou a nomenclatura "der abstrakte Hilbertsche Raum" em seu artigo sobre operadores Hermitianos não limitados, publicado em 1929, ele foi o matemático que deu mais importância a esse trabalho original. Na matemática, um espaço de Hilbert é uma generalização do espaço euclidiano que não precisa estar restrita a um número finito de dimensões.

Os espaços de Hilbert permitem que, de certa forma, noções intuitivas sejam aplicadas em espaços funcionais. Por exemplo, podemos generalizar os conceitos de séries de Fourier em termos de polinômios ortogonais. Os espaços de Hilbert são muito importantes para a Mecânica Quântica, por exemplo, um sistema físico é descrito por um espaço de Hilbert complexo que contém os vetores de estado, que contém todas as informações do sistema e complexidades multifocais.

Para um sistema em equilíbrio térmico, a média do conjunto de um operador A é dada por:

$$\langle A \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr}(e^{-\beta H} A). \quad (4.31)$$

Então assumindo que $H|n\rangle = E_n|n\rangle$ com $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$, obtemos:

$$\langle A \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n|A|n\rangle.$$

Estamos procurando um estado $|0(\beta)\rangle$ tal que [70, 71]

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &\equiv \langle 0(\beta)|A|0(\beta)\rangle \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n|A|n\rangle. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Primeiro vamos investigar se $|0(\beta)\rangle$ pode ser um vetor no espaço de Hilbert; ou seja,

$$|0(\beta)\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n|0(\beta)\rangle = \sum_n g_n(\beta) |n\rangle.$$

Isso implica que $\langle 0(\beta)|A|0(\beta)\rangle = \sum_{nm} g_n^*(\beta) g_m(\beta) \langle n|A|m\rangle$, e o requisito dado pela equação (4.32) impõe a seguinte condição sobre os coeficientes $g_m(\beta)$ e $g_n^*(\beta)$,

$$g_n^*(\beta) g_m(\beta) = \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta E_n} \delta_{nm}.$$

Mas sabemos que tal relação não pode ser satisfeita por c-números. Portanto, $|0(\beta)\rangle$ não pode ser um elemento do espaço de Hilbert original. A condição acima é como uma condição de ortogonalidade, sugerindo que $g_m(\beta)$ deve ser um elemento de um espaço vetorial. A maneira mais simples de conseguir isso é introduzindo uma duplicação do espaço de Hilbert, resultando em um produto tensorial de espaços, como um vetor da base é dado por $|n, \tilde{m}\rangle = |n\rangle \otimes |\tilde{m}\rangle$. No caso presente, tomando $g_m(\beta) = f_m(\beta) |\tilde{m}\rangle$, temos:

$$|0(\beta)\rangle = \sum_n f_n(\beta) |n, \tilde{n}\rangle,$$

de tal modo que

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta)|A|0(\beta)\rangle &= \sum_{n,m} f_n^*(\beta) f_m(\beta) \langle n, \tilde{n}|A|m, \tilde{m}\rangle \\ &= \sum_n f_n^*(\beta) f_n(\beta) \langle n|A|n\rangle, \end{aligned}$$

onde assumimos que o operador A atua apenas em vetores não til, ou seja,

$$\langle n, \tilde{n}|A|m, \tilde{m}\rangle = \langle n| \otimes \langle \tilde{n}|A|m\rangle \otimes |\tilde{m}\rangle = \langle n|A|m\rangle \langle \tilde{n}|\tilde{m}\rangle = A_{nm} \delta_{nm}.$$

O til em um vetor $|m, \tilde{m}\rangle$ indica que $|\tilde{m}\rangle$ é a réplica de $|m\rangle$, com m e \tilde{m} representando o mesmo número: $m = \tilde{m}$. É por isso que escrevemos $\langle \tilde{n}|\tilde{m}\rangle = \delta_{nm}$, sem referência ao til em δ_{mn} . Em um vetor como $\langle \tilde{n}|\tilde{m}\rangle$, o til enfatiza o elemento do espaço til-Hilbert apenas. Para reproduzir a média térmica, temos $f_n^*(\beta) f_n(\beta) = Z^{-1}(\beta) e^{-\beta E_n}$, que tem a solução $f_n(\beta) = Z^{-1/2}(\beta) e^{-\beta E_n/2}$. Portanto, o estado térmico pode ser escrito como:

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n e^{-\beta E_n/2} |n, \tilde{n}\rangle.$$

De acordo com as médias, o vetor $|0(\beta)\rangle$ é então um estado puro, definido neste espaço de Hilbert duplicado, equivalente a um estado misto que descreve o equilíbrio térmico de um sistema.

Em termos de matriz de densidade, a duplicação está presente quando escrevemos $\rho(t)$ como um projetor, ou seja, $\rho \simeq |\psi\rangle\langle\psi|$, e a equação de Liouville-von Neumann é escrita na forma

$$i\partial_t \rho(t) = \hat{H} \rho(t). \quad (4.33)$$

A evolução do tempo é controlada por $\hat{H} = [H, \cdot]$, o Liouvillian, que é um objeto associado, mas diferente do operador Hamiltoniano, H . Em DCT como no formalismo da matriz de densidade, a princípio, essa duplicação parece um procedimento artificial. Mas isso não é mais verdade e pode ser entendido explorando o fato de que DCT é um formalismo térmico baseado em um espaço de Hilbert vetorial, que pode ser usado como o espaço de transporte para representações de grupos de Lie.

4.4 O SIGNIFICADO DA DUPLICAÇÃO: TERMO-ALGÉBRAS

4.4.1 Geradores de simetria e observáveis

A fim de introduzir um formalismo baseado em estados $|0(\beta)\rangle$ a partir de suposições gerais, assumimos que o conjunto de variáveis cinemáticas, digamos V , é um espaço vetorial de mapeamentos em um espaço de Hilbert denotado por \mathcal{H}_T . O conjunto V é composto por dois subespaços e é escrito como $V = V_{obs} \otimes V_{gen}$ onde V_{obs} representa o conjunto de observáveis cinemáticos enquanto V_{gen} é o conjunto de geradores cinemáticos de simetrias.

Ambos, na teoria quântica e clássica, geralmente V_{obs} e V_{gen} são idênticos entre si e com V . Para cada gerador de simetria existe um observável correspondente e ambos são descritos pelo mesmo elemento algébrico. Por exemplo, consideramos o gerador de rotações:

$$L_3 = ix_1\partial/\partial x_2 - ix_2\partial/\partial x_1$$

e o gerador de translação espacial

$$P_1 = -i\frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Como sabemos, L_3 e P_1 também são considerados observáveis físicos, um momento angular e um componente de momento linear, respectivamente. O efeito de uma rotação infinitesimal α em torno do eixo- x_3 no momento observável P_1 é:

$$\begin{aligned} \exp(i\alpha L_3)P_1\exp(i\alpha L_3) &\simeq (1 + i\alpha L_3)P_1(1 - i\alpha L_3) \\ &= P_1 + i\alpha[L_3, P_1]. \end{aligned} \quad (4.34)$$

O comutador, expressando o efeito de quanto P_1 mudou, é dado por $[L_3, P_1] = L_3P_1 - P_1L_3 = iP_2$. Procedendo de forma semelhante com outros componentes, escrevemos em geral, $[L_i, P_j] = i\epsilon_{ijk}P_k$. Esta expressão mostra que $P = (P_1, P_2, P_3)$ é transformado como um vetor por uma rotação, ou seja, o gerador L_i muda P_j por meio da operação do comutador dando origem a outro observável, $i\epsilon_{ijk}P_k$. Nesta operação, L_i deve ser pensado como um simples gerador de simetria, não como um observável. O mesmo tipo de interpretação é válido quando consideramos

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k, \quad (4.35)$$

a álgebra de Lie do grupo de rotação. Neste caso, o mesmo objeto, o vetor $L = (L_1, L_2, L_3)$, é usado com dois significados diferentes: L_i no comutador se encontra o gerador de uma rotação infinitesimal sobre o observável físico L_j , resultante do curso em outra quantidade física, $i\epsilon_{ijk}L_k$.

Embora a correspondência um a um entre observáveis e geradores de simetria são baseados em fundamentos físicos, não existe imposição dinâmica ou cinemática para considerar um gerador de simetria e o observável correspondente como sendo descrito pela mesma quantidade matemática. Na verdade, podemos assumir uma situação mais geral; e temos já observada essa separação na equação de Liouville-von Neumann escrita na forma da equação (4.33). Que são dois objetos diferentes associados a evolução do tempo: H , o hamiltoniano, que descreve a energia observável de um sistema, e \hat{H} , o Liouvillian, o gerador da evolução do tempo. Consideramos aqui a mesma correspondência um-para-um entre geradores e observáveis, mas explorando o caso em que V_{obs} e V_{gen} são diferentes um do outro, ou seja, V_{obs} e V_{gen} correspondem a diferentes mapeamentos em H_T . Para enfatizar esses aspectos, denotamos um elemento arbitrário de V_{obs} por A e por \hat{A} o elemento correspondente em V_{gen} . Agora analisamos as consequências de tal condição de separabilidade para um grupo de simetria arbitrário.

4.4.2 Álgebra de Lie dobrada

Vamos denotar por $l = \{a_i, i = 1, \dots, s\}$ o conjunto de geradores que abrangem uma álgebra de Lie sobre \mathfrak{R} , o campo real. No conjunto l existe um produto, (\cdot, \cdot) , denominado produto de Lie, dado por:

$$(a_i, a_j) = C_{ij}^k a_k,$$

onde a soma dos índices repetidos é assumida. Os c-números C_{ij}^k são as constantes de estrutura, que caracterizam a natureza do grupo de simetria associado a l . O produto de Lie satisfaz a condição de anti-simetria,

$$(a_i, a_j) = -(a_j, a_i),$$

e a identidade de Jacobi, dada por:

$$(a_i, (a_j, a_k)) + (a_k, (a_i, a_j)) + (a_j, (a_k, a_i)) = 0.$$

Um exemplo bem conhecido é a álgebra de Lie do grupo de rotação dado na equação (4.35) onde o produto Lie é um comutador.

Tomando H_T como o espaço portador para representações de l , escrevemos

$$[\hat{A}_i, \hat{A}_j] = iC_{ij}^k \hat{A}_k, \quad (4.36)$$

onde $\hat{A}_i \in V_{gen}$. O imaginário i na equação (4.36) é para caracterizar que estamos tratando de uma representação unitária. Embora a equação (4.36) forneça uma representação para l , os operadores do tipo A devem ser levados em consideração em uma representação no espaço de Hilbert completo H_T , caso contrário, as representações serão restritas ao conjunto de operadores de chapéu, V_{gen} ; resultando na representação unitária usual. Portanto temos relações de comutação adicionais entre os operadores A e \hat{A} , e entre os operadores do tipo A . Vamos então escrever:

$$\begin{aligned} [\hat{A}_i, A_j] &= iD_{ij}^k A_k, \\ [A_i, A_j] &= iE_{ij}^k A_k, \end{aligned} \quad (4.37)$$

onde D_{ij}^k e E_{ij}^k são constantes a serem fixadas com o seguinte raciocínio. Observamos que as equações (4.36) - (4.37) descrevem uma álgebra de Lie, a ser denotada por l_T , que é a definição de um produto semidireto de duas subálgebras, V_{gen} e V_{obs} , caracterizada pelo fato de que V_{obs} é uma subálgebra invariante. O motivo para isso é uma imposição física. Como os operadores não-chapéu descrevem os observáveis cinemáticos, a equação (4.37) é interpretado como a ação infinitesimal de uma simetria gerada por \hat{A}_i no observável A_j , resultando em outro observável dado por $iD_{ij}^k A_k$. Este é encontrado na relação:

$$e^{i\alpha\hat{A}_i} A_j e^{-i\alpha\hat{A}_i} = A_j(\alpha).$$

Considerando $\alpha \ll 1$, escrevemos:

$$A_j(\alpha) = A_j + \alpha \left(\frac{\partial A_j(\alpha)}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0}$$

e

$$e^{i\alpha\hat{A}_i} A_j e^{-i\alpha\hat{A}_i} \simeq A_j + i\alpha[\hat{A}_i, A_j].$$

Assim, tomando $\alpha \rightarrow 0$, temos:

$$[\hat{A}_i, A_j] = -i \frac{\partial A_j(\alpha)}{\partial \alpha}.$$

O importante nesta relação é que:

$$\frac{\partial A_j(\alpha)}{\partial \alpha}$$

é outro observável especificado pela relação de comutação. Por outro lado, o conteúdo da equação (4.37) é a natureza da comutatividade entre os observáveis. Por exemplo:

Seja $l = a_i = s_i$, $i = 1, 2, 3$ seja a álgebra de Lie do grupo $SU(2)$, de modo que:

$$[l_i, l_j] = i\epsilon_{ijk} l_k.$$

Uma representação de $su(2)_T$ é dada por:

$$[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}S_k, \quad (4.38)$$

$$[S_i, s_j] = i\epsilon_{ijk}s_k, \quad (4.39)$$

$$[s_i, s_j] = i\epsilon_{ijk}s_k, \quad (4.40)$$

onde S_i (equivalente a um operador chapéu) descreve uma rotação, enquanto s_j (equivalente para um operador não chapéu) é o observável de spin. O fato de que o spin se transforma como um vetor sob rotações é representado pela equação (4.39). Os componentes do spin não comutam um com o outro, de acordo com a equação (4.40), como consequência da imposição de medição. Neste caso, temos $C_{ij}^k = D_{ij}^k = E_{ij}^k = \epsilon_{ijk}$. Com o exemplo acima, descobrimos que simetrias também podem ser usadas para definir os resultados das relações de comutação entre observáveis e, como tal, assumimos que nas equações (4.36) - (4.37), $C_{ij}^k = D_{ij}^k = E_{ij}^k$. Assim, escrevemos:

$$[\hat{A}_i, \hat{A}_j] = iC_{ij}^k\hat{A}_k, \quad (4.41)$$

$$[\hat{A}_i, A_j] = iC_{ij}^kA_k, \quad (4.42)$$

$$[A_i, A_j] = iC_{ij}^kA_k. \quad (4.43)$$

Essas relações definem a álgebra de Lie no espaço de Hilbert térmico H_T . Esta representação será chamada de álgebra de Lie térmica [72]. Observe que este procedimento abre a possibilidade de explorar a noção de espaço de Hilbert no contexto da física clássica, se considerarmos $E_{ij}^k = 0$ na equação (4.37) [73].

4.4.3 Regras de conjugação de til

Algumas propriedades de l_T podem ser derivadas. Definindo a variável:

$$\tilde{A} = A - \hat{A}, \quad (4.44)$$

mostramos que as equações (4.41) - (4.43) também podem ser escritas como:

$$[A_i, A_j] = iC_{ij}^kA_k, \quad (4.45)$$

$$[\tilde{A}_i, \tilde{A}_j] = -iC_{ij}^k\tilde{A}_k, \quad (4.46)$$

$$[A_i, \tilde{A}_j] = 0 \quad (4.47)$$

Este resultado mostra que foi introduzida uma duplicação dos graus de liberdade, na forma de um produto direto. Esta é uma consequência da separabilidade algébrica entre os mapeamentos em H_T que descrevem os geradores de simetria e os dos observáveis.

Essa duplicação pode ser considerada como um mapeamento em $V = V_{obs} \otimes V_{gen}$, digamos $J : V \rightarrow V$, denotado por $JAJ = \tilde{A}$, e atendendo às seguintes condições:

$$(A_i A_j)^\sim = \tilde{A}_i \tilde{A}_j, \quad (4.48)$$

$$(cA_i + A_j)^\sim = c^* \tilde{A}_i + \tilde{A}_j \quad (4.49)$$

$$(A_i^\dagger)^\sim = (\tilde{A}_i)^\dagger, \quad (4.50)$$

$$(\tilde{A}_i)^\sim = A_i, \quad (4.51)$$

$$[A_i, \tilde{A}_j] = 0. \quad (4.52)$$

Essas propriedades, chamadas de regras de conjugação de til, são introduzidas como consequência das equações (4.45) - (4.47). Por exemplo, comparando a equação (4.45), escrito como:

$$A_i A_j - A_j A_i = iC_{ij}^k A_k,$$

e a equação (4.46), escrita como:

$$\tilde{A}_i \tilde{A}_j - \tilde{A}_j \tilde{A}_i = -iC_{ij}^k \tilde{A}_k,$$

encontramos $(A_i A_j)^\sim = \tilde{A}_i \tilde{A}_j$. As outras relações decorrem de tais comparações.

De acordo com a equação (4.44), um operador til é introduzido pela diferença entre geradores de simetria e observáveis. Mas quando os operadores til são usados para definir geradores de evolução do tempo, são referidos como variáveis de banho de calor; que podem ser vistos na referência [73].

Se os operadores til, não forem interpretados de forma consistente, seu uso seria considerado um tanto artificial, e por esta razão tais variáveis foram designadas como variáveis fantasmas. Mas essa artificialidade é removida, uma vez que dobramos os graus de liberdade em teorias térmicas lembrando que está relacionado a simetrias. Além disso, uma vez que existe uma conexão entre o formalismo Matsubara e as abordagens em tempo real, com a interpretação adequada da duplicação, compreendemos melhor o real significado de trabalhar com um formalismo de tempo imaginário.

Observamos que o papel das variáveis til é dar origem a estados físicos descrito por matrizes de densidade, no sentido que temos: $|m, \tilde{m}\rangle \rightarrow |m\rangle\langle m|$. O significado dos estados térmicos introduzidos a partir desta duplicação é interpretado em termos dessa associação com os estados da matriz de densidade. Uma vez que temos uma duplicação nos graus de liberdade, podemos explorar mapeamentos lineares do tipo fornecido por uma transformação de Bogoliubov neste espaço de Hilbert duplicado. Este será o mecanismo de introdução da temperatura, e assim os fenômenos térmicos podem ser visualizados como um processo de condensação. Além disso, usando a condição KMS (Condição de Kubo-Martin-Schwinger) com as transformações de Bogoliubov, podemos estender este método para descrever a compactificação no espaço de coordenadas de uma teoria de campo em topologias como $(S^1)^d X R^{D-d}$, onde $d(< D)$ é o número de dimensões compactadas em uma variedade D-dimensional [74, 75]. Estes desenvolvimentos surgirão de representações de grupos cinemáticos, Poincaré e Galilei, sendo aplicados para descreverem processos como a quebra espontânea de simetria e transições de fase para campos compactados no espaço, em temperatura finita.

4.4.4 Transformação de Bogoliubov

Na física teórica a transformação de Bogoliubov, também conhecida como transformação de Bogoliubov-Valantin, desenvolvida de forma independente em 1958 por Nikolay Bogoljubov e John George Valantin para encontrar soluções da teoria BCS (A Teoria BCS foi proposta por John Bardeen, Leon Cooper e John Robert Schriffer e explica o fenômeno da supercondutividade) em um sistema homogêneo [76, 77].

