

Universidade de Brasília  
Instituto de Física

Tese de Doutorado

**Comportamento particular e universal para a dinâmica de  
crescimento: De autômatos celulares à equação  
Kardar-Parisi-Zhang (KPZ)**

Waldenor Ramone Juvito Gomes

Brasília, Dezembro de 2020

**Comportamento particular e universal para a  
dinâmica de crescimento: De autômatos celulares  
à equação Kardar-Parisi-Zhang (KPZ)**

Waldenor Ramone Juvito Gomes

Orientador:

Prof. Dr. Fernando Albuquerque de Oliveira

Co-orientador:

Prof. Dr. André Luiz Almeida Penna

Brasília, Dezembro de 2020

## Agradecimentos

Durante muito tempo desejei este momento e nos últimos anos venho me esforçando para que o sonho se torne realidade, mas nenhum objetivo é alcançado sozinho e cheguei até aqui graças a muitos que estiveram ao meu lado e me ajudaram, eu agradeço:

Primeiramente à minha mãe, Maria Francelina Juvito Gomes, que infelizmente não está presente comigo, mas carregou até hoje tudo que ela me ensinou e ao meu pai, Damião Gomes Cazé, que se esforçou e me deu chances de estudar e realizar este objetivo. Agradeço à todos os meus professores que me ensinaram e cuja profissão sigo hoje com orgulho.

À minha amada esposa, e eterna namorada, Kamila Franco Paiva Gomes, que durante estes anos esteve ao meu lado me apoiando, me suportando e me acalmando quando necessário. As minhas conquistas consegui com ela ao meu lado, e principalmente ao nosso maior projeto que está caminho. Não adianta ter o conhecimento se não há para quem passá-lo e nós teremos a quem ensinar.

Ao Prof. Dr. Fernando Albuquerque de Oliveira, meu orientador, que me recebeu no grupo e me instruiu desde o mestrado, me ensinando e dedicando seu tempo ao nosso trabalho, de um professor que conheci na graduação levo para vida um grande amigo que ainda tem muito mais a me ensinar. Aos professores Dr. Ismael V. L. Costa, Dr. André L.A. Penna, Dr. Marco Aurélio Alves Barbosa, que pelas discursões durante o Mestrado e o Doutorado puderam tornar possível este trabalho.

Ao grupo, com grandes amigos Márcio, Evandro, Washington, Felipe, Mirian, Gláucia que me ensinaram muito durante os trabalhos e pelos momentos de diversão, e não podendo esquecer destes momentos que agradeço aos muitos amigos que fiz na UnB.

Agradeço à CAPES e à UnB por todo o apoio financeiro.

---

## Resumo

Neste trabalho desenvolvemos um método para obter a equação de Kardar-Parisi-Zhang (**KPZ**) a partir do modelo de corrosão (**Etching Model**) desenvolvido por Mello et al. O modelo é um autômato celular cujas regras de remoção de átomos simula a corrosão de um cristal por um ácido. Partindo dessas regras atomísticas, consideramos os efeitos coletivos e definimos uma função de probabilidade de diferenças de alturas,  $P(\eta, t)$ , onde  $\eta = h_i - h_j$  é a diferença de altura entre o sítio  $i$  e o seu vizinho  $j$  e  $t$  é o tempo. Deste modo  $P(\eta, t)$  representa bem a dinâmica do processo que é dada pela interação entre os primeiros vizinhos. Seguindo essa dinâmica observamos que a probabilidade torna-se rapidamente estacionária, antes de atingirmos a região de não-linearidade característica de KPZ. Deste modo podemos tratá-la como simplesmente  $P(\eta)$ . Finalmente, passando ao limite contínuo mostramos que o modelo de corrosão (Etching Model) leva à equação KPZ.

Deste modo confirmamos que o modelo realmente pertence à classe de universalidade KPZ. Além disso, mostramos que os coeficientes da equação KPZ podem ser obtidos em função de  $P(\eta)$ , deste modo obtemos um processo autoconsistente. Isto nos leva a um método para obter o expoente de rugosidade  $\alpha$ .

Finalmente, aplicamos o mesmo método para estudar o modelo Single-Step (**SS**). Em  $1+1$  dimensão obtivemos o resultado exato. Para  $d+1$  dimensões comparamos o modelo de corrosão (**Etching Model**) com o modelo Single-Step. Nossos resultados mostram as diferenças e semelhanças entre esses modelos.

**Palavras-Chaves:** Modelo de corrosão, Modelo Single-Step, dinâmica de crescimento, equação KPZ, autômato celular, função densidade de probabilidade.

# Abstract

In this work we develop a method to obtain the Kardar-Parisi-Zhang equation (**KPZ**) from the Etching Model developed by Mello et al. The model is a cellular automaton whose atom removal rules simulate the corrosion of a crystal by an acid. From these atomistic rules, we consider the collective effects and define a function of probability of differences in heights,  $P(\eta, t)$ , where  $\eta = h_i - h_j$  is the height difference between the site  $i$  and its neighbour  $j$  and  $t$  is time. Thus  $P(\eta, t)$  represents very well the dynamics of the process that is given by the interaction between the first neighbors. Following this dynamic, we observed that the probability quickly becomes stationary, before we reach the region of KPZ characteristic nonlinearity. In this way we can treat it as simply  $P(\eta)$ . Finally, considering the continuous limit, we show that the Etching Model leads to the KPZ equation.

In this way we confirm that the model really belongs to the KPZ universality class. Furthermore, we show that the coefficients of the KPZ equation can be obtained as a function of  $P(\eta)$ , this way we get a self-consistent process. This leads us to a method to obtain the roughness exponent  $\alpha$ .

Finally, we apply the same method to study the Single-Step model (**SS**). In,  $1 + 1$  dimension we got the exact result. For  $d + 1$  dimensions we compare the Etching Model with the Single-Step model. Our results show the differences and similarities between these models.

**Key words:** Etching model, SS model, growth dynamics, KPZ equation, cellular automata, probability density function.

# Sumário

Sumário	vi
Lista de Figuras	x
Lista de Abreviações	xi
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Conceitos básicos e a Equação de Edwards-Wilkinson</b>	<b>4</b>
2.1 Altura média e Rugosidade . . . . .	6
2.1.1 Altura média . . . . .	7
2.1.2 Rugosidade . . . . .	8
2.2 Leis de escalas e expoentes de escala . . . . .	9
2.3 Modelos de crescimento . . . . .	11
2.3.1 Deposição Aleatória- DA . . . . .	12
2.3.2 Deposição Aleatória com Relaxação Superficial - DARS . . . . .	14
2.3.3 Deposição Balística-DB . . . . .	14
2.4 Teoria linear para dinâmica de crescimento . . . . .	16
2.5 Princípios de simetria . . . . .	18
2.5.1 Invariância sob translação temporal . . . . .	18
2.5.2 Invariância sob translação ao longo na direção do crescimento	18
2.5.3 Invariância sob translação na direção perpendicular à direção do crescimento . . . . .	18

---

2.5.4	Rotação da direção do crescimento . . . . .	18
2.5.5	Simetria Up/Down para a altura . . . . .	19
2.6	A equação de Edwards-Wilkinson . . . . .	19
2.6.1	Solução da equação de EW . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Equação Kardar-Parisi-Zhang (KPZ)</b>	<b>23</b>
3.1	Construção da equação KPZ . . . . .	24
3.2	Expoentes de escala e renormalização . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Equivalência entre KPZ e o modelo de corrosão</b>	<b>29</b>
4.1	Modelo de corrosão . . . . .	29
4.2	Dinâmica do modelo de corrosão . . . . .	33
4.3	Probabilidade da diferença das alturas . . . . .	34
4.3.1	Conexão entre o modelo de corrosão e a equação KPZ . . . . .	37
4.3.2	$P(\eta)$ para DARS . . . . .	42
4.4	Expoente da rugosidade $\alpha$ . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Modelo de corrosão e o Modelo SS</b>	<b>48</b>
5.1	O modelo SS . . . . .	48
5.1.1	A conexão entre o modelo de corrosão e o modelo SS . . . . .	50
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>55</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>57</b>

# Lista de Figuras

2.1	Incêndio na Esplanada dos Ministérios. Fonte: CORREIO BRAZILIENSE . . . . .	5
2.2	Crescimento de fungos (levedura) para produção de cerveja. . . . .	5
2.3	Representação do esquema de um modelo discreto. . . . .	6
2.4	A rugosidade $w(t)$ como função do tempo para o modelo de corrosão de 1+1 dimensão. O instante $t_{sat}$ divide a curva em dois regimes de tempo: uma região de crescimento $t \ll t_{sat}$ e uma região de saturação $t \gg t_{sat}$ . . . . .	9
2.5	Deposição Aleatória. As partículas agregam (preta) ou são tiradas (branca) da superfície aleatoriamente. . . . .	12
2.6	Deposição Aleatória com Relaxação Superficial: a partícula chega a superfície, mas adere no sítio de menor altura. . . . .	14
2.7	Deposição Balística: a partícula adere no primeiro sítio que encontra na superfície. . . . .	15
2.8	Formação de superfície entre dois meios. . . . .	17
3.1	A origem do termo não linear na equação KPZ. . . . .	24
3.2	O fluxo da constante de acoplamento para $d = 1$ . . . . .	28

- 4.1 O mecanismo de corrosão em uma dimensão: **(a)** regra 1 o sítio  $i = 3$  (cor verde) é escolhido aleatoriamente; **(b)** regra 2 ocorre a interação entre o sítio escolhido  $i = 3$  e seus vizinhos próximos  $i = 2, 4$ ; **(c)** regra 3 o sítio escolhido tem sua altura reduzida em uma unidade. . . . . 31
- 4.2 A rugosidade  $w(t)$  como função do tempo para o modelo de corrosão de 1+1 dimensão. Divida em quatro regiões principais. . . . . 32
- 4.3 Evolução da função de distribuição da probabilidade  $P(\eta, t)$ : (a)  $P(\eta)$  como função do tempo ( $\eta = 0, 1, 2, 3$ ). A probabilidade estabiliza rapidamente quando inicia as correlações no fim da região (a). (b) Mostramos  $P(\eta)$  como uma função de  $\eta$  para as regiões (a), (b) e (c) da figura (4.2). Novamente vemos que  $P(\eta)$ , em uma aproximação, não muda com o tempo. . . . . 35
- 4.4 A diferença de altura  $\eta = h_i(t) - h_{i+1}(t)$  como função do tempo  $t$ . Para as duas curvas escolhemos aleatoriamente,  $i = 27$  e  $i = 65$ . As curvas mostram que a mudança  $\eta$  ocorre para todas as regiões da figura (4.2). . . . . 36
- 4.5 Termo não-linear  $\lambda$  em função do número de pontos  $N$  considerando uma aproximação polinomial. . . . . 40
- 4.6  $P(\eta)$  para o modelo de corrosão e a função  $f(\eta)$  para  $N = 10$ . . . . . 40
- 4.7 As funções de distribuição de probabilidade para DARS. (a)  $P(\eta)$  como função de  $\eta$ ; (b)  $f(h, t)$  como função de  $h = h_i - \langle h \rangle$ . . . . . 43
- 4.8  $w_{sat}$  como função de  $L^\alpha$  para o modelo de corrosão de  $d+1$  dimensões; (a) Aqui a inclinação de  $a$  fornece a probabilidade  $P(0)$ ; (b) Aqui  $\tilde{w}_{sat} = w_{sat}/\tilde{b}^\alpha$  como função de  $L^\alpha$ , neste caso todos os dados se cruzam em uma única linha . . . . . 47

---

5.1	Evolução temporal da rugosidade $w(t)$ para o modelo SS em 2+1 dimensões com $p = 0.90$ ; (a) a evolução temporal da rugosidade para diferentes tamanhos do sistema; (b) apresentamos dos dados escalonados $w(t)/w_{sat} \times t/t_{sat}$ . . . . .	50
5.2	$P(\eta)$ como função do tempo para o modelo SS em 2 + 1 dimensões; O $P(\eta)$ são obtidos utilizando as definições do modelo de corrosão e as regras do modelo SS. Para a rede quadrada foi utilizado $L = 256$ , $p = 0.6$ e um intervalo de tempo $\Delta t = 1/L^2$ , sobre uma média de 40 experimentos. A curva de cima $P(1)$ e a curva de baixo $P(-1)$ . Exceto pelos efeitos de flutuação esperado eles concordam que $P(1) = p$ e $P(-1) = q = 1 - p$ . . . . .	53

# Lista de Abreviações

KPZ	Kardar-Parisi-Zhang
$\alpha$	Expoente de rugosidade
$\beta$	Expoente de crescimento
$z$	Expoente dinâmico
EW	Edwards-Wilkinson
SS	Modelo Single-Step
GR	Grupo de Renormalização
$\nu$	Tensão superficial
$\xi$	Ruído branco
$\lambda$	Termo não-linear
RSOS	Restricted Solid-on-Solid
$\bar{h}$	Altura média
$w(L, t)$	Rugosidade
$\sigma_E$	Flutuação da energia
$k_B$	Constante de Boltzmann
$\sigma_V$	Flutuação do volume
$\kappa_T$	Compressibilidade isotérmica

---

$L$	Tamanho do sistema
$t_{sat}$	Tempo de saturação
DA	Deposição Aleatória
DARS	Deposição aleatória com relaxação superficial
DB	Deposição Balística
MBE	Molecular Beam Epitaxy
VLDS	Classe Villain-Lai-Das Sarmas
$\Phi$	Fluxo de partículas
G	Fluxo médio de partículas
IG	Invariância de Galileu
$P(\eta)$	Distribuição da probabilidade
$\eta = h_i - h_j$	Diferença das alturas
$f(h, t)$	Distribuição do sítio $i$
$\sigma_\eta$	Desvio quadrático médio
$\tilde{b}$	Parâmetro da equação de rugosidade
A	Parâmetro associado com a velocidade da interface

# Capítulo 1

## Introdução

Fenômenos de crescimento são observados cotidianamente, no crescimento de algas nas pedras, na evolução de incêndios sobre as florestas, na deposição de átomos em filme, etc. Em todos esses casos existe uma interface separando dois meios. Tomando por exemplo a queima de papel, ou um incêndio, fica claro que quando a frente de combustão avança ela separa dois meios: o material queimado e o material que falta queimar. Deste modo o estudo de crescimento é basicamente o estudo da dinâmica da interface entre os dois meios.

Deste modo o estudo do crescimento e a dinâmica das interfaces é um ramo que tem grande destaque na Física de Superfícies e na Física Estatística, além de aplicações práticas, e conseqüentemente muito esforço têm sido desenvolvidos para estudar tais fenômenos. Além de experimentos, métodos teóricos vem sendo desenvolvidos tais como simulações computacionais, escalonamento, métodos de grupo de renormalização e de teoria de campos. Tais métodos têm por objetivo obter informações sobre o modelo, p. ex., distribuição da alturas da interface, os expoentes de escala e determinação da classe de universalidade dos modelos sob investigação. Determinar a classe de universalidade tem um papel fundamental na dinâmica de crescimento, já que modelos a princípio possuem características diferentes podem ser classificados, i. e. agregados, na mesma classe de universalidade por terem os mesmos expoentes.

---

Então neste trabalho segue nesta linha de estudar os fenômenos de crescimento, a partir dos modelos teóricos obter informações sobre uma equação de crescimento que descreve a evolução desse modelo. O objetivo deste trabalho é mostrar que o modelo de corrosão (**Etching Model**) proposto por Mello et al [1], no limite do contínuo, leva-nos a equação de crescimento de Kardar-Parisi-Zhang (**KPZ**). O método desenvolvido neste trabalho permite analisar os termos da equação KPZ partindo das regras que descrevem o modelo de corrosão partindo da definição de uma nova função de densidade de probabilidade das diferenças das alturas. Os termos da equação (**KPZ**) são descritos em função dessa densidade de probabilidade, aonde focaremos no termo não-linear, que é característico da classe de universalidade KPZ. O método desenvolvido nessa tese partiu do modelo de corrosão, mas se mostrou eficiente para outros modelos de crescimento, como será apresentado neste trabalho na seguinte disposição.

No capítulo 2 são apresentados os conceitos básicos necessários para o estudo dos modelos de crescimento, como altura média de um substrato ( $\bar{h}$ ), a rugosidade ( $w$ ) e os expoentes de escala de rugosidade ( $\alpha$ ), crescimento ( $\beta$ ) e dinâmico ( $z$ ), além disso citamos alguns modelos teóricos de crescimento. E por fim, é discutido a dinâmica de crescimento a partir da equação de Edward-Wilkinson (**EW**), que consiste em uma teoria linear para estudar a evolução do crescimento de uma interface.

No capítulo 3 é apresentando a dinâmica de crescimento a partir do modelo não-linear de Kardar-Parisi-Zhang (**KPZ**), sua construção e suas consequências. Ademais, é tratada sobre a abordagem desta dinâmica à luz do Grupo de Renormalização (**GR**).

No capítulo 4 apresentamos as regras do modelo de corrosão e partindo dessas, no limite do contínuo, chegamos na equação de KPZ ao introduzir a nova função de distribuição de probabilidade das alturas, além disso, mostramos a relação desta nova função com os parâmetros  $\nu$  e  $\lambda$  da equação KPZ. Por fim, apresenta-se a discussão desta nova função para o modelo de Deposição Aleatória com relaxação

superficial (**DARS**). Mostra-se também a relação entre a função  $P(\eta)$  e o expoente de rugosidade  $\alpha$ .

No capítulo 5 apresentamos o modelo Single-Step (**SS**), um modelo de crescimento que tem a característica de alternar entre a classe de EW e a classe KPZ, mostramos a relação deste modelo com o modelo de corrosão e aplicamos os resultados obtidos no capítulo anterior para esse modelo.

No capítulo 6 apresentamos a conclusão deste trabalho.

