

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

Instituto de Exatas

Departamento de Matemática

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Superfícies desenvolvíveis

NICHOLAS ALVES AMARAL

BRASÍLIA

2018

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

AAM485s Alves Amaral, nicholas
Superfícies desenvolvíveis / nicholas Alves Amaral;
orientador Guy Grebot. -- Brasília, 2018.
61 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) --
Universidade de Brasília, 2018.

1. Geometria Diferencial. 2. Geodésicas. 3. Superfícies
desenvolvíveis. 4. Curvas sobre superfícies. I. Grebot, Guy
orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Superfícies desenvolvíveis

por

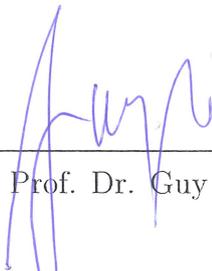
Nicholas Alves Amaral

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de

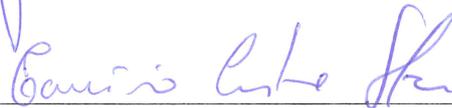
MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 23 de março de 2018.

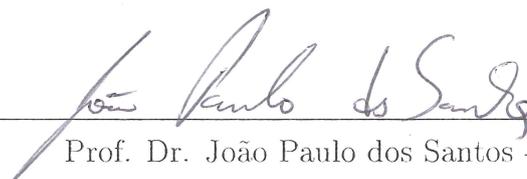
Comissão Examinadora:



Prof. Dr. Guy Grebot - MAT/UnB - Orientador



Prof. Dr. Tarcísio Castro Silva - MAT/UnB - Membro



Prof. Dr. João Paulo dos Santos - MAT/UnB - Membro

1 Dedicatória

Dedico esse trabalho a Deus e a minha família, em especial minha mãe, sem você não seria possível nada disso acontecer obrigado por sempre me incentivar a buscar meus sonhos

2 *Agradecimentos*

Quero primeiramente agradecer a Deus por todas as graças concedidas a mim e minha família, por sempre iluminar o meu caminho mesmo quando não consigo ver a luz.

Sequencialmente agradecer a minha família em especial minha mãe por me conceder o dom da vida, se pudesse nascer novamente gostaria de ser seu filho. Obrigado por tudo que fez por mim para chegar até aqui, esse título é nosso.

Quero agradecer ao departamento de matemática por tornar possível o PROFMAT na universidade de Brasília. Também venho aqui expressar minha eterna gratidão ao professor Guy Grebot, por me orientar da melhor forma possível; obrigado pela sua paciência, tamanha dedicação e por ter compartilhado tanto conhecimento.

Quero agradecer a todos os amigos feitos no PROFMAT que fizeram essa trajetória ser bem mais agradável, agradecer aos amigos do Instituto Federal de Alagoas por todo o apoio nessa reta final, em especial Flora, José Ivan e Sheyla. Agradecer também a minha amiga Raphaella Monteiro por todo o carinho e apoio nessa fase final, aos amigos do Colégio Leonardo da Vinci, Auris, Eliomar, José Ribamar, André, Helder, Everton por todo o apoio e amizade. E por fim, agradecer aos amigos Hara Dessano e Bruno Marino Xavier pelas ajudas com o aprendizado de \LaTeX e geometria diferencial.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos resultados gerais relativos ao t3pico de superf3cias desenvolv3veis. Para tal, introduzimos de forma resumida, os conceitos relativos a curvas parametrizadas e superf3cias parametrizadas regulares no espaço euclidiano, necess3rios para este estudo. Como aplicaç3o, analisamos as parametrizaç3es no plano, de curvas descritas sobre superf3cias desenvolv3veis particulares.

Palavras-chave: Geometria diferencial. Geod3sicas. Superf3cias desenvolv3veis. Curvas sobre superf3cias.

Abstract

This work presents general results about developable surfaces. In order to establish these results, we introduce the necessary concepts that surround the topics of parametrized curves and surfaces in 3-dimensional Euclidean space. We then apply the general results to analyse how curves described on particular developable surfaces unwrap on a plane.

Keywords: Differential geometry. Geodesic. Developable surfaces. Curves on surfaces.

Sumário

Lista de Figuras

1	Introdução	p. 12
2	Resumo teórico	p. 15
2.1	Curvas em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3	p. 15
2.1.0.1	Teoria local de curvas; fórmulas de Frenet	p. 16
2.1.0.2	Representação canônica das curvas	p. 19
2.2	Superfície parametrizada regular	p. 20
2.2.1	Definições	p. 20
2.2.2	Curvas assintóticas	p. 28
2.2.2.1	Geodésicas e curvatura geodésica	p. 29
3	Superfícies desenvolvíveis	p. 37
3.1	Resultados gerais I	p. 37
3.2	Cone e cilindro generalizados	p. 42
3.3	Resultados gerais II	p. 43
4	Aplicações	p. 49
4.1	Curvas em cilindros	p. 49
4.2	Curvas em cones	p. 54
4.2.1	Geodésica do cone	p. 63
5	Conclusão	p. 67
	Referências	p. 68

Lista de Figuras

1	Construção de cascos de navios usando superfícies desenvolvíveis <small>(figura retirada de [4])</small>	p. 12
2	Construção de superfícies em 3D com preenchimento da superfície usando pedaços de superfície desenvolvível(D-strip models) <small>(figura retirada de [6])</small>	p. 13
3	Museu Guggenheim de Bilbao.	p. 13
4	Decomposição do vetor curvatura.	p. 30
5	Superfície desenvolvível.	p. 37
6	Interseção entre cilindro principal e cilindro de corte, gerando a curva C e sua projeção ortogonal C_p	p. 49
7	Relação entre um ponto P no perfil do cilindro principal, descrito em termos dos parâmetros t e $s(t)$	p. 50
8	Aplicação do Teorema 4.2 utilizando a interseção ortogonal de dois cilindros circulares retos de mesmo raio.	p. 52
9	Representação da curva C_u , referente à interseção de dois cilindros circulares retos de mesmo raio, $r = 1$, no plano de desenvolvimento.	p. 52
10	Interseção de dois cilindros de bases circulares de mesmo raio.	p. 52
11	Representação dos elementos geométricos para o desenvolvimento da curva C_u	p. 54
12	Representação da curva C_u , referente à interseção de dois cilindros circulares retos de mesmo raio, $r = 1$: (a) $a = 0, 5$; (b) $a = 1$; (c) $a = 3$	p. 54
13	Seção em um cone gerando uma curva C e seu desenvolvimento no plano.	p. 57
14	(a)Cone e seus elementos; (b) Desenvolvimento do cone no plano.	p. 58
15	(a)Curva C sendo projetada ortogonalmente em C_0 no plano de visualização; (b)Relação entre $r = r(\varphi)$ e $R(\theta)$	p. 58

16	Representação do cone S com seção cônica dada por C .(figura adaptada de [1])	p. 59
17	Representação polar da curva C_0	p. 61
18	Elipses generalizadas: (a) $k = 1$ e $\lambda = 0, 4$;(b) $k = 0, 5$ e $\lambda = 0, 5$;(c) $k = 10$ e $\lambda = 0, 4$	p. 62
19	Parábolas generalizadas:(a) $k = 0.5$ e $\lambda = 1$;(b) $k = 2$ $\lambda = 1$;(c) $k = 10$ e $\lambda = 1$	p. 62
20	Hipérboles generalizadas:(a) $k = 2$ e $\lambda = 1, 5$;(b) $k = 1, 8$ $\lambda = 3$;(c) $k = 10$ e $\lambda = 5$	p. 63
21	Geodésicas correspondentes à equação (4.48):(a) $a = 1$; (b) $a = 0, 5$; (c) $a = 0, 2$	p. 65
22	Geodésicas correspondentes à equação (4.49) :(a) $a = 1, b = 1$;(b) $a = 0, 2$ e $b = 0, 2$; (c) $a = 0, 2$ e $b = 2$	p. 65
23	(a) geodésica L no plano; (b) Geodésica no cilindro ao envolver a diagonal na superfície do cilindro.	p. 66
24	(a)Geodésica L de acordo com a equação (4.48) no plano de desenvolvimento; (b) Geodésica no cone ao envolver a reta L na superfície do cone.	p. 66
25	(a)Geodésica L de acordo com a equação (4.49) no plano de desenvolvimento; (b) Geodésica no cone ao envolver a reta L na superfície do cone.	p. 66

1 *Introdução*

As superfícies desenvolvíveis são obtidas pela deformação de um plano sem que esse seja esticado. De forma mais precisa, diz-se que elas são isométricas a um plano. A possibilidade de criar e adaptar superfícies a partir de um plano é de interesse fundamental em várias áreas, pelo simples fato de apresentar necessariamente soluções exequíveis e mais econômicas. Por exemplo, na engenharia naval, cascos de barcos e navios são desenhados de maneira a maximizar o uso de superfícies desenvolvíveis (ver Figura 1). Com isso, a construção é mais rápida e mais barata por exigir menos detalhes e uma mão de obra menos especializada [2].