Definindo a transformação de Bogoliubov temos a soma na equação:

$$|0(\beta)\rangle = \sqrt{1 - e^{-\beta w}} \sum_n \frac{e^{-n\beta w/2}}{n!} (a^\dagger)^n (\tilde{a}^\dagger)^n |0, \tilde{0}\rangle. \quad (4.53)$$

é um exponencial, isto é

$$|0(\beta)\rangle = \sqrt{1 - e^{-\beta w}} \exp(e^{-\beta w/2} a^\dagger \tilde{a}^\dagger) |0, \tilde{0}\rangle. \quad (4.54)$$

Este resultado é escrito apenas como uma função exponencial e como um operador unitário, levando em consideração a relação do operador:

$$e^{\alpha(A+B)} = e^{\tanh\alpha\beta} e^{\ln \cosh\alpha C} e^{\tanh\alpha A}, \quad (4.55)$$

onde $C = [A, B]$. Definimos:

$$\cosh\theta(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-\beta w}}} \equiv u(\beta), \quad (4.56)$$

$$\sinh\theta(\beta) = \frac{e^{-\beta w/2}}{\sqrt{1 - e^{-\beta w}}} \equiv v(\beta), \quad (4.57)$$

que é uma definição consistente desde que:

$$u^2(\beta) - v^2(\beta) = \cosh^2\theta(\beta) - \sinh^2\theta(\beta) = 1. \quad (4.58)$$

Um resultado dessas definições é que:

$$\tanh\theta(\beta) = e^{-\beta w/2}. \quad (4.59)$$

Usando então as equações (4.56) e (4.59), a equação (4.54) fica:

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \cosh^{-1}\theta(\beta)e^{\tanh\theta(\beta)a^\dagger\tilde{a}^\dagger}|0, \tilde{0}\rangle \\ &= \exp[\tanh\theta a^\dagger\tilde{a}^\dagger]\exp[-\ln\cosh\theta(\tilde{a}\tilde{a}^\dagger + a^\dagger a)]\exp[\tanh\theta(-\tilde{a}a)]|0, \tilde{0}\rangle, \end{aligned} \quad (4.60)$$

onde usamos a relação de comutação $[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1$ e:

$$e^{f(\theta)\tilde{a}^\dagger\tilde{a}}|0, \tilde{0}\rangle = e^0|0, \tilde{0}\rangle = |0, \tilde{0}\rangle,$$

onde $f(\theta)$ é uma função arbitrária de θ .

Considerando a equação (4.55) com:

$$\begin{aligned} A &= -\tilde{a}a, \quad B = a^\dagger\tilde{a}^\dagger, \\ C &= [A, B] = -\tilde{a}\tilde{a}^\dagger - a^\dagger a, \\ \alpha &= \theta = \theta(\beta), \end{aligned}$$

a equação (4.60) é reescrita como:

$$|0(\beta)\rangle = e^{-iG(\beta)}|0, \tilde{0}\rangle, \quad (4.61)$$

onde

$$G(\beta) = -i\theta(\beta)(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger). \quad (4.62)$$

Portanto, o operador unitário, transformando $|0, \tilde{0}\rangle$ para $|0(\beta)\rangle$, é dado por:

$$U(\beta) = e^{-iG(\beta)}. \quad (4.63)$$

O operador $U(\beta)$ é chamado de **transformação de Bogoliubov**.

4.5 PROCESSO DE ESPALHAMENTO EM TEMPERATURA FINITA

O campo quântico de temperatura finita tem sido usada para definir funções de resposta em sistemas de muitos corpos [71, 78]. Com relação à teoria de campo de temperatura zero, as partes de autoenergia Σ e polarização (Π) são definidas e, a

função de resposta é obtida com um nível arbitrário de precisão. Isso foi aplicado ao caso de sistemas magnéticos, e também supercondutores ou qualquer outro caso de sistema de muitos corpos. A DCT forneceu resultados que são válidos em qualquer momento, t , e temperatura finita, T . Todavia, a questão de aplicar a DCT aos processos microscópicos foi considerada apenas recentemente [79]. Usando o método do tempo imaginário [80], uma expansão de espalhamento múltiplo da energia própria foi tentada e foi usado para calcular a função finita de resposta à temperatura. As funções de retardo de Green foram usadas para calcular a amplitude de espalhamento para frente em dois loops. O método do caminho do tempo fechado [81] foi empregado para calcular as taxas de decaimento, amplitudes de espalhamento [82, 83] e também pode ser usado para processos de equilíbrio e não-equilíbrio. Enfatizamos que a abordagem do tempo imaginário é útil para processos em equilíbrio. O método usando DCT será considerado aqui para fornecer um procedimento geral para calcular as taxas de decaimento, amplitudes de transição e taxas de reação para partículas em temperatura finita.

4.5.1 Matriz de dispersão em DCT

Quando queremos calcular quantidades como taxas de decaimento, taxas de reação e transição de amplitudes em temperatura finita utilizamos o método de Feynman. Este método é descrito por Dyson [84] quando ele compara a abordagem de Schwinger, Tomonaga e Feynman para resolver o problema da eletrodinâmica quântica. Na abordagem de Feynman [57], $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)$ são operadores definidos nos pontos x_1, x_2, \dots, x_n , respectivamente. Assim:

$$T[F_1(x_1)F_2(x_2)\dots F_n(x_n)],$$

denota um produto desses operadores, lendo da direita para a esquerda, em que as superfícies $\sigma(x_1), \sigma(x_2), \dots, \sigma(x_n)$ ocorrem ordenados no tempo. Com isso definimos o operador de ordenação de tempo T . Diante disso, $F_i(x_i)$ e $F_j(x_j)$ comutarão se x_i e x_j estão localizados fora do cone de luz, ou seja, o produto depende apenas em x_1, x_2, \dots, x_n ordem do tempo. Consideramos uma integral:

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n T(H^l(x_0)H_1(x_1)\dots H_I(x_n)),$$

onde $H_I(x_i)$ é a interação hamiltoniana e $H^l(x_0)$ é um operador arbitrário. A integral é uma função simétrica de x_i, \dots, x_n . O valor da integral é exatamente igual a $n!$ vezes a integral obtida ao restringir a integral de modo que a superfície $\sigma(x_i)$ ocorre após $\sigma(x_i + 1)$ para cada i . Agora, a integral restrita pode ser dividida em $(n + 1)$ partes, a

j-ésima parte sendo uma integral com $\sigma(x_0)$ situada entre $\sigma(x_j - 1)$ e $\sigma(x_j)$, temos:

$$I_n = n! \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\sigma(x_0)} dx_j \dots \int_{-\infty}^{\sigma(x_{n-1})} dx_n$$

$$\times \int_{\sigma(x_0)}^{\infty} dx_{j-1} \dots \int_{\sigma_1 n_0}^{\infty} H_I(x_1) \dots H_I(x_{j-1}) H^l(x_0) H_I(x_j) \dots H_I(x_n).$$

Finalmente obtemos,

$$H_F(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \frac{1}{n!} I_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n$$

$$\times T[H^l(x_0) H_I(x_1) \dots H_I(x_n)].$$

Escolhendo $H^l(x_0) = 1$, temos:

$$H_F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n$$

$$\times T[H_1(x_{n1}) \dots H_1(x_{nn})]. \quad (4.64)$$

Ao tomar os elementos da matriz deste operador entre os estados apropriados, várias amplitudes e taxas de decaimento são obtidas não apenas na temperatura zero, mas também em temperatura finitas, e os estados precisam ser definidos adequadamente. Notamos que o operador H_F , conforme definido por Feynman, é o mesmo que a matriz S definido pelo uso de estados de espalhamento assintóticos. Entretanto, é importante que em temperatura finita não há estados assintóticos bem definidos. Necessitamos usar o método de Feynman para escrever tal operador.

Continuamos os cálculos para calcular processos individuais em temperatura finita. É possível encontrar as regras de Cutkosky [85] para obter partes imaginárias de diagramas de Feynman e calculamos as partes imaginárias usando a expressão acima explicitamente bem como usando as regras de Cutkosky.

A equação (4.64), como uma matriz S , é escrito como:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S^n \quad (4.65)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int dx_1 dx_2 \dots dx_n T[H_I(x_1) H_I(x_2) \dots H_I(x_n)].$$

Considerando a duplicação e as regras de conjugação de til, a matriz S para

DCT é:

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{S}^n \quad (4.66)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int dn_1 dx_2 \dots dx_n T[\hat{H}_I(x_1) \hat{H}_I(x_2) \dots H_I(x_n)]. \quad (4.67)$$

onde $\hat{H}_I = H_I(x) - \tilde{H}_I(x)$. Em particular no terceiro nível:

$$\hat{S} = 1 - i \int d^4x [H_I(x) - \tilde{H}_I(x)]. \quad (4.68)$$

Para calcular as amplitudes explicitamente, as expressões para $H_I(x)$ e $\tilde{H}_I(x)$ devem ser introduzidas. Então o teorema de Wick é usado, como na teoria de campo de temperatura zero, para obter todas as contribuições em qualquer ordem da teoria de perturbação. Encontrar a dependência da temperatura, as transformações de Bogoliubov de bóson e férmion, os operadores criação e aniquilação têm que ser usados. Essas operações trazem os fatores dependentes da temperatura nos elementos da matriz das funções de Green 2×2 . A seção transversal e as taxas de decaimento dependem dos elementos da matriz, com a fase o espaço não é afetado pela temperatura finita.

4.6 CAMPOS COMPACTADOS

Supondo uma topologia do tipo $\Gamma_D^d = S^{1_1} \times \dots \times S^{1_d} \times \mathfrak{R}^{D-d}$, os campos compactados no espaço e no tempo foram estudados. Na análise, uma transformação de Bogoliubov é introduzida sendo responsável simultaneamente pela compactação dos efeitos espaciais e térmicos. Tal transformação de Bogoliubov fornece uma generalização da dinâmica do campo térmico [86–88] [73, 75, 89]. Desse modo, as regras de Feynman são evidentes e esses resultados são a ferramenta básica para as aplicações que serão discutidas nas seções seguintes.

A formulação da teoria quântica de campos no espaço-tempo curvo é importante porque vários sistemas físicos são descritos dentro deste formalismo. Quando encontramos a classe de sistemas definidos em espaços planos, com topologias não triviais temos o caso do espaço-tempo considerado simplesmente ou não-simplesmente conectado com uma variedade D-dimensional com topologia do tipo Γ_D^d . A estrutura topológica do espaço-tempo não modifica as equações de campo locais escritas no espaço de Minkowski, mas impõe modificações na fronteira e condições sobre campos e as funções de Green [90, 91]. Por exemplo, flutuações da energia do vácuo, dando origem ao efeito Casimir, ou nas transições de fase, a dependência da temperatura crítica dos parâmetros de compactação. No caso do efeito Casimir, [92], as flutuações de vácuo do campo eletromagnético confinado entre duas placas condutoras com

separação L dão origem a uma força de atração entre as placas. O efeito foi aplicado a diferentes geometrias, campos e condições físicas de contorno [93, 94] com interesse em diferentes áreas, como o confinamento em física de partículas e modelos cosmológicos. A topologia Γ_D^d surge na teoria quântica de campos em temperatura finita, assim temos $\Gamma_4^1 = S^1 \times \mathbb{R}^3$, onde a dimensão de compactação é o eixo do tempo, e a circunferência S tem comprimento β , onde T é a temperatura. O formalismo da teoria quântica de campos em temperatura finita pode ser desenvolvido para o espaço de coordenadas. Um aspecto ainda a ser entendido neste caso é como derivar essa prescrição de um nível topológico, de forma que se possa levar em consideração outras condições de contorno além daquelas impostas pela condição KMS. Este é um dos aspectos importantes a serem considerados nesta seção. Uma consequência física de tal procedimento é que a compactação é interpretada como um processo com condensação do campo no vácuo.

4.6.1 Compactificação e topologia

Considere um espaço de Minkowski de dimensão D , como um espaço-tempo plano simples ou não simples conectado, mas com uma topologia Γ_D^d onde d é o número de dimensões compactadas. Considerando o campo escalar, a função de Green satisfaz a equação de Klein-Gordon na dimensão- D .

$$(\square + m^2)G(x; \beta) = \delta(x). \quad (4.69)$$

A topologia Γ_D^d não altera as propriedades locais do sistema, isso implica que localmente o espaço de Minkowski, e a equação diferencial da evolução do sistema são os mesmos. No entanto, a topologia impõe modificações nas condições de contorno a serem cumpridas pelo campo e a respectiva função de Green.

4.6.2 Compactificação de uma dimensão espacial

Iniciamos com $d = 1$ e $D = 4$, com \mathbb{S}^1 representando a compactação de uma dimensão espacial, x^1 , e com o comprimento da circunferência \mathbb{S}^1 sendo L^1 . Para esta topologia Γ_4^1 , a função de Green satisfaz a condição de contorno periódica,

$$G(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv G(x^0, x^1 + L_1, x^2, x^3) = G(x + L_1 n_1), \quad (4.70)$$

onde $n_1 = (n_1)^\mu = (0, 1, 0, 0)$ é um vetor tipo espaço. Observe que $x^1 = 0$ é identificado com $x^1 = L_1$ devido à topologia, tal que $0 \leq x^1 \leq L_1$; as outras variáveis do eixo espacial são executadas no intervalo $(-\infty, +\infty)$. Uma solução para a equação (4.69), com a condição (4.70), é obtida através da análise da expansão de Fourier da função de Green, resultando em:

$$G(x - y; L_1) = \frac{1}{L_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int dp_0 dp_2 dp_3 e^{-ip_n(x-y)} G(p_n; L_1), \quad (4.71)$$

onde

$$p_n = (p_0, p_1, p_2, p_3), \quad p_{1n} = \frac{2\pi n}{L_1},$$

e

$$G(p_n; L_1) = \frac{-1}{p_n^2 - m^2}. \quad (4.72)$$

Aliás, podemos escrever,

$$G(p_n; L_1) = \int_0^{L_1} dx^1 \int dx^0 dx^2 dx^3 e^{ip_n(x-y)} G(x-y; L_1). \quad (4.73)$$

Esta solução é útil para tratar teorias perturbativas, como mostrado por Birrel e Ford [90]. Contudo, seria interessante separar a contribuição divergente do espaço-tempo plano dos termos que descrevem o efeito topológico na expressão para $G(x-y; L_1)$. Nesse caso, podemos investigar e tratar as contribuições divergentes decorrentes do espaço-tempo livre, e analisar os limites como, por exemplo, $L_1 \rightarrow \infty$, resultando em um espaço-tempo plano $3+1$, ou $L_1 \rightarrow 0$, a $2+1$ espaço-tempo plano. Seguindo alguma adaptação dos cálculos de Dolan e Jackiw para separar o efeito da temperatura na função de Green para o campo escalar [95]: o método é baseado em encontrar a transformada de Fourier (a representação integral de Fourier) de $G(x-y; L_1)$. Escrevemos $G(x-y; L_1)$ como:

$$G(x-y; L_1) = \theta(x^1 - y^1) G^>(x-y; L_1) + \theta(y^1 - x^1) G^<(x-y; L_1). \quad (4.74)$$

O $G^>$ ou $G^<$ são usados para encontrar a transformada de Fourier com relação ao intervalo $0 \leq x^1 \leq L_1$.

Da equação (4.70), temos:

$$G^<(x; L_1)|_{x^1=0} = G^>(x; L_1)|_{x^1=L_1}. \quad (4.75)$$

Usando esta fórmula, a equação (4.73) torna-se:

$$G(p_n; L_1) = \int_0^{L_1} dx^1 \int dx^0 dx^2 dx^3 e^{ip_n x} G^>(x; L_1). \quad (4.76)$$

A transformação da integral de Fourier de $G(x-y; L_1)$, expressa por $\bar{G}(p; L_1)$, é:

$$\bar{G}(p; L_1) = \bar{G}^{(1)}(p; L_1) + \bar{G}^{(2)}(p; L_1), \quad (4.77)$$

onde:

$$\bar{G}^{(1)}(p; L_1) = \int d^4 x e^{ipx} \theta(x^1) G^>(x; L_1), \quad (4.78)$$

$$\bar{G}^{(2)}(p; L_1) = \int d^4 x e^{ipx} \theta(-x^1) G^<(x; L_1), \quad (4.79)$$

Escrevendo

$$G^>(x; L_1) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \overline{G}^>(p; L_1) \quad (4.80)$$

e usando a representação integral da função degrau,

$$\int dk^1 \frac{e^{-ik^1 x^1}}{k^1 + p^1 + i\epsilon} = (-2\pi i) e^{ip^1 x^1} \theta(x^1),$$

na equação (4.78), derivamos:

$$\overline{G}^{(1)}(p; L_1) = i \int \frac{dk^1}{2\pi} \frac{\overline{G}^>(p_0, k_1, p_2, p_3; L_1)}{k^1 - p^1 + i\epsilon}. \quad (4.81)$$

Com

$$G^<(x; L_1) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \overline{G}^<(p; L_1),$$

e a representação integral da função degrau,

$$\int dk^1 \frac{e^{-ik^1 x^1}}{k^1 + p^1 - i\epsilon} = 2\pi i e^{-ip^1 x^1} \theta(-x^1).$$

Na equação (4.79), derivamos:

$$\overline{G}^{(2)}(p; L_1) = -i \int \frac{dk^1}{2\pi} \frac{\overline{G}^<(p_0, k_1, p_2, p_3; L_1)}{k^1 - p^1 - i\epsilon}. \quad (4.82)$$

Substituindo as equações (4.81) e (4.82) na equação (4.77), obtemos:

$$\overline{G}(p; L_1) = i \int \frac{dk^1}{2\pi} \left[\frac{\overline{G}^>(p_0, k_1, p_2, p_3; L_1)}{k^1 - p^1 + i\epsilon} - \frac{\overline{G}^<(p_0, k_1, p_2, p_3; L_1)}{k^1 - p^1 - i\epsilon} \right] \quad (4.83)$$

Mostramos agora como a condição de periodicidade é escrita no espaço de momento.