## Capítulo 2

# Conceitos básicos e a Equação de Edwards-Wilkinson

O crescimento de superfícies desempenha um papel fundamental em muitos fenômenos de interesse científico e importância prática, esses fenômenos são encontrados no nosso cotidiano, como na figura (2.1), onde foi registrado um incêndio no gramado da Esplanada dos Ministérios (Brasília-DF) que consiste na propagação de uma frente de fogo sobre uma superfície, e na figura (2.2) observamos o crescimento de uma colônia de fungos (levedura), um processo comum em cervejarias. O crescimento de superfícies rugosas pode ocorrer tanto em condições de equilíbrio quanto fora do equilíbrio, apesar que muitas superfícies rugosas são formadas em condições muito longe do equilíbrio. Por exemplo, podemos citar a formação de paisagens [2, 3, 4, 5], os processos de deposição de vapor [6, 7] e de corrosão [1, 8, 9], propagação de frente de fogo [10, 11, 12] e crescimento de colônia de bactérias [13, 14, 15]. Apesar das diferenças que existem nesses processos, eles apresentam muitas similaridades. Superfícies rugosas e interfaces podem ser descritas em termos da geometria fractal [16, 17]. Muitos destes fenômenos de crescimento, apesar de suas diferenças, apresentam propriedades similares a medida que o crescimento evolui no tempo. Para entender estes processos podemos utilizar modelos de crescimento para observar essas propriedades.



FIGURA 2.1: Incêndio na Esplanada dos Ministérios. Fonte: CORREIO BRAZILI-  
ENSE



FIGURA 2.2: Crescimento de fungos (levedura) para produção de cerveja.

Para a explicação dos modelos de crescimento das superfícies é necessário conhecer alguns parâmetros que caracterizam estes modelos, os **expoentes de escala** e a classe de universalidade. Podemos afirmar que dois ou mais modelos de crescimento pertencem a mesma classe de universalidade quando apresentam os mesmos valores dos expoentes de escala, desta forma para determinar a classe de um modelo é necessário conhecer os seus expoentes de escala:  $\alpha$  expoente de rugosidade,  $\beta$  o expoente de crescimento e  $z$  o expoente dinâmico.

Serão tratados neste capítulo os conceitos básicos para o estudo de modelos de crescimento, seja o RSOS (modelo **Restricted Solid-On-Solid**), o modelo de corrosão, o modelo de deposição aleatória [18] ou deposição aleatória com Relaxação

Superficial [19], o modelo Single-Step **SS** [20, 21]. Ainda será tratado a equação de Edwards-Wilkinson [22], um estudo linear que descreve a evolução do crescimento de uma superfície através de uma equação diferencial contínua.

## 2.1 **Altura média e Rugosidade**

Para analisar os modelos de crescimento é necessário introduzir alguns conceitos básicos que nos permite compreender o fenômeno de crescimento, para isso, podemos utilizar a representação de um substrato na forma discreta em coordenadas cartesianas, como mostrado na figura (2.3).

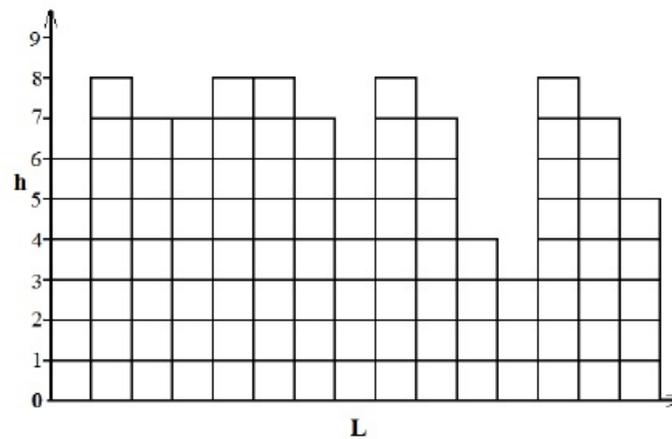


FIGURA 2.3: Representação do esquema de um modelo discreto [16].

Nesta representação considerando  $L$  o tamanho do substrato, em que o tamanho do substrato correspondente ao eixo das abscissas foi dividido em  $i$  sítios que representa o local onde as partículas devem ser depositadas ou retiradas onde  $0 \leq i \leq L$ . No eixo das ordenadas temos a altura do substrato que é representada por  $h(i, t)$  ou  $h_i(t)$  que corresponde o valor da altura da  $i$ -ésima coluna num dado instante  $t$  com relação a um referencial fixo.

Neste trabalho faremos uso de modelos de crescimento discretos e contínuos cuja dimensão é representada por  $d+1$ , onde  $d$  é a dimensão do substrato e o numeral 1 é variável relacionada a altura do substrato. Para um modelo discreto, o mecanismo de crescimento é descrito por um *algoritmo* (Autômato Celular)<sup>1</sup> no intuito de tentar reproduzir, satisfatoriamente, vários aspectos de algum tipo de crescimento observado experimentalmente. Para um modelo contínuo utiliza-se geralmente uma equação diferencial para descrição do crescimento.

Para descrever quantitativamente os modelos de crescimento utilizados neste trabalho utilizaremos duas grandezas: a altura média ( $\bar{h}$ ) e a rugosidade ( $w$ ), que iremos introduzir.

### 2.1.1 Altura média

A altura média de uma superfície, denotada por  $\bar{h}$ , é definida por

$$\bar{h}(t) \equiv \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L h_i(t), \quad (2.1)$$

onde  $h_i(t)$  é a altura da coluna  $i$  no tempo  $t$ . Por exemplo, caso a taxa de deposição (número de partículas que serão depositadas em um sítio  $i$ ) seja constante, pela equação (2.1) tem-se que a altura média cresce linearmente com o tempo.

---

<sup>1</sup>Os autômatos celulares descrevem os modelos de crescimento através de regras simples que nos permite analisar as propriedades desses modelos.

### 2.1.2 Rugosidade

A *largura* ou a *rugosidade* de uma interface, é definida pelo desvio quadrático médio das alturas,

$$\sigma_h = w(L, t) \equiv \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \chi_i^2(t)} \quad (2.2)$$

onde

$$\chi_i(t) = h_i(t) - \bar{h}(t). \quad (2.3)$$

Monitoramos o processo de enrugamento quantitativamente quando medimos a largura da superfície em função do tempo. Supondo que o crescimento começa a partir de uma linha horizontal; a superfície no tempo zero tem largura zero, i.e.  $w(0) = 0$ . A medida que as deposições vão ocorrendo na superfície do substrato gradualmente começa a apresentar a rugosidade. Observe que o estudo da rugosidade possui sentido físico por se tratar da flutuação de uma grandeza (**altura**) do sistema. Flutuações em Matemática estão associados com erro, em Física entretanto elas contêm importante informações sobre o sistema, estando associada com o retorno ao equilíbrio, i.e. uma resposta as perturbações. Desse modo podemos obter as flutuações da energia a partir do equilíbrio de um sistema termodinâmico de  $N$  partículas como

$$\sigma_E^2 = \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle = k_B T^2 C_V,$$

onde  $C_V$  é o calor específico molar a volume constante e a flutuação do volume

$$\sigma_V^2 = \langle (V - \langle V \rangle)^2 \rangle = TV \kappa_T,$$

onde  $\kappa_T$  é a compressibilidade isotérmica [23]. Ou uma versão mais recente de susceptibilidade para o modelo de Kuramoto [24, 25]

$$\sigma_r^2 = k_B T_c \chi.$$

Essas relações mostram que as respostas  $C_V$ ,  $\kappa_T$  e  $\chi$  são positivas e associadas com as flutuações.

## 2.2 Leis de escalas e expoentes de escala

Para que possamos afirmar que um sistema pertence à uma certa classe de universalidade devemos obter os seus expoentes de escala. Para obtê-los, podemos usar as **leis de escalas** ou **escalamento**. Para isso considere a figura (2.4) que mostra a evolução da rugosidade  $w(t)$  em função do tempo  $t$ . A linha vertical  $t = t_{sat}$  separa o gráfico em dois regimes de tempo. Definindo  $t_0$  como o tempo antes de iniciar as correlações entre os sítios, a rugosidade cresce na forma  $w(t) \sim t^{1/2}$  em um processo na forma de uma deposição aleatória. Para  $t \ll t_{sat}$  a rugosidade cresce seguindo uma lei de potência

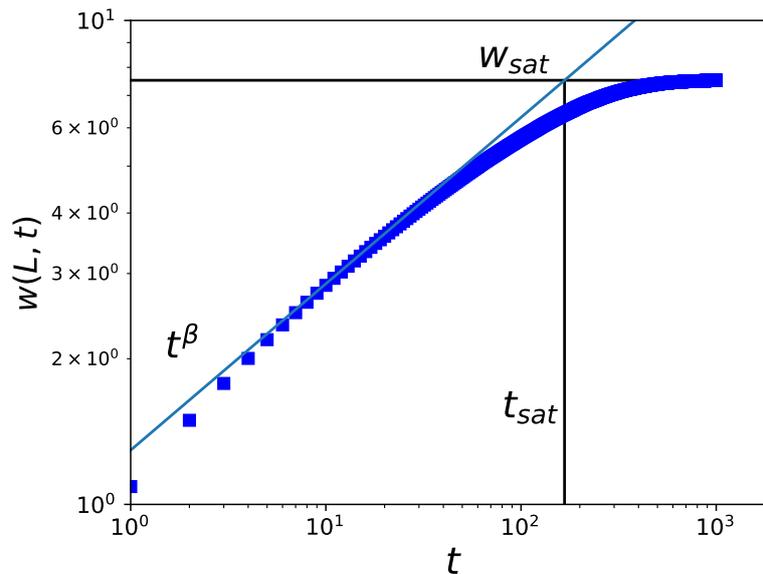


FIGURA 2.4: A rugosidade  $w(t)$  como função do tempo para o modelo de corrosão de 1+1 dimensão. O instante  $t_{sat}$  divide a curva em dois regimes de tempo: uma região de crescimento  $t \ll t_{sat}$  e uma região de saturação  $t \gg t_{sat}$ .

$$w(L, t) \sim t^\beta. \quad (2.4)$$

O expoente  $\beta$  é definido como o **expoente de crescimento** que caracteriza as informações sobre a dinâmica temporal do modelo de crescimento. A medida que ocorrem as deposições e as partículas vão aderindo a superfície do substrato a rugosidade não varia mais com o tempo atingindo um valor máximo  $w_{sat}$ . Este valor está relacionado ao comprimento do sistema também por uma lei de potência

$$w_{sat}(L) \sim L^\alpha. \quad (2.5)$$

Onde  $\alpha$  é o **expoente de rugosidade**. A intersecção entre esses dois regimes ocorre em um tempo  $t_{sat}$  que também como os anteriores obedece uma lei de potência

$$t_{sat} \sim L^z. \quad (2.6)$$

Onde  $z$  é o **expoente dinâmico**.

Então as equações (2.4, 2.5, 2.6) podem ser combinadas em uma expressão de escala na forma, conhecida como a relação de Family-Vicsek [26]

$$w(L, t) \sim L^\alpha f(t/L^z), \quad (2.7)$$

Portanto apresentando uma relação universal entre  $w, L$  e  $t$  em que  $f(x)$  é uma função de escala definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^\beta, & x \ll 1 \\ 1, & x \gg 1 \end{cases}$$

e podemos expressar a evolução temporal de todas as regiões na forma

$$w(L, t) = \begin{cases} t^{1/2}, & \text{se } t \ll t_0 \\ ct^\beta, & \text{se } t \ll t_{sat} \\ w_s \propto L^\alpha, & \text{se } t \gg t_{sat} \end{cases} \quad (2.8)$$

Onde os expoentes  $\alpha, \beta$  e  $z$  podem ser combinados em uma relação de escala:

$$z = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (2.9)$$

A partir da relação (2.7) temos que em modelos de crescimento a rugosidade  $w(L, t)$  inicialmente ( $t \ll t_{sat}$ ) cresce com o tempo, primeiro na forma  $w(L, t) \sim t^{1/2}$  quando não há correlações e para  $t_0 > t > t_{sat}$  na forma  $w(L, t) \sim t^\beta$  quando se inicia as correlações entre as alturas do sistema. Então as deposições sobre a superfície continuam a ocorrer e a altura dos sítios vão se alterando. Esta flutuação na altura se espalha globalmente sobre a superfície, como se a variação da altura em uma região fosse "notada" por todo o substrato. Esta "relação" entre as alturas é medida através do *comprimento de correlação*. No início não há correlação no sistema, mas com as deposições este comprimento de correlação cresce com o tempo, mas como um substrato possui um tamanho finito, quando o comprimento de correlação atinge esse valor todo o sistema se torna correlatado e então ocorre a saturação.

Então a partir da rugosidade dada por (2.7) e da figura (2.4) obtemos os valores dos expoentes de escala e então caracterizamos a classe de universalidade do modelo de crescimento. Contudo, como proposto por Oliveira et al [27], a rugosidade pode ser estudada em nível local ou global e assim podendo obter outros dados além dos expoentes  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $z$  para determinar a classe de universalidade. Neste trabalho, trabalharemos com a rugosidade global dada pela relação de Family-Vicsek para analisar a dinâmica de crescimento.

## 2.3 Modelos de crescimento

Para analisar os fenômenos de crescimento podemos utilizar algumas ferramentas, entre elas, uma consiste em associar um certo fenômeno a um modelo de crescimento teórico, podendo ser um modelo discreto caracterizado por um autômato celular ou um modelo contínuo caracterizado por um equação estocástica contínua. Tais modelos possuem a vantagem de serem simulados computacionalmente nos fornecendo medidas das grandezas relacionadas ao crescimento.

Entre vários modelos de crescimento iremos descrever alguns deles (**Deposição Aleatória**, **Deposição Aleatória com Relaxação Superficial** e **Deposição Balística**) que são exploradas na literatura [28, 29, 30, 31, 32], contudo não constituem os únicos, mas são modelos simples que nos permite estudar o fenômeno de crescimento.

### 2.3.1 Deposição Aleatória- DA

O modelo de Deposição Aleatória (**DA**) é descrito por regras bem simples. Como está na figura (2.5) em um instante de tempo  $t$  um sítio  $i$  é escolhido aleatoriamente, uma partícula é depositada (ou retirada) aumentando a altura desse sítio em uma unidade.

1. No instante  $t$  o sítio  $i$  é escolhido aleatoriamente.
2. A altura do sítio após a deposição é acrescida em uma unidade:  $h_i(t + \Delta t) = h_i(t) + 1$

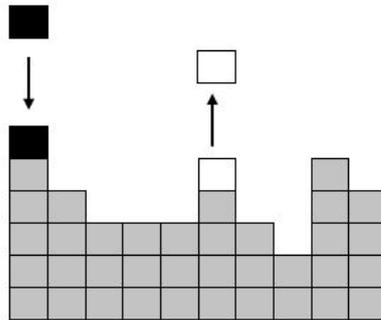


FIGURA 2.5: Deposição Aleatória. As partículas agregam (preta) ou são tiradas (branca) da superfície aleatoriamente.

Neste modelo não há correlação entre os vizinhos, logo o sistema irá crescer indefinidamente e não irá saturar. Para este modelo o expoente de rugosidade  $\alpha$  não é determinado e o expoente de crescimento  $\beta = 1/2$  [16, 28]. Este crescimento

não-correlatado é observado no início do gráfico (2.4) onde as correlações ainda não começaram.

### 2.3.2 Deposição Aleatória com Relaxação Superficial - DARS

Uma variação do modelo de DA é a Deposição Aleatória com Relaxação Superficial (**DARS**), também conhecido como modelo de Family, tal como o modelo anterior um sítio é escolhido aleatoriamente e cai verticalmente sobre a superfície. Contudo a diferença da DA para a DARS é que neste modelo quando a partícula chega a superfície ela não agrega imediatamente, a partícula "observa" os vizinhos do sítio escolhido e adere aquele que possui menor altura, como mostrado na figura (2.6), desta forma, neste modelo de deposição há uma correlação e assim ocorre a saturação do sistema. Simulações em uma dimensão fornecem os valores dos expoentes de escala [33]  $\beta = 0.24(1)$  e  $\alpha = 0.48(2)$ , valores diferentes do modelo de DA. O modelo de DARS também é estudado para altas dimensões por Kwak et al [29]. Este modelo de crescimento pertence a classe de universalidade de Edwards-Wilkinson, que será tratado posteriormente.

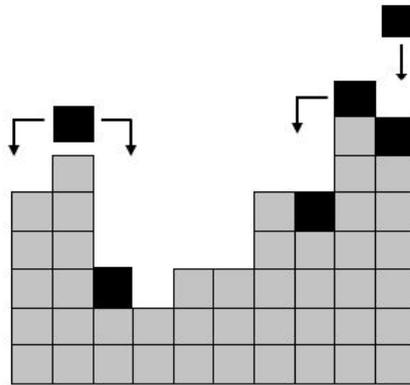


FIGURA 2.6: Deposição Aleatória com Relaxação Superficial: a partícula chega a superfície, mas adere no sítio de menor altura.

### 2.3.3 Deposição Balística-DB

O modelo de Deposição Balística (**DB**), tratado por Meakin et al [21], consiste em um modelo em que uma partícula adere no primeiro sítio que encontra,

como mostrado na figura (2.7). Podemos sumarizar a regra desse modelo na seguinte forma:

1. No instante  $t$  um sítio  $i$  é escolhido aleatoriamente.
2. Após a deposição a altura do sítio  $i$  é alterada segundo o algoritmo:  $h_i(t+\Delta t) = \max[h_{i-1}(t), h_i(t) + 1, h_{i+1}(t)]$ .

Onde a notação  $i \pm 1$  indica os vizinhos do sítio escolhido. Após sucessivas deposições observa-se que neste modelo surge "buracos" vazios devido ao seu algoritmo. Devido as correlações, tal como no modelo de DARS, a rugosidade cresce linearmente com um tempo até atingir o valor da rugosidade de saturação  $w_{sat}$ , mas a diferença entre os modelos é que no modelo de DB há um crescimento lateral alterando as propriedades de escala e assim os expoentes de escala. Para esse modelo estudos mostram que para o expoente de crescimento  $\beta = 0.330(1)$  e  $\alpha = 0.495(8)$  [32].