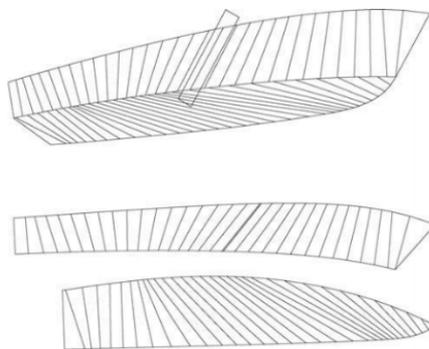


Figura 1: Construção de cascos de navios usando superfícies desenvolvíveis (figura retirada de [4]).

Na computação gráfica o revestimento de superfícies utiliza pedaços de superfícies desenvolvíveis, que são chamados de *D-strip models* [6] (ver Figura 2). Pela sua simplicidade, superfícies desenvolvíveis têm um papel importante na modelagem de objetos tridimensionais.

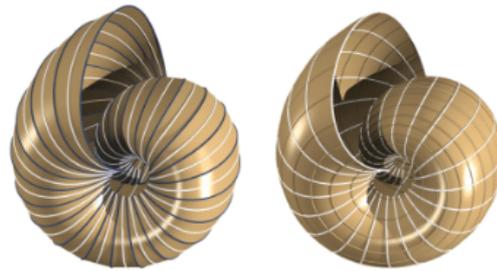


Figura 2: Construção de superfícies em 3D com preenchimento da superfície usando pedaços de superfície desenvolvível(D-strip models)(figura retirada de [6]).

Uma aplicação de superfícies desenvolvíveis na área de arquitetura está ilustrado na Figura 3.



foto retirada de <https://www.lonelyplanet.com/spain/bilbao/attractions/museo-guggenheim-bilbao/a/poi-sig/419033/360739>

Figura 3: Museu Guggenheim de Bilbao.

A sua importância justifica plenamente o estudo teórico de superfícies desenvolvíveis, que será o foco desta dissertação. Usando resultados da geometria de curvas e superfícies parametrizadas, obtém-se uma caracterização das superfícies desenvolvíveis. Este estudo é então aplicado à determinação de curvas especiais contidas em superfícies desenvolvíveis particulares.

Esta dissertação está dividida como segue: no próximo capítulo fazemos uma revisão teórica de curvas no espaço, superfícies parametrizadas regulares, classificação de pontos de uma superfície, curvas especiais, geodésicas e curvatura geodésica. No capítulo 3 introduzimos o conceito de superfície desenvolvível bem como três importantes teoremas que estabelecem as condições para que uma superfície seja desenvolvível e a caracterização de tais superfícies. O último capítulo trata da determinação do desenvolvimento e projeção

ortogonal de curvas contidas em superfícies desenvolvíveis particulares. Esses resultados são então aplicados à determinação das parametrizações de curvas geodésicas contidas sobre a superfície de um cone reto.

2 *Resumo teórico*

Neste capítulo faremos uma revisão da teoria local de curvas no espaço. Os conceitos de curvas no plano serão citados de maneira análoga aos de curvas no espaço, visto que são idênticos a menos do sinal da curvatura no plano. Faremos também uma revisão de superfícies parametrizadas regulares, classificação de pontos de uma superfície, curvas especiais, geodésicas e curvatura geodésica. O conteúdo exposto nesse capítulo não é exaustivo, mas contém os prerrequisitos necessários à compreensão dos resultados sobre superfícies desenvolvíveis. Maiores detalhes e demonstrações podem ser encontrados em [3] e [7].

2.1 Curvas em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3

Definição 2.1. *Uma curva parametrizada diferenciável de \mathbb{R}^3 é uma aplicação diferenciável α de classe C^∞ , de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em \mathbb{R}^3 . A variável $t \in I$ é dita parâmetro da curva e o subconjunto de \mathbb{R}^3 dos pontos $\alpha(t), t \in I$, é chamado traço da curva.*

Dizemos que α é de classe C^∞ em I se $\alpha^i(t)$, a i -ésima derivada de $\alpha(t)$, existe e é contínua para todo $t \in I$ e para todo $i \in \mathbb{N}$.

Denotaremos $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ como a curva parametrizada diferenciável em \mathbb{R}^3 , em que $x(t), y(t)$ e $z(t)$ são funções diferenciáveis de classe C^∞ .

A definição de curva parametrizada do plano \mathbb{R}^2 é a mesma que a Definição 2.1 em que substituímos \mathbb{R}^3 por \mathbb{R}^2 .

Definição 2.2. *Uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R}^3$ é dita plana se existir um plano de \mathbb{R}^3 que contém $\alpha(I)$.*

Seja $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I \subset \mathbb{R}$, uma curva parametrizada diferenciável. O vetor tangente a α em $t \in I$ é o vetor $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, em que ' se refere à

derivada em relação ao parâmetro t . A curva α é regular se para todo $t \in I$, $\alpha'(t) \neq 0$. Seja $\alpha(t)$, $t \in I$, uma curva regular de \mathbb{R}^3 . O *comprimento* do arco da curva α de t_0 a t_1 é dado por

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt$$

e a *função comprimento de arco* da curva α a partir de t_0 é

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(u)| du. \quad (2.1)$$

Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dita *parametrizada pelo comprimento do arco* se para cada $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \leq t_1$,

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = t_1 - t_0. \quad (2.2)$$

Proposição 2.1. *Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e só se, para todo $t \in I$, $|\alpha'(t)| = 1$.*

Proposição 2.2. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular e $s : I \rightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$ a função comprimento de arco de α a partir de t_0 . Então existe a função inversa h de s , definida no intervalo aberto $J = s(I)$, e $\beta = \alpha \circ h$ é uma reparametrização de α , onde β está parametrizada pelo comprimento de arco.*

Os conceitos para curvas planas são totalmente similares.

2.1.0.1 Teoria local de curvas; fórmulas de Frenet

Definição 2.3. *Se $\alpha \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, então a curvatura de α em $s \in I$ é o número real dado por*

$$k(s) = |\alpha''(s)|. \quad (2.3)$$

Para uma curva parametrizada do plano $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, $s \in I$, definimos $k(s) = \langle \alpha''(s), n(s) \rangle$, em que $n(s)$ é o vetor unitário tal que a base de vetores α', n tenha a mesma orientação¹ que a base canônica de \mathbb{R}^2 . Observamos que, neste caso, o sinal da curvatura depende da orientação da curva: para $s_0 \in I$ se $k(s_0) > 0$ então $n(s_0)$ tem o mesmo sentido de $\alpha''(s_0)$ e se $k(s_0) < 0$ então $n(s_0)$ tem sentido oposto de $\alpha''(s_0)$.

Proposição 2.3. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Então, $\alpha(I)$ é um segmento de reta se, e só se, $k(s) = 0$ para todo $s \in I$.*

¹A orientação da base $\{\alpha', n\}$ é a mesma que a orientação da base canônica $\{i, j\}$ se a rotação que leva i em j é a mesma que leva α' em n .

Definição 2.4. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que $k(s) > 0$. O vetor

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{k(s)} \quad (2.4)$$

é denominado vetor normal a α em s .