Da equação (4.75), temos:

$$\begin{aligned} G^<(x^0, x^1, x^2, x^3; L_1) &= G^>(x^0, x^1 + L_1, x^2, x^3; L_1) \\ &= e^{L_1 \partial_1} G^>(x^0, x^1, x^2, x^3; L_1). \end{aligned}$$

Considerando a transformada de Fourier de $G^<(x, L_1)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \overline{G}^<(p; L_1) &= \int d^4p e^{ipx} G^<(x; L_1) \\ &= \int d^4p e^{ipx} e^{L_1 \partial_1} G^>(x; L_1). \end{aligned}$$

Usando a equação (4.80) nesta expressão, encontramos:

$$\overline{G}^<(p; L_1) = e^{iL_1 p^1} \overline{G}^>(p; L_1). \quad (4.84)$$

Definindo,

$$f_{L_1}(p^1) = \frac{1}{e^{iL_1 p^1} - 1},$$

escrevemos

$$\overline{G}^>(p; L_1) = f_{L_1}(p_1)A(p; L_1) \quad (4.85)$$

$$\overline{G}^<(p; L_1) = [f_{L_1}(p_1) + 1]A(p; L_1), \quad (4.86)$$

onde usando a equação (4.84), dá:

$$A(p; L_1) = \overline{G}^<(p; L_1) - \overline{G}^>(p; L_1).$$

Com esses resultados, a equação (4.83) fica:

$$\overline{G}(p; L_1) = i \int \frac{dk^1}{2\pi} \left[\frac{f_{L_1}(k^1)A(p_0, k_1, p_2, p_3; L_1)}{k^1 - p^1 + i\epsilon} - \frac{[f_{L_1}(k^1) + 1]A(p_0, k_1, p_2, p_3; L_1)}{k^1 - p^1 - i\epsilon} \right] \quad (4.87)$$

Não temos ainda uma expressão explícita para $A(p; L_1)$. Para determinar essa função, usamos o fato de sabermos que $G(p_n; L_1)$, conforme a equação (4.72). Combinando as equações (4.76) e (4.80) temos:

$$G(p_n; L_1) = \int_0^{L_1} dx^1 \int dx^0 dx^2 dx^3 e^{p_n x} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \overline{G}^>(k; L_1).$$

Agora usando a equação (4.85) e a integral:

$$\int_0^{L_1} dx^1 e^{-i(p_n^1 - k^1)x^1} = \frac{1}{f_{L_1}(k^1)} \frac{i}{p_n^1 - k^1},$$

obtemos:

$$G(p_n; L_1) = i \int \frac{dk^1}{2\pi} \frac{A(p_0, k_1, p_2, p_3; L_1)}{p_n^1 - k^1},$$

onde $A(p)$ é a função espectral associada ao momento p_1 . Consideramos a continuação analítica de $G(p_n; L_1)$ para levar p_n^1 a uma variável contínua, p_1 . A única continuação analítica possível de $G(p_n; L_1)$ sem singularidade essencial em $p \rightarrow \infty$ é a função:

$$\mathcal{G}_0(p) = i \int \frac{dk^1}{2\pi} \frac{A(p_0, k_1, p_2, p_3)}{p^1 - k^1},$$

onde, por definição,

$$\mathcal{G}_0(p) = \frac{-1}{p^2 - m^2}. \quad (4.88)$$

Usando este resultado, calculamos $A(p)$, mostrando que:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(p, \epsilon) &= \mathcal{G}_0(p_0, p^1 + i\epsilon, p^2, p^3) - \mathcal{G}_0(p_0, p^1 - i\epsilon, p^2, p^3) \\ &= i \int \frac{dk^1}{2\pi} A(p_0, k_1, p_2, p_3) \left[\frac{1}{p^1 - k^1 + i\epsilon} - \frac{1}{p^1 - k^1 - i\epsilon} \right] \\ &= i \int \frac{dk^1}{2\pi} A(p_0, k_1, p_2, p_3) (2\pi i) \delta(p^1 - k^1). \end{aligned}$$

onde usamos

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{x - i\epsilon} - \frac{1}{x + i\epsilon} \right].$$

Este resultado em

$$A(p) = \mathcal{G}_0(p_0, p^1 + i\epsilon, p^2, p^3) - \mathcal{G}_0(p_0, p^1 - i\epsilon, p^2, p^3)$$

descrevendo uma descontinuidade de $\mathcal{G}_0(p)$ ao longo do eixo real p_1 . Como $\mathcal{G}_0(p)$ é dado na equação (4.88), encontramos a função espectral:

$$A(p) = \frac{-1}{(p^0)^2 - (p^1 + i\epsilon)^2 + (p^2)^2 - (p^3)^2 - m^2} + \frac{1}{(p^0)^2 - (p^1 - i\epsilon)^2 + (p^2)^2 - (p^3)^2 - m^2},$$

Resultando em,

$$A(p) = -2\pi i \delta(p^2 - m^2). \quad (4.89)$$

Então, a função espectral garante a condição de camada de massa. Usando a equação (4.89) e a identidade:

$$\delta(x^2 - y^2) = \frac{1}{2|y|} [\delta(x + y) + \delta(x - y)],$$

A equação (4.87) fica:

$$\overline{G}(p; L_1) = G_0(p) + v_B^2(p^1; L_1)[G_0(p) - G_0^*(p)],$$

onde

$$G_0(p) = \frac{-1}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

e

$$v_B^2(p^1; L_1) = f_{L_1}(p_1) = \sum_{l=1}^{\infty} e^{-ilL_1 p^1}.$$

O subscrito B em $v_B^2(p^1, \beta)$ é para enfatizar a natureza bóson do campo. Por fim, encontramos:

$$G(x - y; L_1) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \{G_0(p) + v^2(p^1, L_1)[G_0(p) - G_0^*(p)]\}, \quad (4.90)$$

onde

$$G_0(p) - G_0^*(p) = 2\pi i \delta(p^2 - m^2) = -A(p).$$

Um resultado básico e importante nesta representação é que o conteúdo do espaço plano é dado em um termo separado envolvendo apenas $G_0(p)$, enquanto o efeito topológico está presente no termo com $v_B^2(p_1, L_1)$, descrevendo o efeito de compactificação.

4.6.3 Compactificação do tempo dimensional

A condição KMS para operadores de bóson na teoria quântica de campos em temperatura finita, é:

$$\langle A_H(t)B_H(t') \rangle_\beta = \langle B_H(t')A_H(t + i\beta) \rangle_\beta.$$

Uma consequência imediata da condição KMS é que a função de Green também é periódica, ou seja,

$$G(x - y; \beta) = G(x - y - i\beta n_0; \beta), \quad (4.91)$$

onde n_0 é um vetor semelhante ao tempo dado por $(n_0^\mu) = (1, 0, 0, 0)$. Com uma rotação Wick, tal que $t \rightarrow i\tau$, a condição KMS garante que $G(x - y, \beta)$ é uma solução da equação Euclidiana de Klein-Gordon com $\square = -(\partial_\tau^2 + O)$ sob a condição de contorno periódica, com período β . Como resultado da periodicidade, a representação de Fourier para $G(x, \beta)$ é escrita como:

$$G(x - y; \beta) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip_n(x-y)}}{p^2 + m^2 + i\epsilon} \quad (4.92)$$

com $p_n = (p_n^0, p^1, p^2, p^3)$ e $p_n^0 = 2\pi n/\beta$ sendo a frequência de Matsubara. Logo, o efeito da temperatura introduzido pelo formalismo de Matsubara corresponde a tomar a teoria euclidiana $T = 0$ escrita em uma topologia $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3$, onde a circunferência \mathbb{S}^1 tem perímetro β . Portanto, a representação integral de Fourier de $G(x - y; \beta)$ é calculada seguindo os mesmos passos usados para a compactação de uma dimensão espacial, usando a função espectral de energia dada por [95, 96]

$$A(p) = \mathcal{G}_0(p_0 + i\epsilon, \mathbf{p}) - \mathcal{G}_0(p_0 - i\epsilon, \mathbf{p}).$$

O resultado final é:

$$G(x - y; \beta) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} G_0(p; \beta), \quad (4.93)$$

onde

$$\begin{aligned} G_0(p; \beta) &= G_0(p) + v_B^2(p_0; \beta)[G_0(p) - G_0^*(p)] \\ &= G_0(p) + 2\pi i v_B^2(p_0; \beta)\delta(p^2 - m^2) \end{aligned} \quad (4.94)$$

e

$$v_B^2(p_0; \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\beta|p_0|} = \frac{1}{e^{\beta|p_0|} - 1} = n(\beta). \quad (4.95)$$

4.6.4 Compactificação do espaço e tempo

Considerando a topologia $\Gamma_4^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$, num campo de bóson em duas dimensões compactadas nas direções x^0 e x^1 . Isso é equivalente a impor à função de Green as condições de contorno periódicas ao longo de duas direções. No eixo x^1 , a compactação está em uma circunferência de comprimento L_1 ; e no eixo x^0 euclidiano, ela irá ocorrer em uma circunferência de comprimento β . Neste caso, a expansão da integral de Fourier da série da função de Green é:

$$G(x-y; \beta, L_1) = \frac{1}{L_1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^2} \quad (4.96)$$

$$\times \int dp_2 dp_3 e^{-ip_{nl}(x-y)} G(p_{nl}; \beta, L_1),$$

onde

$$p_{nl} = (p_n^0, p_l^1, p^2, p^3),$$

com

$$p_n^0 = \frac{2\pi n}{\beta}; \quad p_l^1 = \frac{2\pi l}{L_1}$$

e

$$G(p_{nl}; \beta, L_1) = \frac{-1}{p_{nl}^2 - m^2}. \quad (4.97)$$

Para encontrar a representação da integral de Fourier de $G(x-y; \beta, L_1)$, tratando primeiro a soma em l . Escrevemos a equação (4.96) como:

$$G(x-y; \beta, L_1) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n(x-y; L_1), \quad (4.98)$$

onde

$$G_n(x-y; L_1) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{L_1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int dp_2 dp_3 e^{-ip_{nl}(x-y)} G(p_{nl}; L_1).$$

Logo, seguindo os mesmos passos do caso de $G(x-y; L_1)$, obtemos:

$$G_n(x-y; L_1) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dp_1 dp_2 dp_3 e^{-ip_n(x-y)} \bar{G}(p_n, L_1),$$

onde

$$\bar{G}(p_n, L_1) = G_0(p_n) + v_B^2(p_1, L_1)[G_0(p_n) - G_0^*(p_n)].$$

Usando este resultado na equação (4.98), e seguindo as etapas para o caso de confinamento de tempo, derivamos:

$$G(x-y; \beta, L_1) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \{ \bar{G}(p, L_1) \quad (4.99)$$

$$+ v_B^2(p_0; \beta)[\bar{G}(p; L_1) - \bar{G}^*(p; L_1)] \},$$

que também pode ser escrito como:

$$G(x-y; \beta, L_1) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \{G_0(p) + v_B^2(p_0, p_1; \beta, L_1)[G_0(p) - G_0^*(p)]\},$$

onde

$$v_B^2(k_0, k_1; \beta, L_1) = v_B^2(p_0; \beta) + v_B^2(p_1; L_1) + 2v_B^2(p_0; \beta)v_B^2(p_1; L_1), \quad (4.100)$$

Observe que:

$$\begin{aligned} v_B^2(k_0; \beta) &= \lim_{L_1 \rightarrow \infty} v_B^2(k_0, k_1; \beta, L_1), \\ v_B^2(k_1; L_1) &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} v_B^2(k_0, k_1; \beta, L_1). \end{aligned} \quad (4.101)$$

O mesmo procedimento pode ser realizado para campos de férmions, impondo condições de contorno anti-periódicas para campos e funções de Green. Fisicamente para o eixo do tempo, reproduzimos as condições de contorno KMS e, portanto, a compactação descreve a temperatura. Para os componentes do espaço, a antiperiodicidade para férmions é equivalente às condições de contorno do modelo de bolsa, confirmando que as correntes de férmions não cruzam o limite da bolsa.

Tomando a topologia $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$, o resultado após compactificações é:

$$S(x-y; \beta, L_1) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \{S_0(p) + v_F^2(p_0, p_1; \beta, L_1)[S_0(p) - S_0^*(p)]\}, \quad (4.102)$$

onde

$$v_F^2(p_0, p_1; \beta, L_1) = v_F^2(p_0; \beta) + v_F^2(p_1; L_1) + 2v_F^2(p_0; \beta)v_F^2(p_1; L_1), \quad (4.103)$$

com $v_F^2(p_0; \beta)$ e $v_F^2(p_1; L_1)$, obtido por:

$$\begin{aligned} v_F^2(p_0; \beta) &= \sum_{l_0=1}^{\infty} (-1)^{l_0 \beta p_0} = \frac{1}{1 + e^{\beta p_0}} \\ v_F^2(p_1; L_1) &= \sum_{l_1=1}^{\infty} (-1)^{l_1+1} e^{-il_1 L_1 p^1}. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Mais uma vez, é importante notar que:

$$\begin{aligned} v_F^2(p_0; \beta) &= \lim_{L_1 \rightarrow \infty} v_F^4(p_0, p_1; \beta, L_1), \\ v_F^2(p_1; L_1) &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} v_F^2(p_0, p_1; \beta, L_1). \end{aligned}$$

Explicitamente temos

$$\begin{aligned} v^2(p_0, p_1; \beta, L_1) &= \sum_{l_0=1}^{\infty} (-1)^{l_0+1} e^{\beta p_0 l_0} + \sum_{l_1=1}^{\infty} (-1)^{l_1+1} e^{-iL_1 p^1 l_1} \\ &+ 2 \sum_{l_0, l_1=1}^{\infty} (-1)^{l_0+l_1+2} e^{-\beta p_0 l_0 - iL_1 p^1 l_1}. \end{aligned} \quad (4.105)$$

4.6.5 Compactificação em d-dimensões

Em duas dimensões compactadas os resultados derivados para bósons e férmions podem ser generalizados para uma variedade de dimensão D e a topologia $\Gamma_D^d = \mathbb{S}^{1_1} \times \dots \times \mathbb{S}^{1_d} \times \mathbb{R}^{D-d}$. Para desenvolver isso, distinguimos a variável de tempo e tomamos $d = 1 + N$, sendo N o número de coordenadas do espaço compactado. Então escrevendo $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$, para o conjunto de parâmetros de compactação, e $k_{(\alpha)} = (k_0, \dots, k_N)$, obtemos:

$$v_{\xi}^2(k_{(\alpha)}; \alpha) = \sum_{s=1}^{N+1} \sum_{\{\sigma\}} \left(\prod_{n=1}^s f(\alpha_{\sigma_n}) \right) 2^{s-1} \quad (4.106)$$

$$\times \sum_{l_{\sigma_1, \dots, l_{\sigma_s}=1}^{\infty} (-\xi)^{s + \sum_{r=1}^s l_{\sigma_r}} \exp\left\{-\sum_{j=1}^s \alpha_{\sigma_j} l_{\sigma_j} k_{\sigma_j}\right\},$$

onde $f(\alpha_j) = 0$ para $\alpha_j = 0$, $f(\alpha_j) = 1$ caso contrário e σ_s denota o conjunto de todas as combinações com s elementos, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s$, do primeiro $N + 1$ números naturais $0, 1, 2, \dots, N$, ou seja, todos os subconjuntos contendo s elementos, que escolhemos escrever em uma forma ordenada, $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_s$. Aqui, $v_{\xi}^2(k_{(\alpha)}, \alpha)$ representa os campos de bóson ($\xi = -1$) e férmions ($\xi = +1$).

A função de Green para bósons e férmions são, respectivamente, dadas por:

$$G(x - y; \alpha) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \{G_0(k) + v_B^2(k_{\alpha}; \alpha)[G_0(k) - G_0^*(k)]\} \quad (4.107)$$

e

$$S(x - y; \alpha) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \{S_0(k) + v_F^2(k_{\alpha}; \alpha)[S_0(k) - S_0^*(k)]\}. \quad (4.108)$$

Estamos usando a notação:

$$v_{-}^2(k_{(\alpha)}; \alpha) = v_B^2(k_{\alpha}; \alpha),$$

$$v_{+}^2(k_{(\alpha)}; \alpha) = v_F^2(k_{\alpha}; \alpha).$$

Esses resultados são semelhantes ao caso do propagador DCT.

4.6.6 Transformação generalizada de Bogoliubov

Anteriormente vimos como encontrar a transformação de Bogoliubov, agora vamos fazer os cálculos para a transformação generalizada segundo a DCT. Como sabemos a estrutura de $G(x - y; \alpha)$ é semelhante ao propagador no campo quântico para bósons em temperatura finita, usando $v_B(k_{\alpha}; \alpha)$ para introduzir uma transformação de Bogoliubov seguindo as regras algébricas da DCT, definimos $u(k_{\alpha}; \alpha)$ por:

$$u^2(k_{\alpha}; \alpha) - v^2(k_{\alpha}; \alpha) = 1,$$

e

$$B(k_\alpha; \alpha) = \begin{pmatrix} u(k_\alpha; \alpha) & -v(k_\alpha; \alpha) \\ -v(k_\alpha; \alpha) & u(k_\alpha; \alpha) \end{pmatrix}. \quad (4.109)$$

Abandonamos o subscrito de B por simplicidade. Escrevemos uma função de Green duplicada como:

$$G_0^{ab}(x - y; \alpha) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} G_0^{ab}(k; \alpha), \quad (4.110)$$

onde

$$G_0^{ab}(k; \alpha) = B^{(ac)}(k_\alpha; \alpha) = B^{(ac)}(k_\alpha; \alpha) G_0^{(cd)}(k) B^{\dagger(db)}(k_\alpha; \alpha),$$

com

$$(G_0^{(cd)}(k)) = \begin{pmatrix} G_0^{(k)} & 0 \\ 0 & -G_0^*(k) \end{pmatrix}.$$

Em termos das componentes, temos:

$$G_0^{11}(k; \alpha) = G_0(k) + v^2(k_\alpha; \alpha)[G_0(k) - G_0^*(k)], \quad (4.111)$$

$$G_0^{12}(k; \alpha) = G_0^{21}(k; \alpha) = v(k_\alpha; \alpha)u(k_\alpha; \alpha)[G_0(k) - G_0^*(k)], \quad (4.112)$$

$$G_0^{22}(k; \alpha) = -G_0^*(k) - v^2(k_\alpha; \alpha)[G_0(k) - G_0^*(k)]. \quad (4.113)$$

É uma generalização da função de Green da DCT, pois aqui $v^2(k_\alpha, \alpha)$ descreve compactação de espaço e tempo. Logo, a estrutura duplicada da DCT é usada para introduzir a forma canônica de $G_0^{ab}(x - y; \alpha)$ em termos de campos quânticos. A duplicação é definida pelas regras de conjugação de til.

Para incluir a transformação unitária equivalente à matriz B , uma nova parametrização é definida em termos do parâmetro $\theta(k_\alpha; \alpha)$ como:

$$u(k_\alpha; \alpha) = \cosh\theta(k_\alpha; \alpha), \quad (4.114)$$

$$v(k_\alpha; \alpha) = \sinh\theta(k_\alpha; \alpha).$$

Usando $\theta(k_\alpha; \alpha)$, a transformação de Bogoliubov aplicada a todos os modos é escrita na forma

$$\begin{aligned} U(\alpha) &= \exp\left\{\sum_k \theta(k_\alpha; \alpha)[a^\dagger(k)\tilde{a}^\dagger(k) - a(k)\tilde{a}(k)]\right\} \\ &= \prod_k U(k; \alpha), \end{aligned} \quad (4.115)$$

onde

$$U(k_\alpha; \alpha) = \exp\{\theta(k_\alpha; \alpha)[a^\dagger(k)\tilde{a}^\dagger(k) - a(k)\tilde{a}(k)]\}.$$

O k na soma e no produto da equação acima devem ser considerados no limite contínuo. Como $U(\alpha)$ tem a mesma forma que no caso da DCT padrão, todos os resultados derivados dos campos seguem as mesmas linhas. Aqui foram mostrados apenas alguns resultados, onde acentuamos a compactificação-d e vimos que não há necessidade do ensemble de Gibbs na análise.

Usando os operadores de criação e aniquilação de bósons, $a^\dagger(k)$ e $a(k)$ introduzimos os operadores α por:

$$\begin{aligned} a(k; \alpha) &= U(k_\alpha; \alpha)a(k)U^{-1}(k_\alpha; \alpha) \\ &= u(k_\alpha; \alpha)a(k) - v(k_\alpha; \alpha)\tilde{a}^\dagger(k). \end{aligned} \quad (4.116)$$

O inverso é:

$$a(k) = u(k_\alpha; \alpha)a(k; \alpha) + v(k_\alpha; \alpha)\tilde{a}^\dagger(k; \alpha).$$

de modo que os outros operadores $a^\dagger(k)$, $\tilde{a}(k)$ e $\tilde{a}^\dagger(k)$ pode ser obtido aplicando as regras de conjugação hermitiana ou til. As relações de comutação são:

$$[a(k; \alpha), a^\dagger(k'; \alpha)] = (2\pi)^3 2k_0 \delta(k - k'), \quad (4.117)$$

$$[\tilde{a}(k; \alpha), \tilde{a}^\dagger(k'; \alpha)] = (2\pi)^3 2k_0 \delta(k - k'), \quad (4.118)$$

todas as outras relações de comutação sendo zero.