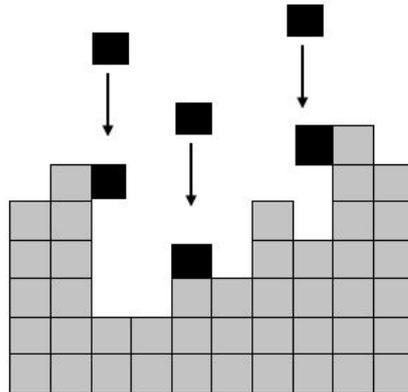


FIGURA 2.7: Deposição Balística: a partícula adere no primeiro sítio que encontra na superfície.

O modelo de DB pertence a outra classe de universalidade, a classe Kardar-Parisi-Zhang (**KPZ**) que será tratada no capítulo 3. Iremos tratar sobre estas duas classes de universalidades, contudo não as únicas classes de universalidade, como

podemos citar a classe *Molecular Beam Epitaxy* (**MBE**) que se refere a um conjunto de técnicas que compartilham uma maneira de depor material em um substrato átomo por átomo ou molécula por molécula [34, 35]. Como também podemos citar a classe *VLDS* proposta por Villain e por Lai e Das Sarma que descreve modelos de crescimentos dominados por difusão [36, 37].

## 2.4 Teoria linear para dinâmica de crescimento

Nos estudos dos modelos de crescimento [1, 38, 39] estamos interessados na evolução da altura  $h(\vec{x}, t)$  em qualquer posição  $\vec{x}$ , onde  $\vec{x}$  é um vetor d-dimensional. Para estudar analiticamente os modelos de crescimento muitos métodos têm sido desenvolvidos, entre eles, um bastante útil consiste em associar uma equação de crescimento estocástica com um dado processo de crescimento. Em geral, o crescimento pode ser descrito através de uma equação contínua

$$\frac{\partial h(\vec{x}, t)}{\partial t} = \Phi(\vec{x}, t), \quad (2.10)$$

onde o fluxo  $\Phi(\vec{x}, t)$  é o número de partículas por unidade de tempo chegando na posição  $\vec{x}$  da superfície no instante  $t$ .

O fluxo de partículas não é uniforme, uma vez que as partículas são depositadas em posições aleatórias. A aleatoriedade pode ser incorporada na teoria pela decomposição de  $\Phi(\vec{x}, t)$  em dois termos de tal modo que a equação (2.10) torna-se

$$\frac{\partial h(\vec{x}, t)}{\partial t} = G + \xi(\vec{x}, t). \quad (2.11)$$

O primeiro termo  $G$  é o número médio de partículas chegando no sítio  $\vec{x}$  e pode ser definido como um campo. O segundo termo,  $\xi(\vec{x}, t)$ , caracteriza as flutuações aleatórias no processo de deposição e é um número aleatório não-correlacionado, com

$$\langle \xi(\vec{x}, t) \xi(\vec{x}', t') \rangle = 2D \delta^d(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t'). \quad (2.12)$$

Onde  $D$  é a dispersão e  $d$  a dimensão e possui valor médio nulo

$$\langle \xi(\vec{x}, t) \rangle = 0. \quad (2.13)$$

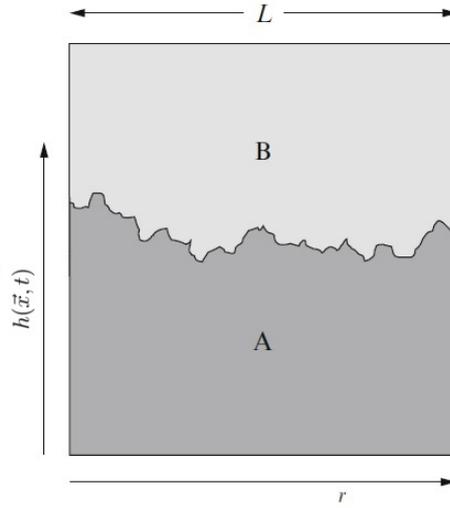


FIGURA 2.8: Formação de superfície entre dois meios [28].

Considere uma superfície caracterizada pela altura  $h(\vec{x}, t)$  na figura (2.8), e assumamos que no instante  $t = 0$  a superfície apresente uma rugosidade nula  $w(L, 0) = 0$ . Podemos descrever a evolução temporal da altura através de uma equação estocástica contínua dada pela forma da equação 2.11, com  $G(h, \vec{x}, t)$  uma função que pode depender da altura da superfície, do vetor  $\vec{x}$  e do tempo. Para obter a equação de crescimento devemos considerar que pela figura (2.8) ao trocar o meio A pelo meio B as propriedades da interface não devem ser alteradas, ou seja, se tratamos de uma deposição ou uma desorção a equação de crescimento deve ser a mesma. A seguir vamos discutir a invariância da equação de crescimento com respeito a translação no tempo e no espaço, a rotação em torno do eixo de crescimento e a troca do sinal de  $h$  (que caracteriza a troca dos meios).

## 2.5 Princípios de simetria

### 2.5.1 Invariância sob translação temporal

A equação que descreve a evolução temporal da altura  $h(\vec{x}, t)$  não deve depender da escolha da origem do tempo. Considerando a translação temporal  $t \rightarrow t + t_0$  não deve alterar a equação de crescimento (2.11), desta forma a função  $G$  não deve depender explicitamente do tempo.

### 2.5.2 Invariância sob translação ao longo na direção do crescimento

A equação de crescimento também não deve depender da escolha da origem do eixo da altura. A transformação  $h \rightarrow h + h_0$  na altura não deve interferir na equação, desta forma, exclui-se os termos explícitos em  $h$  da função  $G$ , então essa função deve conter uma combinação das derivadas

$$\vec{\nabla}h, \vec{\nabla}^2h, \dots, \vec{\nabla}^nh.$$

### 2.5.3 Invariância sob translação na direção perpendicular à direção do crescimento

Da mesma forma a equação de crescimento não deve depender da escolha da origem do vetor  $\vec{x}$ , i.e., tal como no tempo e na altura, a transformação  $\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{x}_0$  não deve afetar a equação de crescimento, assim excluimos termos explícitos em  $\vec{x}$  da equação permitindo uma combinação das derivadas em  $\vec{x}$ .

$$\frac{\partial}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial^2}{\partial \vec{x}^2}, \dots, \frac{\partial^n}{\partial \vec{x}^n}.$$

### 2.5.4 Rotação da direção do crescimento

A equação de crescimento deve ser invariante em relação a uma rotação na direção do crescimento, i.e., a equação não deve ser alterada devido a transformação

$\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ . Este princípio exclui derivadas ímpares da equação de crescimento, então termos do tipo  $\vec{\nabla}^{2n+1}h$ , não são permitidos. Desta forma a equação de crescimento deve ser uma combinação com termos na forma  $(\vec{\nabla}^{2n+1}h)^{2m}$  (onde  $n, m \in \mathbb{N}$ ) por não violar esse princípio.

### 2.5.5 Simetria Up/Down para a altura

Como foi dito, em um processo de crescimento se partículas são depositadas ou retiradas o mecanismo de crescimento não deve ser afetado. Desta forma a equação de crescimento não deve ser alterada devido a transformação  $h \rightarrow -h$  que caracteriza a troca do meio A e meio B na figura (2.8). Desta forma os termos na forma  $(\vec{\nabla}^n h)^{2m}$  não são permitidos na equação de crescimento, assim a equação de crescimento permite apenas os termos derivadas pares na forma  $\vec{\nabla}^{2n}h$ .

Este princípio de simetria é quebrado quando ocorre um crescimento lateral, por exemplo a Deposição Balística. Para modelos de crescimento que não obedecem esse princípio é necessário incluir termos não-lineares.

## 2.6 A equação de Edwards-Wilkinson

Considerando os princípios de simetria a equação que descreve o crescimento de uma superfície deve ter a seguinte forma,

$$\frac{\partial h(\vec{x}, t)}{\partial t} = a_2 \vec{\nabla}^2 h + a_4 \vec{\nabla}^4 h + \dots + a_{2n} \vec{\nabla}^{2n} h + \xi(\vec{x}, t). \quad (2.14)$$

Para determinar as propriedades de escala o nosso foco está no comportamento assintótico ( $t \rightarrow \infty$  e  $L \rightarrow \infty$ ). Ao expandir  $h(\vec{x}, t)$  em uma série de Fourier abaixo

$$h(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} h(\vec{k}, t) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad (2.15)$$

onde  $\vec{\nabla}^n h(\vec{x}, t)$  corresponde aos termos  $k^n h(\vec{k}, \omega)$ , então no limite de grandes comprimentos de ondas ( $\vec{k} \rightarrow 0$ ) os termos de baixa ordem da equação (2.14) são os que predominam.

Desta maneira, a equação mais simples para descrever o crescimento foi proposta **Edwards-Wilkinson (EW)** e pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial h(\vec{x}, t)}{\partial t} = \nu \vec{\nabla}^2 h + \xi(\vec{x}, t). \quad (2.16)$$

Onde  $\nu$  é a tensão superficial, quanto maior o seu valor mais rápido o sistema irá atingir a saturação,  $\xi(\vec{x}, t)$  é o ruído, que obedece as equações (2.12 e 2.13). Nessa equação pode ser adicionado um termo de velocidade  $v$ , contudo a adição deste termo não afeta as propriedades de escala do sistema podendo aplicar uma mudança de variáveis na forma  $h \rightarrow h + vt$ .

O ruído  $\xi(\vec{x}, t)$  consistem em um ruído branco, onde as partículas são depositadas descorrelacionadamente como dado pela (2.12), cada deposição não possui relação temporal e espacial com qualquer outra partícula. Outros ruídos são permitidos, como o caso do ruído colorido, onde as deposições apresentam uma correlação não instantânea ou não local, mas não iremos aprofundar para este tipo de ruído.

### 2.6.1 Solução da equação de EW

#### Transformação de escala

É possível calcular os expoentes de crescimento utilizando argumentos de escala. Se a interface  $h(\vec{x}, t)$  é auto-afim sujeitando ela a uma mudança de escala com parâmetro  $b$ :

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' \equiv b\vec{x}, \quad h \rightarrow h' \equiv b^\alpha h, \quad t \rightarrow t' \equiv b^z t. \quad (2.17)$$

Esta transformação de escala não deve afetar a Física da equação de crescimento. O ruído  $\xi$  também é alterado pela transformação onde partindo do ruído branco dado

por (2.12) tem-se

$$\langle \xi(\vec{x}, t) \xi(\vec{x}', t') \rangle = 2Db^{-(d+z)} \delta^d(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t'). \quad (2.18)$$

Por esta relação, podemos obter o comportamento de escala do ruído:

$$\xi(b\vec{x}, b^z t) = b^{-(d+z)/2} \xi(\vec{x}, t), \quad (2.19)$$

onde utilizamos a propriedade geral da função delta,

$$\delta^d(a\vec{x}) = \frac{1}{a^d} \delta^d(\vec{x}).$$

Substituindo (2.17) e (2.19) na equação de EW (2.16) obtemos:

$$b^{\alpha-z} \frac{\partial h(\vec{x}, t)}{\partial t} = \nu b^{\alpha-2} \vec{\nabla}^2 h + b^{-(d+z)/2} \xi(\vec{x}, t). \quad (2.20)$$

Para que a equação de crescimento seja invariante sob a transformação (2.17) ela não deve depender do parâmetro  $b$ , logo obtemos os expoentes:

$$\alpha = \frac{2-d}{2}, \quad \beta = \frac{2-d}{4}, \quad z = 2. \quad (2.21)$$

Note que  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$  para a dimensão crítica superior  $d = d_c = 2$ .

### Solução exata

Uma vez que a equação (2.16) é linear, é possível resolvê-la exatamente. Para isso vamos usar a transformada de Fourier (2.15) na equação de EW, assim obtemos

$$h(\vec{k}, \omega) = \frac{\xi(\vec{k}, \omega)}{\nu k^2 - i\omega}, \quad (2.22)$$

onde  $\xi(\vec{k}, \omega)$  é a transformada de Fourier do ruído. A partir das equações (2.12) e (2.13),

$$\langle \xi(\vec{k}, \omega) \rangle = 0 \quad (2.23)$$

e

$$\langle \xi(\vec{k}, \omega) \xi(\vec{k}', \omega') \rangle = 2D \delta^d(\vec{k} + \vec{k}') \delta(\omega + \omega'). \quad (2.24)$$

Apartir de (2.22) obtemos a função de correlação

$$\langle h(\vec{k}, \omega) h(\vec{k}', \omega') \rangle = \frac{\langle \xi(\vec{k}, \omega) \xi(\vec{k}', \omega') \rangle}{(\nu k^2 - i\omega)(\nu k'^2 - i\omega')}. \quad (2.25)$$

Combinando as equações (2.25) e (2.24) e retornando ao espaço real obtemos

$$\langle h(\vec{x}, t) h(\vec{x}', t') \rangle = \frac{D}{2\nu} |\vec{x} - \vec{x}'|^{2-d} f\left(\frac{\nu|t - t'|}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2}\right). \quad (2.26)$$

Onde  $f(u)$  é uma função de escala com as seguintes propriedades ([16, 28, 40])

$$f(u) = \begin{cases} \text{constante} & \text{se } u \rightarrow \infty \\ u^{(2-d)/2} & \text{se } u \rightarrow 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

A partir da equação (2.26) recuperamos os expoentes de escala obtidos pela transformação de escala. Em uma dimensão os valores dos expoentes  $\alpha = 1/2$  e  $\beta = 1/4$  valores próximos dos encontrados para o modelo de DARS. Desta forma podemos ver que a equação de Edwards-Wilkinson construída pelos princípios de simetria fornece valores encontrados para o modelo de DARS. Assim tal modelo pertence a classe de universalidade de Edwards-Wilkinson.

## Capítulo 3

### Equação Kardar-Parisi-Zhang (KPZ)

Modelo de Deposição Aleatória com Relaxação Superficial possui os mesmos expoentes da classe de Edwards-Wilkinson (EW), contudo alguns modelos de crescimento quebram a Simetria Up/Down considerada na construção dessa equação. O modelo de Deposição Balística apresenta um crescimento lateral que quebra essa simetria desta forma para descrever através uma equação de crescimento é necessário acrescentar termos não-lineares na forma  $((\vec{\nabla}^n h)^{2m})$ .

Uma extensão para incluir estes termos não-lineares foi proposta por Kardar-Parisi-Zhang [41], eles argumentaram que o crescimento de uma superfície, pode ser modelada por uma equação contínua estocástica na forma

$$\frac{\partial h(\vec{x}, t)}{\partial t} = \nu \vec{\nabla}^2 h(\vec{x}, t) + \frac{\lambda}{2} (\vec{\nabla} h(\vec{x}, t))^2 + \xi(\vec{x}, t). \quad (3.1)$$

Onde  $h(\vec{x}, t)$  é a altura no tempo  $t$  localizada na posição  $\vec{x}$  e  $\xi(\vec{x}, t)$  é um ruído branco que obedece as propriedades (2.12 e 2.13), que como na equação de EW controla a aleatoriedade da deposição. O primeiro termo do lado direito da equação descreve o relaxamento da interface devido a tensão superficial  $\nu$ . O segundo termo consiste no termo não-linear de ordem mais baixa que pode ser incluído na equação de crescimento. Na teoria linear (EW) temos  $\lambda = 0$ , mas Kardar-Parisi-Zhang demonstraram que este termo é necessário e caracteriza o crescimento lateral do

modelo de crescimento. Termos de ordens superiores podem ser incluídos, mas são irrelevantes, e não modificam as propriedades da classe de universalidade.

A equação KPZ descreve o crescimento de uma superfície de dimensão  $d$  em um espaço de dimensão  $d + 1$ . Além de aplicações teóricas, a equação de KPZ descreve muitos sistemas físicos, tais como propagação de frente de fogo [42] e deposição de filmes finos [43]. Para o caso particular de  $d = 1$ , os expoentes de escala são conhecidos há mais de 30 anos tendo sido obtidos no artigo seminal de KPZ [41]. Soluções exatas foram propostas nas últimas duas décadas para a distribuição de alturas [44, 45, 46, 47]. Entretanto, até agora não há soluções exatas para altas dimensões, nesses casos os expoentes são obtidos por simulações numéricas ou métodos aproximados.

### 3.1 Construção da equação KPZ

Para justificar o termo não-linear vamos considerar a deposição balística (DB), onde uma partícula gruda na superfície assim que entra em contato. O mecanismo de crescimento da DB pode ser explicada em uma descrição contínua em que o incremento do crescimento  $\delta h$  pode ser composto em duas componentes:  $v\delta t$  que é paralelo à normal da superfície e  $|\vec{\nabla}h|v\delta t$  que é perpendicular à normal da superfície.

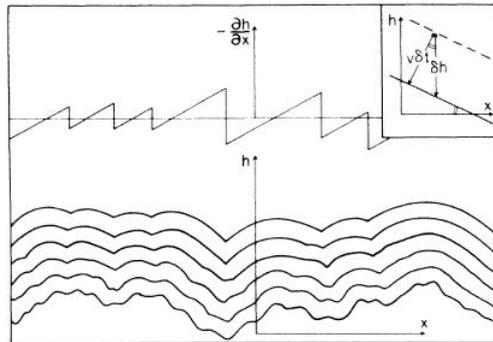


FIGURA 3.1: A origem do termo não linear na equação KPZ. [41]

Uma expressão para  $\delta h$  pode ser obtida pelo teorema de Pítágoras

$$\delta h = [(v\delta t)^2 + (v\delta t\nabla h)^2]^{1/2} = v\delta t[1 + (\nabla h)^2]^{1/2}. \quad (3.2)$$

Se  $|\nabla h| \ll 1$  podemos expandir a equação (3.2)

$$\frac{\partial h(\vec{x}, t)}{\partial t} = v + \frac{v}{2}(\nabla h)^2 + \dots \quad (3.3)$$

Logo, incluindo o termo da tensão superficial a equação de KPZ é obtida. O termo não-linear é necessário para situações onde o crescimento lateral ocorre. O termo  $\lambda > 0$  na equação de KPZ tem a função de reforçar o gradiente local da interface, ao contrário do termo  $\nabla^2 h$  que suaviza as irregularidades.