Denotando por $t(s)$ o vetor unitário $\alpha'(s)$, temos que $t(s)$ e $n(s)$ são vetores ortonormais e

$$t'(s) = k(s)n(s). \quad (2.5)$$

Definição 2.5. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que $k(s) > 0$. O vetor binormal a α em s é

$$b(s) = t(s) \times n(s). \quad (2.6)$$

O referencial ortonormal $t(s), n(s), b(s)$ é o *triedro de Frenet* da curva α em s . Cada par de vetores do triedro de Frenet determina um plano. Denotaremos os planos da seguinte maneira:

1. O plano de \mathbb{R}^3 que passa pelo ponto $\alpha(s)$ e é normal ao vetor $t(s)$ é chamado *plano normal* à curva α em s .
2. O plano que passa pelo ponto $\alpha(s)$ e é normal ao vetor $b(s)$ é chamado *plano osculador* à curva α em s .
3. O plano que passa pelo ponto $\alpha(s)$ e é normal ao vetor $n(s)$ é chamado *plano retificante* à curva α em s .

Considerando-se $b(s) = t(s) \times n(s)$, segue que

$$b'(s) = t'(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s).$$

Como $t'(s) = k(s)n(s)$ então o produto $t'(s) \times n(s)$ é nulo e temos que

$$b'(s) = t(s) \times n'(s).$$

Portanto, $b'(s)$ é ortogonal a $t(s)$. Como $b(s)$ é um vetor unitário, temos $\langle b(s), b(s) \rangle = 1$ e assim $b'(s)$ é ortogonal a $b(s)$. Assim concluímos que $b'(s)$ é paralelo a $n(s)$.

Definição 2.6. O número real $\tau(s)$ definido por

$$b'(s) = \tau(s)n(s) \quad (2.7)$$

é denominado torção da curva em s .

Agora vamos obter a expressão para $n'(s)$. Como $n(s) = b(s) \times t(s)$, derivando a expressão temos $n'(s) = b'(s) \times t(s) + b(s) \times t'(s)$. Substituindo $b'(s)$ e $t'(s)$ pelas expressões anteriores, obtemos $n'(s) = -\tau(s)b(s) - k(s)t(s)$. Dessa forma, se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva regular, parametrizada pelo comprimento de arco, tal que $k(s) > 0$ para todo $s \in I$, então o triedro de Frenet definido por

$$t(s) = \alpha'(s), \quad (2.8)$$

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|}, \quad (2.9)$$

$$b(s) = t(s) \times n(s), \quad (2.10)$$

satisfaz as equações

$$t'(s) = k(s)n(s), \quad (2.11)$$

$$n'(s) = -k(s)t(s) - \tau(s)b(s), \quad (2.12)$$

$$b'(s) = \tau(s)n(s), \quad (2.13)$$

que são chamadas de *Fórmulas de Frenet*.

Vamos agora mostrar que uma curva plana pode ser caracterizada a partir do fato de ter torção nula.

Lema 1. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular de curvatura não nula. Se α é uma curva plana, então o plano osculador de α independe do parâmetro e é o plano que contém o traço de α .*

Demonstração do Lema 1. *Suponha que $\alpha(s)$ está parametrizada pelo comprimento de arco. Como α é uma curva plana, existe um plano π em \mathbb{R}^3 que contém $\alpha(I)$. Seja v um vetor não nulo ortogonal a π . Provaremos que v é paralelo a $b(s)$, para todo $s \in I$. Fixado $s_0 \in I$, então para todo $s \in I$, podemos definir a equação do plano π como*

$$\langle \alpha(s) - \alpha(s_0), v \rangle = 0.$$

Derivando essa expressão temos que

$$\langle \alpha'(s), v \rangle = 0,$$

$$\langle \alpha''(s), v \rangle = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\langle t(s), v \rangle &= 0, \\ k(s)\langle n(s), v \rangle &= 0.\end{aligned}$$

Como $k(s) > 0$, concluímos que v é ortogonal a $t(s)$ e $n(s)$. Portanto, v é paralelo a $b(s)$, para todo $s \in I$, isto é, o plano π é o plano osculador de α . \square

A partir desse lema temos como consequência a seguinte proposição.

Proposição 2.4. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular de curvatura não nula. Então, α é uma curva plana se, e só se, $\tau \equiv 0$.

Demonstração. Consideremos α parametrizada pelo comprimento de arco. Se α é uma curva plana, então, pelo Lema 1, o vetor unitário $b(s)$ tem também direção constante. Portanto, $b'(s) = 0$ para todo $s \in I$. Donde concluímos que $\tau(s) = \langle b'(s), n(s) \rangle = 0$, para todo $s \in I$.

Reciprocamente, se $\tau(s) = 0$, para todo $s \in I$, então $b'(s) \equiv 0$, pela equação (2.13), e $b(s) = b$ é constante. Fixado $s_0 \in I$, consideremos a função $f(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), b \rangle$. Vamos provar que $f(s) \equiv 0$. Derivando temos $f'(s) = \langle \alpha'(s), b \rangle = \langle t(s), b \rangle = 0$, portanto, $f(s)$ é constante. Como $f(s_0) = 0$, concluímos que $f(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), b \rangle \equiv 0$, isto é, $\alpha(I)$ está contido no plano que contém $\alpha(s_0)$ e é ortogonal ao vetor b . \square

2.1.0.2 Representação canônica das curvas

Seja $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$, $s \in I$, uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco e de curvatura $k(s) \neq 0$, para todo $s \in I$. Considere o sistema de coordenadas em \mathbb{R}^3 tal que $\alpha(0) = (0, 0, 0)$, $t(0) = (1, 0, 0)$, $n(0) = (0, 1, 0)$, $b(0) = (0, 0, 1)$. Então, de acordo com o desenvolvimento em série de Taylor em torno de $s = 0$, temos

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \alpha'(0)s + \alpha''(0)\frac{s^2}{2!} + \alpha'''(0)\frac{s^3}{3!} + R,$$

onde R contém as potências de s de ordem maior ou igual a quatro. Usando as fórmulas de Frenet, temos :

$$\begin{aligned}\alpha'(0) &= t(0), \\ \alpha''(0) &= k(0)n(0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha'''(0) &= k(0)n'(0) + k'(0)n(0) \\ &= -k^2(0)t(0) + k'(0)n(0) - k(0)\tau(0)b(0).\end{aligned}\quad (2.14)$$

Usando as equações (2.14), $\alpha(s)$ é representada por

$$\alpha(s) = \left(s - \frac{k^2(0)}{6}s^3\right)t(0) + \left(\frac{k(0)}{2}s^2 + \frac{k'(0)}{6}s^3\right)n(0) - \frac{k(0)\tau(0)}{6}s^3b(0) + R. \quad (2.15)$$

Devido à escolha desse sistema de coordenadas, temos que

$$\begin{cases} x(s) = s - \frac{k^2(0)}{6}s^3 + R_1, \\ y(s) = \frac{k(0)}{2}s^2 + \frac{k'(0)}{6}s^3 + R_2, \\ z(s) = -\frac{k(0)\tau(0)}{6}s^3 + R_3, \end{cases} \quad (2.16)$$

sendo $R = (R_1, R_2, R_3)$. As expressões (2.16) são chamadas *representações canônicas da curva* α em uma vizinhança de $s = 0$.

2.2 Superfície parametrizada regular

2.2.1 Definições

Definição 2.7. *Uma superfície parametrizada regular, ou simplesmente uma superfície, é uma aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde U é um aberto de \mathbb{R}^2 tal que :*

- a) X é diferenciável de classe C^∞ .
- b) Para todo $q = (u, v) \in U$, a diferencial de X em q , $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, é injetora.

As variáveis u, v são os *parâmetros* da superfície. O subconjunto $X(U)$ de \mathbb{R}^3 é denominado *traço* de X .

Usaremos a seguinte notação: $X_u = \frac{\partial X(u, v)}{\partial u}$ e $X_v = \frac{\partial X(u, v)}{\partial v}$.

Se $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície parametrizada, então, fixado um ponto $(u_0, v_0) \in U$, as curvas

$$\begin{aligned}u &\mapsto X(u, v_0), \\ v &\mapsto X(u_0, v),\end{aligned}$$

são chamadas *curvas coordenadas* de X em (u_0, v_0) e os vetores $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ são os vetores tangentes às curvas coordenadas em (x_0, y_0) .

Definição 2.8. *Se $X(u, v)$ é uma superfície parametrizada regular, dizemos que um vetor*

w de \mathbb{R}^3 é um vetor tangente a X em $q = (u_0, v_0)$ se $w = \alpha'(t_0)$, onde $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva da superfície, tal que $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$.