O espaço de Hilbert é construído a partir do vácuo α , $|0(\alpha)\rangle = U(\alpha)|0, \tilde{0}\rangle$, onde $|0, \tilde{0}\rangle = \bigotimes_k |0, \tilde{0}\rangle$ e $|0, \tilde{0}\rangle$ é o vácuo para o modo k . O vácuo α é tal que:

$$a(k; \alpha)|0(\alpha)\rangle = \tilde{a}(k; \alpha)|0(\alpha)\rangle = 0,$$

e $\langle 0(\alpha)|0(\alpha)\rangle = 1$. Os vetores de base são dados na forma:

$$[a^\dagger(k_1; \alpha)]^{m_1} \dots [a^\dagger(K_M; \alpha)]^{m_M} [\tilde{a}^\dagger(k_1; \alpha)]^{n_1} \dots [\tilde{a}^\dagger(k_N; \alpha)]^{n_N} |0(\alpha)\rangle, \quad (4.119)$$

onde $n_i, m_j = 0, 1, 2, \dots$, com N e M sendo índices para um modo arbitrário.

Para simplificar, escrevemos $|0(\alpha)\rangle$ em termos de $u(\alpha)$ e $v(\alpha)$,

$$\begin{aligned} |0(\alpha)\rangle &= \frac{1}{u(\alpha)} \exp\left[\frac{v(\alpha)}{u(\alpha)} a^\dagger \tilde{a}^\dagger\right] |0, \tilde{0}\rangle \\ &= \frac{1}{u(\alpha)} \sum_n \left(\frac{v(\alpha)}{u(\alpha)}\right)^n |n, \tilde{n}\rangle \end{aligned} \quad (4.120)$$

Definindo:

$$\rho_{nn}^{1/2} = \frac{1}{u(\alpha)} \left(\frac{v(\alpha)}{u(\alpha)} \right)^n,$$

escrevemos:

$$|0(\alpha)\rangle = \sum_n \rho_{nn}^{1/2} |n, \tilde{n}\rangle,$$

que é, para compactação arbitrária, a contraparte da DCT. Concluimos a média de um observável A , um operador não-til, é dada por

$$\langle 0(\alpha) | A | 0(\alpha) \rangle = \sum_n \rho_{nn} A_{nn} = \text{Tr}(\rho, A),$$

onde a matriz ρ é:

$$\rho = \frac{1}{u^2(\alpha)} \left(\frac{v(\alpha)}{u(\alpha)} \right)^{2a^\dagger a}.$$

Esse resultado é uma generalização da DCT no sentido de que, se considerarmos, como exemplo, $S^1 \times R^3$, compactado no eixo do tempo, então $\rho = e^{-\beta H} / Z$, onde H é o hamiltoniano para o sistema de bóson livre e $Z(\beta) = u^2(\beta)$.

5 RESULTADOS

No capítulo 2 (Relatividade Geral) vimos que um buraco negro podia ser escrito como uma solução das Equações de Einstein. Aqui exploraremos as consequências da DCT (Dinâmica do Campo Térmico) em uma classe diferente de buracos negros, aqueles sem singularidade não removível por uma transformação de coordenadas. Passamos a descrevê-los antes de aplicarmos a termalização.

A existência de singularidades na teoria da relatividade geral tem sido problemática desde o seu início, especialmente aquelas ligadas à buracos negros. As chamadas singularidades fundamentais não permitem a aplicação das leis da física, que é um tipo de dificuldade que dá origem a algumas propostas para abordar o problema. Uma delas é conhecida como **censura cósmica** que foi proposta por Penrose no século passado [5]. Outra proposta mais particular veio com a solução de buracos negros regulares cuja primeira solução foi obtida por Bardeen [97]. É interessante notar que as soluções que descrevem buracos negros regulares que têm um horizonte de eventos e, portanto, compartilham muitas características com buracos negros singulares. Então, se os buracos negros são objetos reais, há uma boa chance de que os buracos negros regulares sejam objetos que serão percebidos experimentalmente. Desta forma, o estudo teórico de tais soluções se torna muito relevante. Particularmente, a análise da termodinâmica dos buracos negros regulares pode revelar implicações experimentais substanciais. Para isso, é necessário definir como a temperatura é introduzida e como a partir dela a entropia gravitacional é obtida. Além disso, outros efeitos podem ser previstos por meio dessa terminação, como a Lei de Stefan-Boltzmann Gravitacional e o Efeito Casimir. Nesse sentido, trabalhamos com a Dinâmica do Campo Térmico (DCT) porque provou ser uma ferramenta muito poderosa em lidar com a termalização de um determinado campo [98]. Essa abordagem requer dobrar o Espaço Fock, permitindo que o tempo e a temperatura sejam variáveis do sistema. Esta é uma vantagem sobre a abordagem de Matsubara [80]. A Dinâmica do Campo Térmico também requer a caracterização do campo em análise por meio da Função de Green correspondente. Em relação ao campo gravitacional usamos uma descrição alternativa que é conhecida como Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TERG). Quando o campo gravitacional é descrito dessa maneira alternativa, algumas previsões únicas são reveladas. Isso abre espaço para a exploração de buracos negros regulares via Dinâmica do Campo Térmico. Neste capítulo usamos a DCT para calcular a Lei de Stefan-Boltzmann e o Efeito Casimir através do TERG, e ele está organizado da seguinte maneira: Na seção 1, Buraco Negro Regular e suas subseções explicando a Dinâmica do Campo Térmico (DCT) aplicada ao buraco negro regular, as idéias de teleparalelismo, equiva-

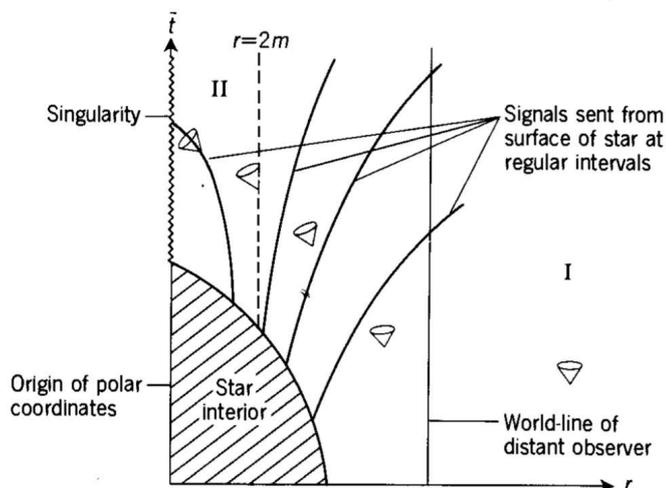
lentes à Relatividade Geral também são colocadas para o buraco negro regular; e por fim a lei gravitacional de Stefan-Boltzmann e a Entropia são calculados. Além disso, também calculamos para o mesmo sistema gravitacional sob o Efeito Casimir que é dado em temperatura zero e finita.

5.1 BURACO NEGRO REGULAR

A teoria da evolução estelar nos diz que as estrelas cujas massas são da ordem da massa do Sol podem atingir um estado de equilíbrio final como uma anã branca ou uma estrela de nêutrons. Mas para massas muito maiores, tal equilíbrio não é possível, e em tal caso a estrela se contrairá de tal forma que os efeitos gravitacionais superarão a pressão interna e as tensões que não serão capazes de deter a contração adicional. A relatividade geral prevê que uma estrela esfericamente simétrica necessariamente se contrairá até que toda a matéria contida nela chegue a uma singularidade no centro da simetria.

Imagine uma situação na qual ocorre o colapso de uma estrela não giratória simétrica esfericamente e contínua até que a superfície da estrela se aproxime do seu raio de Schwarzschild. Para se ter uma ideia da magnitude do raio de Schwarzschild, notamos que o raio de Schwarzschild para a Terra é de cerca de 1 cm e do Sol é de 3km. Desde que a estrela permaneça esfericamente simétrica, o seu campo externo permanece o dado pela solução de Schwarzschild. A Figura 23 é um diagrama espaço-temporal bidimensional do colapso gravitacional, onde a solução de vácuo de Schwarzschild é tomada nas coordenadas de Eddington-Finkelstein. Como fica claro no diagrama, um observador pode seguir uma estrela em colapso através do seu raio de Schwarzschild. Se os sinais forem enviados de um observador na superfície da estrela, atingindo o raio de Schwarzschild, um observador distante receberá esses sinais com um intervalo de tempo cada vez maior entre eles. O sinal em $r = 2m$ nunca escapará de $r = 2m$, e todos os sinais sucessivos serão finalmente arrastados de volta para a singularidade no centro. De fato, não importa quanto tempo o observador distante espere, só será possível ver a superfície da estrela como era antes de mergulhar através do raio de Schwarzschild. Na prática, entretanto, o observador distante logo veria nada da superfície da estrela, já que a intensidade observada morreria muito rápido devido ao desvio para o vermelho no raio de Schwarzschild. A estrela desapareceria rapidamente da vista deixando para trás um "buraco negro" no espaço, esperando para engolir qualquer coisa que se aventurasse perto demais.

FIGURA 23 – Colapso gravitacional (duas dimensões espaciais suprimidas).



Fonte: R. D’Inverno - *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, 1998.

Com a colaboração do LIGO (Laser Interferometro Gravitational-Wave Observatory) anunciou o resultado mais importante em física no ano de 2016: a detecção das ondas gravitacionais [99], que era uma teoria prevista pela relatividade geral de Albert Einstein, criando a nova área na ciência: física das ondas gravitacionais. Com o resultado do LIGO sobre as ondas gravitacionais foi possível detectar os buracos negros, pois de acordo com o experimento as ondas gravitacionais foram detectadas a partir da colisão de dois buracos negros. E buracos negros são uma previsão tão antiga da teoria da relatividade geral quanto as ondas gravitacionais.

O primeiro buraco negro proposto foi em 1916, o físico alemão Karl Schwarzschild [98] quem propôs, num famoso artigo, onde as equações do campo gravitacional de uma massa pontual no vácuo foram resolvidos. Hoje ela é conhecida como solução de Schwarzschild, em homenagem ao autor. Tal solução foi interpretada como uma descrição de um objeto astrofísico compacto, onde seu campo gravitacional gerado por sua massa impede que mesmo a sua luz emitida escape: nasce então o conceito de buraco negro, termo popularizado por John Wheeler nos anos de 1950. A solução ou métrica de Schwarzschild tem massa, simetria esférica e não possui carga elétrica, sendo uma aproximação para descrever objetos astrofísicos sem ou com pouca rotação sobre o seu próprio eixo como o Sol. Objetos imersos num espaço-tempo vazio, sem conteúdo de matéria. Uma solução similar, mas com carga elétrica, foi proposta, independentemente, por Hans Reissner [100] e Gunnar Nordström [101] pouco tempo depois. Sendo conhecida como métrica de Reissner-Nordström ou buraco negro de Reissner-Nordström, que assim como o buraco negro de Schwarzschild não tem um

movimento de rotação, apresentando a simetria esférica. Em 1963, Roy Kerr [102] propôs uma métrica com rotação ou com simetria axial, nasceu então o primeiro buraco negro com rotação no vácuo, a primeira solução das equações de Einstein com esta característica.

As soluções já citadas possuem uma limitação da teoria de Einstein ou suas próprias limitações, elas apresentam o que ficou conhecido como singularidades que significa uma falha, ou "fissura" nas equações e soluções da relatividade geral, ou seja, no interior desses buracos negros a singularidade significa o não funcionamento das soluções. Na década de 60 do século passado uma possível solução começou a surgir para o problema das singularidades no contexto da teoria da relatividade geral, foi o russo Andrei Sakharov, com o trabalho sobre a formação de estruturas num universo jovem [103], obteve um resultado interessante: conforme a métrica se aglomera devido à gravitação, a densidade de energia não diverge no interior desse aglomerado de matéria, que pode ser uma galáxia em formação. A não divergência ou ocorrência de uma singularidade somente é satisfeita caso o espaço-tempo, no interior desse aglomerado, seja um espaço-tempo conhecido como de Sitter, em homenagem à Willem de Sitter. Pouco tempo após o resultado de Sakharov, o inglês James Bardeen [97] utiliza-o e constrói a primeira métrica de buraco negro sem singularidade. A solução ou métrica de Bardeen tem simetria esférica, não possui carga e difere da solução de Schwarzschild por possuir uma massa m mas sim uma função $m(r)$, que depende da coordenada radial. A função $m(r)$ não pode ser uma qualquer, deve necessariamente fazer com que a métrica de Bardeen seja, no núcleo, um espaço-tempo do tipo de Sitter. Com esta exigência, o espaço-tempo no interior do buraco negro é regularizado, sendo então chamado de **buraco negro regular**. Isto é, um objeto compacto, com um horizonte de eventos e sem uma singularidade.

5.1.1 Caracterização das coordenadas

Nesta seção vamos entender a solução de vácuo de Schwarzschild. A solução: $ds^2 = (1 - 2m/r)dt^2 - (1 - 2m/r)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$, é a apresentação do sistema de coordenadas de campo. Em geral, se quisermos anotar uma solução das equações de campo, precisamos fazê-lo em algum sistema de coordenadas específico. Mas qual é o significado de algum sistema de coordenadas em particular? Por exemplo, usamos a solução de Schwarzschild e aplicamos uma transformação de coordenadas complicada, como você pode imaginar, rotulando as novas coordenadas x'^a . Agora, suponha que você tenha recebido essa solução e tenha sido solicitado a interpretar a solução e identificar as coordenadas x'^a . A solução ainda satisfará as equações de campo do vácuo, mas provavelmente haverá pouco ou nenhum significado geométrico ligado às coordenadas x'^a . Por exemplo, não se pode definir $x'^0 = t$, digamos, e interpretar t como um parâmetro de "tempo". Como uma ilustração trivial disso, consideramos a

transformação:

$$x'^0 = \theta, \quad x'^1 = r, \quad x'^2 = t, \quad x'^3 = \phi.$$

Uma coisa que podemos fazer, no entanto, é estabelecer se a hipersuperfície:

$$x^{(a)} = \text{constante} \quad (5.1)$$

(onde os parênteses que envolvem o índice significa que ele deve ser considerado fixo) é temporal, nula ou semelhante a um ponto. Para o campo vetorial normal é:

$$n_b = \delta_b^{(a)},$$

ou em forma contravariante:

$$n^c = g^{cb} n_b = g^{cb} \delta_b^{(a)} = g^{c(a)},$$

que tem magnitude ao quadrado, dada por:

$$n^2 = n^c n_c = g^{c(a)} \delta_c^{(a)} = g^{(a)(a)} \quad (\text{sem ser somado}).$$

Portanto, se a assinatura for -2 , então a hipersuperfície (5.1) em P é tipo tempo, nulo, ou tipo espaço dependendo do $g^{(a)(a)}$, se é > 0 , $= 0$, ou < 0 . Em qualquer ponto em que o sistema de coordenadas é regular, as coordenadas das hipersuperfícies podem ter qualquer caractere, mas os quatro campos de vetores normais $n_{(a)}^b$ devem ser linearmente independentes. Assim, por exemplo, as hipersuperfícies poderiam ser todas nulas, cronológicas ou espaciais, ou qualquer combinação das três. Estaremos cumprindo as três situações mais comuns nas quais as quatro coordenadas consistem em:

- 1 tipo tempo, 3 tipo espaço ;
- 1 nulo, 3 tipo espaço ;
- 2 nulo , 2 tipo espaço.

Embora uma métrica possa ser exibida em qualquer sistema de coordenadas, se ela possuir simetrias haverá coordenadas preferenciais adaptadas às simetrias. Se uma solução possui mais de um campo vetorial de Killing, então as coordenadas podem ser adaptadas para cada um deles, desde que os campos de vetor de Killing comutem, então a história é mais complicada, mas não obstante as simetrias podem ser usadas para amarrar os possíveis sistemas de coordenadas.

Com essas ideias em mente, vamos olhar para a solução de Schwarzschild, para ver se podemos caracterizar as coordenadas (t, r, θ, ϕ) . Em primeiro lugar:

$$g^{00} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, \quad g^{11} = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right), \quad g^{22} = -\frac{1}{r^2}, \quad g^{33} = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}, \quad (5.2)$$

daqui resulta que $x^0 = t$ é tipo tempo e $x^1 = r$ é tipo espaço, enquanto $r > 2m$ e ambos $x^2 = \theta$ e $x^3 = \phi$ são tipo espaço. Em seguida, uma vez que a métrica é independente de t e não há termos cruzados em dt , segue-se que a solução é estática e t é o tempo mundo invariavelmente definido como:

$$x^0 \rightarrow x'^0 = Ax^0 + B, \quad x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = h'^\alpha(x^\beta),$$

onde A e B são constantes e as funções h'^α são arbitrárias. Se as condições de limite exigirem $g^{00} \rightarrow 1$ no infinito espacial, então isso exige que $A = \pm 1$. Negligenciando a reversão do tempo, fixamos A para ser 1, e assim definimos uma coordenada de tempo, chamada tempo mundo, que é definido para dentro de uma importante constante aditiva.

A coordenada r é um parâmetro radial que possui a propriedade que a 2-esfera, $t = \text{constante}$, $r = \text{constante}$, tem o elemento padrão de linha:

$$ds^2 = -r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2),$$

do qual segue que a área da superfície da 2-esfera é $4\pi r^2$. Isto não seria o caso se nós tivéssemos escolhido um parâmetro radial diferente, como a coordenada isotrópica ρ em:

$$ds^2 = \frac{(1 - \frac{1}{2}m/\rho)^2}{(1 + \frac{1}{2}m/\rho)^2} dt^2 - \left(1 + \frac{1}{2}m/\rho\right)^4 [d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)].$$

Então, finalmente, θ e ϕ são as coordenadas angulares esféricas polares usuais na 2-esfera, que são invariavelmente definidas pela simetria esférica. Em suma, as coordenadas de Schwarzschild são as coordenadas canônicas definidas invariavelmente pelas simetrias presentes.

5.1.2 Singularidades

Agora voltamos para outro problema associado com coordenadas, isto é, o fato de que, em geral, um sistema de coordenadas cobre apenas uma parte da variedade. Assim, por exemplo, as coordenadas de Schwarzschild não cobrem o eixo $\theta = 0, \pi$, porque o elemento de linha torna-se degenerado aqui e a métrica deixa de ter classificação 4. Esta degeneração pode ser removida pela introdução de coordenadas cartesianas, (x, y, z) , onde, como de costume,

$$x = r \text{sen}\theta \cos\phi, \quad y = r \text{sen}\theta \text{sen}\phi, \quad z = r \cos\theta.$$

Tais pontos são chamados de coordenadas de singularidades, porque refletem deficiências no sistema de coordenadas usado e, portanto, removíveis. Existem dois outros valores das coordenadas para as quais a solução de Schwarzschild é degenerada, a

saber, $r = 2m$ e $r = 0$. O valor $r = 2m$ é conhecido como o raio de Schwarzschild. A hipersuperfície $r = 2m$ volta a ser uma coordenada singular removível. Isto é indicado pela invariante escalar do tensor de Riemann:

$$R_{abcd}R^{abcd} = 48m^2r^{-6},$$

que é finito em $r = 2m$. Como é um escalar, seu valor permanece o mesmo em todos os sistemas de coordenadas e referenciais. Da mesma forma, esse invariante explode na origem, $r = 0$. A singularidade na origem é, de fato, inamovível e é chamada de singularidade intrínseca, curvatura, física e essencial ou real. Note também por:

$$\alpha = \left(\frac{g_{00}(x_2^\alpha)}{g_{00}(x_1^\alpha)} \right)^{1/2},$$

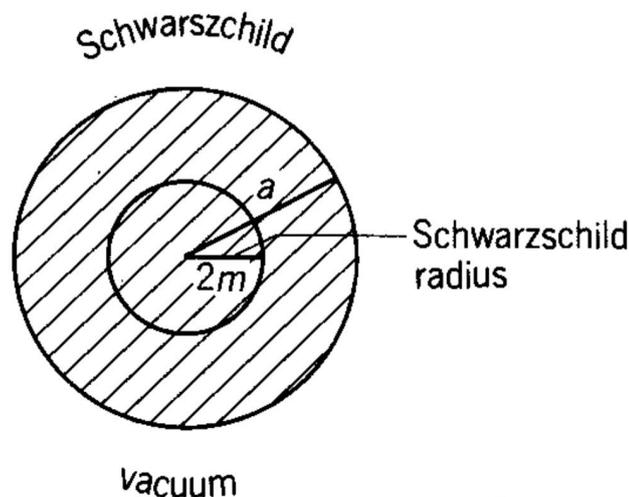
uma vez que g_{00} desaparece no raio de Schwarzschild, a superfície $r = 2m$ é uma superfície de deslocamento para o vermelho infinito.