### 3.2 Expoentes de escala e renormalização

Ao aplicar na equação de KPZ as mesmas transformações de escala que foram utilizadas na equação de EW obtemos

$$b^{\alpha-z} \frac{\partial h(\vec{x}, t)}{\partial t} = \nu b^{\alpha-2} \vec{\nabla}^2 h + \frac{\lambda}{2} b^{2\alpha-2} (\vec{\nabla} h)^2 + b^{-\frac{(d+2)}{2}} \xi(\vec{x}, t). \quad (3.4)$$

Multiplicando ambos os lados da equação (3.4) por  $b^{z-\alpha}$

$$\frac{\partial h(\vec{x}, t)}{\partial t} = \nu b^{z-2} \vec{\nabla}^2 h + \frac{\lambda}{2} b^{\alpha+z-2} (\vec{\nabla} h)^2 + b^{-\alpha+\frac{z-d}{2}} \xi(\vec{x}, t). \quad (3.5)$$

Para a teoria linear este procedimento nos fornece os expoentes de escala, mas para a teoria não-linear aplicando os mesmos argumentos obtemos  $\alpha$  e  $\beta$  na seguinte forma

$$\alpha = \frac{2-d}{3}, \quad \beta = \frac{2-d}{4+d}.$$

Contudo esses valores estão errados, pois para  $d = 1$  temos  $\alpha = \frac{1}{3}$  e  $\beta = \frac{1}{5}$ , que diferem dos valores obtidos para KPZ.

O motivo é que ao rescalonar o sistema, os termos  $\nu$ ,  $\lambda$  e  $D$  na equação de crescimento não são renormalizados independentemente, eles são acoplados entre si. Portanto, para garantir a invariância de escala, não devemos simplesmente assumir que os expoentes de  $b$  são nulos, uma vez que  $\nu$ ,  $\lambda$  e  $D$  podem ser alterados devido ao rescalonamento. Então, para superar esta dificuldade utiliza-se a abordagem do grupo de renormalização (**GR**) apresentado em [16, 28, 41], onde após um longo processo são obtidos as equações de fluxos dos termos para KPZ,

$$\frac{d\nu}{dl} = \nu \left[ z - 2 + K_d g^2 \frac{2-d}{4d} \right] \quad (3.6a)$$

$$\frac{dD}{dl} = D \left[ z - d - 2\alpha + K_d \frac{g^2}{4} \right] \quad (3.6b)$$

$$\frac{d\lambda}{dl} = \lambda [\alpha + z - 2]. \quad (3.6c)$$

A constante de acoplamento  $g$  é definida [41]

$$g^2 \equiv \frac{\lambda^2 D}{\nu^3}, \quad (3.7)$$

onde  $K_d^{-1} \equiv 2^{d-1} \pi^{d-2} \Gamma(d/2)$  e  $l = \ln(b)$ . Pode-se obter os expoentes de escala a partir dos pontos fixos das equações de fluxo (3.6), i.e., considerando

$$\frac{d\nu}{dl} = \frac{dD}{dl} = \frac{d\lambda}{dl} = 0. \quad (3.8)$$

Podemos ver para o caso em que  $\lambda = 0$  para satisfazer (3.8) obtemos  $z - 2 = 0$  e  $z - d - 2\alpha = 0$  e conseqüentemente  $z = 2$  e  $\alpha = (2 - d)/2$  em acordo com a teoria linear. Assim os termos da equação EW são rescalonados independentemente entre si ( $\nu$  não depende de  $D$ ) concordando com o previsto no capítulo anterior (2).

Contudo para a classe KPZ os termos não são independentes, aplicando (3.8) na equação (3.6c) obtemos a relação

$$\alpha + z = 2, \quad (3.9)$$

que é resultado da **Invariância de Galileu** (IG), que fornece uma relação entre o expoente de rugosidade  $\alpha$  e o expoente dinâmico  $z$  que caracteriza o crescimento. A relação (3.9) é consequência do fato que a equação (3.6c) permanece invariante segundo o **GR**, uma vez que é válida para qualquer dimensão e não depende do parâmetro de acoplamento  $g$ . Essa relação é uma consequência de uma simetria adicional da equação KPZ referente aos estudos da equação de Burgers que é invariante sobre uma transformação Galileana

$$\vec{v}(\vec{x}, t) \rightarrow \vec{v}_0 + \vec{v}'(\vec{x} - \vec{v}_0, t). \quad (3.10)$$

Retornando a equação (3.7) e a partir das equações (3.6) obtemos a equação de fluxo para a constante de acoplamento

$$\frac{dg}{dl} = \frac{(2-d)}{2}g + K_d \frac{2d-3}{4d}g^3. \quad (3.11)$$

Os pontos fixos  $g^*$  da equação (3.11) são obtidos considerando  $dg/dl = 0$ ; um trivial  $g_1^*$  e outro não trivial

$$g_2^* = \left( \frac{2d(2-d)}{K_d(3-2d)} \right)^{1/2}. \quad (3.12)$$

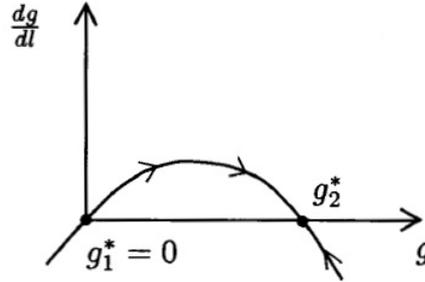
Então a partir das equações (3.6), (3.7) e (3.8) obtemos as expressões para os expoentes de escala:

$$\alpha = \frac{(2-d)^2}{6-4d} \quad \beta = \frac{(2-d)^2}{2(6-4d) - (2-d)^2}. \quad (3.13)$$

Para  $d=1$  a equação (3.12) apresenta dois pontos fixos:

$$g_1^* = 0, \quad g_2^* = \sqrt{2\pi}$$

O ponto fixo  $g_2^* = 2\pi$  é atrativo, isto significa que se começarmos o fluxo com um  $g$  não-nulo diferente de  $g_2^*$ , esse irá fluir diretamente para este, independentemente do valor inicial de  $g$ . Por outro lado, o ponto fixo  $g_1^*$  é repulsivo, i.e., se iniciarmos com um  $g \neq g_1^*$ , então o sistema irá fluir em uma direção longe de  $g_1^*$ .

FIGURA 3.2: O fluxo da constante de acoplamento para  $d = 1$  [16].

Para este caso, as equações (3.13) fornecem os seguintes valores para os expoentes de escala

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad z = \frac{3}{2}. \quad (3.14)$$

Portanto para  $d = 1$  é possível obter exatamente os valores dos expoentes. O motivo do Grupo de Renormalização fornecer exatamente os expoentes é uma consequência da validade da Invariância de Galileu (IG) e do teorema flutuação-dissipação.

A quebra de simetria  $h \leftrightarrow -h$  modifica a classe de universalidade, logo KPZ tem expoentes diferentes de EW. Note que tomando  $\xi = 0$ ,  $\lambda = 0$  temos a conhecida equação de difusão. Portanto as equações de EW e KPZ são formas de difusão anômala mais sofisticadas [38, 48, 49], o que obviamente implica na mudança dos expoentes.

## Capítulo 4

# Equivalência entre KPZ e o modelo de corrosão

Neste capítulo demonstraremos que no limite contínuo o modelo de corrosão (**Etching Model**) [1] produz a equação de KPZ em um espaço de dimensão  $d + 1$ . Neste trabalho focaremos na dinâmica entre um sítio  $i$  e seu primeiro vizinho  $j$ , deste modo definimos uma diferença de altura  $\eta = h_i - h_j$  e mostramos que a distribuição de probabilidade da diferença das alturas  $P(h_i - h_j)$  é uma função importante para a dinâmica do crescimento. Mostraremos que os parâmetros  $\nu$  e  $\lambda$  (3.1) não são fenomenológicos, mas são obtidos pela nova função de probabilidade  $P(\eta, t)$ . Apresentamos um método para obter o expoente de rugosidade  $\alpha$  em termos da probabilidade  $P(\eta, t)$ .

### 4.1 Modelo de corrosão

Os autômatos celulares são descritos por regra simples que nos permite examinar algumas propriedades de um sistema dinâmico complexo. Para um dado modelo de crescimento, uma questão relevante a ser respondida é determinar a classe de universalidade. Para este trabalho foi estudado o modelo de corrosão [1], que recebeu bastante atenção nos últimos anos [50, 51, 52, 53, 54, 55, 56]. Estes estudos sugerem que o modelo de corrosão e KPZ pertencem a mesma classe de universali-

dade, desta forma esse modelo se mostra eficiente para estudar a classe KPZ, por se tratar de um modelo simples para trabalhar em simulações computacionais. De um modo geral autômatos celulares são formas alternativas ao estudo da equação KPZ. Neste trabalho, partimos do modelo de corrosão (**Etching Model**) e obtemos a equação KPZ no limite contínuo da estrutura do modelo.

O modelo de corrosão é um autômato que simula a erosão de uma superfície quando entra em contato com um ácido. Em um tempo  $t$ , um sítio  $i$  é escolhido aleatoriamente em um espaço  $\Psi$  de dimensão  $d$ . Para simplificar, vamos considerar um hipercubo de lado  $L$  e volume  $V = L^d$  no espaço  $\Psi$  e  $\partial i$  o conjunto dos primeiros vizinhos do sítio  $i$ . Para todo  $j \in \partial i$ , tal que  $h_j(t) > h_i(t)$ , a altura do sítio  $j$  será reduzida para a mesma altura do sítio  $i$ , i.e.,  $h_j(t + \Delta t) = h_i(t)$ . Portanto definimos o modelo pelas seguintes regras:

1. Em um instante de tempo  $t$  um sítio  $i \in V$  é escolhido aleatoriamente.
2. Se  $h_j(t) > h_i(t)$  então  $h_j(t + \Delta t) = h_i(t)$ .
3. E por fim  $h_i(t + \Delta t) = h_i(t) - 1$ .

Na figura (4.1) mostramos o mecanismo do modelo de corrosão em uma dimensão: **(a)** aplicando a regra 1 escolhemos aleatoriamente um sítio no instante de tempo  $t$ , neste caso  $i = 3$ . Aplicando a regra 2 **(b)** o sítio  $i = 3$  interage com seus vizinhos, então  $h_2(t + \Delta t) = h_3(t)$  e  $h_4(t + \Delta t) = h_3(t)$ . Por fim, **(c)** aplica-se a regra 3  $h_3(t + \Delta t) = h_3(t) - 1$ . Aqui é descrito um processo de interação forte entre o sítio escolhido e seus vizinhos. Também pode ser descrito o processo de deposição onde cada face exposta possui a mesma probabilidade de anexar. Por este motivo, pode aplicar seja para deposição ou remoção de uma partícula aplicando a relação  $h \rightarrow -h$ . Como a rugosidade (2.2) é invariante por esta operação de simetria, a dinâmica não será afetada. Assim as regras da deposição tornam-se

- Regra 02:  $h_j(t) < h_i(t)$  então  $h_j(t + \Delta t) = h_i(t)$ ,
- Regra 03:  $h_i(t + \Delta t) = h_i(t) + 1$

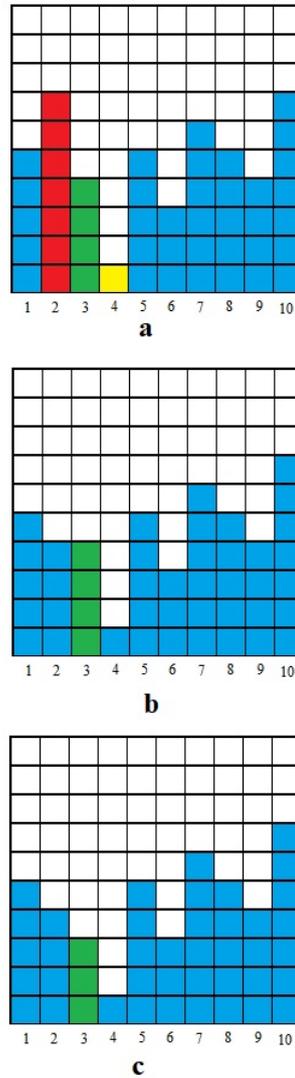


FIGURA 4.1: O mecanismo de corrosão em uma dimensão: **(a)** regra 1 o sítio  $i = 3$  (cor verde) é escolhido aleatoriamente; **(b)** regra 2 ocorre a interação entre o sítio escolhido  $i = 3$  e seus vizinhos próximos  $i = 2, 4$ ; **(c)** regra 3 o sítio escolhido tem sua altura reduzida em uma unidade [57].

A figura (4.2) apresenta a rugosidade  $w(t)$  como uma função do tempo  $t$  para o modelo de corrosão em 1+1 dimensão, utilizando  $L = 200$  e condições de contorno periódicas e uma média de 10.000.000 experimentos. Iniciando com uma superfície

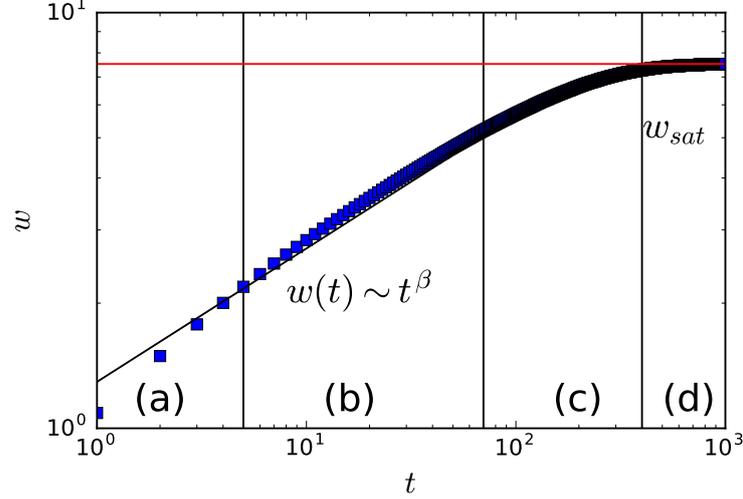


FIGURA 4.2: A rugosidade  $w(t)$  como função do tempo para o modelo de corrosão de 1+1 dimensão. Divida em quatro regiões principais [57]

plana  $h_i(t=0) = 0$  e aplicando as regras (1), (2) e (3) do modelo de corrosão e a equação (2.2) para obter  $w(t)$  realizamos um ajuste na forma  $w(t) = w_{sat}(1 - \exp(-t/t_\times))^\beta$ , onde  $w_{sat}$  é a rugosidade de saturação,  $t_\times$  é o tempo característico e  $\beta$  o expoente de crescimento. No gráfico apresenta-se quatro regiões: (a) para tempos curtos,  $t < t_0 \approx 5$  não há correlações entre os vizinhos caracterizando uma deposição aleatória onde  $w(t) \sim t^{1/2}$ ; (b)  $5 < t < 70$ , é uma região da lei de potência  $w(t) \sim t^\beta$ ; (c) é a região de crossover  $70 < t < 400$ ; (d) corresponde a região de saturação  $w(t) \sim w_{sat}$  para tempos  $t > 400$ . A partir do ajuste da curva foi obtido a rugosidade de saturação  $w_{sat} = 7.5228(6)$ , o tempo característico  $t_\times = 167.1(2)$ , i.e., a saturação ocorre para  $t \gg t_\times$  como mostrado na região (d), e o valor  $\beta = 0.3438(3)$  que é próximo do valor exato para KPZ  $\beta = 1/3$ .

Alves e colaboradores investigaram o modelo de corrosão (**Etching Model**) em 1 + 1 dimensões e determinaram o expoente de rugosidade exatamente  $\alpha = 1/2$ . O que mais uma vez fortemente sugere um comportamento KPZ.

## 4.2 Dinâmica do modelo de corrosão

Considerando inicialmente as regras (1) e (3) do modelo de corrosão, que corresponde ao modelo da deposição aleatória, a equação contínua da evolução da altura pode ser descrita pela seguinte equação:

$$\frac{\partial h(\vec{x}, t)}{\partial t} = \xi(\vec{x}, t), \quad (4.1)$$

onde  $\xi(\vec{x}, t)$  corresponde as flutuações aleatórias e obedece as equações (2.12 e 2.13), o que é de se esperar, visto que ao escolher aleatoriamente um sítio e simplesmente depositar uma partícula obtemos uma superfície que não irá saturar, devido a falta de correlações entre o sítio escolhido e seus vizinhos. Podemos analisar a intensidade do parâmetro  $D$  partindo da relação (2.13)  $\langle \xi(\vec{x}, t)^2 \rangle = \sum_{j=1}^d \langle \xi(\vec{x}_j, t)^2 \rangle = d \langle \xi(\vec{x}_1, t)^2 \rangle$ . A frequência  $\omega_0 = 1/\Delta t$  do ruído é a frequência que conduz todos os processos e conseqüentemente

$$D = \omega_0 d. \quad (4.2)$$

Isto é semelhante à difusão em  $d$  dimensões com um ruído branco [58, 59], onde o deslocamento médio quadrático é  $\langle r^2(t) \rangle = 2D_d t$  onde  $D_d = D_1 d$ .