Definição 2.9. O plano tangente a X em (u_0, v_0) é o conjunto de todos os vetores tangentes a X em (u_0, v_0) , que denotamos por $T_q X$, onde $q = (u_0, v_0)$.

Proposição 2.5. Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e $q = (u_0, v_0)$. Então $T_q X$ é o conjunto de vetores obtidos como combinação linear de $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$.

Demonstração. Se $w \in T_q X$, então $w = \alpha'(t_0)$, onde $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ e $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$. Portanto,

$$\begin{aligned} w &= \alpha'(t_0) = \frac{d}{dt} X(u(t), v(t)) \\ &= X_u(u_0, v_0)u'(t_0) + X_v(u_0, v_0)v'(t_0), \end{aligned}$$

isto é, w é uma combinação linear dos vetores X_u e X_v em (u_0, v_0) .

Reciprocamente, suponhamos que

$$w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0).$$

Então existe uma curva $\alpha(t)$ da superfície tal que $(u(0), v(0)) = (u_0, v_0)$ e $\alpha'(0) = w$. De fato, basta considerar

$$\alpha(t) = X(u(t), v(t)),$$

onde $u(t) = u_0 + at$ e $v(t) = v_0 + bt$. □

Definição 2.10. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Para todo $q \in U$, a aplicação

$$\begin{aligned} I_q : T_q X &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto I_q(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2 \end{aligned}$$

é denominada a primeira forma quadrática de X em q .

Consideremos uma superfície dada por $X(u, v)$ e um ponto $q = (u_0, v_0)$. Então, um vetor $w \in T_q X$ é da forma

$$w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0),$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$I_q(w) = a^2 \langle X_u, X_u \rangle(u_0, v_0) + 2ab \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0) + b^2 \langle X_v, X_v \rangle.$$

Usando a notação

$$E(u_0, v_0) = \langle X_u, X_u \rangle(u_0, v_0), \quad (2.17)$$

$$F(u_0, v_0) = \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0), \quad (2.18)$$

$$G(u_0, v_0) = \langle X_v, X_v \rangle(u_0, v_0), \quad (2.19)$$

temos que

$$I_q(w) = a^2 E(u_0, v_0) + 2ab F(u_0, v_0) + b^2 G(u_0, v_0). \quad (2.20)$$

As funções diferenciáveis $E(u, v), F(u, v), G(u, v)$ são denominadas *coeficientes da primeira forma quadrática*. Elas satisfazem as seguintes propriedades:

a) $E(u, v)$ e $G(u, v)$ são maiores que zero, pois $X_u(u, v) \neq 0$ e $X_v(u, v) \neq 0$.

b) $E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v) > 0$ pois $E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v) = |X_u \times X_v|^2$ e $|X_u \times X_v| \neq 0$, visto que dX_q é injetora. Para mostrar a igualdade considere o ângulo θ entre os vetores X_u e X_v . Temos

$$\begin{aligned} |X_u \times X_v|^2 &= |X_u|^2 |X_v|^2 \sin^2 \theta \\ &= |X_u|^2 |X_v|^2 - |X_u|^2 |X_v|^2 \cos^2 \theta \\ &= |X_u|^2 |X_v|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 \\ |X_u \times X_v|^2 &= EG - F^2, \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde escrevemos $E(u, v) = E$, $G(u, v) = G$ e $F(u, v) = F$.

Definição 2.11. Se $X(u, v)$ é uma superfície e $q = (u_0, v_0)$, dizemos que um vetor de \mathbb{R}^3 é normal a X em q se é ortogonal a $T_q X$, isto é, é ortogonal a todos os vetores tangentes a X em q .

Vamos aproveitar e definir o vetor normal unitário ao plano tangente $T_q X$ em q dado por

$$N(q) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(q). \quad (2.22)$$

Definição 2.12. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Fixado $q = (u_0, v_0) \in U$, a segunda forma quadrática de X em q é uma aplicação $\mathbb{I}_q : T_q X \rightarrow \mathbb{R}$ que, para cada vetor $w \in T_q X$ associa $\mathbb{I}_q(w)$ da seguinte forma: se $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$

é uma curva diferenciável da superfície tal que $(u(t_0), v(t_0)) = q$ e $\alpha'(t_0) = w$, então definimos $\mathbb{I}_q(w) = \langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0) \rangle$, onde N é o vetor normal a X em q .

Vamos verificar que $\mathbb{I}_q(w)$ não depende da curva escolhida. Seja $w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0)$ e consideremos uma curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ tal que $(u(t_0), v(t_0)) = q$ e $\alpha'(t_0) = w$, isto é,

$$\begin{aligned}(u(t_0), v(t_0)) &= (u_0, v_0), \\ (u'(t_0), v'(t_0)) &= (a, b).\end{aligned}$$

Como

$$\alpha'(t) = u'(t)X_u(u(t), v(t)) + v'(t)X_v(u(t), v(t))$$

e

$$\begin{aligned}\alpha''(t) &= u''(t)X_u(u(t), v(t)) + (u'(t))^2X_{uu}(u(t), v(t)) \\ &+ 2u'(t)v'(t)X_{uv}(u(t), v(t)) + (v'(t))^2X_{vv}(u(t), v(t)) \\ &+ v''(t)X_v(u(t), v(t))\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_q(w) &= \langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0) \rangle \\ &= a^2\langle X_{uu}, N \rangle(u_0, v_0) + 2ab\langle X_{uv}, N \rangle(u_0, v_0) \\ &+ b^2\langle X_{vv}, N \rangle(u_0, v_0)\end{aligned}$$

onde a última expressão não depende da curva α .

Usando a notação

$$e(u_0, v_0) = \langle X_{uu}, N \rangle(u_0, v_0), \quad (2.23)$$

$$f(u_0, v_0) = \langle X_{uv}, N \rangle(u_0, v_0), \quad (2.24)$$

$$g(u_0, v_0) = \langle X_{vv}, N \rangle(u_0, v_0), \quad (2.25)$$

temos que

$$\mathbb{I}_q(w) = a^2e(u_0, v_0) + 2abf(u_0, v_0) + b^2g(u_0, v_0). \quad (2.26)$$

As funções diferenciáveis $e(u, v)$, $f(u, v)$, $g(u, v)$, são denominadas *coeficientes da se-*

gunda forma quadrática da superfície parametrizada X .

Definição 2.13. *Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e $q = (u_0, v_0)$. A função curvatura normal em q é a aplicação $k_n : T_q X \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ que, para cada vetor $w \in T_q X$ não-nulo, associa*

$$k_n(w) = \frac{II_q(w)}{I_q(w)}. \quad (2.27)$$

Proposição 2.6. *Sejam $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e k_n a função curvatura normal de X em $q = (u_0, v_0)$. Então, existem vetores unitários e ortogonais $w_1, w_2 \in T_q X$ tais que $k_1 = k_n(w_1)$ e $k_2 = k_n(w_2)$ são os valores mínimo e máximo da função k_n .*

Demonstração. *Se k_n é uma função constante, então quaisquer dois vetores unitários e ortogonais de $T_q X$ satisfazem as condições da proposição 2.6.*

Suponhamos que k_n não é constante. Consideremos a função $\tilde{k}_n : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{k}_n(a, b) = k_n(aX_u(q) + bX_v(q)), (a, b) \neq (0, 0),$$

isto é,

$$\tilde{k}_n(a, b) = \frac{a^2 e_0 + 2abf_0 + b^2 g_0}{a^2 E_0 + 2abF_0 + b^2 G_0}.$$