A interpretação da solução de Schwarzschild é como uma solução de vácuo externa a algum corpo esférico de raio $a > 2m$ (Figura 24). Uma métrica diferente descreveria o próprio corpo para $r < a$, e corresponderia então a alguma distribuição de matéria resultando em um tensor de energia-momento diferente de zero. De fato, Schwarzschild obteve uma solução fluida estática esfericamente simétrica, conhecida como solução interior de Schwarzschild. Entretanto, nesta seção iremos investigar a solução de vácuo de Schwarzschild abstraída de qualquer fonte para todos os valores de r . Nesse caso, deve estar claro a partir da equação (5.2), que $r = 2m$ é uma hipersuperfície nula dividindo a variedade em dois componentes desconectados:

1. $2m < r < \infty$
2. $0 < r < 2m$.

Dentro da região 2, as coordenadas t e r revertem sua característica, com t agora sendo tipo espaço e r tipo tempo. Segue-se que a topologia da solução de Schwarzschild não é simplesmente euclidiana.

FIGURA 24 – Interpretação padrão da solução exterior de Schwarzschild.



Fonte: R. D’Inverno - *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, 1998.

5.1.3 Diagramas espaciais e espaço-temporal

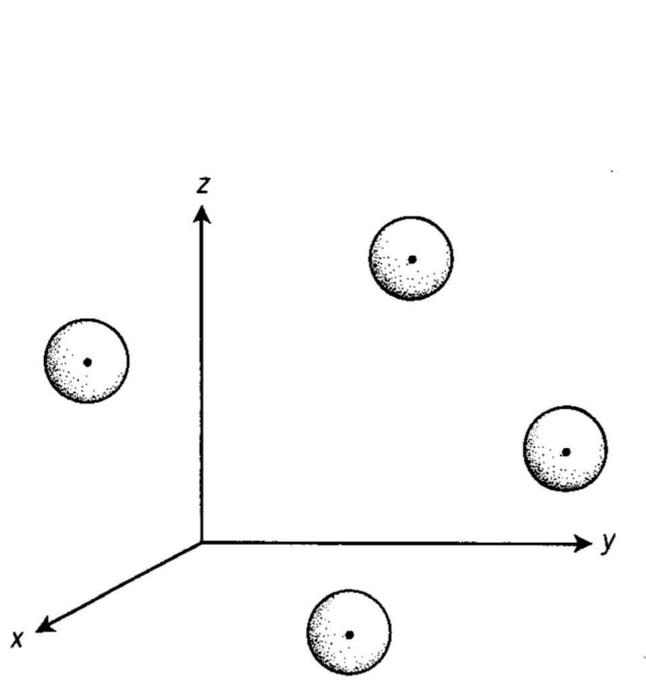
A técnica principal que devemos usar para interpretar a solução é investigar sua estrutura do cone de luz local futuro. Um cone de luz local é definido como o local onde os pontos $x_0^a + dx^a$, na vizinhança de um ponto x_0^a , para o qual:

$$g_{ab}dx^a dx^b = 0.$$

A estrutura do cone de luz coloca restrições nas possíveis histórias de um observador, uma vez que um observador se move em linha de mundo temporal cuja direção em qualquer ponto deve estar no cone de luz futuro no ponto. Os diagramas nos ajudarão a tentar entender a natureza da solução.

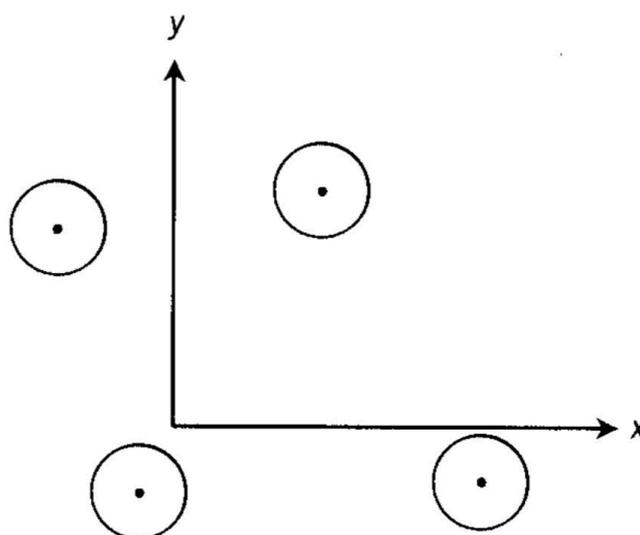
Em um diagrama puramente espacial, devemos nos interessar pelo que acontece em vários pontos da variedade em dois intervalos sucessivos de tempo, t_1 e t_2 , digamos. No instante t_1 , um ponto luminoso é emitido de cada ponto de interesse e o diagrama espacial indica onde as ondas desses flashes atingiram o tempo t_2 . Isso é ilustrado na Figura 25, para o espaço-tempo de Minkowski. Nesta figura, a luz de cada ponto formará uma frente de onda esférica centrada no ponto. Se houver simetrias, pode ser suficiente considerar o que acontece se suprimirmos uma dimensão espacial. Por exemplo, a Figura 25 se torna a Figura 26 no plano $z = 0$, digamos, e as esferas agora se tornam círculos. Em um diagrama de espaço-tempo estamos interessados na história desses flashes de luz. Suponha que tomemos sucessivos "instantâneos" das frentes de onda que emanam de algum ponto P , nos instantes t_1, t_2, t_3 , etc. (Figura 27). A ideia, em um diagrama de espaço-tempo, é empilhar essas imagens no tempo. Como isso envolveria um quadro quadri-dimensional - e há problemas suficientes para

FIGURA 25 – Diagrama espacial do espaço-tempo de Minkowski.



Fonte: R. D’Inverno - *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, 1998.

FIGURA 26 – Diagrama espacial do espaço-tempo de Minkowski (uma dimensão espacial suprimida).

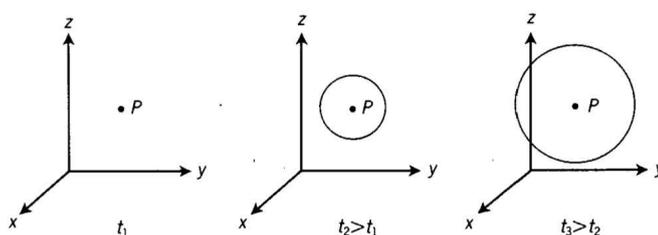


Fonte: R. D’Inverno - *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, 1998.

desenhar figuras tridimensionais em duas dimensões - suprimimos uma dimensão espacial e desenhamos o eixo do tempo verticalmente. Para ser específico vamos restringir a atenção ao plano $z = 0$, e então as frentes de onda se tornarão círculos (que aparecerão como elipses no diagrama para levar em conta a perspectiva), no cone de luz futuro através de P (Figura 28). Da mesma forma, podemos incluir o cone de luz do passado que pode ser considerado como uma frente de onda implodida.

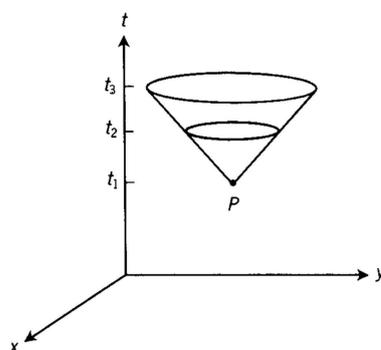
Novamente, muitas vezes será suficiente considerar um diagrama espaço-temporal com duas dimensões espaciais suprimidas (Figura 29). Em um espaço-tempo curvo, se a curvatura de manifesta em um espaço-tempo através dos cones de luz sendo esmagados ou abertos e inclinados ou inclinados de várias maneiras, como veremos na próxima subseção.

FIGURA 27 – Flash de luz de um ponto em três vezes sucessivas.



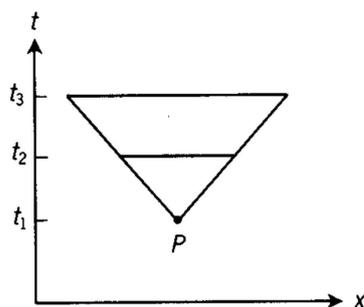
Fonte: R. D’Inverno - *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, 1998.

FIGURA 28 – Diagrama de espaço-tempo do flash de luz (uma dimensão espacial suprimida).



Fonte: R. D’Inverno - *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, 1998.

FIGURA 29 – Diagrama de espaço-tempo do flash de luz (duas dimensões espaciais suprimidas).



Fonte: R. D’Inverno - *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, 1998.

5.1.4 Diagrama espaço-tempo em coordenadas Schwarzschild

Consideramos primeiro a classe de geodésicas nulas radiais definidas pela exigência:

$$ds^2 = \dot{\theta} = \dot{\phi} = 0. \quad (5.3)$$

Então, usando essa abordagem de princípio variacional, temos:

$$2K = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 = 0, \quad (5.4)$$

onde o ponto denota a diferenciação em relação a um parâmetro afim ou ao longo da geodésica nula. A equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial K}{\partial x^a} - \frac{d}{du} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}^a} \right) = 0,$$

correspondendo a $a = 0$ é:

$$\frac{d}{du} \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} \right] = 0,$$

que se integrar, obtemos:

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} = k, \quad (5.5)$$

onde k é uma constante. Substituindo em (5.4), encontramos:

$$\dot{r}^2 = k^2, \quad (5.6)$$

ou

$$\dot{r} = \pm k, \quad (5.7)$$

do qual, segue que r é um parâmetro afim. Em vez de encontrar a equação paramétrica dessas curvas, vamos olhar diretamente para sua equação na forma $t = t(r)$. Então

$$\frac{dt}{dr} = \frac{\frac{dt}{du}}{\frac{dr}{du}} = \frac{\dot{t}}{\dot{r}}, \quad (5.8)$$

que pode ser encontrado em (5.5) e (5.7). Tomando o sinal positivo em (5.7), obtemos:

$$\frac{dt}{dr} = \frac{r}{r - 2m}, \quad (5.9)$$

onde integrando, temos:

$$t = r + 2m \ln |r - 2m| + \text{constante}. \quad (5.10)$$

Na região I , por (5.9),

$$r > 2m \Rightarrow \frac{dr}{dt} > 0,$$

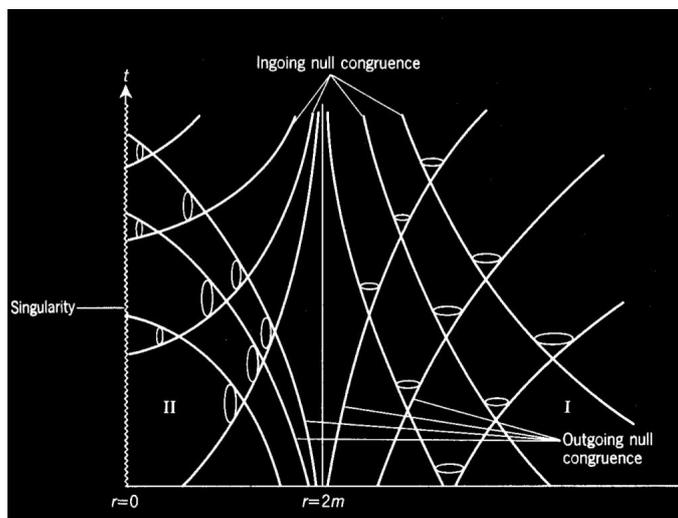
de modo que r aumenta conforme t aumenta. Portanto, definimos as curvas (5.10) como uma congruência de geodésicas nulas radiais de saída. Da mesma forma, o sinal negativo fornece a congruência de geodésicas nulas radiais de entrada,

$$t = -(r + 2m \ln |r - 2m| + \text{constante}). \quad (5.11)$$

Observe que, sob a transformação $t \rightarrow -t$, de entrada e geodésicas de saída são trocados, como seria de se esperar.

Podemos agora usar essas congruências para desenhar um diagrama espaço-temporal (Figura 30) da solução de Schwarzschild com duas dimensões suprimidas. O diagrama de espaço-tempo é desenhado para alguns θ e ϕ fixos. Como o diagrama será o mesmo para todos os θ e ϕ , devemos pensar em cada ponto (t, r) no diagrama como representando uma 2-esfera de área $4\pi r^2$. Observe que, como $r \rightarrow \infty$, as geodésicas nulas criam ângulos de 45° com os eixos coordenados como no espaço plano em unidades relativísticas, que deveríamos esperar, pois a solução é assintoticamente plana. A luz local aparece na região II , porque as coordenadas t e r invertem suas características. Por exemplo, a linha $t = \text{constante}$ é uma região II da linha de tempo, e portanto, deve estar dentro do cone de luz local. Um observador na região II não pode ficar em repouso, isto é, a um valor constante de r , mas é forçado a se mover em direção à singularidade intrínseca em $r = 0$. Este diagrama parece sugerir que um observador na região I que se mova em direção à origem levaria uma quantidade infinita de tempo para alcançar o raio de Schwarzschild, $r = 2m$. Igualmente, o diagrama sugere que o mesmo é verdadeiro para um raio de luz que entra. No entanto, acontece que esse diagrama de espaço-tempo é enganoso, como veremos.

FIGURA 30 – Solução de Schwarzschild em coordenadas de Schwarzschild (duas dimensões suprimidas).



Fonte: R. D’Inverno - *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, 1998.

5.1.5 Coordenadas Eddington-Finkelstein

A ideia é muito simples: mudamos para uma nova coordenada de tempo na qual as geodésicas nulas radiais que entram se tornam linhas retas. Segue imediatamente de (5.10) que a mudança apropriada é dada por:

$$t \rightarrow \bar{t} = t + 2m \ln(r - 2m), \quad (5.12)$$

para $r > 2m$, porque no novo sistema de coordenadas $(\bar{t}, r, \theta, \phi)$, (5.11), torna-se:

$$\bar{t} = -r + \text{constante}, \quad (5.13)$$

que é uma linha reta fazendo um ângulo de 45° com o eixo - r . Diferenciando (5.12), obtemos:

$$d\bar{t} = dt + \frac{2m}{r - 2m} dr, \quad (5.14)$$

e, substituindo por dt no elemento de linha de Schwarzschild:

$$ds^2 = (1 - 2m/r) dt^2 - (1 - 2m/r)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (5.15)$$

encontramos a forma Eddington-Finkelstein:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) d\bar{t}^2 - \frac{4m}{r} d\bar{t}dr - \left(1 + \frac{2m}{r}\right) dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (5.16)$$

Esta solução é agora regular em $r = 2m$; na verdade, é regular para todo o intervalo $0 < r < 2m$. Assim, em certo sentido, a transformação (5.12) estende o intervalo de coordenadas de $2m < r < \infty$ para $0 < r < \infty$. O processo é um tanto

reminiscente de continuar analiticamente uma função em análise complexa e, por causa disso, (5.16) é chamada de uma extensão analítica de (5.15) (veja a Figura 31).

Pode-se objetar que a transformação de coordenadas (5.12) não pode ser usada em $r = 2m$, porque se torna singular. No entanto, (5.12) é apenas um dispositivo conveniente para nos levar de (5.15) para (5.16). Nosso ponto de partida é realmente os dois elementos (5.15) e (5.16). Dadas essas soluções, fazemos a pergunta: Qual é o maior intervalo de coordenadas para o qual cada solução é regular? A resposta é o intervalo $2m < r < \infty$ (juntamente, é claro, com $-\infty < t < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, e $-\pi < \phi \leq \pi$, além do problema usual com as coordenadas no eixo $\theta = 0, \pi$) para (5.15) e o intervalo $0 < r < \infty$ para (5.16). Na região de sobreposição ($2m < r < \infty$), as duas soluções são relacionadas por (5.12), e portanto, devem representar a mesma solução nessa região. Note que a solução em coordenadas Eddington- Finkelstein não é mais simétrica no tempo. Podemos obter uma solução de tempo inverso introduzindo uma coordenada de tempo diferente:

$$t \rightarrow t^* = t - 2m \ln(r - 2m),$$

que endireita geodésicas nulas radiais de saída.

Podemos escrever (5.16) de uma forma mais simples, introduzindo uma coordenada nula

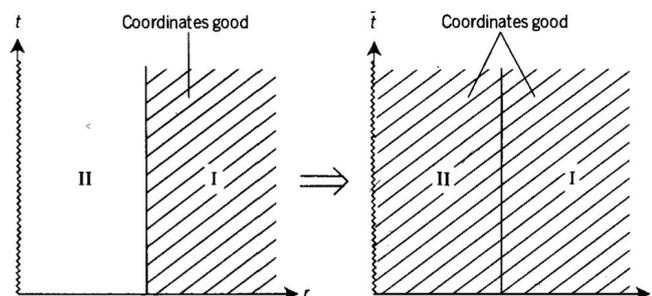
$$v = \bar{t} + r, \tag{5.17}$$

que por razões históricas é chamada de parâmetro de tempo avançado. O elemento de linha resultante é:

$$ds^2 = (1 - 2m/r)dv^2 - 2dvdr - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \tag{5.18}$$

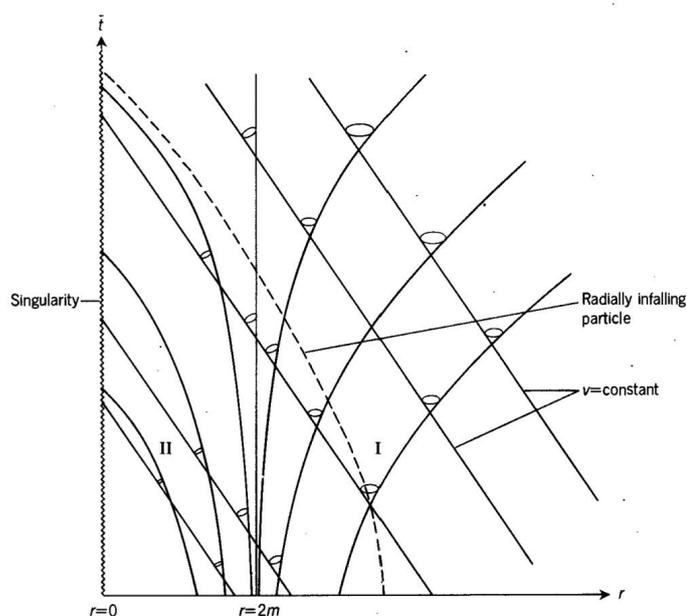
É então fácil mostrar que a congruência da geodésica nula radial de entrada é dada por $v = \text{constante}$, o que deve ser evidente a partir de (5.13). O diagrama de espaço-tempo para a solução de Schwarzschild nas coordenadas de Eddington-Finkelstein é dado na Figura 32. Como antes, os cones de luz se abrem para 45° como $r \rightarrow \infty$. A borda esquerda dos cones de luz está a -45° do eixo - r . A borda direita começa em 45° até o eixo r no infinito e inclina-se à medida que r diminui, tornando-se vertical em $r = 2m$ e inclinando-se para dentro de $r < 2m$. Observe que em $r = 2m$, os fótons radialmente "permanecem onde estão". Podemos obter uma figura tridimensional (no plano equatorial $\theta = 0$, digamos) gerando a Figura 32 sobre o eixo- \bar{t} . A Figura 32 agora ilustra corretamente o que acontece com uma partícula radialmente infalível.