Contudo, a regra (2) deste modelo nos fornece uma relação entre o sítio  $i$  e seus vizinhos  $j$  que ocasiona um crescimento lateral característico dos modelos KPZ. Esta regra pode alterar a altura do sítio  $h_j(t + \Delta t)$  e podemos resumir na seguinte relação,

$$h_j(t + \Delta t) = h_j(t) + [h_i(t) - h_j(t)] \times p_{i,j}, \quad (4.3)$$

onde  $p_{i,j}$  é uma probabilidade com a seguinte propriedade

$$p_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } h_j > h_i \\ 0 & \text{se } h_j \leq h_i. \end{cases} \quad (4.4)$$

Assim que o processo de deposição se inicia consideramos as configurações do espaço amostral de probabilidade e após o processo de normalização surge a função de distribuição de probabilidade  $P_L(\eta, t)$  para obter uma diferença de altura  $\eta = h_i - h_j$  entre o sítio  $i$  e seus primeiros vizinhos  $j$  em um instante de tempo  $t$ .

### 4.3 Probabilidade da diferença das alturas

A Probabilidade da diferença das alturas  $P_L(h_i - h_j, t)$  precisa satisfazer as seguintes propriedades:

- I No limite contínuo  $L \rightarrow \infty$ ,  $\Delta t = 1/L^d \rightarrow 0$  e  $P_L(\eta, t) \rightarrow P(\eta, t)$ , isto é, ao considerar neste limite queremos que a probabilidade da diferença das alturas não dependa do tamanho sistema.
- II Após iniciar as correlações durante o processo de crescimento a probabilidade deve mudar rapidamente para que a distribuição não mude nas regiões (b), (c) e (d), i.e., nas regiões da dinâmica de KPZ a probabilidade  $P_L(\eta, t)$  não deve mudar muito com o tempo.

Na figura (4.3(a)), mostramos a evolução da função de distribuição da probabilidade  $P(\eta, t)$  como uma função do tempo  $t$  para o modelo de corrosão em 1+1 dimensões. Usamos os mesmos dados da figura (4.2). Consideramos apenas  $\eta \geq 0$  em acordo com a regra (2) do modelo e consideramos o primeiro vizinho com as seguintes diferenças de alturas:  $\eta = 0, 1, 2, 3$ , já que  $P(\eta)$  diminui bastante a medida que o valor de  $\eta$  cresce. Note que iniciando em  $t = 0$ , todos  $h_i = 0$ , significa uma superfície plana, logo  $\eta = 0$  e conseqüentemente  $P(0, 0) = 1$  e  $P(\eta \neq 0, 0) = 0$ . Para cada  $\eta$ ,  $P(\eta, t)$  evolui rapidamente, e até o final da região (a) da figura (4.2), onde inicia as correlações, obtemos uma probabilidade que não muda para pequenos valores de  $\eta$ . Na figura (4.3(b)), mostramos a função de distribuição de probabilidade  $P(\eta, t)$  como uma função da diferença da altura  $\eta = h_i - h_j$ , novamente utilizamos os mesmos dados da figura (4.2). Observamos que nas regiões (b), (c) e

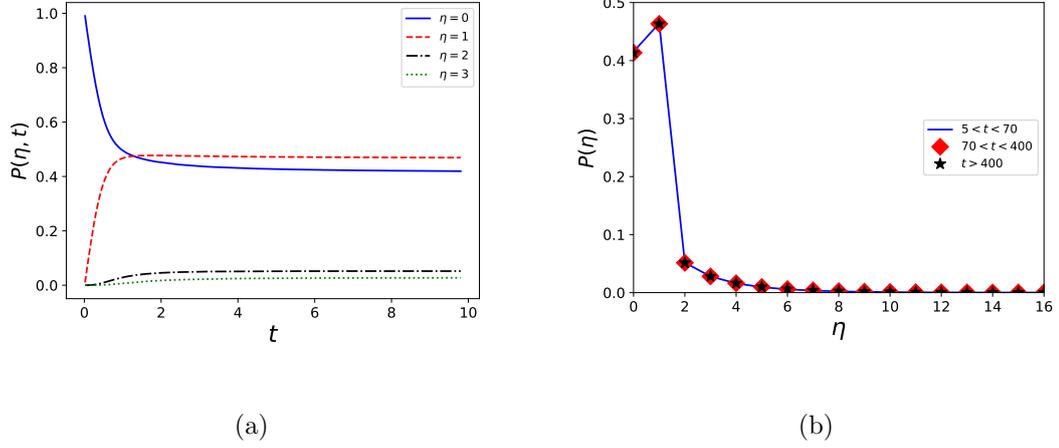


FIGURA 4.3: Evolução da função de distribuição da probabilidade  $P(\eta, t)$ : (a)  $P(\eta)$  como função do tempo ( $\eta = 0, 1, 2, 3$ ). A probabilidade estabiliza rapidamente quando inicia as correlações no fim da região (a). (b) Mostramos  $P(\eta)$  como uma função de  $\eta$  para as regiões (a), (b) e (c) da figura (4.2). Novamente vemos que  $P(\eta)$ , em uma aproximação, não muda com o tempo [57].

(d) a probabilidade não varia muito com o tempo. Estas curvas correspondem as regiões onde ocorre a dinâmica do crescimento não-linear. Pode-se notar que todas as curvas se sobrepõem, confirmando o resultado mostrado na figura (4.3(a)) de que, em boa aproximação, a probabilidade não varia muito com o tempo. Além disso, temos que  $P(1) > P(\eta \neq 1)$ , i.e., que pela regra (3) do modelo resulta que  $\eta = 1$  é a configuração de maior probabilidade, as outras probabilidades  $P(\eta \geq 2)$  decrescem muito rápido com  $\eta$ . Como pontuado por Dasgupta et tal [60], versões discretizadas de equações de crescimento não-lineares que são geralmente estudadas têm uma instabilidade genérica em que pilares isolados (ou ranhuras) em uma interface plana cresce com o tempo quando sua altura (ou profundidade) excede um valor crítico. Conseqüentemente, é muito conveniente que  $P(\eta)$  é muito pequeno para grandes valores de  $\eta$ .

Na figura (4.4) mostramos a evolução da diferença da altura  $\eta = h_i(t) -$

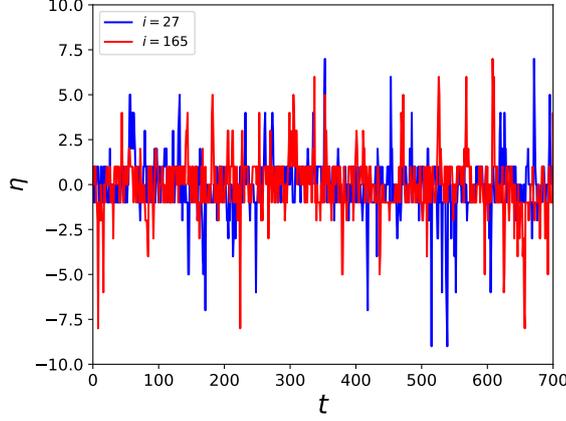


FIGURA 4.4: A diferença de altura  $\eta = h_i(t) - h_{i+1}(t)$  como função do tempo  $t$ . Para as duas curvas escolhemos aleatoriamente,  $i = 27$  e  $i = 65$ . As curvas mostram que a mudança  $\eta$  ocorre para todas as regiões da figura (4.2).

$h_{i+1}(t)$  entre um sítio e seu vizinho como função do tempo para o modelo de corrosão em 1+1 dimensão. Utilizamos os mesmos dados usados na figura (4.2) e escolhemos aleatoriamente dois sítios.  $i = (27, 165)$  e observamos sua evolução. Isso corresponde à uma evolução de um dos experimentos da figura (4.2). Observe que a mudança mais provável é  $\eta = \pm 1$ , que corresponde a uma consequência da regra 3 do modelo; também podemos observar que  $\eta = h_i(t) - h_{i+1}(t)$  nunca se estabiliza, mesmo quando nos movemos para a região de saturação.

Na tabela (4.1) mostramos os três primeiros valores de  $P(\eta, t)$  para as quatro regiões, onde cada valor é a média na região. Observamos que nas regiões (b), (c) e (d) os valores são iguais dentro do erro. Este fato enfatiza os resultados da figura (4.3) em que  $P(\eta)$  não varia muito com o tempo nas regiões de dinâmica de KPZ, então para nosso trabalho podemos desconsiderar a dependência temporal e reescrever a probabilidade na forma  $P(\eta)$ . Como  $P(\eta)$  depende somente de alguns modos discretos então estabiliza em um curto intervalo de tempo, enquanto a distribuição das flutuações de alturas  $f(h, t)$  depende de todo o espectro do comprimentos de onda e estabiliza para tempos  $t > t_\times$ . Uma importante propriedade das distribuições

Região	$P(0)$	$P(1)$	$P(2)$
(a)	0.51(1)	0.43(2)	0.036(6)
(b)	0.414(5)	0.467(5)	0.052(2)
(c)	0.411(2)	0.466(7)	0.0517(8)
(d)	0.411(3)	0.466(2)	0.0516(8)

TABELA 4.1: O valor médio de  $P(\eta)$  para as quatro regiões apresentadas na figura(4.2) para  $\eta = 0, 1, 2$ .

de altura é que sejam invariantes sobre uma mudança de escala [20, 61, 62]. Para o modelo de corrosão com condições de contorno periódicas a invariância da escala da função  $f(h, t)$  tem sido observada [50, 63, 64]. Para  $P(\eta)$  temos um número finito de configurações que estatisticamente é uma medida invariante no espaço. Como mencionado anteriormente, a dinâmica para pequenos comprimentos de ondas conduz o sistema rapidamente ao equilíbrio com uma invariância na escala local.

#### 4.3.1 Conexão entre o modelo de corrosão e a equação KPZ

Considerando os argumentos (I) e (II) da função  $P(\eta)$  a equação (4.3) pode ser escrita na seguinte forma diferencial

$$h_j(t + \Delta t) - h_j(t) = \frac{\partial h_j}{\partial t} \Delta t = \omega_0 \cdot \eta \cdot P(\eta) \Delta t. \quad (4.5)$$

Onde  $\omega_0$  é a frequência que descreve o processo de crescimento estocástico. Apesar da escolha do sítio  $i$  iremos focar nas mudanças que ocorrem no sítio vizinho  $j$ . No limite contínuo podemos escrever as variáveis discretas em variáveis contínuas  $j \rightarrow \vec{x}$ ,  $i \rightarrow \vec{x} + \vec{\delta}_{ji}$ , onde  $\vec{\delta}_{ji} = -\vec{\delta}_{ij}$  é o vetor que conecta  $i$  com seus vizinhos  $j$  e desta forma descrever as alturas dos sítios também na forma contínua  $h_j(t) \rightarrow h(\vec{x}, t)$  e  $h_i(t) \rightarrow h(\vec{x} + \vec{\delta}_{ji}, t)$ . Expandindo em série de Taylor  $h$  em torno de  $\vec{x}$  e  $P(\eta)$  em

torno de  $\eta = 0^+$ , de forma a manter a regra (2) do modelo de corrosão e mantendo os termos de segunda ordem da diferença das alturas e o termo de primeira ordem da função  $P(\eta)$

$$P(\eta) = P(0) + \frac{\partial P(\eta = 0^+)}{\partial \eta} \cdot \eta + O(\eta^2), \quad (4.6)$$

onde

$$\eta = h_i - h_j = \vec{\nabla} h(\vec{x}, t) \cdot \vec{\delta}_{ji} + \frac{1}{2} \vec{\nabla}^2 h(\vec{x}, t) (\vec{\delta}_{ji})^2.$$

Introduzindo a equação (4.6) na equação (4.5) e substituindo  $\eta$  podemos reescrever (4.5) e obter a equação contínua

$$\frac{\partial h_j}{\partial t} = \frac{h(\vec{x}, t)}{\partial t} = C_1 \left[ \vec{\nabla} h \cdot \vec{\delta}_{ji} \right] + C_2 \left[ \vec{\nabla}^2 h + (\vec{\nabla} h)^2 \right] (\vec{\delta}_{ji})^2. \quad (4.7)$$

Adicionando esta equação à equação (4.1) e somando sobre todos os  $N_n$  vizinhos próximos do sistema podemos obter para uma rede perfeita<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \vec{\delta} &= \sum_j \vec{\delta}_{ji} = 0 \\ \vec{\delta}^2 &= \sum_j (\vec{\delta}_{ji})^2 = da^2 = d, \end{aligned}$$

onde  $a$  é o comprimento unitário da rede e  $d$  é a dimensão do sistema.

Logo, podemos comparar com a equação KPZ (3.1) e estabelecer as seguintes relações para o parâmetro da tensão superficial  $\nu$  e para o parâmetro não-linear  $\lambda$ , respectivamente

$$\nu = \frac{\omega_0 d}{2} P(0) = \frac{D}{2} P(0) \quad (4.8)$$

e

---

<sup>1</sup>Caso tenhamos uma rede com defeito o termo  $\vec{\nabla} h$  não garante a simetria de  $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ , contudo uma simples transformação de coordenada elimina esta assimetria.

$$\lambda = 2\omega_0 d \frac{dP(\eta = 0^+)}{d\eta}. \quad (4.9)$$

Onde nestas expansões os termos de ordem altas são desprezados já que no limite de grandes comprimentos de onda estes termos não afetam a dinâmica de crescimento.

Então, encontramos uma relação dos parâmetros  $\nu$  e  $\lambda$  com a probabilidade da diferença das alturas  $P(\eta)$ . Apartir deste resultado fica claro que esses parâmetros não são fenomenológicos conforme definido inicialmente por Kardar et al [41], mas podemos obtê-los diretamente a partir de  $P(\eta)$  e das regras do autômato celular. Como não temos uma expressão exata para  $P(\eta)$  nos resta estudar suas propriedades.

Uma solução seria uma aproximação polinomial, onde uma função contínua  $P(\eta)$  para  $\eta$  pequeno pode ser escrito como

$$P(\eta) = g(\eta) = \sum_{j=0}^N A_j \eta^j. \quad (4.10)$$

Cujo termo não-linear de KPZ obtido da equação (4.9) seria  $\lambda = 2 \cdot d \cdot A_1$ . Considerando  $\lambda'$  o termo não linear conectado com a função  $P(\eta')$ , i.e.,  $\eta' = b^\alpha \eta$ , temos

$$\lambda' = 2d\omega_0 \frac{dP(\eta' = 0^+)}{d\eta'} = 2d\omega_0 \cdot A_1 = 2d\omega_0 \frac{dP(\eta = 0^+)}{d\eta} = \lambda. \quad (4.11)$$

Da equação (4.11) temos que caso  $P(\eta)$  seja dado por um polinômio  $g(\eta)$ , então  $\lambda' = \lambda$ , ou seja, esse termo seria invariante sobre a transformação. A invariância do termo  $\lambda$  forneceria uma validação da Invariância de Galileu. Note que  $P(0)$  é invariante e consequentemente  $\nu$  também é invariante. Como derivadas de altas ordens não estão na estrutura de KPZ logo não focamos neste trabalho.

Supondo um polinômio de grau  $N$ , onde  $N$  seja o número de pontos da figura (4.3(b)) onde o polinômio iria passar dado pela equação (4.10), o termo não-linear seria dado por  $\lambda = 2dA_1$ . Considerando que  $P(m) = g(m)$  com  $m = 0, 1, 2, \dots, N$  temos um sistema que nos permite obter os valores dos coeficientes do polinômio  $A_i$ , mais especificamente o termo  $A_1$  e desta forma obtemos  $\lambda$ . Contudo vemos na figura (4.5) que os valores de  $\lambda$  oscilam e não permite obter um valor correto.

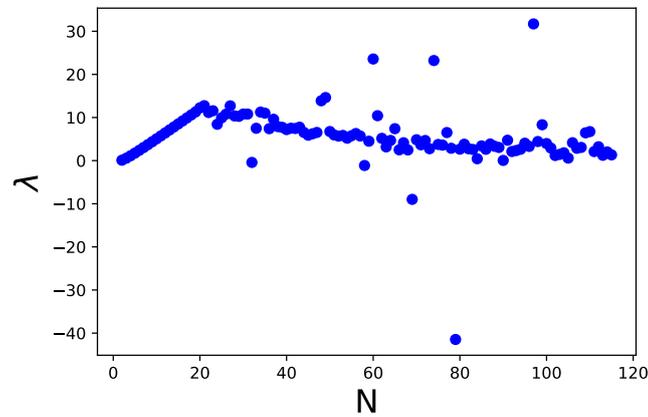


FIGURA 4.5: Termo não-linear  $\lambda$  em função do número de pontos  $N$  considerando uma aproximação polinomial.

Desta forma, para obter a  $P(\eta)$  para o modelo de corrosão, a aproximação polinomial (4.10) não se mostra uma solução adequada pois não nos permite obter uma expressão para  $\lambda$ . Considerando a figura (4.6) podemos ver que para o caso  $N = 10$  o polinômio passa pelos primeiros 10 pontos, contudo o valor máximo deste polinômio não coincide o ponto  $P(\eta = 1)$  que corresponde ao estado mais provável.

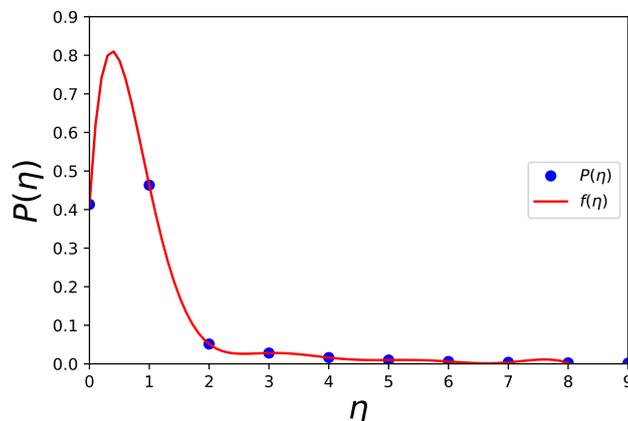


FIGURA 4.6:  $P(\eta)$  para o modelo de corrosão e a função  $f(\eta)$  para  $N = 10$ .