Observe que para todo $\lambda \neq 0$, $\tilde{k}_n(\lambda a, \lambda b) = \tilde{k}_n(a, b)$. Portanto, para qualquer vetor (\tilde{a}, \tilde{b}) tangente em q , existe (a, b) com $a^2 + b^2 = 1$ tal que $\tilde{k}_n(a, b) = \tilde{k}_n(\tilde{a}, \tilde{b})$. Logo, podemos restringir \tilde{k}_n ao círculo unitário centrado em q . \tilde{k}_n é contínua por ser uma função racional de (a, b) . Como \tilde{k}_n é contínua e a circunferência é compacta, então \tilde{k}_n admite máximos e mínimos globais

$$k_1 = \tilde{k}_n(a_1, b_1), k_2 = \tilde{k}_n(a_2, b_2) \quad (2.28)$$

em que $a_i^2 + b_i^2 = 1$, para $i = 1, 2$. Portanto,

$$k_1 \leq \tilde{k}_n(a, b) \leq k_2,$$

para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Além disso, como estamos supondo que k_n não é constante, temos $k_1 < k_2$. Consideremos agora os vetores de $T_q X$

$$w_1 = a_1 X_u(q) + b_1 X_v(q),$$

$$w_2 = a_2 X_u(q) + b_2 X_v(q).$$

Pela própria definição de \tilde{k}_n , temos que, para todo $w \in T_q X \setminus \{0\}$,

$$k_1 = k_n(w_1) \leq k_n(w) \leq k_n(w_2) = k_2.$$

Vamos provar que w_1 e w_2 são vetores ortogonais. Como (a_1, b_1) e (a_2, b_2) são pontos de mínimo e de máximo da função \tilde{k}_n , então as derivadas parciais de \tilde{k}_n são nulas nestes pontos. Calculando essas derivadas parciais temos que:

$$\frac{\partial \tilde{k}_n}{\partial a} = \frac{(2a e_0 + 2b f_0)(a^2 E_0 + 2ab F_0 + b^2 G_0) - (a^2 e_0 + 2ab f_0 + b^2 g_0)(2a E_0 + 2b F_0)}{(a^2 E_0 + 2ab F_0 + b^2 G_0)^2} \quad (2.29)$$

e segue que $\frac{\partial \tilde{k}_n}{\partial a} = 0$ implica

$$(a e_0 + b f_0)(a^2 E_0 + 2ab F_0 + b^2 G_0) = (a E_0 + b F_0)(a^2 e_0 + 2ab f_0 + b^2 g_0), \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \tilde{k}_n}{\partial b} = \frac{(2a f_0 + 2b g_0)(a^2 E_0 + 2ab F_0 + b^2 G_0) - (a^2 e_0 + 2ab f_0 + b^2 g_0)(2a F_0 + 2b G_0)}{(a^2 E_0 + 2ab F_0 + b^2 G_0)^2} \quad (2.31)$$

e segue que $\frac{\partial \tilde{k}_n}{\partial b} = 0$ implica

$$(a f_0 + b g_0)(a^2 E_0 + 2ab F_0 + b^2 G_0) = (a^2 e_0 + 2ab f_0 + b^2 g_0)(a F_0 + b G_0). \quad (2.32)$$

Para o vetor (a_1, b_1) , as equações (2.30) e (2.32) fornecem

$$(a_1 E_0 + b_1 F_0)k_1 = a_1 e_0 + b_1 f_0, \quad (2.33)$$

$$(a_1 F_0 + b_1 G_0)k_1 = a_1 f_0 + b_1 g_0. \quad (2.34)$$

Para o vetor (a_2, b_2) , as equações (2.30) e (2.32) fornecem

$$(a_2 E_0 + b_2 F_0)k_2 = a_2 e_0 + b_2 f_0, \quad (2.35)$$

$$(a_2 F_0 + b_2 G_0)k_2 = a_2 f_0 + b_2 g_0. \quad (2.36)$$

As expressões (2.33)-(2.36) levam a

$$(e_0 - k_1 E_0)a_1 a_2 + (f_0 - k_1 F_0)b_1 a_2 = 0 \quad (2.37)$$

$$(e_0 - k_2 E_0)a_2 a_1 + (f_0 - k_2 F_0)b_2 a_1 = 0 \quad (2.38)$$

$$(f_0 - k_1 F_0)a_1 b_2 + (g_0 - k_1 G_0)b_1 b_2 = 0 \quad (2.39)$$

$$(f_0 - k_2 F_0)a_2 b_1 + (g_0 - k_2 G_0)b_1 b_2 = 0. \quad (2.40)$$

Calculando-se (2.37)-(2.38) + (2.39)-(2.40), temos que

$$(k_2 - k_1)(a_1a_2E_0 + a_1b_2F_0 + a_2b_1F_0 + b_1b_2G_0) = 0. \quad (2.41)$$

Como $k_1 \neq k_2$, concluímos que

$$\langle w_1, w_2 \rangle = a_1a_2E_0 + a_1b_2F_0 + a_2b_1F_0 + b_1b_2G_0 = 0. \quad (2.42)$$

De modo análogo, vamos mostrar que w_1 e w_2 são ortogonais quando algum dos números a_1, a_2, b_1, b_2 se anula. Suponha que $a_1 = 0$. Logo $b_1 = 1$ e, de acordo com as equações (2.33) e (2.34), temos $k_1F_0 = f_0$, $k_1G_0 = g_0$. Segue da equação (2.36) que

$$\begin{aligned} (f_0 - k_2F_0)a_2 + (g_0 - k_2G_0)b_2 &= 0 \\ (k_1 - k_2)(a_2F_0 + b_2G_0) &= 0. \end{aligned}$$

Como $k_1 \neq k_2$, então $a_2F_0 + b_2G_0 = 0$. Dessa forma

$$\langle w_1, w_2 \rangle = a_1a_2E_0 + a_1b_2F_0 + a_2b_1F_0 + b_1b_2G_0 = a_2F_0 + b_2G_0 = 0.$$

Observamos que obtivemos dois vetores ortogonais w_1, w_2 , unitários ($a_i^2 + b_i^2 = 1, i = 1, 2$), que dão o mínimo e o máximo da função k_n . \square

Os vetores w_1 e w_2 obtidos acima são chamados de vetores principais de X em q e as direções que eles definem são direções principais neste ponto. As curvaturas k_1 e k_2 são chamadas de curvaturas principais de X em q . O produto das curvaturas k_1 e k_2 denomina-se *curvatura Gaussiana* de X em q e é representada por $K(q)$ e a média aritmética de k_1 e k_2 , é chamada de *curvatura média* de X em q e é representada por $H(q) = \frac{k_1 + k_2}{2}$. Segue-se dessas definições que as curvaturas principais de X em q são soluções da equação

$$x^2 - 2H(q)x + K(q) = 0. \quad (2.43)$$

Proposição 2.7. (Fórmula de Euler) *Sejam $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular, $q = (u_0, v_0)$, k_1, k_2 as curvaturas principais de X em q e w_1, w_2 os vetores principais em q . Para todo vetor $w \in T_qX$ tal que $|w| = 1$, se*

$$w = \cos(\theta)w_1 + \sin(\theta)w_2,$$

então

$$k_n(w) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta. \quad (2.44)$$

Proposição 2.8. *Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular. Se $q = (u_0, v_0)$,*

então

$$H(q) = \frac{1}{2} \frac{e_0 G_0 - 2f_0 F_0 + E_0 G_0}{E_0 G_0 - F_0^2}, \quad (2.45)$$

$$K(q) = \frac{e_0 g_0 - f_0^2}{E_0 G_0 - F_0^2}. \quad (2.46)$$

Demonstração. Seja k_0 uma curvatura principal em q , na direção $w = a_0 X_u(q) + b_0 X_v(q)$. Então k_0 é o valor mínimo ou máximo da função

$$\frac{a^2 e_0 + 2abf_0 + b^2 g_0}{a^2 E_0 + 2abF_0 + b^2 G_0}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

em (a_0, b_0) . A partir dos pares de equações (2.33), (2.34) ou (2.35) e (2.36) temos o seguinte sistema de equações

$$(e_0 - k_0 E_0)a_0 + (f_0 - k_0 F_0)b_0 = 0, \quad (2.47)$$

$$(f_0 - k_0 F_0)a_0 + (g_0 - k_0 G_0)b_0 = 0. \quad (2.48)$$

Pelo fato de (a_0, b_0) ser uma solução não-trivial do sistema homogêneo acima segue que o determinante deve se anular, i.e

$$\begin{vmatrix} e_0 - k_0 E_0 & f_0 - k_0 F_0 \\ f_0 - k_0 F_0 & g_0 - k_0 G_0 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.49)$$

Desenvolvendo esse determinante temos

$$(E_0 G_0 - F_0^2)k_0^2 + (e_0 G_0 - 2f_0 F_0 + E_0 g_0)k_0 + (e_0 g_0 - f_0^2) = 0 \quad (2.50)$$

isto é, k_0 satisfaz a equação

$$x^2 - \frac{e_0 G_0 - 2f_0 F_0 + E_0 g_0}{E_0 G_0 - F_0^2} x + \frac{e_0 g_0 - f_0^2}{E_0 G_0 - F_0^2} = 0. \quad (2.51)$$

Pela relação entre os coeficientes de uma equação do segundo grau e suas raízes, concluímos que

$$H(q) = \frac{1}{2} \frac{e_0 G_0 - 2f_0 F_0 + E_0 g_0}{E_0 G_0 - F_0^2},$$

$$K(q) = \frac{e_0 g_0 - f_0^2}{E_0 G_0 - F_0^2}.$$

□

Definição 2.14. Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular, dizemos que $q = (u, v)$ é um ponto

1. *Elíptico* se $K(q) > 0$;
2. *Hiperbólico* se $K(q) < 0$;
3. *Parabólico* se $K(q) = 0$ e $H(q) \neq 0$;
4. *Planar* se $K(q) = 0$ e $H(q) = 0$.