FIGURA 31 – Extensão analítica da solução de Schwarzschild.



Fonte: R. D’Inverno - *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, 1998.

FIGURA 32 – Solução Schwarzschild em coordenadas avançadas de Eddington-Finkelstein.



Fonte: R. D’Inverno - *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, 1998.

5.1.6 Horizonte de eventos

A Figura 32 suprime a informação angular na solução de Schwarzschild. Isso pode ser melhor representado no plano equatorial em um diagrama espacial, como mostrado na Figura 33. Longe da origem, a imagem espacial é semelhante à da relatividade especial (Figura 26). À medida que nos aproximamos da origem, as frentes de ondas esféricas são atraídas para dentro, de modo que os pontos de onde emanam não estão mais no centro. Isso se torna mais acentuado até que na superfície $r = 2m$, apenas os fótons de saída radiais permaneçam onde estão, enquanto todo o resto é

arrastado para dentro. Na região *II*, todos os fótons, mesmo radialmente "que sai", são arrastados para dentro em direção à singularidade.

Fica claro a partir dessa imagem que a superfície $r = 2m$ atua como uma membrana unidirecional, permitindo que as curvas temporais e nulas direcionadas para o futuro cruzem apenas do lado de fora (região *I*) para o interior (região *II*). Além disso, nenhuma curva nula ou temporal orientada para o futuro pode escapar da região *II* para a região *I*. A superfície $r = 2m$ é chamada de horizonte de eventos porque representa o limite de todos os eventos que podem ser observados em princípio por um observador inercial externo. No entanto, eles eram dependentes do observador. O horizonte de eventos de Schwarzschild é absoluto, uma vez que isola todos os eventos internos de todos os observadores externos.

Se, em vez disso, usarmos a coordenada nula,

$$w = t^* - r, \quad (5.19)$$

chamada de parâmetro de tempo retardado, então o elemento de linha torna-se:

$$ds^2 = (1 - 2m/r)dw^2 + 2dwdr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (5.20)$$

Esta solução é novamente regular para $0 < r < \infty$ e corresponde à reversão temporal da solução avançada de Eddington-Finkelstein (5.16) (Figura 34). A superfície $r = 2m$ é novamente uma superfície nula que atua como uma membrana unidirecional. No entanto, dessa vez, ela age na outra direção do tempo, permitindo que somente curvas nulas ou nulas direcionadas para o passado passem de fora para dentro.

FIGURA 33 – Diagrama espacial da solução de Schwarzschild em coordenadas avançadas de Eddington-Finkelstein.

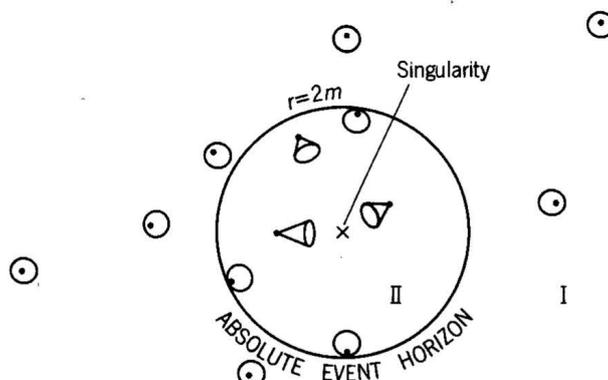
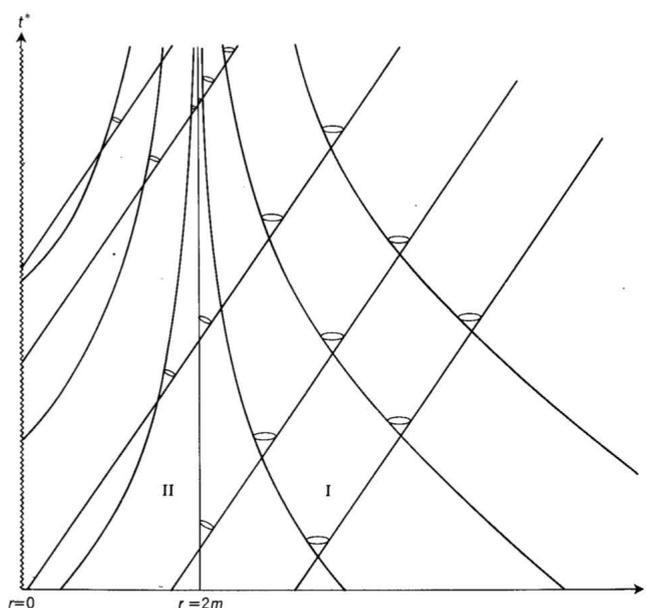


FIGURA 34 – Diagrama espacial do espaço-tempo de Minkowski.



Fonte: R. D’Inverno - *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, 1998.

5.1.7 Buraco Negro de Bardeen

James Maxwell Bardeen é um físico estadunidense conhecido por seu trabalho em relatividade geral, particularmente por sua atuação na formulação das leis da mecânica dos buracos negros, descobriu o vácuo de Bardeen, uma solução exata das equações de campo de Einstein. *O buraco negro de Bardeen foi o primeiro exemplo de um buraco negro sem uma singularidade [104].*

A métrica:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (5.21)$$

com simetria esférica, a que descreve um buraco negro sem rotação. Esta solução descreve tanto a de Schwarzschild quanto a de Bardeen [104]:

- quando a massa do buraco negro é constante, $f(r) = 1 - 2m/r$, temos Schwarzschild;
- quando temos $f(r) = 1 - 2m/r$, e a função $m(r)$ tem uma forma determinada, ou seja, é uma função representada por:

$$m(r) = \frac{Mr^3}{(r^2 + e^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (5.22)$$

temos o buraco negro de Bardeen.

Na equação (5.22), M é considerada como um parâmetro de massa, e e é um tipo de carga. Ao aceitar uma função para massa, ao invés da mesma ser constante, resulta em algumas diferenças entre as soluções de Schwarzschild e Bardeen, não apenas ao problema da singularidade. Em Schwarzschild temos uma superfície do tipo luz importante que é o horizonte de eventos. Tal superfície, que tem como função ser tipo uma membrana de mão única, pode se apresentar em dobro no buraco negro de Bardeen. Dependendo da relação entre M e e , pode existir um horizonte interno e um horizonte externo (um horizonte de eventos como no buraco negro de Schwarzschild). Para observarmos o desaparecimento da singularidade e a solução deste problema utilizando a equação (5.22), ao usar uma aproximação para a função da massa, sendo r pequeno, dada por:

$$m(r) \approx M \left(\frac{r}{e} \right)^3, \quad (5.23)$$

que resulta

$$f(r) \approx 1 - Cr^2, \quad (5.24)$$

sendo $C = 2M/e^3$ uma constante positiva. Com essa aproximação obtida para $f(r)$, sendo substituída em (5.21), a métrica de Sitter é obtida para valores pequenos de r , ou seja, com o uso da função de massa de Bardeen, a métrica (5.21) que descreve um buraco negro esférico apresentará um núcleo, que é uma região interna, do tipo de Sitter. Uma região para valores pequenos de r onde o espaço-tempo apresenta-se como de Sitter. O simples "truque" matemático feito por Bardeen, a substituição de m por uma determinada função de massa, tornou a métrica (5.21) regular, removendo a singularidade situada na origem do sistema de coordenadas $r = 0$, fazendo deste ponto um ponto qualquer de \mathcal{M} . A regularidade da solução de Bardeen fica clara quando se observarmos diretamente a métrica ou quando se calcula escalares.

Portanto, o buraco negro de Bardeen mostra-se como regular, sem possuir uma singularidade na origem do sistema de coordenadas e mostra-se como buraco negro, acima de tudo, por possuir, no mínimo um horizonte de eventos.

5.1.8 Buraco Negro de Hayward

A métrica de Hayward é a descrição mais simples de um buraco negro não singular. A métrica foi escrita por Sean Hayward como o modelo mínimo que é regular, estático, esférico simétrico e assintoticamente plano [105]. *A métrica, não é derivada de nenhuma teoria da gravidade alternativa em particular, mas fornece uma estrutura para testar a formação e evaporação de buracos negros não singulares dentro da relatividade geral e além. Hayward publicou sua métrica pela primeira vez em 2005 e vários artigos a estudaram desde então [33].*

O espaço-tempo regular (sem singularidade) é dado a partir da descrição da formação de um buraco negro em uma região de vácuo definida localmente, como uma região estática, e evaporação subsequente em uma região de vácuo [106]. O elemento de linha de uma esfera simétrica é descrito na equação:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{g(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (5.25)$$

onde $f(r)$ e $g(r)$ são funções determinadas de acordo com o tipo de solução das equações de Einstein e tomando a assinatura $(-, +, +, +)$. Para o espaço-tempo Hayward [106] $f(r)$ é igual a $g(r)$ e tem a seguinte forma:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2mr^2}{r^3 + 2\hat{l}^2m}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2mr^2}{r^3 + 2\hat{l}^2m}\right)^{-1} dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (5.26)$$

com m correspondendo a massa do buraco negro e \hat{l} é a constante cosmológica, a equação (5.26) descreve um buraco negro regular, ou seja, não possui singularidade quando $r = 0$, com simetria esférica, assintoticamente plano, que pode ter um ou dois horizontes de eventos dependendo da relação entre a massa e a constante cosmológica, quando $\hat{l} = 0$, a métrica é reduzida a um espaço Schwarzschild, que é descrito pelo elemento de linha:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2d\Omega^2, \quad (5.27)$$

como podemos ver é uma solução com simetria esférica e assintoticamente plana. Então de (5.27) temos que o $f(r)$ diverge em $r = 0$, então o elemento de linha não pode ser medido, então pode-se dizer que em $r = 0$ há uma singularidade, além disso, $f(r)$ é zero em $r = 2m$ criará uma superfície conhecida como horizonte de eventos.

Esta é uma solução regular, similar a de Bardeen, com outra função $m(r)$ com o propósito de descrever a formação e evaporação de buracos negros regulares.

5.1.9 Efeito Casimir Gravitacional e a Lei de Stefan-Boltzmann em temperatura finita para Buracos Negros Regulares

Nesta seção, a estrutura da DCT é usada para calcular o valor médio do tensor energia-momento gravitacional (3.49) que é obtido na aproximação de campo fraco do TERG. Assim, temos:

$$\langle t^{\lambda\mu(AB)}(x; \alpha) \rangle = \lim_{x \rightarrow x} 4i\kappa(-5g^{\lambda\mu}\partial^\gamma\partial_\gamma + 2g^{\mu\alpha}\partial^\lambda\partial_\alpha)G_0^{(AB)}(x - x; \alpha). \quad (5.28)$$

Se usarmos a prescrição Casimir:

$$T^{\lambda\mu(AB)}(x; \alpha) = \langle t^{\lambda\mu(AB)}(x; \alpha) \rangle - \langle t^{\lambda\mu(AB)}(x) \rangle, \quad (5.29)$$

então:

$$T^{\lambda\mu(AB)}(x; \alpha) = \lim_{x \rightarrow x'} 4i\kappa(-5g^{\lambda\mu}\partial'^{\gamma}\partial_{\gamma} + 2g^{\mu\alpha}\partial'^{\lambda}\partial_{\alpha})\overline{G}_0^{(AB)}(x - x'; \alpha), \quad (5.30)$$

onde:

$$\overline{G}_0^{(AB)}(x - x'; \alpha) = G_0^{(AB)}(x - x'; \alpha) - G_0^{(AB)}(x - x'). \quad (5.31)$$

É possível descrever uma classe de buracos negros regulares pelo seguinte elemento de linha [107]:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (5.32)$$

com

$$f(r) = 1 - \frac{2M_0}{r \left[1 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^q\right]^{p/q}}, \quad (5.33)$$

onde M_0 é a massa do buraco negro regular, na verdade coincide com a massa da ADM no limite $r \rightarrow \infty$. O parâmetro r_0 pode ser visto como um comprimento fundamental do buraco negro regular. Tal elemento de linha reproduz soluções conhecidas para uma escolha adequada dos parâmetros p e q que devem ser números inteiros. Por exemplo, as soluções de Bardeen é alcançada para $p = 3$ e $q = 2$, enquanto que a solução de Hayward para $p = q = 3$. Assim, deve-se notar que a métrica da equação (5.32) representa uma classe de soluções. Esses buracos negros regulares surgiram para lidar com um problema aberto da gravitação, a existência de singularidades. Na verdade, a solução de Bardeen foi a primeira classe de buracos negros regulares que podem ser entendidos como um monopolo magnético acoplado à equação de Einstein [108]. É importante ressaltar que embora a métrica na equação (5.32) não tenha singularidade em $r = 0$, ela possui um horizonte de eventos dado pela solução de $f(R_H) = 0$. Por outro lado, a estabilidade de tais soluções precisa ser investigada.

5.1.10 A Lei de Stefan-Boltzmann Gravitacional

Para analisar a Lei Gravitacional de Stefan-Boltzmann, temos o parâmetro de escolha $\alpha = (\beta, 0, 0)$ no formalismo DCT ¹. Então, a transformação de Bogoliubov, como já foi visto na seção 4.4.4, é [109]:

$$v^2(\beta) = \sum_{j_0=1}^{\infty} e^{-\beta\kappa^0 j_0}. \quad (5.34)$$

Por isso, temos que usar a seguinte função de Green:

$$\overline{G}_0^{(11)}(x - x'; \beta) = 2 \sum_{j_0=1}^{\infty} G_0^{(11)}(x - x' - i\beta j_0 n_0), \quad (5.35)$$

¹ Dinâmica do Campo Térmico

onde $n_0 = (1, 0, 0)$. Assim, de (5.30) podemos calcular a energia com $(AB) = (11)$ que é o componente físico na matriz obtida em DCT. Lê:

$$T^{00(11)}(x; \alpha) = \epsilon(r, T) = \lim_{x \rightarrow x'} \sum_{j_0=1}^{\infty} 4\kappa i \left\{ -3 \left[1 + \frac{4M_0}{r \left[1 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^q \right]^{p/q}} \right] \partial'_0 \partial_0 + 5 \partial'_1 \partial_1 \right. \\ \left. + \frac{5}{r^2} \left[1 + \frac{2M_0}{r \left[1 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^q \right]^{p/q}} \right] \left(\partial'_2 \partial_2 + \frac{1}{\text{sen}^2 \theta} \partial'_3 \partial_3 \right) \right\} G_0^{(11)}(x - x' - i\beta j_0 n_0), \quad (5.36)$$

Uma vez que a função zeta de Riemann é definida por $\zeta(4) = \sum_{j_0=1}^{\infty} \frac{1}{j_0^4} = \frac{\pi^4}{90}$, então a energia gravitacional de Stefan-Boltzmann é:

$$\epsilon(r, T) = \frac{32\pi^4}{15} \left\{ 1 + \frac{6M_0}{r \left[1 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^q \right]^{p/q}} \right\} T^4. \quad (5.37)$$

Aqui temos que observar que para o desaparecimento do parâmetro físico do buraco negro regular, M_0 , a energia não vai a zero. Portanto, precisamos regularizar essa expressão exigindo $E(r, T) = \epsilon(r, T) - \frac{32\pi^4 T^4}{15}$. Isso leva a:

$$E(r, T) = \left\{ \frac{192\pi^4 M_0}{15r \left[1 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^q \right]^{p/q}} \right\} T^4, \quad (5.38)$$

que é a energia regularizada.

A primeira lei dos estados termodinâmicos:

$$E + P = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V. \quad (5.39)$$

Então se usarmos a energia regularizada acima, essa equação diferencial de primeira ordem tem a solução $P = \frac{E}{3}$. É muito interessante notar que é igual à equação do estado do fóton. Em termos de temperatura, a pressão é explicitamente:

$$P(r, T) = \left\{ \frac{192\pi^4 M_0}{45r \left[1 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^q \right]^{p/q}} \right\} T^4. \quad (5.40)$$

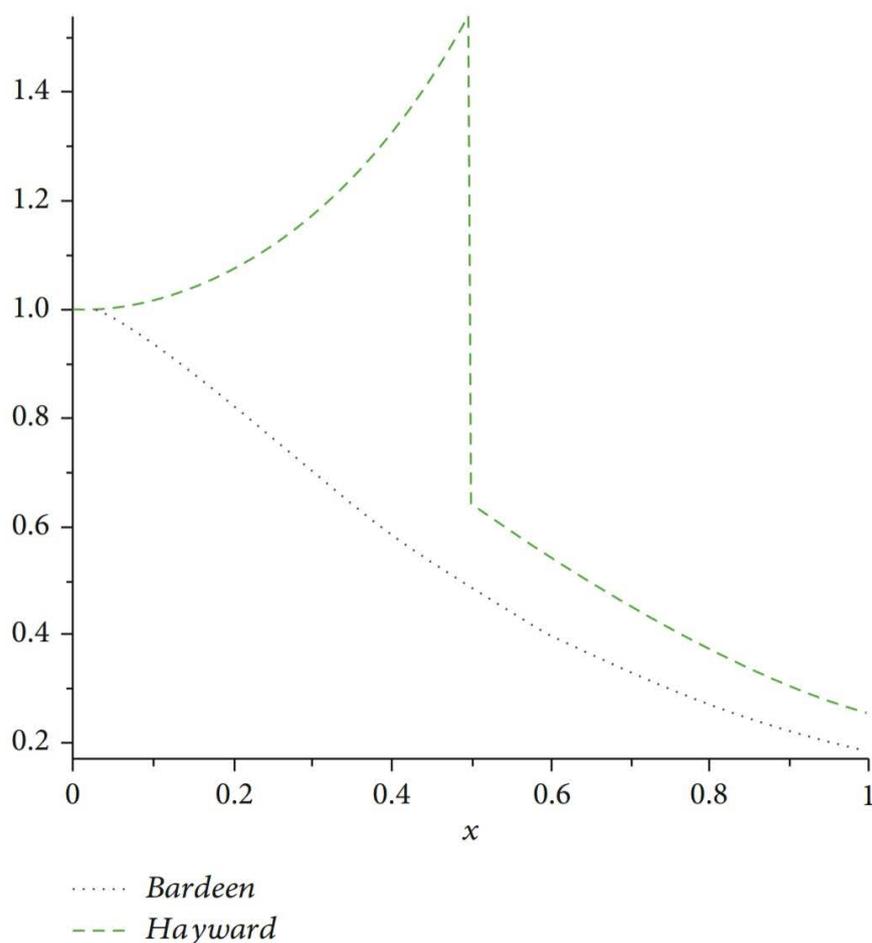
Para calcularmos a entropia gravitacional, recordamos a definição $P = \frac{-\partial F}{\partial V}$, onde F é a energia livre, e $S = \frac{-\partial F}{\partial T}$. Portanto, de $\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T$ a entropia é:

$$S = \left(\frac{3072M_0\pi^5}{45} \right) T^3 \int_0^R \left\{ \frac{r}{\left[1 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^q \right]^{p/q}} \right\} dr, \quad (5.41)$$

que para as soluções de Bardeen e Hayward pode ser representado graficamente pela Figura 35.