Então na tabela (4.3.1) temos os valores de  $\lambda$  para  $d = 1$  e  $d = 2$  onde

podemos ver que os valores diferem da literatura [65], onde para  $d = 2$  temos  $\lambda = 2.147(4)$ .

N	$\lambda(d = 1)$	$\lambda(d = 2)$
2	0.10	0.2
3	0.28	1.12
4	1.13	2.25
5	1.74	3.48
6	2.38	4.76
7	3.0	6.0
8	3.70	7.41
9	2.19	8.75
10	5.06	10.1

TABELA 4.2: Valores de  $\lambda$  considerando  $P(\eta)$  um polinômio de grau  $N = 2, \dots, 10$  para  $d = 1, 2$

Outro resultado importante deste trabalho está na equação (4.9) que conecta o termo  $\lambda$  com a derivada de  $P(\eta)$  para o modelo de corrosão (**Etching Model**). Quando estudamos um modelo de crescimento temos como um dos objetivos de obter os expoentes de escala e determinar a classe de universalidade. Contudo, em muitas situações obter esses expoentes é uma tarefa difícil devido aos efeitos de tamanho finito, que podem ser relevantes e não conseguimos superá-los utilizando a simulações.

Podemos citar para o caso de estudarmos modelos em 1+1 dimensão onde queremos calcular o expoente de rugosidade  $\alpha$ , que seja para KPZ ou EW, temos o

mesmo valor de  $\alpha = 1/2$ . Então, um método para determinar a classe de universalidade é determinar o termo não-linear  $\lambda$  [66, 67, 68, 69]. Logo, ao obter a curva de  $P(\eta)$  e assim sua derivada sendo não-nula, podemos concluir que o termo  $\lambda$  é diferente de zero e o modelo em estudo corresponde à classe de KPZ, caso contrário, a derivada se anule no ponto  $\eta = 0^+$  então a equação de crescimento apresenta apenas o termo linear que corresponde aos modelos da classe de EW. Podemos observar este caso para uma deposição aleatória com relaxação superficial (**DARS**).

### 4.3.2 $P(\eta)$ para DARS

Obter  $P(\eta, t)$  não é uma tarefa fácil, como exemplo simples determinamos  $P(\eta, t)$  para sistemas que não apresentam crescimento lateral ( $\lambda = 0$ ), tais como a deposição aleatória com relaxação superficial (**DARS**) que pertence à classe de Edwards-Wilkinson, ou para qualquer distribuição independente. Considere que no sítio  $i$  temos a distribuição  $f(h, t)$  e para seus vizinhos  $j$  temos  $f(h + \eta, t)$ , e que são independentes, então  $P(\eta, t)$  pode ser definido como

$$P(\eta, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(h, t)f(h + \eta, t)dh, \quad (4.12)$$

isso implica a soma de todas as probabilidades.

A derivada da equação (4.12) temos

$$\frac{dP(\eta, t)}{d\eta} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(h, t)\frac{df(h, t)}{dh}dh = \frac{1}{2}f(h)^2|_{-\infty}^{+\infty} = 0 \quad (4.13)$$

e onde a partir da equação (4.9), encontramos  $\lambda = 0$ , como esperado para qualquer distribuição não-correlacionada como conhecido nos modelos DARS e EW e portanto a prova é exata.

Na figura (4.7) apresentamos as funções de distribuição de probabilidade para o modelo DARS: em (a),  $P(\eta)$  como função de  $\eta$  e em (b),  $f(h)$  como a função de  $h$ . As simulações foram feitas com  $L = 200$  para 1 + 1 dimensão, com uma média

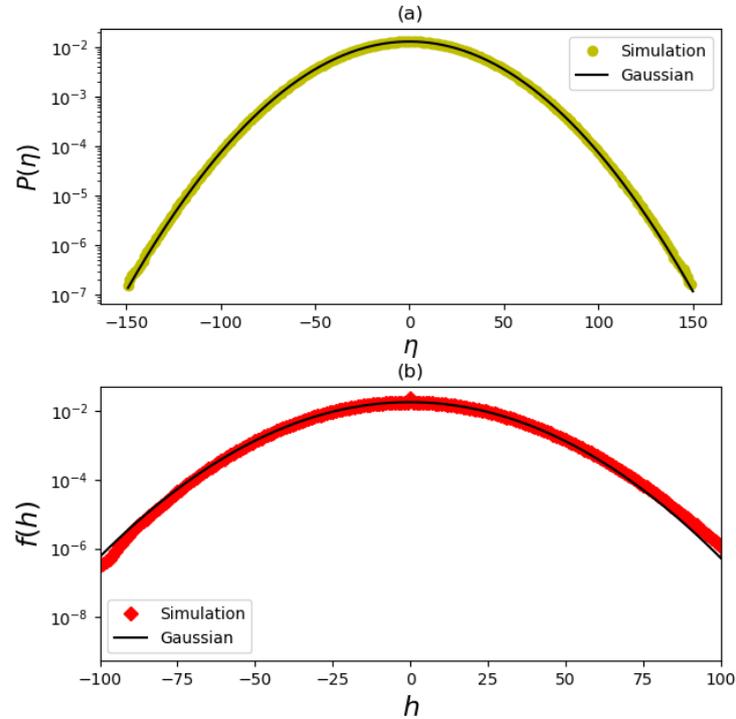


FIGURA 4.7: As funções de distribuição de probabilidade para DARS. (a)  $P(\eta)$  como função de  $\eta$ ; (b)  $f(h, t)$  como função de  $h = h_i - \langle h \rangle$ .

de  $4 \times 10^6$  simulações. Considerando as condições iniciais  $P(0) = 1$  e  $P(\eta \neq 0) = 0$ , nós obtemos  $f(h)$  e  $P(\eta)$  independentemente.

Depois de algum tempo, nós vemos a evolução de ambas as curvas como uma distribuição Gaussiana. Para um tempo específico, e.g.,  $t = 500$  nós obtemos um desvio quadrático médio  $\sigma_\eta = 31.173(3)$  e  $\sigma_h = 21.941(3)$ . Além disso, computamos o fator não-gaussiano e a assimetria que são nulos. Note que se introduzimos uma função Gaussiana  $f(h)$  na equação (4.12) obtemos uma função Gaussiana para  $P(\eta)$  com  $\sigma_\eta = \sqrt{2}\sigma_h$ , em acordo com os dados numéricos  $(\sigma_\eta/\sigma_h)^2 = 2.018(9)$ .

Para o modelo de corrosão, RSOS, SS não há uma distribuição exata para  $P(\eta)$ . Então precisamos de uma extensão da equação (4.12) para uma forma mais geral

$$P(\eta, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dh \int_{-\infty}^{+\infty} f(h, t) dh' \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \kappa(h, h', t, t') f(h' + \eta, t), \quad (4.14)$$

onde  $\kappa(h, h', t, t')$  é uma kernel não-local. Este é o problema geral da convolução em uma rede [70, 71]. Para modelos de crescimento que apresentam uma distribuição não-correlacionada logo  $\kappa(h, h', t, t') = \delta(h-h')\delta(t-t')$  retornamos a equação (4.12). Uma informação importante é que a integral (4.14) é invariante sobre a transformação  $h \leftrightarrow h'$ ,  $\kappa(h, h', t, t') = \kappa(h', h, t, t')$  como também pela transformação  $t \leftrightarrow t'$ , então  $\kappa(h, h', t, t') = \kappa(h, h', t', t)$ . Para o modelo de corrosão  $P(\eta, t)$  é uma função que estabiliza muito rápido, mais rápido que  $f(h, t)$ , então o kernel deve ser peculiar e refletir todas as possibilidades. Não sabemos como é  $\kappa$  e não temos um procedimento para obtê-lo. Devemos apenas pontuar aqui que não é uma tarefa fácil obter  $P(\eta, t)$  mesmo se tivermos  $f(h, t)$ .

#### 4.4 Expoente da rugosidade $\alpha$

A equação de Edwards-Wilkinson é a forma linear da equação de KPZ, então a equação (2.16) para 1+1 dimensão pode ser integrada e produzir a solução

$$w(t) = w_{sat}[1 - \exp(-\theta) + \sqrt{\pi\theta}(1 - \text{erf}(\sqrt{\theta}))]^{1/2}. \quad (4.15)$$

Aqui o tempo é dado em unidades do tempo de saturação  $t_{sat}$  com  $\theta = t/t_{sat}$  e a rugosidade de saturação é dada por

$$w_{sat} = \sqrt{\tilde{b}L}, \quad (4.16)$$

com  $\tilde{b} = \frac{D}{4\pi^2\nu}$ . Krug et al [20, 72] obtiveram uma expressão similar para o modelo SS em uma dimensão com

$$\tilde{b} = \frac{A}{12}, \quad (4.17)$$

onde

$$A = \frac{D}{2\nu}. \quad (4.18)$$

O parâmetro  $A$  é associado com a velocidade de interface [20, 72, 73] e também determina a amplitude da rugosidade de saturação  $w_{sat}$  dada pela equação (4.16). Para o modelo de corrosão utilizando a equação (4.8) e a equação (4.18) obtemos para o parâmetro  $A = 1/P(0)$ , onde na tabela (4.4) temos os valores para  $d = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  onde podemos ver que para  $d = 2$  o valor de  $A$  concorda com o valor encontrado por Carrasco et al [65] de  $A = 3.629(9)$ .

$d$	1	2	3	4	5	6
$P(0)$ [57]	0.411(3)	0.276(2)	0.188(1)	0.14(1)	0.108(2)	0.069(9)
$A$	2.43(4)	3.62(3)	5.32(1)	7(1)	9.26(3)	14.5(1)

TABELA 4.3: Valores do parâmetro  $A$  para o modelo de corrosão.

Nós propomos generalizar a equação (4.16) para todas as dimensões

$$w_{sat} = (\tilde{b}L)^\alpha, \quad (4.19)$$

onde para o modelo de corrosão

$$\tilde{b} = (12P(0))^{(-1)}. \quad (4.20)$$

Onde utilizamos nesse último passo as equações (4.2) e (4.8) do modelo de corrosão e a equação (4.17).

Então a partir das equações (4.19)-(4.20) e da curva da rugosidade de saturação com o tamanho do sistema  $w_{sat} \times L$  obtêm-se os valores de  $\tilde{b}$  e de  $\alpha$ . Contudo, um ajuste pode ficar mais preciso se um dos parâmetros já está fixado. A equação (4.20) mostra uma relação entre o parâmetro  $\tilde{b}$  e o valor de  $P(0)$ , que já é conhecido para o modelo de corrosão e através do ajuste da equação (4.19) obtemos o expoente da rugosidade  $\alpha$  com mais precisão.

$d$	1	2	3	4	5	6
$\alpha$ [51]	1/2	0.369(8)	0.280(7)	0.205(3)	0.154(2)	0.117(1)
$\alpha$ [74]	1/2	0.395(5)	0.29(1)	0.245(5)	0.22(1)	
$\bar{\alpha}$	1/2	0.382(7)	0.285(9)	0.225(4)	0.187(6)	0.117(1)
$P(0)$ [57]	0.411(3)	0.276(3)	0.188(1)	0.14(1)	0.108(2)	0.069(9)
$\tilde{\alpha}$	0.5031(4)	0.382(2)	0.280(2)	0.211(1)	0.159(9)	0.111(1)
$\alpha$ [75]	1/2	0.38196	0.26795	0.20871	0.17157	0.0.14590

TABELA 4.4: Valores do expoente da rugosidade: Primeira linha para o modelo de corrosão [51]; Segunda linha para o modelo  $d$ -mer [74]; Terceira linha o valor médio das duas primeiras linhas; Quarta linha o valor de  $P(0)$  do modelo de corrosão [57]; Quinta linha o valor de  $\alpha$  determinado pelas equações (4.19) e (4.20); Sexta linha o valor de  $\alpha$  proposto por Gomes-Filho, Oliveira e Penna para a classe KPZ.

Na tabela (4.4) mostramos alguns dos valores de  $\alpha$  e  $P(0)$  como função da dimensão  $d$ . Na primeira linha temos os valores de  $\alpha$  obtidos por Rodrigues et al [51] para o modelo de corrosão, na segunda linha os valores de Odor et al [74] para o modelo  $d$ -mer. Ambos os modelos pertencem a classe de universalidade KPZ, conseqüentemente, o valor médio  $\bar{\alpha}$  que está exibido na terceira linha. No nosso trabalho para o modelo de corrosão [57] obtemos o valor de  $P(0)$  que está na quarta linha, então a partir da equação (4.20) obtemos o valor de  $\tilde{b}$  que ao ser introduzido na equação (4.19) obtemos o valor do expoente  $\tilde{\alpha}$  que está na quinta linha. Naturalmente, todos os métodos discutidos estão sujeitos a erros e a efeitos de tamanhos finitos. Entretanto, pelo que expusemos aqui, acreditamos que  $\tilde{\alpha}$  é nossa melhor proposta. Por exemplo  $\tilde{\alpha}(1)$  possui um erro de 0.6% em relação ao valor exato de 1/2, enquanto  $\tilde{\alpha}(2) = 0.382(2)$  está perto do melhor resultado numérico disponível na literatura  $\alpha = 0.3869(4)$  [76] e os valores  $\alpha = 0.383(8)$  [53],  $\alpha = 0.381$

[77] para o modelo de corrosão. Para altas dimensões  $d > 2$ , como esperado, os valores encontrados na literatura não são precisos.

Finalmente vamos comparar nossos resultados com os valores propostos recentemente por Gomes-Filho, Oliveira e Penna [75]

$$\alpha = \frac{d + 1 - \Delta}{2}, \quad (4.21)$$

onde  $\Delta = \sqrt{(d + 1)^2 - 4}$ . Esses valores são exibidos na sexta linha. Observe que os valores simulados na quinta linha são próximos para  $d = 2$ , mas tornam-se imprecisos quando  $d$  aumenta como esperado.

Na figura (4.8) plotamos  $w_{sat}$  como função de  $L^\alpha$  para o modelo de corrosão em  $d + 1$  dimensões. Os pontos são da simulação e a linha é do ajuste, i.e.,  $w_{sat} = (\tilde{b}L)^\alpha$ . (a)  $w_{sat}$  como função de  $L^\alpha$ ; (b) mostramos  $\tilde{w}_{sat} = w_{sat}/\tilde{b}^\alpha$  versus  $L^\alpha$ , todos os pontos coincidem em uma linha. Então é importante destacar que vários métodos desenvolvidos fornecem diversos resultados que concordam entre si, mostrando a eficácia do método desenvolvido neste trabalho.

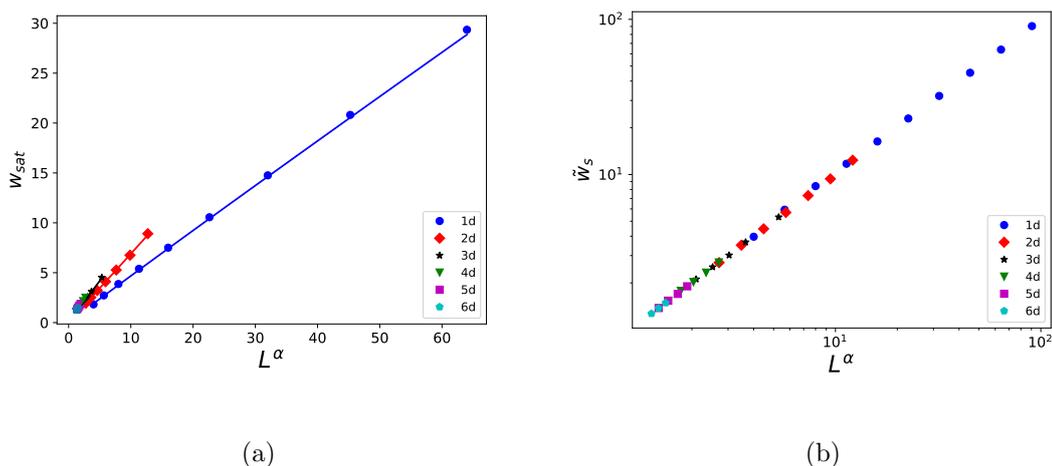


FIGURA 4.8:  $w_{sat}$  como função de  $L^\alpha$  para o modelo de corrosão de  $d + 1$  dimensões;

(a) Aqui a inclinação de  $a$  fornece a probabilidade  $P(0)$ ; (b) Aqui  $\tilde{w}_{sat} = w_{sat}/\tilde{b}^\alpha$  como função de  $L^\alpha$ , neste caso todos os dados se cruzam em uma única linha

## Capítulo 5

### Modelo de corrosão e o Modelo SS

No capítulo anterior demonstramos que no limite contínuo o modelo de corrosão produz a equação de KPZ em um espaço de dimensão  $d + 1$  [57]. Neste capítulo iremos demonstrar que o mesmo método pode ser aplicado ao modelo SS (**Single-Step model**) levando a mesma equação de KPZ já descrita na literatura.

#### 5.1 O modelo SS

O modelo Single-Step (**SS**) ganhou grande importância ao logo dos últimos anos [20, 21, 72, 73, 78]: primeiro porque provou ser um modelo KPZ. Segundo, devido à sua conexão com outros modelos, tais como o processo de exclusão simples assimétrica [78], o modelo six-vertex [21, 79, 80] e ao modelo Ising cinético [21, 81]. O modelo SS é definido de tal maneira que a diferença de altura entre dois vizinhos  $\eta = h_i - h_j$  é apenas  $\eta = \pm 1$ . Consequentemente é fácil associá-lo ao modelo de Ising. Considerando um hipercubo de tamanho  $L$  e volume  $V = L^d$ . Nós selecionamos um sítio  $i$ , comparamos sua altura com a de seus vizinhos e aplicamos as regras:

1. Em um instante de tempo escolhemos aleatoriamente um sítio  $i \in V$ .
2. Se  $h_i(t)$  é um mínimo local, então  $h_i(t + \Delta t) = h_i(t) + 2$ , com probabilidade  $p$ .
3. Se  $h_i(t)$  é um máximo local, então  $h_i(t + \Delta t) = h_i(t) - 2$ , com probabilidade

$q$ .