2.2.2 Curvas assintóticas

Definição 2.15. *Sejam $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular e q um ponto de U . Uma direção tangente a X em q , para a qual a curvatura normal se anula, é chamada direção assintótica de X em q .*

Proposição 2.9. *Sejam $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular e q um ponto de U .*

1. Se q é um ponto elíptico, então não existem direções assintóticas em q .
2. Se q é hiperbólico, então existem exatamente duas direções assintóticas em q .
3. Se q é parabólico, então existe uma única direção assintótica, que é também principal.
4. Se q é planar, então toda direção é assintótica.

Demonstração. *Todos os casos são obtidos a partir da fórmula de Euler para a curvatura normal $k_n(w) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$. As direções assintóticas podem ser obtidas a partir dos valores de θ que anulam a função curvatura normal.*

a) *Se q é elíptico então $K(q) > 0$. Como $K(q) = k_1 k_2$, então para termos $K(q) > 0$ é necessário que k_1 e k_2 sejam não nulas e tenham o mesmo sinal. Dessa forma pela equação $k_n(w) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$, $k_n(w) \neq 0$, para todo $w \neq 0$. Logo como a curvatura normal não se anula, não existem direções assintóticas em pontos elípticos.*

b) *Se q é hiperbólico então $K(q) < 0$. Como $K(q) = k_1 k_2$, então para termos $K(q) < 0$ é necessário que k_1 e k_2 sejam não nulas e tenham sinais opostos. Dessa forma as condições para que existam duas direções assintóticas são obtidas resolvendo-se a equação*

$$k_n(w) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta = 0. \quad (2.52)$$

Como $k_1 - k_2 \neq 0$, podemos escrever

$$\begin{aligned} k_1(1 - \operatorname{sen}^2\theta) + k_2 \operatorname{sen}^2\theta &= 0, \\ \operatorname{sen}\theta &= \pm \sqrt{\frac{-k_1}{k_2 - k_1}}. \end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos as duas direções desejadas.

c) Se q é parabólico, podemos supor $k_1 = 0$ e $k_2 \neq 0$. A equação (2.52) torna-se $k_2 \operatorname{sen}^2 \theta = 0$, o que fornece uma única direção assintótica dada pelo vetor principal $w = \cos \theta w_1$.

d) Se q é planar, então $K(q) = H(q) = 0$. Logo $k_1 = k_2 = 0$. Portanto para todo $w \neq 0$, $k_n(w) = 0$. \square

Definição 2.16. Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular. Uma curva regular $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, é uma linha assintótica de X , se, para cada $t \in I$, $\alpha'(t)$ é uma direção assintótica de X em $(u(t), v(t))$.

Proposição 2.10. Seja $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, uma curva regular de uma superfície $X(u, v)$. Então, α é uma linha assintótica de X se, e só se, as funções $u(t)$, $v(t)$ satisfazem a equação

$$e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0, \quad (2.53)$$

onde e, f, g são os coeficientes da segunda forma quadrática de X em $(u(t), v(t))$.

2.2.2.1 Geodésicas e curvatura geodésica

Considere uma curva $\alpha(s)$ sobre uma superfície X , em que α é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, e t é o vetor tangente a α em s . Considere também o vetor curvatura \vec{k} que pode ser interpretado como a taxa de variação da direção tangente num determinado ponto, e sua decomposição em componentes normal e tangencial. Temos, em $X(u(s), v(s))$,

$$\vec{k} = \frac{dt}{ds} = \vec{k}_n + \vec{k}_g = k_n N + \vec{k}_g, \quad (2.54)$$

em que $\vec{k}_n = k_n N$ já que k_n é a curvatura normal. A componente tangencial do vetor curvatura será \vec{k}_g , chamada vetor curvatura geodésica. Seja u o vetor unitário contido no plano tangente e definido por $u = t \times N$. Dessa forma t, u e N formam um triedro ortonormal. O vetor curvatura geodésica é obtido por

$$\vec{k}_g = \kappa_g u. \quad (2.55)$$

Considere γ o ângulo entre o vetor normal à superfície e o vetor normal à curva α . Sendo assim as componentes \vec{k}_g e \vec{k}_n podem ter suas magnitudes representadas por $k_g = k \sin \gamma$ e $k_n = k \cos \gamma$, respectivamente, como mostrado na Figura 4, em que k é a magnitude do vetor \vec{k} .

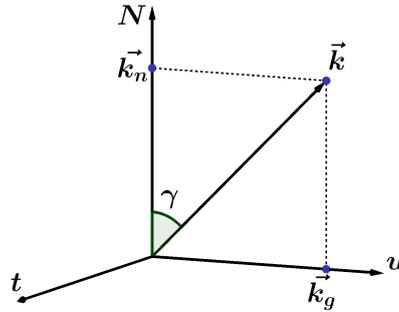


Figura 4: Decomposição do vetor curvatura.

É interessante lembrar que a curvatura normal depende da primeira e da segunda formas quadráticas; já a curvatura geodésica depende apenas da primeira forma quadrática como veremos a seguir.

Teorema 2.1. *A curvatura geodésica κ_g da curva α na superfície S depende apenas da primeira forma quadrática da superfície S e da curva α .*

Demonstração. *Vamos representar κ_g em termos dos coeficientes da primeira forma quadrática (lembrando que essas quantidades dependem da curva α sobre a superfície).*

Seja $\alpha(s)$ uma curva, parametrizada pelo comprimento de arco, contida na superfície X ,

$$\alpha(s) = X(u(s), v(s)).$$

Diferenciando essa equação em relação a s temos

$$t = X_u u' + X_v v', \quad (2.56)$$

$$t' = (X_{uu} u' + X_{vu} v') u' + X_u u'' + (X_{uv} u' + X_{vv} v') v' + X_v v''. \quad (2.57)$$

Usando a equação (2.55) e o fato de que $u = t \times N$ podemos afirmar que

$$\kappa_g = \langle u, \vec{k} \rangle = \langle u, \frac{dt}{ds} \rangle = \langle u, t' \rangle = \langle (N \times t), t' \rangle = (t \ t' \ N), \quad (2.58)$$

em que $(t \ t' \ N)$ é o produto misto de t, t', N nessa ordem. Efetuando o produto misto $(t \ t' \ N)$, temos que

$$\kappa_g = \langle (N \times t), t' \rangle = \langle t \times t', N \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle (X_u u' + X_v v') \times ((X_{uu} u' + X_{uv} v') u' + X_u u'' + (X_{uv} u' + X_{vv} v') v' + X_v v''), N \rangle \\
&= \langle [(X_u \times X_{uu})(u')^3 + (2X_u \times X_{uv} + X_v \times X_{uu})(u')^2 v' \\
&+ (X_u \times X_{vv} + 2X_v \times X_{uv}) u' (v')^2 + (X_v \times X_{vv})(u')^3 \\
&+ (X_u \times X_v)(u' v'' - u'' v')] N \rangle.
\end{aligned}$$