Optamos por analisar a dependência em relação a r_0 para uma constante R , em vez da temperatura, cuja dependência é bastante simples. É interessante notar que

FIGURA 35 – Entropia gravitacional. O eixo y é $90S/3072M_0\pi^5R^2T^3$ e $x = r_0/R$



Fonte: S. C. Ulhoa, E. P. Spaniol, R. Gomes, A. F. Santos, A. E. Santana, "On Regular Black Holes at Finite Temperature", *Advances in High Energy Physics*, vol. 2020, Article ID 5712084, 9 pages, 2020. <https://doi.org/10.1155/2020/5712084>

há uma descontinuidade para o ponto em torno de $x = 0,5$ para a solução de Hayward. Esse recurso reflete um limite natural para a escala r_0 ; afinal não se espera que a estrutura geométrica do buraco negro regular coincida com a própria superfície de integração. A hipersuperfície de integração é uma esfera de raio R . Assim, a entropia gravitacional existe em uma porção arbitrária do espaço que é uma abordagem diferente da termodinâmica usual de buracos negros. Normalmente, um buraco negro tem uma entropia escrita em termos de sua área de horizonte de eventos. Aqui, os seguintes princípios são assumidos: i a entropia é uma função de parâmetros macroscópicos. Se os teoremas "sem cabelo" são válidos [110], então a entropia é uma função da massa, momento angular e carga. ii O processo Penrose leva a uma manipulação arbitrária desses parâmetros, desde que a área do horizonte de eventos permaneça inalterado. Isso vale para buracos negros regulares [111]. Isso implica que a entropia deve ser uma função da área. Deve-se notar que a métrica do buraco negro regular tende para a

métrica de Schwarzschild para uma posição distante do horizonte de eventos. Portanto, a entropia tende a ser proporcional à área do horizonte de eventos, portanto, é razoável admitir que $S_H = A_H/4$ para um buraco negro regular, onde $A_H = 4\pi R_H^2$, com R_H sendo a solução de:

$$\frac{2M_0}{R_H \left[1 + \left(\frac{r_0}{R_H} \right)^q \right]^{p/q}} = 1. \quad (5.42)$$

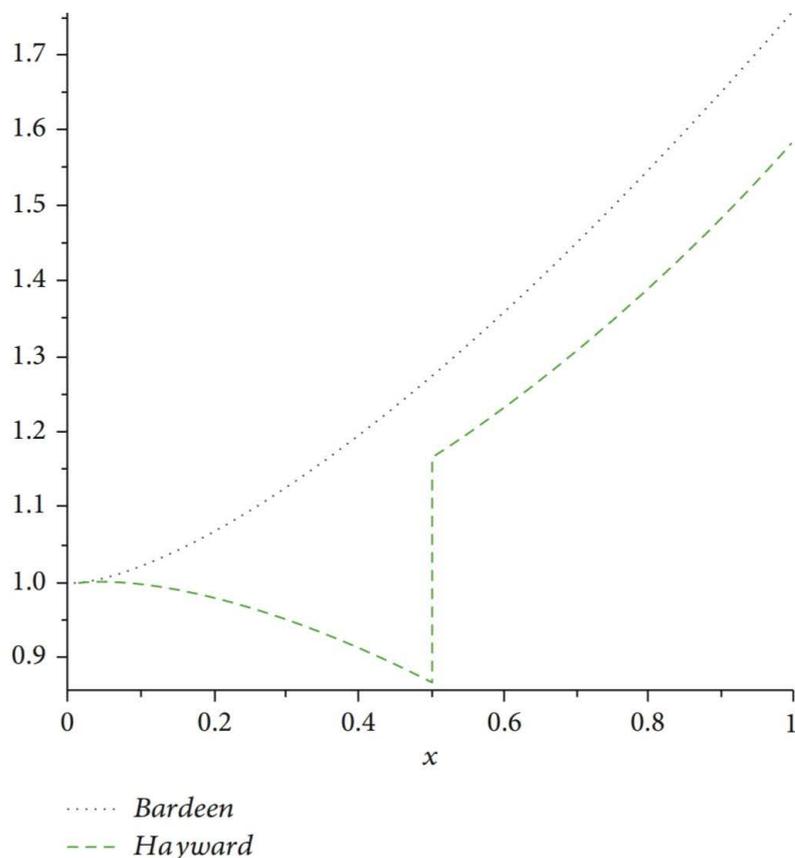
Portanto, a temperatura do horizonte de eventos de uma classe de buracos negros regulares definidos por (5.32) é:

$$T_H = \left[\frac{90R^2}{3072M_0\pi^4 \left\{ \int_0^R (rdr/[1 + (r_0/r^q)]^{p/q}) \right\}} \right]^{1/3}. \quad (5.43)$$

Assim, para as soluções de Bardeen e Hayward, a temperatura do horizonte assume a forma da Figura 36.

Deve-se notar que a mesma descontinuidade de entropia na solução de Hayward também aparece na temperatura. Essa descontinuidade também pode ser interpretada como uma improbabilidade da solução de Hayward para ser uma realidade experimental. Por outro lado, a diferença marcante entre as soluções para r_0 pequeno indica uma escolha imediata quando um experimento para medir a temperatura do horizonte de eventos de um buraco negro regular pode ser realizado. Tal expressão é uma previsão única de DCT aplicada ao TERG.

FIGURA 36 – A temperatura do horizonte acima de $[90R^2/3072M_0\pi^4]^{1/3}$ é mostrado como uma função de $x = r_0/R$.



Fonte: S. C. Ulhoa, E. P. Spaniol, R. Gomes, A. F. Santos, A. E. Santana, "On Regular Black Holes at Finite Temperature", *Advances in High Energy Physics*, vol. 2020, Article ID 5712084, 9 pages, 2020. <https://doi.org/10.1155/2020/5712084>

5.1.11 Efeito Casimir Gravitacional

Na descrição do efeito Casimir é desejado então a escolha,

$$\alpha = (0, i2d, 0, 0),$$

tem que ser feita o que leva a seguir a transformação de Bogoliubov:

$$v^2(d) = \sum_{l_1=1}^{\infty} e^{-i2dk^1 l_1} \quad (5.44)$$

Se a função de Green é dada por:

$$\bar{G}_0^{(11)}(x - x'; d) = 2 \sum_{l_1=1}^{\infty} G_0^{(11)}(x - x' - 2dl_1 r), \quad (5.45)$$

então:

$$T^{00(11)}(d, r) = \epsilon_c(d, r) = \lim_{x \rightarrow x'} \sum_{l_1=1}^{\infty} 4\kappa i \left\{ -3 \left[1 + \frac{4M_0}{r \left[1 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^q \right]^{p/q}} \right] \partial'_0 \partial_0 + 5 \partial'_1 \partial_1 \right. \\ \left. + \frac{5}{r^2} \left[1 + \frac{2M_0}{r \left[1 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^q \right]^{p/q}} \right] \left(\partial'_2 \partial_2 + \frac{1}{\text{sen}^2 \theta} \partial'_3 \partial_3 \right) \right\} G_0^{(11)}(x - x' - 2dl_1 n_1), \quad (5.46)$$

onde $n_1 = (0, 1, 0, 0)$. Portanto, a energia associada ao efeito Casimir gravitacional para buracos negros regulares é:

$$\epsilon_c(d, r) = \sum_{l_1} -\frac{4}{d^4 l_1^4} \left\{ 1 - \frac{2M_0}{r \left[1 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^q \right]^{p/q}} + \left[\frac{2M_0}{r \left[1 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^q \right]^{p/q}} \right] \left(\frac{5dl_1}{r} \right) \right\}, \quad (5.47)$$

que para a aproximação $d \ll r$, torna-se:

$$\epsilon_c(d, r) = -\frac{2\pi^4}{45d^4} \left\{ 1 - \frac{2M_0}{r \left[1 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^q \right]^{p/q}} \right\} \quad (5.48)$$

Deve-se notar que a contribuição do vácuo é negativa e tem uma dependência de d^{-4} . Para levar em consideração apenas a contribuição regular do buraco negro é necessário um procedimento de regularização. Assim, subtraindo a energia do vácuo, temos:

$$E_c(d, r) = \left\{ \frac{4\pi^4 M_0}{45d^4 r \left[1 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^q \right]^{p/q}} \right\}, \quad (5.49)$$

onde $E_c(d, r)$ é a energia Casimir regularizada. É interessante notar que no horizonte de eventos é exatamente menos a energia do vácuo.

Da mesma forma, a pressão de Casimir é:

$$T^{33(11)}(d, r) = \rho_c(d, r) \\ = \lim_{x \rightarrow x'} \sum_{l_1=1}^{\infty} 4\kappa i \left[1 - \frac{2M_0}{r \left[1 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^q \right]^{p/q}} \right] \left\{ 5 \left[1 + \frac{2M_0}{r \left[1 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^q \right]^{p/q}} \right] \partial'_0 \partial_0 \right. \\ \left. - 3 \left[1 - \frac{2M_0}{r \left[1 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^q \right]^{p/q}} \right] \partial'_1 \partial_1 - \frac{5}{r^2} \left(\partial'_2 \partial_2 + \frac{1}{\text{sen}^2 \theta} \partial'_3 \partial_3 \right) \right\} G_0^{(11)} \\ \cdot (x - x' - 2dl_1 n_1). \quad (5.50)$$

Isso produz:

$$\rho_c(d, r) = -\frac{4}{d^4} \sum_{l_1} \frac{1}{l_1^4} \left\{ 3 - \frac{18M_0}{r \left[1 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^q \right]^{p/q}} - \frac{6dl_1 M_0}{r^2 \left[1 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^q \right]^{p/q}} \right\}, \quad (5.51)$$

que, após do limite $\frac{d}{r} \ll 1$ é tomado, lê:

$$\rho_c(d, r) = -\frac{2\pi^4}{15d^4} \left\{ 1 - \frac{6M_0}{r \left[1 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^q \right]^{p/q}} \right\}. \quad (5.52)$$

Novamente, para considerar a contribuição do não-vácuo, é necessário uma pressão regularizada. Assim, a pressão gravitacional de Casimir regularizada é:

$$P_c(d, r) = \left\{ \frac{12\pi^4 M_0}{15d^4 r \left[1 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^q\right]^{p/q}} \right\}$$

Deve-se notar que tanto a energia de Casimir regularizada quanto a pressão são muito pequenas devido à fraca aproximação do campo. Gostaríamos de salientar que, nesse formalismo, o próprio vácuo possui algumas características gravitacionais que explicam porque é necessária uma regularização.

5.1.12 Efeito Casimir Gravitacional a Temperatura Finita

O parâmetro de escolha $\alpha = (\beta, i2d, 0)$ é adequada para descrever o efeito Casimir em temperatura finita. Como consequência seguindo a prescrição da DCT, a transformação de Bogoliubov é dada por:

$$\begin{aligned} v^2(\kappa^0, \kappa^3; \beta, d) &= v^2(\kappa^0; \beta) + v^2(\kappa^1; d) + 2v^2(\kappa^0; \beta)v^2(\kappa^1; d), \\ &= \sum_{j_0=1}^{\infty} e^{-\beta\kappa^0 j_0} + \sum_{l_1=1}^{\infty} e^{-i2d\kappa^1 l_1} + 2 \sum_{j_0, l_1=1}^{\infty} e^{-\beta\kappa^0 j_0 - i2d\kappa^1 l_1}, \end{aligned} \quad (5.53)$$

onde o primeiro termo leva em consideração os efeitos da temperatura, o segundo termo representa apenas o efeito Casimir e o último termo a interação entre ambos. A função de Green é, então:

$$\overline{G}_0^{(11)}(x - x'; \beta, d) = 4 \sum_{j_0, l_1}^{\infty} G_0^{(11)}(x - x' - i\beta j_0 n - 2dl_1 r). \quad (5.54)$$

Como antes, a energia gravitacional de Casimir é obtida da expressão (5.29), que lê:

$$\begin{aligned} \varepsilon_c(\beta, d) &= \lim_{x \rightarrow x'} \sum_{j_0, l_1=1}^{\infty} 4\kappa i \left\{ -3 \left[1 + \frac{4M_0}{r \left[1 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^q\right]^{p/q}} \right] \partial'_0 \partial_0 + 5\partial'_1 \partial_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{5}{r^2} \left[1 + \frac{2M_0}{r \left[1 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^q\right]^{p/q}} \right] \left(\partial'_2 \partial_2 + \frac{1}{\text{sen}^2 \theta} \partial'_3 \partial_3 \right) \right\} \\ &\quad G_0^{(11)}(x - x' - i\beta j_0 n - 2dl_1 r), \end{aligned} \quad (5.55)$$

onde $\varepsilon_c(\beta, d) = \tau^{00(11)}(\beta; d)$. Vale a pena obter a energia Casimir regularizada em temperatura finita que é obtida subtraindo a energia do vácuo de $\varepsilon_c(\beta, d)$, explicitamente

é:

$$\begin{aligned}
E_c(\beta, d) = & -64 \sum_{j_0, l_1=1}^{\infty} \left[\frac{1}{4d^2 l_1^2 \left(1 + \frac{2M_0}{r[1+(\frac{r_0}{r})^q]^{p/q}}\right) + j_0^2 \left(1 - \frac{2M_0}{r[1+(\frac{r_0}{r})^q]^{p/q}}\right) \beta^2} \right]^3 \\
& 4d^2 l_1^2 \left[1 + 12 \left(\frac{M_0}{r[1+(\frac{r_0}{r})^q]^{p/q}} \right)^2 + \left[\frac{2M_0}{r[1+(\frac{r_0}{r})^q]^{p/q}} \right] \left(1 + \frac{5dl_1}{r} \right) \right. \\
& \left. \left(1 + \frac{2M_0}{r[1+(\frac{r_0}{r})^q]^{p/q}} \right) - j_0^2 [3 - 72 \left(\frac{M_0}{r[1+(\frac{r_0}{r})^q]^{p/q}} \right)^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + 30dl_1 \left(\frac{M_0}{r^2 [1+(\frac{r_0}{r})^q]^{p/q}} \right) + 4 \left(\frac{M_0}{r[1+(\frac{r_0}{r})^q]^{p/q}} \right)^2 \left(6 + \frac{5dl_1}{r} \right) \right] \beta^2 \\
& + 64 \sum_{j_0, l_1=1}^{\infty} \frac{4d^2 l_1^2 - 3j_0^2 \beta^2}{(4d^2 l_1^2 + j_0^2 \beta^2)^3}
\end{aligned} \tag{5.56}$$

onde $E_c(\beta, d)$ é a expressão regularizada. Da mesma forma a pressão gravitacional de Casimir, $\rho_c(\beta, d)$, a temperatura finita é dada por:

$$\begin{aligned}
\rho_c(\beta, d) = & \lim_{x \rightarrow x'} \sum_{j_0, l_1=1} 4\kappa i \left[1 - \frac{2M_0}{r[1+(\frac{r_0}{r})^q]^{p/q}} \right] \\
& \left\{ 5 \left[1 + \frac{2M_0}{r[1+(\frac{r_0}{r})^q]^{p/q}} \right] \partial'_0 \partial_0 - 3 \left[1 - \frac{2M_0}{r[1+(\frac{r_0}{r})^q]^{p/q}} \right] \partial'_1 \partial_1 \right. \\
& \left. - \frac{5}{r^2} \left(\partial'_2 \partial_2 + \frac{1}{\text{sen}^2 \theta} \partial'_3 \partial_3 \right) \right\} \\
& G_0^{(11)}(x - x' - i\beta j_0 n - 2dl_1 r),
\end{aligned} \tag{5.57}$$

onde $\rho_c(\beta, d) = \tau^{11(11)}(\beta; d)$. Como a energia regularizada, a pressão de Casimir regularizada, é:

$$\begin{aligned}
P_c(\beta, d) = & -64 \sum_{j_0, l_1=1}^{\infty} \left[\frac{1}{4d^2 l_1^2 \left(1 + \frac{2M_0}{r[1+(\frac{r_0}{r})^q]^{p/q}}\right) + j_0^2 \left(1 - \frac{2M_0}{r[1+(\frac{r_0}{r})^q]^{p/q}}\right) \beta^2} \right]^3 \{4d^2 l_1^2 \\
& \left[3 + 8 \left(\frac{M_0}{r[1+(\frac{r_0}{r})^q]^{p/q}} \right)^2 - 6dl_1 \left(\frac{M_0}{r^2 [1+(\frac{r_0}{r})^q]^{p/q}} \right) \left(1 - \left(\frac{2M_0}{r[1+(\frac{r_0}{r})^q]^{p/q}} \right) \right) \right] \\
& \left[1 - \left(\frac{2M_0}{r[1+(\frac{r_0}{r})^q]^{p/q}} \right)^2 \right] + j_0^2 \left[24 \left(\frac{M}{r} \right)^2 + 6dl_1 \left(\frac{M}{r^2} \right) \left(3 + \left(\frac{2M}{r} \right) \right) - 1 \right] \\
& \left[1 - \left(\frac{2M}{r} \right)^2 \right] \beta^2 \} + 64 \sum_{j_0, l_1=1}^{\infty} \frac{4d^2 l_1^2 - j_0^2 \beta^2}{(4d^2 l_1^2 + j_0^2 \beta^2)^3},
\end{aligned} \tag{5.58}$$

onde

$$P_c(\beta, d) = \rho_c(\beta, d) + 64 \sum_{j_0, l_1=1}^{\infty} \frac{4d^2 l_1^2 - j_0^2 \beta^2}{(4d^2 l_1^2 + j_0^2 \beta^2)^3}$$

As expressões regularizadas levam em consideração apenas as contribuições dos buracos negros regulares. Eles são pequenas correções para as quantidades de vácuo que tem o limite conhecido para $\beta \rightarrow \infty$. Deve-se notar que o efeito gravitacional de Casimir é uma ideia muito controversa devido ao problema de energia na relatividade geral. Na verdade, a falta de um tensor energia-momento gravitacional nesta abordagem impede que se analise tal efeito. Por outro lado, no âmbito do TERG, o efeito Casimir gravitacional pode ser explorado.

6 CONCLUSÃO

Os buracos negros regulares foram estudados em temperatura finita e os efeitos da temperatura são introduzidos usando o formalismo DCT. A DCT é uma ferramenta que nos permitiu analisar os efeitos de temperatura além da dependência do tempo. Usando o teleparalelismo equivalente à Relatividade Geral [112], a termodinâmica gravitacional para os buracos negros regulares foi investigada nesta tese. Esta teoria gravitacional tem um tensor energia-momento bem definido que permite calcular a lei de Stefan-Boltzmann gravitacional e o Efeito Casimir associados aos buracos negros regulares. Uma lei de Stefan-Boltzmann gravitacional regularizada para buraco negro regular foi obtida. Usando a primeira Lei da Termodinâmica conseguimos determinar a pressão gravitacional e a entropia gravitacional. Descobrimos que a relação entre a energia gravitacional e pressão é igual a relação que descreve o fóton.

A entropia gravitacional obtida nesta tese existe em uma porção arbitrária do espaço, então, é uma abordagem diferente da termodinâmica usual de buracos negros, uma vez que o buraco negro usual tem uma entropia fixa dada em termos de sua área do horizonte de eventos. Além disso, a temperatura do horizonte de eventos para buracos negros regulares foi calculada, e a energia de Casimir gravitacional e a pressão de Casimir em temperatura zero e finita para esta classe de buracos negros regulares foram determinadas. É interessante notar que tais resultados podem ser verificados experimentalmente, no CERN, na parte do experimento LHCb, onde são feitos experimentos de tudo o que aconteceu após o Big Bang, o que vai ser feito no pós-doutorado; uma vez confirmado, sugere que o tensor de torção é a quantidade responsável pela gravitação ao invés da curvatura como a principal abordagem para o campo gravitacional.