Onde  $p + q = 1$ .

Na figura (5.1) apresentamos a evolução temporal da rugosidade para o modelo SS em 2+1 dimensões para diferentes tamanhos de sistema, em escala logarítmica, em (a) apresentamos  $w(t)$  para diferentes valores de  $L$ , podemos observar que inicialmente a rugosidade cresce com o tempo e então ela satura, tal como foi mostrado na figura (2.4) muito comum na área de dinâmica de crescimento. Em (b) os dados foram rescalonados segundo a relação de Family-Vicsek (2.7) e observamos que todas as curvas se encontram. Dessa simulação obtivemos os seguintes valores para os expoentes de escala do modelo SS em 2+1 dimensões  $\alpha = 0.401(5)$ ,  $\beta = 0.26(1)$  e  $z = 1.55(3)$  que concordam com o trabalho de Meakin et al [21] sobre o modelo SS, além de serem próximos dos valores para o modelo de corrosão (**Etching Model**) para 2+1 dimensão [53] mostrando que ambos os modelos possuem expoentes de escala com valores próximos e confirmando que ambos pertencem a classe KPZ [82, 83]. Ademais confirmações a relação de escala para o modelo SS  $z = \alpha/\beta = 1.54(8)$  e também a Invariância de Galileu  $\alpha + z = 1.95(4)$  cujo valor se aproxima do apresentado na equação (3.9).

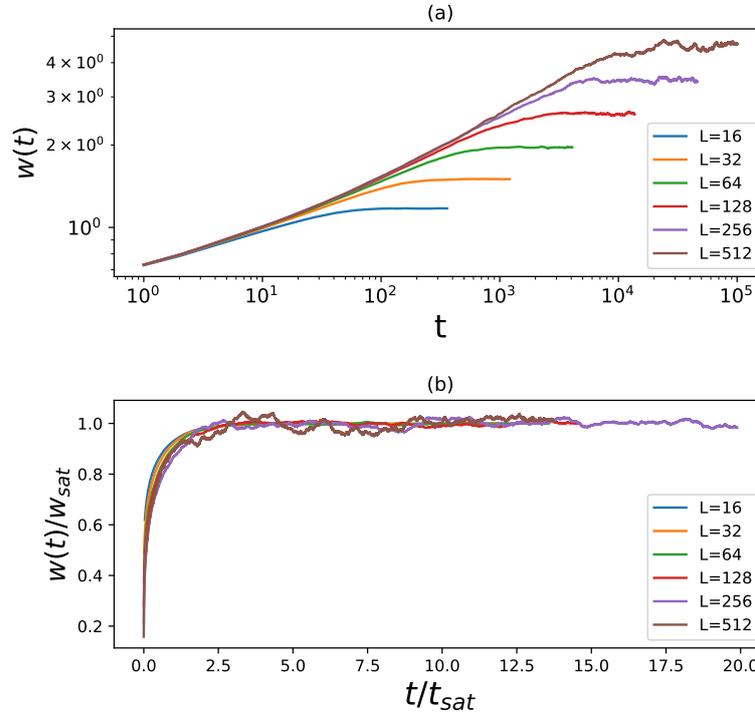


FIGURA 5.1: Evolução temporal da rugosidade  $w(t)$  para o modelo SS em 2+1 dimensões com  $p = 0.90$ ; (a) a evolução temporal da rugosidade para diferentes tamanhos do sistema; (b) apresentamos dos dados escalonados  $w(t)/w_{sat} \times t/t_{sat}$

### 5.1.1 A conexão entre o modelo de corrosão e o modelo SS

Nesta etapa iremos aplicar o mesmo processo usado para obter a equação KPZ do modelo de corrosão [57] para obter a equação KPZ do modelo SS. Primeiramente, considerando a regra 1 nós temos

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \xi(\vec{x}, t), \quad (5.1)$$

onde  $\xi(\vec{x}, t)$  é um ruído que satisfaz as relações (2.12) e (2.13). Agora precisamos obter  $P(\eta)$  para o modelo SS onde a diferença de altura entre dois vizinhos é

$$\eta = h_j - h_i, \quad (5.2)$$

é apenas igual a  $\eta = \pm 1$ . Assim, as regras 2 e 3 podem ser reescritas na forma

$$h_i(t + \Delta t) = h_i(t) + 2\eta P(\eta), \quad (5.3)$$

cuja a probabilidade de diferença da altura é dada exatamente por

$$P(\eta) = \frac{1}{2} [p + q + \eta(p - q)]. \quad (5.4)$$

Desta forma podemos ver pela equação (5.4) que  $P(1) = p$ , correspondendo ao mínimo local, e  $P(-1) = q$ , corresponde ao máximo local. Desta forma, podemos entender que a transição (5.3) adiciona o termo  $2\eta$  ao sítio  $i$  com uma probabilidade  $P(\eta)$ .

Agora representando o sítio  $i$  pelo vetor  $\vec{x}$  e seu vizinho  $j$  pelo vetor  $\vec{x} + \vec{\delta}$ , com  $|\vec{\delta}| = a$ , onde  $a$  é o espaçamento de rede tal que  $a \ll L$ , podemos reescrever a equação (5.2) como

$$\eta = h_j - h_i = h(\vec{x} + \vec{\delta}, t) - h(\vec{x}, t) = \vec{\delta} \cdot \vec{\nabla} h + \frac{\delta^2}{2} \cdot \vec{\nabla}^2 h(\vec{x}, t) + \dots \quad (5.5)$$

Introduzindo a equação (5.5) e equação (5.4) dentro da equação (5.3) e mantendo apenas os termos de segunda ordem nós obtemos

$$\Delta h = h_i(t + \Delta t) - h_i(t) = \vec{\delta} \cdot \vec{\nabla} h(\vec{x}, t) + \frac{a}{2} \vec{\nabla}^2 h(\vec{x}, t) + \frac{(p - q)a^2}{2} \left[ \vec{\nabla} h(\vec{x}, t) \right]^2. \quad (5.6)$$

Percorrendo toda a rede o termo linear  $\vec{\delta}$  se cancela. Dividindo por  $\Delta t$  e adicionando o termo (5.1) obtemos a equação de KPZ (3.1) com

$$\nu = \frac{\omega_0}{2} \quad (5.7)$$

e

$$\lambda = \omega_0(p - q), \quad (5.8)$$

onde utilizamos  $a = 1$  e  $D$  é dado por (4.2). Os valores  $\nu$  e  $D$  não são definidos na literatura, diferente do termo não-linear  $\lambda$  que está de acordo com os resultados para o modelo SS em 1+1 dimensão [73, 79]. Note que muitos destes autores utilizam parâmetros adimensionais, portanto a frequência  $\omega_0 = 1/\Delta t$  não aparece. De qualquer forma, multiplicando todos os parâmetros  $D$ ,  $\lambda$  e  $\nu$  pela mesma constante  $\omega_0$  não afetará a constante de acoplamento  $g$  definido na equação (3.7), portanto a Física não é alterada. Ao comparar  $\nu$  e  $\lambda$  do modelo de corrosão dados nas equações (4.8) e (4.9), respectivamente, com os valores dados em (5.7) e (5.8) vemos que há a diferença de um fator de  $2d$ , esta diferença se deve que o modelo SS não atua  $2d$  vezes, mas apenas uma vez.

Ademais, a partir das equações (4.2), (4.18) e (5.7) obtemos o parâmetro  $A$  associado ao modelo SS na forma  $A = d$ . Para 1+1 dimensão  $A = 1$  e é independente das probabilidades  $p$  e  $q$  concordando com as previsões teóricas e com as simulações de Daryaei [73]. Contudo para  $d = 2$  há uma dependência explícita em  $p$ , em desacordo com nossos resultados, mesmo assim o seu valor limite  $A \rightarrow A^* = 6/\pi$  é próximo do nosso valor de  $A = 2$ .

Outra diferença importante entre o modelo corrosão e o modelo de SS está no parâmetro  $\lambda$  onde no primeiro ele é fixo enquanto no segundo ele muda de acordo com as probabilidades  $p$  e  $q$ , desta forma ao variar o termo não-linear o modelo SS tem a propriedade de transitar entre a classe EW ( $p = q$ ) e a classe de KPZ. Assim o modelo SS constitui um modelo útil para estudar ambas as classes. Contudo apesar destas diferenças entre os modelos, a equação (5.8), que concorda com os trabalhos publicados [73], foi obtido a partir de um método desenvolvido para o modelo corrosão, que fortalece a conexão entre os modelos e a universalidade do método, além disso obtivemos os parâmetros  $D$  e  $\nu$ .

Na figura (5.2) usamos o modelo SS para observar a evolução de  $P(\eta, t)$  para um sistema de 2+1 dimensões. A curva superior  $\eta = 1$  e a curva inferior

$\eta = -1$ . Usamos um intervalo de tempo  $\Delta t = 1/L^2$ , e condições iniciais  $h_{i,j}(t = 0) = (1 + (-1)^{i+j})/2$ , com condições de contorno periódicas  $L$ . Escolhemos  $L = 256$  e  $p = 0.6$ . É fácil ver no gráfico que a função se estabiliza em uma unidade de tempo mostrando que durante todo o processo  $P(\eta, t) = P(\eta)$  é estável e independente do tempo.

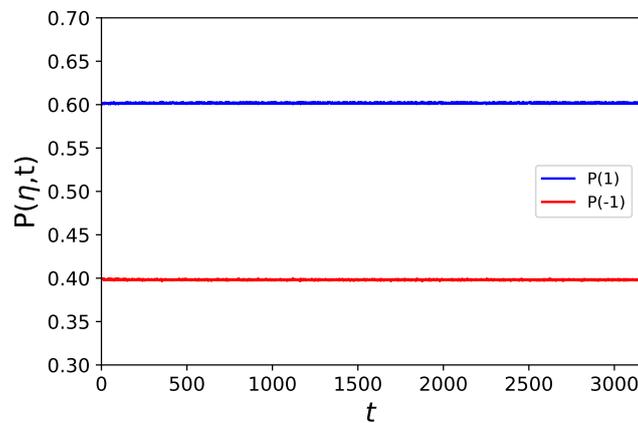


FIGURA 5.2:  $P(\eta)$  como função do tempo para o modelo SS em  $2 + 1$  dimensões; O  $P(\eta)$  são obtidos utilizando as definições do modelo de corrosão e as regras do modelo SS. Para a rede quadrada foi utilizado  $L = 256$ ,  $p = 0.6$  e um intervalo de tempo  $\Delta t = 1/L^2$ , sobre uma média de 40 experimentos. A curva de cima  $P(1)$  e a curva de baixo  $P(-1)$ . Exceto pelos efeitos de flutuação esperado eles concordam que  $P(1) = p$

$$\text{e } P(-1) = q = 1 - p$$

Embora seja geralmente aceito que o modelo SS pertence a classe KPZ quando  $p \neq 0.50$  e pertence a classe EW quando  $p = 0.5$ , a probabilidade de transição entre as classes de universalidade ainda não está fixada. Alguns autores pontuam a existência de uma probabilidade crítica  $p_c$  que define a transição do modelo SS entre KPZ e EW. Nós acreditamos que esta instabilidade é a mesma pontuada por Dasgupta e Sarma [60, 84, 85] na solução numérica da equação de KPZ. Novamente uma vez que nossos parâmetros  $D$ ,  $\nu$  e  $\lambda$  são fixos para uma dada dimensão  $d$  não encontramos esta instabilidade no modelo de corrosão para uma dimensão de até 6+1 [57].

Em resumo, nós apresentamos algumas similaridades entre o modelo de corrosão e o modelo SS. O modelo SS tem a vantagem de ser facilmente modulado entre classe KPZ e EW ao variar a probabilidade  $p$  que inspiraram pesquisas recentes [21, 73, 86]. O modelo de corrosão tem a vantagem de ser mais estável exigindo menos tempo de simulação, um fator de 2.4, nós obtemos  $w(t)$  e os expoentes de escala com melhor precisão. E também temos um novo método para obter o expoente  $\alpha$  para o modelo de corrosão.

## Capítulo 6

### Conclusão

O estudo da dinâmica de crescimento, aliado aos modelos discretos, as simulações computacionais, os experimentos e as equações contínuas estocásticas fornecem as ferramentas necessárias para analisar um vasto número de sistemas reais onde observamos o crescimento de superfícies, e em alguns casos a saturação deste crescimento. A aplicação prática da dinâmica do crescimento é bem vasta [42, 87, 88, 89, 90] e ainda possui um grande interesse do campo da Física Estatística.

Neste trabalho mostramos que definindo uma função de distribuição de probabilidade das diferença das alturas  $P(\eta)$  para o modelo de corrosão (**Etching Model**) no limite contínuo obtemos a equação KPZ, e conseqüentemente obtemos os parâmetros  $\nu$  e  $\lambda$  em termos de  $P(\eta)$ . Então a partir de  $P(\eta)$  e das regras do autômato celular podemos definir esses parâmetros e a presença desse termo não-linear nos fornece mais um método para identificar a classe de universalidade do modelo de crescimento.

Mostramos que o trabalho desenvolvido [57] utilizado para encontrar os parâmetros do modelo de corrosão podem ser utilizados para o modelo SS em 1+1 dimensão. Pode parecer trivial considerando que ambos pertencem à mesma classe de universalidade, entretanto, deve-se considerar as diferenças entre eles, i.e., que mesmo pertencendo a classe KPZ ainda são modelos diferentes. Nós propomos uma

probabilidade  $P(\eta)$  exata para o modelo SS e obtivemos a equação de KPZ e os parâmetros  $D$ ,  $\nu$  e  $\lambda$ . Obtivemos também analiticamente o parâmetro  $A = D/2\nu$  para o modelo de corrosão apresentado na tabela (4.4) e o modelo SS. Este parâmetro está relacionado com a velocidade de crescimento da interface e corresponde a amplitude da rugosidade de saturação.

Outro ponto importante é que  $A$  é diretamente conectado com a curva  $w_{sat}$  versus  $L^\alpha$ , uma das mais importante relações da dinâmica de crescimento. De fato, ao introduzir  $P(0)$  na relação (4.19) obtivemos o valor do expoente  $\alpha$  com bons resultados. Este fato nos mostra a importância da probabilidade  $P(\eta)$ . O estudo dessas conexões reforça nosso entendimento da universalidade de KPZ, levando-nos a conclusões ainda mais gerais sobre seu comportamento.

E para finalizar esperamos que uma solução analítica para  $P(\eta)$  seria mais simples que uma solução para a distribuição das alturas  $f(h, t)$ , pois esta depende do tempo [44, 45, 46, 47, 91]. O método deste trabalho reforça que o modelo de corrosão (Etching Model), que tem sido estudado nos últimos anos, se apresenta como um modelo de crescimento que permite estudar a classe KPZ ao estabelecer a relação dos parâmetros com uma distribuição das diferenças das alturas.

Contudo não temos uma forma para  $P(\eta)$ , já que a aproximação polinomial se mostra eficaz sobre uma transformação de escala, mas não permite encontrar o valor de  $\lambda$ . Então como perspectiva deste método focaremos em determinar esta função  $P(\eta)$  e desta forma conectar mais ainda a ainda o modelo de corrosão à equação KPZ e como resultado muito importante seria encontrar uma prova definitiva da Invariância de Galileu. Desta forma, para  $d = 1$  será nosso ponto de partida e a busca por tal solução é uma questão Física-Matemática muito promissora nos estudos da dinâmica de crescimentos e da classe de universalidade KPZ.