Cada uma das combinações de derivadas em relação a u e v pode ser substituída usando apenas os coeficientes da primeira forma quadrática. Para isso precisaremos das derivadas em relação a u, v dos coeficientes da primeira forma quadrática que são dadas por

$$E_u = 2\langle X_{uu}, X_u \rangle, \quad (2.59)$$

$$F_u = \langle X_{uu}, X_v \rangle + \langle X_u, X_{uv} \rangle, \quad (2.60)$$

$$G_u = 2\langle X_{uv}, X_v \rangle, \quad (2.61)$$

$$E_v = 2\langle X_{uv}, X_u \rangle, \quad (2.62)$$

$$F_v = \langle X_{uv}, X_v \rangle + \langle X_u, X_{vv} \rangle, \quad (2.63)$$

$$G_v = 2\langle X_{vv}, X_v \rangle. \quad (2.64)$$

Como para cada $(u, v) \in U$ os vetores X_u, X_v, N são linearmente independentes, temos que $X_{uu}, X_{uv}, X_{vv}, N_u$ e N_v podem ser expressos como combinações lineares de X_u, X_v, N . Isto é,

$$X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + a_{11} N, \quad (2.65)$$

$$X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + a_{12} N, \quad (2.66)$$

$$X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + a_{22} N, \quad (2.67)$$

$$N_u = b_{11} X_u + b_{12} X_v, \quad (2.68)$$

$$N_v = b_{21} X_u + b_{22} X_v \quad (2.69)$$

que são chamadas fórmulas de Weingarten em que

$$b_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \quad (2.70)$$

$$b_{12} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \quad (2.71)$$

$$b_{21} = \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \quad (2.72)$$

$$b_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \quad (2.73)$$

Os coeficientes b_{ij} são obtidos a partir das equações (2.68) e (2.69), da definição dos coeficientes da segunda forma quadrática e do fato de termos $\langle X_u, N \rangle = 0 = \langle X_v, N \rangle$.

Os símbolos Γ_{jk}^i , para $i, j, k \in \{1, 2\}$ são chamados símbolos de Christoffel e são obtidos a partir das equações (2.59)-(2.64):

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, \quad (2.74)$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, \quad (2.75)$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, \quad (2.76)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \quad (2.77)$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, \quad (2.78)$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}. \quad (2.79)$$

Note que se obtém da equação (2.65) que

$$\begin{aligned} X_u \times X_{uu} &= \Gamma_{11}^2(X_u \times X_v) + a_{11}(X_u \times N) \\ \Rightarrow \langle X_u \times X_{uu}, N \rangle &= \Gamma_{11}^2 \langle X_u \times X_v, N \rangle \\ &= \Gamma_{11}^2 \sqrt{EG - F^2}. \end{aligned}$$

De maneira análoga, obtemos das equações (2.65) - (2.67),

$$\begin{aligned} X_u \times X_{uv} &= \Gamma_{12}^1(X_u \times X_v) + a_{12}(X_u \times N) \\ \Rightarrow \langle X_u \times X_{uv}, N \rangle &= \Gamma_{12}^1 \langle X_u \times X_v, N \rangle \\ &= \Gamma_{12}^1 \sqrt{EG - F^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_v \times X_{uu} &= \Gamma_{11}^1(X_v \times X_u) + a_{11}(X_v \times N) \\ \Rightarrow \langle X_v \times X_{uu}, N \rangle &= -\Gamma_{11}^1 \langle X_u \times X_v, N \rangle \\ &= -\Gamma_{11}^1 \sqrt{EG - F^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_u \times X_{vv} &= \Gamma_{22}^2(X_u \times X_v) + a_{22}(X_u \times N) \\ \Rightarrow \langle X_u \times X_{vv}, N \rangle &= \Gamma_{22}^2 \langle X_u \times X_v, N \rangle \\ &= \Gamma_{22}^2 \sqrt{EG - F^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_v \times X_{uv} &= -\Gamma_{12}^1(X_u \times X_v) + a_{12}(X_v \times N) \\ \Rightarrow \langle X_v \times X_{uv}, N \rangle &= -\Gamma_{12}^1 \langle X_u \times X_v, N \rangle \end{aligned}$$

$$= -\Gamma_{12}^1 \sqrt{EG - F^2}.$$

$$\begin{aligned} X_v \times X_{vv} &= -\Gamma_{22}^1 (X_u \times X_v) + a_{22} (X_v \times N) \\ \Rightarrow \langle X_v \times X_{vv}, N \rangle &= -\Gamma_{22}^1 \langle X_u \times X_v, N \rangle \\ &= -\Gamma_{22}^1 \sqrt{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Segue, das expressões acima, que

$$\begin{aligned} \kappa_g &= [\Gamma_{11}^2 (u')^3 + (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) (u')^2 v' + (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1) (u') (v')^2 - \Gamma_{22}^1 (v')^3 \\ &\quad + u'v'' - u''v'] \sqrt{EG - F^2}. \end{aligned} \quad (2.80)$$

□

Definição 2.17. *Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular. Uma curva regular $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma geodésica da superfície X se, para todo $t \in I$, $\alpha''(t)$ é um vetor normal a X em $(u(t), v(t))$.*

Proposição 2.11. *Seja $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, uma curva regular de uma superfície $X(u, v)$. Então, α é uma geodésica de X se, e só se, as funções $u(t), v(t)$ satisfazem o sistema de equações*

$$\begin{aligned} u'' + (u')^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + (v')^2 \Gamma_{22}^1 &= 0, \\ v'' + (u')^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + (v')^2 \Gamma_{22}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Demonstração. *Derivando $\alpha(t)$, temos*

$$\alpha' = u'X_u + v'X_v, \quad (2.82)$$

$$\alpha'' = u''X_u + (u')^2 X_{uu} + 2u'v'X_{uv} + (v')^2 X_{vv} + v''X_v. \quad (2.83)$$

De acordo com as relações (2.65) a (2.67), obtemos

$$\begin{aligned} \alpha'' &= [u'' + (u')^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + (v')^2 \Gamma_{22}^1] X_u \\ &\quad + [v'' + (u')^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + (v')^2 \Gamma_{22}^2] X_v \\ &\quad + [(u')^2 e + 2u'v' f + (v')^2 g] N. \end{aligned}$$

Concluimos que $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma geodésica de X se, e só se, $u(t)$ e $v(t)$ satisfazem o sistema de equações diferenciais (2.81). □

De forma análoga, podemos mostrar a proposição seguinte.

Proposição 2.12. *A curva α é uma geodésica de X se, e somente se, a curvatura geodésica κ_g é nula.*

Teorema 2.2. *A curvatura Gaussiana só depende da primeira forma quadrática.*

Demonstração. *Vamos considerar novamente as equações*

$$X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + a_{11} N, \quad (2.84)$$

$$X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + a_{12} N, \quad (2.85)$$

$$X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + a_{22} N, \quad (2.86)$$

$$N_u = b_{11} X_u + b_{12} X_v, \quad (2.87)$$

$$N_v = b_{21} X_u + b_{22} X_v. \quad (2.88)$$

Obtemos

$$\begin{aligned} (X_{uu})_v &= (\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + a_{11} N)_v \\ &= (\Gamma_{11}^1)_v X_u + \Gamma_{11}^1 X_{uv} + (\Gamma_{11}^2)_v X_v \\ &\quad + \Gamma_{11}^2 X_{vv} + (a_{11})_v N + a_{11} N_v \\ &= X_u [(\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + a_{11} b_{21}] \\ &\quad + X_v [\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + a_{11} b_{22}] \\ &\quad + N [\Gamma_{11}^1 a_{12} + \Gamma_{11}^2 a_{22} + (a_{11})_v], \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} (X_{uv})_u &= (\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + a_{12} N)_u \\ &= (\Gamma_{12}^1)_u X_u + \Gamma_{12}^1 X_{uu} + (\Gamma_{12}^2)_u X_v \\ &\quad + \Gamma_{12}^2 X_{vu} + (a_{12})_u N + a_{12} N_u \\ &= X_u [(\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 + a_{12} b_{11}] \\ &\quad + X_v [\Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + a_{12} b_{12}] \\ &\quad + N [\Gamma_{12}^1 a_{11} + \Gamma_{12}^2 a_{12} + (a_{12})_u]. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Como $(X_{uu})_v = (X_{uv})_u$, podemos afirmar que a igualdade entre os coeficientes de X_v fornece

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 = a_{11} b_{22} - a_{12} b_{12}. \quad (2.91)$$

Ao efetuarmos o produto escalar das expressões que definem X_{uu} , X_{uv} e X_{vv} pelo vetor N

teremos que

$$\begin{aligned} a_{11} &= e, \\ a_{12} &= f, \end{aligned}$$

em que e, f são coeficientes da segunda forma quadrática. Dessa forma a equação (2.91) pode ser reescrita como

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 = eb_{22} - fb_{12}. \quad (2.92)$$

Os coeficientes b_{12} e b_{22} são dados pelas equações (2.71) e (2.73)

$$\begin{aligned} b_{12} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \\ b_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Sendo assim temos que

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 = -EK. \quad (2.93)$$

Portanto, a curvatura Gaussiana só depende dos coeficientes da primeira forma quadrática uma vez que os símbolos de Christoffel só dependem desses coeficientes. \square .