Como perspectivas futuras no pós-doutorado, vejo a necessidade de confirmação experimental do que foi obtido teoricamente nesta tese, e também com uma possível invenção de um novo tipo de laboratório sem utilização de humanos no espaço, onde serão mini robôs do tamanho de peixe e se comportaram como um "cardume", eles irão "nadar" no Universo unidos indo para vários lugares, seja supernovas ou até mesmo próximo à buracos negros, a sua base ficará próxima a Terra e poderá ser controlada a distância, mais detalhes serão feitos com o passar dos anos, esta é uma idéia inicial e verei se será possível tal manobra física. Além disso, também variações do potencial químico (μ) para ver o que será encontrado, ou seja, muitas possibilidades são possíveis para este estudo.

REFERÊNCIAS

- [1] SCHWARZSCHILD, K., **Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie**, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, 7: 189–196.
- [2] DROSTE, J., **The field of a single centre in Einstein's theory of gravitation, and the motion of a particle in that field**, Communicated by Prof. H.A. Lorentz, p 197, 1917.
- [3] KOX, A. J., **General Relativity in the Netherlands: 1915–1920**». In: Eisenstaedt, Kox. *Studies in the history of general relativity*, Birkhäuser, 1992[S.l.: s.n.] ISBN 978-0-8176-3479-7.
- [4] T'HOOFT, G., **Introduction of the Theory of Black Holes**, Spinoza Institute, The Netherlands, 2009.
- [5] PENROSE, R., **The question of cosmic censorship**, *Journal of Astrophysics and Astronomy*, 20, n 3-4, pp.233-248, 1999.
- [6] D'INVERNO, R., **Introduction Einstein's Relativity**, Claredon Press, Oxford, 1992.
- [7] MISNER, C.W.; THORNE, K.S., WHEELER, J.A., **Gravitation**, Freeman, San Francisco, 1973.
- [8] WALD, R.M., **General Relativity**, The University of Chicago, 1984.
- [9] WEINBERG, S., **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity**, 1st Edition, Wiley, 1972.
- [10] WEITZENBÖCK, R., **Invariant Theorie**, Nordhoff, Groningen, 1923.
- [11] MØLLER, C., **Tetrad Fields and Conservation Laws in General Relativity**, *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi"*, Academic Press, London, 1962.
- [12] HEHL, F.W.; von der Heyde, P; Kerlick, G.D.; Nester, J.M., **General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects**, *Rev.Mod. Phys.*, 48, 393, 1976.
- [13] HEHL, F.W.; McCREA, J.D.; MIELKE, E.W.; NE'EMAN, Y., **Metric-affine gauge theory of gravity: field equations, Noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance**, *Phys.Rep.*, 258,1, 1995.

- [14] SCHÜCKING, E.L.; SUROWITZ, E.J., **Einstein's Apple: Homogeneous Einstein Fields**, [<http://physics.as.nyu.edu/object/EngelbertSchucking.html>]; **Einstein's Apple: His First Principle of Equivalence**, [arXiv:gr-qc/0703149], 2012.
- [15] HEHL, F.W.; LEMKE, J.; MIELKE, **Two Lectures on Fermions and Gravity**, in *Geometry and Theoretical Physics*, edited by J.Debrus and A.C. Hirshfeld, Springer, Berlin Heidelberg, 1991.
- [16] MALUF, J.W.; FARIA, F.F., **On the construction of Fermi-Walker transported frame**, *Ann.Phys.*, 17,326, 2008.
- [17] MALUF, J.W.; VEIGA, M.V.O.; DA ROCHA-NETO, J.F., **Regularized expression for the gravitational energy-momentum in teleparallel gravity and the principle of equivalence**, *Gen. Relativ. Gravit.*, 39, 227, 2007.
- [18] MASHHOON, B.; MUENCH, U., **Length measurement in accelerated systems**, *Ann.Phys.*, 11, 532, Berlin, 2002.
- [19] MASHHOON, B., **Vacuum electrodynamics of accelerated systems: Nonlocal Maxwell's equations**, *Ann.Phys.*, 12,586, Leipzig, 2003.
- [20] MALUF, J.W., **The gravitational energy-momentum tensor and the gravitational pressure**, *Ann.Phys.*, 14, 723, Berlin, 2005.
- [21] EGUCHI, T.; GILKEY, P.B.; HANSO, A.J., **Gravitation, gauge theories and differential geometry**, *Phys.Rev.*, 66, 213, 1980.
- [22] MALUF, J.W., **Hamiltonian formulation of the teleparallel description of general relativity**, *J.Math.Phys.*, 35, 335, 1994.
- [23] CHO, Y.M., **Einstein Lagrangian as the translational Yang-Mills Lagrangian**, *Phys.Rev.D*, 14, 2521, 1976.
- [24] MALUF, J.W., **Dirac spinor fields in the teleparallel gravity: comment on 'Metric-affine approach to teleparallel gravity**, *Phys.Rev.D*, 67,108501, 2003.
- [25] MALUF, J.W.; DA ROCHA-NETO, J.F.; **General relativity on a null surface: hamiltonian formulation in the teleparallel geometry**, *Gen.Relativ.Gravit.*, 31, 173, 1999.
- [26] MALUF, J.W.; DA ROCHA-NETO, J.F.; TORÍBIO, T.M.L.; Castello-Branco, K.H., **Energy and angular momentum of the gravitational field in the teleparallel geometry**, *Phys.Rev.D*, 65, 124001, 2002.

- [27] MALUF, J.W.; ULHOA, S.C.; DA ROCHA-NETO, J.F., **Gravitational pressure on event horizons and thermodynamics in the teleparallel framework**, Phys.Rev. D, 85, 044050, 2012.
- [28] ALESSIO, F.; BARNICH, G.; BONTE, M., **Gravitons in a Casimir box**, arXiv:2011.14432v2[hep-th], 2021.
- [29] FERRARO, R.; FIORINI, F., **Modified teleparallel gravity: Inflation without an inflaton**, Phys.Rev. D, 75, 084031, 2007.
- [30] FERRARO, R.; FIORINI, F., **Born-Infeld gravity in Weitzenböck spacetime**, Phys.Rev. D, 78, 124019, 2008.
- [31] BÖMER, C.G.; MUSSA, A.; TAMANINI, N., **Existence of relativistic stars in $f(T)$ gravity**, Class. Quantum Grav., 28, 245020, 2011.
- [32] JAMIL, M.; MOMENI, D.; MURZAKULOV, T., **Wormholes in a viable $f(T)$ gravity**, Eur. Phys.J.C., 73, 2267, 2013.
- [33] HINOJOSA, V., **Tese: Modos cuasi-normales de un agujero negro regular con carga**, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Pachuca Hgo., 2018.
- [34] ARNOWITT, R.; DESER, S.; MISNER, C.W., in **Gravitation: an Introduction to Current Research**, editora L. Witten, Willey, New York, 1962.
- [35] MALUF, J.W.; DA ROCHA-NETO, J.F., **Hamiltonian formulation of general relativity in the teleparallel geometry**, Phys.Rev.D, 64, 084104, 2001.
- [36] DA ROCHA-NETO, J.F.; MALUF, J.W.; ULHOA, S.C., **Hamiltonian formulation of unimodular gravity in the teleparallel geometry**, Phys.Rev. D, 82, 124035, 2010.
- [37] BABAK, S.B.; GRISHCHUK, L.P., **Energy-momentum tensor for the gravitational field**, Phys.Rev.D, 61, 024038, 1999.
- [38] REGGE, T.; TEITELBOIM, C., **Role of surface integrals in the Hamiltonian formulation of general relativity** Ann.Phys., 88, 286, New York, 1974.
- [39] KUCHAR, K.V., **A Bubble-Time Canonical Formalism for Geometrodynamics**, J.Math.Phys., 13, 768, 1972.
- [40] KUCHAR, K.V., **Time and Interpretations of Quantum Gravity**, in the Proceedings of the 4th Canadian Conference on General Relativity and Relativistic Astrophysics, edited by G. Kunstatter, D.E. Vincent and J.G. Williams, World Scientific, Singapore, 1992.

- [41] LANCZOS, C., **The Variational Principles of Mechanics**, Dover, New York, 1986.
- [42] BROWN, J.D.; YORK, J.W., **Jacobi's action and the recovery of time in general relativity**, Phys.Rev.D, 40, 3312, 1989.
- [43] MALUF, J.W.; ULHOA, S.C.; FARIA, F.F., DA ROCHA-NETO, J.F., **The angular momentum of the gravitational field and the Poincare group**, Class. Quantum Grav., 23, 6245, 2006.
- [44] MALUF, J.W., **Localization of energy in General Relativity**, J.Math. Phys., 36, 4242, 1995.
- [45] ULHOA, S.C.; DA ROCHA-NETO, J.F.; MALUF, J.W., **The gravitational energy problem for cosmological models in teleparallel gravity**, Int.J.Mod. Phys. D, 19, 1925, 2010.
- [46] MALUF, J.W.; FARIA, F.F.; ULHOA, S.C., **On reference frames in spacetime and gravitational energy in freely falling frames**, Class.Quantum Grav., 24, 2743, 2007.
- [47] MALUF, J.W.; ULHOA, S.C., **On the gravitational angular momentum of rotating sources**, Gen.Relativ. Gravit., 41, 1233, 2009.
- [48] HAYASHI, K.; SHIRAFUJI, T., **New general relativity**, Phys.Rev.D, 19, 3524, 1979.
- [49] HAYASHI, K.; SHIRAFUJI, T., **Addendum to "New general relativity"**, Phys.Rev.D, 24, 3312, 1981.
- [50] OBUKHOV, Y.N.; PEREIRA, J.G., **Metric-affine approach to teleparallel gravity**, Phys.Rev. D, 67, 044016, 2003.
- [51] TISZA, L., **The Thermodynamics of phase equilibrium**, Ann.Phys., 13, 1, New York, 1961.
- [52] TISZA, L., **Generalized Thermodynamics**, MIT, Press, Cambridge, 1966.
- [53] CALLEN, H.B., **Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics**, J.Wiley and Sons, New York, 1985.
- [54] WRESZINSKI, W.F., **Termodinâmica**, Edusp, São Paulo, 2002.
- [55] WIENER, N., **Generalized harmonic analysis**, Acta Math., 55, 117, 1930.
- [56] WIENER, N., **Differential space**, J. Math, and Phys. 2, 131-174, 1923.
- [57] FEYNMAN, R.P., **Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics**, Rev.Mod.Phys., 20, 367, 1948.

- [58] FEYNMAN, R.P.; HIBBS, A.R., **Quantum Mechanics and Path Integrals**, McGraw-Hill, New York, 1965.
- [59] DIRAC, P.A.M., **The Lagrangian in Quantum Mechanics**, Phys.Z. der Sowjeturin, 3, 64, 1933.
- [60] HEISENBERG, W.; EULER, H., **Consequences of Dirac Theory of the Positron**, Z.Phys., 98,714, 1936.
- [61] SCHWINGER, J., **On the Green's Functions of Quantized Fields**, Proc.Natl.Acad.Sci., 37, 452, USA, 1951.
- [62] SCHWINGER, J., **On Gauge Invariance and Vacuum Polarization**, Phys.Rev., 82, 664, 1951.
- [63] GOMES, M.O.C., **Teoria Quântica dos Campos**, Edusp, São Paulo, 2002.
- [64] PESKIN, M.E.; SCHROEDER, D.V., **An Introduction to Quantum Field Theory**, Addison-Wesley, New York, 1995.
- [65] RAMOND, P., **Field Theory: A Modern Primer**, Benjamin-Cummings, N.York, 1981.
- [66] RYDER, L.H., **Quantum Field Theory**, Cambridge Press, N.York, 1991.
- [67] SWANSON, M.S., **Path Integrals and Quantum Process**, Academic Press, New York, 1992.
- [68] KUBO, R., **Statistical-Mechanical Theory of Irreversible Processes. I. General Theory and Simple Applications to Magnetic and Conduction Problems**, J.Phys.Soc., 12, 570, Japan, 1957.
- [69] MARTIN, P.C.; SCHWINGER, J., **Theory of Many-Particle Systems. I**, Phys.Rev., 115, 1342, 1959.
- [70] TAKAHASHI, Y.; UMEZAWA, H., **Coll.Phenomena**, 2, 55, 1975 (Reprinted in Int.J.Mod.Phys. 10, 1755, 1996).
- [71] UMEZAWA, H.; MATSUMOTO, H.; TACHIKI, M., **Thermofield Dynamics and Condensed States**, North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [72] SANTANA, A.E.; KHANNA, F.C., **Lie groups and thermal field theory**, Phys.Lett.A, 203, 68, 1995.
- [73] SANTANA, A.E.; MALBOUISSON, J.M.C.; MALBOUISSON, A.P.C.; KHANNA, F.C., **Thermal Field Theory: Algebraic Aspects and Applications to confined**

systems, in Non-Linear Dynamics and Fundamental Interactions, F.Khanna and D. Matrasubov, Kluver/Springer, New York, 2005.

- [74] KHANNA, F. C.; MALBOUISSON, A.P.C.; MALBOUISSON, J.M.C.; SANTANA, A. E., **Thermo-algebras and Path Integrals**, Annals of Physics, 324, p.1931-1952, 2009.
- [75] KHANNA, F. C.; MALBOUISSON, A.P.C.; MALBOUISSON, J.M.C.; Santana, A. E., **Quantum fields in toroidal topology**, Annals of Physics, 326, 2634, 2011.
- [76] VALANTIN, J.G., **Comments on the theory of superconductivity**, Il Nuovo Cimento, 7, 843-857, 1958.
- [77] BOGOLJUBOV, N.N., **On a new method in the theory of superconductivity**, Il Nuovo Cimento, 7, 794-805, 1958.
- [78] TAKAHASHI, Y.; UMEZAWA, H., **Thermo Field Dynamics**, Int.J.Mod.Phys.B, 10, 1755, 1996.
- [79] RAKHIMOV, A.; KHANNA, F.C., **Finite temperature amplitudes and reaction rates in thermofield dynamics**, Phys.Rev. C, 64, 064907, 2001.
- [80] MATSUBARA, T., **A New Approach to Quantum-Statistical Mechanics**, Prog.Theor.Phys., 14, 351, 1955.
- [81] JEON, S.; ELLIS, P.J., **Multiple scattering expansion of the self-energy at finite temperature**, Phys.Rev.D, 58, 04513, 1998.
- [82] BRANDT, F.T.; DAS, A.; FRENKEL, J., **Retarded thermal Green's functions and forward scattering amplitudes at two loops**, Phys.Rev.D, 60, 105008, 1999.
- [83] NIEGAWA, A., **Finite-temperature reaction-rate formula: Finite-volume system, detailed balance, $T \rightarrow 0$ limit, and cutting rules**, Phys.Rev. D, 57, 1379, 1998.
- [84] DYSON, F.J., **The S Matrix in Quantum Electrodynamics**, Phys.Rev.75, 1736, 1949.
- [85] CUTKOSKY, F., **Singularities and Discontinuities of Feynman Amplitudes**, J.Math.Phys., 1, 429, 1960.
- [86] DA SILVA, J.C.; KHANNA, F.C.; MATOS NETO, A.; SANTANA, A.E., **Generalized Bogoliubov transformation for confined fields: Applications for the Casimir effect**, Phys.Rev. A, 66, 052101, 2002.

- [87] MALBOUISSON, A.P.C.; MALBOUISSON, J.M.C., **Boundary dependence of the coupling constant and the mass in the vector N-component $(\lambda\varphi^4)_D$ theory**, J.Phys.A: Math.Gen., 35, 2263, 2002.
- [88] MALBOUISSON, A.P.C.; MALBOUISSON, J.M.C.; Santana, A.E., **Spontaneous Symmetry Breaking in Compactified $\lambda\phi^4$ Theory**, Nucl. Phys.B, 631, 83, 2002.
- [89] SANTANA, A.E.; KHANNA, F.C.; CHU, H.; CHANG, Y., **Thermal Lie Groups, Classical Mechanics and THERMOFIELD Dynamics**, Ann.Phys., 246, 481, New York, 1996.
- [90] BIRRELL, N.D.; FORD, L.H., **Renormalization of self-interacting scalar field theories in a nonsimply connected spacetime**, Phys.Rev.D, 22, 330, 1980.
- [91] FORD, L.H.; SVAITER, N.F., **One-loop renormalization of a self-interacting scalar field in nonsimply connected spacetimes**, Phys.Rev.D, 51, 6981, 1995.
- [92] CASIMIR, H.B.G., **On the Attraction Between Two Perfectly Conducting Plates**, Proc.K.Ned.Akad.Wet., 51, 793, 1948.
- [93] MILONNI, P.W., **The Quantum Vacuum**, Academic Press, Boston, 1993.
- [94] PLUNIEM, G.; MÜELLER, B.; GREINER, W., **The Casimir effect**, Phys.Rep., 134, 87, 1986.
- [95] DOLAN, L.; JACKIW, R., **Symmetry behavior at finite temperature**, Phys.Rev.D, 9, 3320, 1974.
- [96] KADANOFF, L.P.; BAYM, G., **Quantum Statistical Mechanics**, Benjamin, New York, 1962.
- [97] BARDEEN, J.M., **Non-singular general relativistic gravitational collapse**, in Proceedings of International Conference, GR5, p.174, Tbilisi, 1968.
- [98] SCHWARZSCHILD, K., **On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory**, Preuß. Akad.Wiss., 1, 688, 189, 1916.
- [99] ABBOTT, B.D.; Abbott, R.; Abernathy, M.R.; Acernese; et.al., **Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger**, Phys.Rev.Lett. 116, 061102 LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, 2016.
- [100] REISSNE, H., **Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie**, Annalen der Physik, 50, 106, 1916.
- [101] NORDSTRÖM, G., **On the Energy of the Gravitation field in Einstein's Theory**, Proc. Kon. Ned. Akad.Wet., 20, 1238, 1918.

- [102] KERR, R.P., **Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics**, Phys.Rev.Lett., 11, 237, 1963.
- [103] SAKHAROV, A.D., **The Initial Stage of an Expanding Universe and the Appearance of a Nonuniform Distribution of Matter**, Soc.Phys. JETP, 22, 241, 1966.
- [104] NEVES, J., **Relatividade bem comportada: buracos negros regulares**, Revista Brasileira de Ensino de Física, 39, n 3, e3303, 2017.
- [105] ABBAS, G.; Sabiullah, U., **Geodesic study or regular Hayward black hole**, Astrophys.Space. Sci, 352:769-774, 2014.
- [106] HAYWARD, S.A., **Formation and evaporation of nonsingular black holes**, Phys.Rev.Lett., 96, 031103, January, 2006.
- [107] NEVES, J.C.; SAA, A., **Regular rotating black holes and the weak energy condition**, Physics Letters B, 734, pp. 44-48, 2014.
- [108] AYÓN-BEATO, E; GARCÍA, A., **The Bardeen model as a non-linear magnetic monopole**, Physics Letters B, 493, n 1-2, pp.149 - 152, 2000.
- [109] S. C. ULHOA; E. P. SPANIOL; R. GOMES; A. F. SANTOS; A. E. SANTANA, **"On Regular Black Holes at Finite Temperature"**, Advances in High Energy Physics, vol. 2020, Article ID 5712084, 9 pages, 2020. <https://doi.org/10.1155/2020/5712084>
- [110] CARTER, B., **Axisymmetric black hole has only two degrees of freedom**, Physical Review Letters, 26, n 6, pp.331-333, 1971.
- [111] TOSHMATOV, B.; ABDUJABBAROV, A.; AHMEDOV, B.; STUCHILK, Z., **Particle motion and Penrose processes around rotating regular black hole**, Astrophysics and Space Science, 357, n 1, p 41, 2015.
- [112] MALUF, J., **The teleparallel equivalent of general relativity**, Instituto de Física, Universidade de Brasília, arXiv: 1303.3897v1[gr-qc], 2013.