# Referências Bibliográficas

- [1] B. A. Mello, A. S. Chaves, and F. A. Oliveira. Discrete atomistic model to simulate etching of a crystalline solid. *Phy. Rev. E*, 63(4):041113, 2001. [1](#), [2](#), [2.4](#), [4](#), [4.1](#)
- [2] Richard Chorley. Horton, RE 1945: Erosional development of streams and their drainage basins: hydrophysical approach to quantitative morphology. Bulletin of the Geological Society of America 56, 2 75-3 70. *Progress in Physical Geography*, 19(4):533–554, 1995. [2](#)
- [3] WEH Culling. Soil creep and the development of hillside slopes. *The Journal of Geology*, 71(2):127–161, 1963. [2](#)
- [4] David G Tarboton, Rafael L Bras, and Ignacio Rodriguez-Iturbe. Scaling and elevation in river networks. *Water Resources Research*, 25(9):2037–2051, 1989. [2](#)
- [5] L. B. da Silva Volk, N. P. Cogo, and E. V. Streck. Erosão hídrica influenciada por condições físicas de superfície e subsuperfície do solo resultantes do seu manejo, na ausência de cobertura vegetal. *Bras. Ci. Solo*, 28:763–774, 2004. [2](#)
- [6] John A Thornton. High rate thick film growth. *Annual review of materials science*, 7(1):239–260, 1977. [2](#)
- [7] Russell Messier and Joseph E Yehoda. Geometry of thin-film morphology. *Journal of applied physics*, 58(10):3739–3746, 1985. [2](#)

- [8] Ivette C Oppenheim, Dennis J Trevor, Christopher ED Chidsey, Paula L Trevor, and Karl Sieradzki. In situ scanning tunneling microscopy of corrosion of silver-gold alloys. *Science*, 254(5032):687–689, 1991. [2](#)
- [9] Erwin Holland-Moritz, Joseph Gordon, K Kanazawa, and Richard Sonnenfeld. Reversible oxidative roughening of gold (111) in aqueous salt solutions. *Langmuir*, 7(9):1981–1987, 1991. [2](#)
- [10] Pierre Pelce and A Libchaber. *Dynamics of curved fronts*. Perspectives in Physics. Elsevier, Burlington, MA, 1989. [2](#)
- [11] A. Pumir. Equation describing wrinkled flame fronts. *Phys. Rev. A*, 31:543–546, Jan 1985. [2](#)
- [12] A. Pocheau. Scale invariance in turbulent front propagation. *Phys. Rev. E*, 49:1109–1122, Feb 1994. [2](#)
- [13] Hiroshi Fujikawa and Mitsugu Matsushita. Fractal growth of *Bacillus subtilis* on agar plates. *Journal of the physical society of japan*, 58(11):3875–3878, 1989. [2](#)
- [14] Tohey Matsuyama, Masakazu Sogawa, and Yoji Nakagawa. Fractal spreading growth of *Serratia marcescens* which produces surface active exolipids. *FEMS Microbiology Letters*, 61(3):243–246, 10 1989. [2](#)
- [15] Tamás Vicsek, Miklós Cserző, and Viktor K Horváth. Self-affine growth of bacterial colonies. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 167(2):315–321, 1990. [2](#)
- [16] A. L. Barabási and H. E. Stanley. *Fractal concepts in surface growth*. Cambridge university press, 1995. [2](#), [2.3](#), [2.3.1](#), [2.6.1](#), [3.2](#), [3.2](#)
- [17] Benoit B Mandelbrot. The fractal geometry of nature/revised and enlarged edition. *whf*, 1983. [2](#)

- [18] R. L. Puurunen. Random deposition as a growth mode in atomic layer deposition. *C. V. D.*, 10(3):159–170, 2004. [2](#)
- [19] Z-W Lai and S. Das Sarma. Kinetic growth with surface relaxation: Continuum versus atomistic models. *Phy. Rev. Lett.*, 66(18):2348, 1991. [2](#)
- [20] Joachim Krug, Paul Meakin, and Timothy Halpin-Healy. Amplitude universality for driven interfaces and directed polymers in random media. *Phys. Rev. A*, 45:638–653, Jan 1992. [2](#), [4.3](#), [4.4](#), [4.4](#), [5.1](#)
- [21] Paul Meakin, P. Ramanlal, L. M. Sander, and R. C. Ball. Ballistic deposition on surfaces. *Phys. Rev. A*, 34:5091–5103, Dec 1986. [2](#), [2.3.3](#), [5.1](#), [5.1](#), [5.1.1](#)
- [22] S. F. Edwards and DR. Wilkinson. The surface statistics of a granular aggregate. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 381, pages 17–31. The Royal Society, 1982. [2](#)
- [23] S. R. Salinas. *Introdução a Física Estatística Vol. 09*. Edusp, 1997. [2.1.2](#)
- [24] Pedro D. Pinto, Fernando A. Oliveira, and André L. A. Penna. Thermodynamics aspects of noise-induced phase synchronization. *Phys. Rev. E*, 93:052220, May 2016. [2.1.2](#)
- [25] Pedro D. Pinto, André L. A. Penna, and Fernando A. Oliveira. Critical behavior of noise-induced phase synchronization. *EPL (Europhysics Letters)*, 117(5):50009, mar 2017. [2.1.2](#)
- [26] F. Family and T. Vicsek. Scaling of the active zone in the Eden process on percolation networks and the ballistic deposition model. *J. Phy. A. : Mathematical and General*, 18(2):L75, 1985. [2.2](#)
- [27] TJ Oliveira and FDA Aarão Reis. Effects of grains’ features in surface roughness scaling. *Journal of applied physics*, 101(6):063507, 2007. [2.2](#)

- [28] A. Lesne and M. Laguës. *Scale invariance: From phase transitions to turbulence*. Springer Science & Business Media, 2011. [2.3](#), [2.3.1](#), [2.8](#), [2.6.1](#), [3.2](#)
- [29] Wooseop Kwak and Jin Min Kim. Random deposition model with surface relaxation in higher dimensions. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 520:87–92, 2019. [2.3](#), [2.3.2](#)
- [30] Jin Min Kim. Random deposition with surface relaxation model in u v flower networks. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2020(11):113208, nov 2020. [2.3](#)
- [31] FDA Aarao Reis. Universality and corrections to scaling in the ballistic deposition model. *Physical Review E*, 63(5):056116, 2001. [2.3](#)
- [32] Christoph A Haselwandter and Dimitri D Vvedensky. Scaling of ballistic deposition from a Langevin equation. *Physical Review E*, 73(4):040101, 2006. [2.3](#), [2.3.3](#)
- [33] F Family. Scaling of rough surfaces: effects of surface diffusion. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 19(8):L441–L446, jun 1986. [2.3.2](#)
- [34] Conyers Herring. Effect of Change of Scale on Sintering Phenomena. *Journal of Applied Physics*, 21(4):301–303, 1950. [2.3.3](#)
- [35] W. W. Mullins. Theory of Thermal Grooving. *Journal of Applied Physics*, 28(3):333–339, 1957. [2.3.3](#)
- [36] Z.-W. Lai and S. Das Sarma. Kinetic growth with surface relaxation: Continuum versus atomistic models. *Phys. Rev. Lett.*, 66:2348–2351, May 1991. [2.3.3](#)
- [37] J. Villain. Continuum models of crystal growth from atomic beams with and without desorption. *J. Phys. I France*, 1:19–42, 1991. [2.3.3](#)

- [38] I.V.L. Costa, M.H. Vainstein, L.C. Lapas, A.A. Batista, and F.A. Oliveira. Mixing, ergodicity and slow relaxation phenomena. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 371(1):130 – 134, 2006. LAWNP 2005. [2.4](#), [3.2](#)
- [39] Evandro Alves Rodrigues. Correlação de velocidade em um modelo de corrosão. *Dissertação de Mestrado, Instituto de Física - Universidade de Brasília, Brasília-DF*, 2008. [2.4](#)
- [40] Thomas Nattermann and Lei-Han Tang. Kinetic surface roughening. I. The Kardar-Parisi-Zhang equation in the weak-coupling regime. *Phys. Rev. A*, 45:7156–7161, May 1992. [2.6.1](#)
- [41] M. Kardar, G. Parisi, and Y. C. Zhang. Dynamic scaling of growing interfaces. *Phy. Rev. Lett.*, 56(9):889, 1986. [3](#), [3](#), [3.1](#), [3.2](#), [3.2](#), [4.3.1](#)
- [42] N. Provatas, T. Ala-Nissila, M. Grant, K. R. Elder, and L. Piché. Flame propagation in random media. *Phy. Rev. E*, 51(5):4232, 1995. [3](#), [6](#)
- [43] Adriana E Lita and John E Sanchez Jr. Effects of grain growth on dynamic surface scaling during the deposition of Al polycrystalline thin films. *Physical Review B*, 61(11):7692, 2000. [3](#)
- [44] P. Calabrese, P. Le Doussal, and A. Rosso. Free-energy distribution of the directed polymer at high temperature. *EPL (Europhysics Letters)*, 90(2):20002, apr 2010. [3](#), [6](#)
- [45] Gideon Amir, Ivan Corwin, and Jeremy Quastel. Probability distribution of the free energy of the continuum directed random polymer in  $1 + 1$  dimensions. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 64(4):466–537, 2011. [3](#), [6](#)
- [46] T. Sasamoto and H. Spohn. One-Dimensional Kardar-Parisi-Zhang Equation: An Exact Solution and its Universality. *Phys. Rev. Lett.*, 104:602, February 2010. [3](#), [6](#)

- 
- [47] Pierre Le Doussal, Satya N. Majumdar, Alberto Rosso, and Grégory Schehr. Exact Short-Time Height Distribution in the One-Dimensional Kardar-Parisi-Zhang Equation and Edge Fermions at High Temperature. *Phys. Rev. Lett.*, 117:070403, Aug 2016. [3](#), [6](#)
- [48] M.H. Vainstein, R. Morgado, F.A. Oliveira, F.A.B.F. de Moura, and M.D. Coutinho-Filho. Stochastic description of the dynamics of a random-exchange Heisenberg chain. *Physics Letters A*, 339(1):33 – 38, 2005. [3.2](#)
- [49] Luciano C. Lapas, Rogelma M. S. Ferreira, J. Miguel Rubí, and Fernando A. Oliveira. Anomalous law of cooling. *The Journal of Chemical Physics*, 142(10):104106, 2015. [3.2](#)
- [50] F. D. A. Aarão Reis. Numerical study of roughness distributions in nonlinear models of interface growth. *Phys. Rev. E*, 72:032601, Sep 2005. [4.1](#), [4.3](#)
- [51] Evandro A Rodrigues, Bernardo A Mello, and Fernando A Oliveira. Growth exponents of the etching model in high dimensions. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 48(3):35001–3501, 2015. [4.1](#), [4.4](#), [4.4](#)
- [52] F. D. A. Aarão Reis. Dynamic transition in etching with poisoning. *Phys. Rev. E*, 68:041602, Oct 2003. [4.1](#)
- [53] F. D. A. Aarão Reis. Universality in two-dimensional Kardar-Parisi-Zhang growth. *Phys. Rev. E*, 69:021610, Feb 2004. [4.1](#), [4.4](#), [5.1](#)
- [54] T. J. Oliveira and F. D. A. Aarão Reis. Maximal- and minimal-height distributions of fluctuating interfaces. *Phys. Rev. E*, 77:041605, Apr 2008. [4.1](#)
- [55] Gang Tang, Zhipeng Xun, Rongji Wen, Kui Han, Hui Xia, Dapeng Hao, Wei Zhou, Xiquan Yang, and Yuling Chen. Discrete growth models on deterministic fractal substrate. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 389(21):4552–4557, 2010. [4.1](#)

- [56] Zhipeng Xun, Yongwei Zhang, Yan Li, Hui Xia, Dapeng Hao, and Gang Tang. Dynamic scaling behaviors of the discrete growth models on fractal substrates. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2012(10):P10014, 2012. [4.1](#)
- [57] Waldenor P. Gomes, André L. A. Penna, and Fernando A. Oliveira. From cellular automata to growth dynamics: The Kardar-Parisi-Zhang universality class. *Phys. Rev. E*, 100:020101, Aug 2019. [4.1](#), [4.2](#), [4.3](#), [4.4](#), [4.4](#), [4.4](#), [5](#), [5.1.1](#), [5.1.1](#), [6](#)
- [58] Fernando A Oliveira, Rogelma Maria Silva Ferreira, Luciano Calheiros Lapas, and Mendeli Henning Vainstein. Anomalous diffusion: A basic mechanism for the evolution of inhomogeneous systems. *Frontiers in Physics*, 7:18, 2019. [4.2](#)
- [59] Mendeli H Vainstein, Ismael VL Costa, and FA Oliveira. Mixing, Ergodicity and the Fluctuation Dissipation Theorem in complex systems. In *Jamming, Yielding, and Irreversible Deformation in Condensed Matter*, pages 159–188. Springer, 2006. [4.2](#)
- [60] C. Dasgupta, S. Das Sarma, and J. M. Kim. Controlled instability and multiscaling in models of epitaxial growth. *Phys. Rev. E*, 54:R4552–R4555, Nov 1996. [4.3](#), [5.1.1](#)
- [61] Herbert Spohn. KPZ scaling theory and the semidiscrete directed polymer model. *Random Matrix Theory, Interacting Particle Systems and Integrable Systems*, 65. [4.3](#)
- [62] Malte Henkel. From dynamical scaling to local scale-invariance: a tutorial. *The European Physical Journal Special Topics*, 226(4):605–625, 2017. [4.3](#)
- [63] I. S. S. Carrasco and T. J. Oliveira. Width and extremal height distributions of fluctuating interfaces with window boundary conditions. *Phys. Rev. E*, 93:012801, Jan 2016. [4.3](#)

- 
- [64] I. S. S. Carrasco and T. J. Oliveira. Kardar-Parisi-Zhang growth on one-dimensional decreasing substrates. *Phys. Rev. E*, 98:010102, Jul 2018. [4.3](#)
- [65] I S S Carrasco, K A Takeuchi, S C Ferreira, and T J Oliveira. Interface fluctuations for deposition on enlarging flat substrates. *New Journal of Physics*, 16(12):123057, dec 2014. [4.3.1](#), [4.4](#)
- [66] Joachim Krug and Herbert Spohn. Mechanism for rough-to-rough transitions in surface growth. *Phys. Rev. Lett.*, 64:2332–2332, May 1990. [4.3.1](#)
- [67] David A. Huse, Jacques G. Amar, and Fereydoon Family. Relationship between a generalized restricted solid-on-solid growth model and a continuum equation for interface growth. *Phys. Rev. A*, 41:7075–7077, Jun 1990. [4.3.1](#)
- [68] Chi-Hang Lam and Leonard M. Sander. Inverse method for interface problems. *Phys. Rev. Lett.*, 71:561–564, Jul 1993. [4.3.1](#)
- [69] Dietrich E. Wolf and Lei-Han Tang. Inhomogeneous growth processes. *Phys. Rev. Lett.*, 65:1591–1594, Sep 1990. [4.3.1](#)
- [70] F. A. Oliveira. Dynamical renormalization of anharmonic lattices at the onset of fracture: Analytical results for scaling, noise, and memory. *Phys. Rev. B*, 52:1009–1016, Jul 1995. [4.3.2](#)
- [71] Fernando A. Oliveira, Bernardo A. Mello, and Isaac M. Xavier. Scaling transformation of random walk distributions in a lattice. *Phys. Rev. E*, 61:7200–7203, Jun 2000. [4.3.2](#)
- [72] Joachim Krug. Origins of scale invariance in growth processes. *Advances in Physics*, 46(2):139–282, 1997. [4.4](#), [4.4](#), [5.1](#)
- [73] E. Daryaei. Universality and crossover behavior of single-step growth models in  $1 + 1$  and  $2 + 1$  dimensions. *Phys. Rev. E*, 101:062108, Jun 2020. [4.4](#), [5.1](#), [5.1.1](#), [5.1.1](#)

- [74] Géza Ódor, Bartosz Liedke, and Karl-Heinz Heinig. Publisher’s Note: Directed  $d$ -mer diffusion describing the Kardar-Parisi-Zhang-type surface growth. *Phys. Rev. E*, 81:049903, Apr 2010. [4.4](#), [4.4](#)
- [75] Márcio S. Gomes-Filho, Fernando A. Oliveira, and André L. A. Penna. An exact determination of dynamic growth exponents. *arXiv e-prints*, page arXiv:2006.11417, jun 2020. [4.4](#), [4.4](#)
- [76] Andrea Pagnani and Giorgio Parisi. Numerical estimate of the Kardar-Parisi-Zhang universality class in  $(2+1)$  dimensions. *Phys. Rev. E*, 92:010101, Jul 2015. [4.4](#)
- [77] T. J. Oliveira, S. G. Alves, and S. C. Ferreira. Kardar-Parisi-Zhang universality class in  $(2 + 1)$  dimensions: Universal geometry-dependent distributions and finite-time corrections. *Phys. Rev. E*, 87:040102, Apr 2013. [4.4](#)
- [78] Bernard Derrida and Joel L. Lebowitz. Exact Large Deviation Function in the Asymmetric Exclusion Process. *Phys. Rev. Lett.*, 80:209–213, Jan 1998. [5.1](#)
- [79] Leh-Hun Gwa and Herbert Spohn. Six-vertex model, roughened surfaces, and an asymmetric spin Hamiltonian. *Phys. Rev. Lett.*, 68:725–728, Feb 1992. [5.1](#), [5.1.1](#)
- [80] H.J. de Vega and F. Woynarovich. Method for calculating finite size corrections in Bethe ansatz systems: Heisenberg chain and six-vertex model. *Nuclear Physics B*, 251:439 – 456, 1985. [5.1](#)
- [81] M. Plischke, Z. Rácz, and D. Liu. Time-reversal invariance and universality of two-dimensional growth models. *Phys. Rev. B*, 35:3485–3495, Mar 1987. [5.1](#)
- [82] Jané Kondev, Christopher L. Henley, and David G. Salinas. Nonlinear measures for characterizing rough surface morphologies. *Phys. Rev. E*, 61:104–125, Jan 2000. [5.1](#)

- 
- [83] Géza Ódor, Bartosz Liedke, and Karl-Heinz Heinig. Mapping of  $(2 + 1)$ -dimensional Kardar-Parisi-Zhang growth onto a driven lattice gas model of dimers. *Phys. Rev. E*, 79:021125, Feb 2009. [5.1](#)
- [84] C. Dasgupta, J. M. Kim, M. Dutta, and S. Das Sarma. Instability, intermittency, and multiscaling in discrete growth models of kinetic roughening. *Phys. Rev. E*, 55:2235–2254, Mar 1997. [5.1.1](#)
- [85] M F Torres and R C Buceta. Numerical integration of KPZ equation with restrictions. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2018(3):033208, mar 2018. [5.1.1](#)
- [86] B. Derrida. An exactly soluble non-equilibrium system: The asymmetric simple exclusion process. *Physics Reports*, 301(1):65 – 83, 1998. [5.1.1](#)
- [87] André Telles Campos. Propagação de fogo e equações estocásticas. 2013. [6](#)
- [88] J Maunuksela, M Myllys, J Timonen, M.J Alava, and T Ala-Nissila. Kardar-Parisi-Zhang scaling in kinetic roughening of fire fronts. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 266(1):372 – 376, 1999. [6](#)
- [89] Rodolfo Cuerno, Hernán A. Makse, Silvina Tomassone, Stephen T. Harrington, and H. Eugene Stanley. Stochastic Model for Surface Erosion via Ion Sputtering: Dynamical Evolution from Ripple Morphology to Rough Morphology. *Phys. Rev. Lett.*, 75:4464–4467, Dec 1995. [6](#)
- [90] M Matsushita, J Wakita, H Itoh, Ismael Rafols, T Matsuyama, H Sakaguchi, and M Mimura. Interface growth and pattern formation in bacterial colonies. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 249(1):517–524, 1998. [6](#)
- [91] Victor Dotsenko. Replica Bethe ansatz derivation of the Tracy–Widom distribution of the free energy fluctuations in one-dimensional directed polymers. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2010(07):P07010, jul 2010. [6](#)