Teorema 2.3. *Sejam E, F, G, e, f, g funções reais diferenciáveis definidas em um aberto conexo $U \subset \mathbb{R}^2$, tais que $E > 0, G > 0, EG - F^2 > 0$. Se estas funções satisfazem as equações de Gauss*

$$-EK = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2, \quad (2.94)$$

e de Codazzi-Mainardi

$$\begin{cases} e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2, \\ f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2 \end{cases} \quad (2.95)$$

então:

a) existe uma superfície parametrizada regular $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que as funções E, F, G, e, f, g são coeficientes da primeira e da segunda formas quadráticas de X .

b) se X e \bar{X} são duas superfícies satisfazendo a), então existe um movimento rígido Ψ de \mathbb{R}^3 tal que $\bar{X} = \Psi \circ X$.

Definição 2.18. *Sejam $X(u, v)$ e $X^*(u, v)$, definidas em $U \subset \mathbb{R}^2$, superfícies simples (i.e. as aplicações X e X^* são injetoras). X e X^* são isométricas se, para todo $(u, v) \in U$, os coeficientes das primeiras formas quadráticas de X e X^* coincidem, i.e.*

$$E(u, v) = E^*(u, v), F(u, v) = F^*(u, v), G(u, v) = G^*(u, v).$$

No caso da definição acima, a isometria $\phi : X(U) \rightarrow X^*(U)$ entre as duas superfícies é dada por $\phi = X^* \circ X^{-1}$. Fica claro, desta definição, que o movimento rígido mencionado no teorema 2.3 é uma isometria entre as duas superfícies. No entanto, fica também claro que nem toda isometria precisa ser dada por tal movimento rígido. Este resultado será fundamental para a caracterização de superfícies desenvolvíveis vista no capítulo 3.

Teorema 2.4. *Superfícies simples isométricas têm a mesma curvatura Gaussiana em pontos correspondentes. As curvas correspondentes nessas superfícies têm a mesma curvatura geodésica em pontos correspondentes.*

Demonstração. *De acordo com o Teorema 2.1 e o Teorema 2.2 a curvatura Gaussiana e a curvatura geodésica dependem apenas dos coeficientes da primeira forma quadrática e, de acordo com a definição 2.18, esses coeficientes são invariantes por meio de isometrias.*

□

3 Superfícies desenvolvíveis

3.1 Resultados gerais I

Nesta seção faremos uma revisão sobre superfícies regradas e desenvolvíveis com base na referência [3].

Definição 3.1. *Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $w : I \rightarrow \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ aplicações diferenciáveis. Uma família a 1-parâmetro de retas $\{\alpha(t); w(t)\}$ é uma correspondência que associa a cada $t \in I$ um ponto $\alpha(t)$ em \mathbb{R}^3 e um vetor $w(t)$ em \mathbb{R}^3 .*

Definição 3.2. *Uma superfície $X(t, u)$ é uma superfície regradada, se for dada por*

$$X(t, u) = \alpha(t) + uw(t) \quad (3.1)$$

em que $\{\alpha(t); w(t)\}$ é uma família a 1-parâmetro de retas.

As retas $X(t_0, u)$ são chamadas geratrizes da superfície $X(t, u)$ e $\alpha(t)$ é chamada de diretriz da superfície $X(t, u)$.

A superfície será regular nos pontos em que $X_t \times X_u$ for não nulo.

Definição 3.3. *Uma superfície desenvolvível é um caso especial de superfície regradada com a propriedade de ter o mesmo plano tangente em todos os pontos de uma mesma geratriz.*

A Figura 5 abaixo representa essa situação.

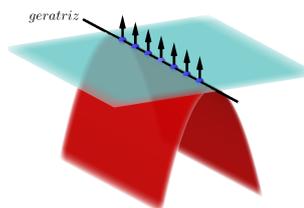


Figura 5: Superfície desenvolvível.

Na sequência, demonstraremos as seguintes propriedades a respeito das superfícies desenvolvíveis.

Propriedades

1. Os vetores normais de uma superfície desenvolvível são paralelos ao longo de cada geratriz.
2. A curvatura Gaussiana de uma superfície desenvolvível é nula.
3. Superfícies desenvolvíveis são isométricas a um plano.
4. Geodésicas de uma superfície desenvolvível são imagens de retas do plano por isometrias.

Teorema 3.1. *A superfície regrada*

$$X(s, u) = \alpha(s) + uw(s) \quad (3.2)$$

é uma superfície desenvolvível, se e somente se,

$$\langle \dot{\alpha}, w \times \dot{w} \rangle = 0, \quad (3.3)$$

em que $\dot{\alpha}$ e \dot{w} denotam as derivadas em relação ao parâmetro s da curva $\alpha(s)$.

Demonstração. *Sejam P_1 e P_2 dois pontos arbitrários fixados ao longo de uma geratriz da superfície: $P_1 = \alpha(s_0) + u_1w(s_0)$ e $P_2 = \alpha(s_0) + u_2w(s_0)$.*

Se a superfície regrada X é uma superfície desenvolvível, de acordo com a Definição 3.3, ela admite o mesmo plano tangente nos pontos P_1 e P_2 .

Nos pontos P_1 e P_2 , os planos são gerados a partir dos vetores

$$\begin{aligned} X_s(s_0, u_1) &= \dot{\alpha}(s_0) + u_1\dot{w}(s_0), \\ X_s(s_0, u_2) &= \dot{\alpha}(s_0) + u_2\dot{w}(s_0), \\ X_u(s_0, u_1) &= X_u(s_0, u_2) = w(s_0). \end{aligned}$$

Portanto, o produto misto (onde omitimos s_0 para não carregar a notação)

$$M = \langle (\dot{\alpha} + u_1\dot{w}), (\dot{\alpha} + u_2\dot{w}) \times w \rangle \quad (3.4)$$

é nulo. Pela propriedade de distributividade dos produtos escalar e vetorial, podemos

reescrever a expressão (3.4) como

$$\begin{aligned}
M &= \langle (\dot{\alpha} + u_1 \dot{w}), (\dot{\alpha} + u_2 \dot{w}) \times w \rangle = 0 \\
&= \langle (\dot{\alpha} + u_1 \dot{w}), \dot{\alpha} \times w \rangle + \langle (\dot{\alpha} + u_1 \dot{w}), u_2 \dot{w} \times w \rangle \\
&= \langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \times w \rangle + \langle u_1 \dot{w}, \dot{\alpha} \times w \rangle + \langle \dot{\alpha}, u_2 \dot{w} \times w \rangle + \langle u_1 \dot{w}, u_2 \dot{w} \times w \rangle \\
&= \langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \times w \rangle + u_1 \langle \dot{\alpha}, w \times \dot{w} \rangle - u_2 \langle \dot{\alpha}, w \times \dot{w} \rangle + u_1 u_2 \langle \dot{w}, \dot{w} \times w \rangle. \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Como $\langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \times w \rangle = 0$ e $\langle \dot{w}, \dot{w} \times w \rangle = 0$ segue de (3.5) que

$$u_1 \langle \dot{\alpha}, w \times \dot{w} \rangle - u_2 \langle \dot{\alpha}, w \times \dot{w} \rangle = \langle \dot{\alpha}, w \times \dot{w} \rangle (u_1 - u_2). \tag{3.6}$$

Como $P_1 \neq P_2$ temos que $u_1 \neq u_2$, e temos $M = 0$, donde segue-se que, $\langle \dot{\alpha}, w \times \dot{w} \rangle = 0$. Reciprocamente, suponha agora que $\langle \dot{\alpha}, w \times \dot{w} \rangle = 0$, para todo s . Assim os vetores $X_s(s, u_1)$, $X_s(s, u_2)$ e $X_u(s, u_1)$ são linearmente dependentes, i.e., eles pertencem ao mesmo plano tangente sobre uma mesma geratriz da superfície X . De acordo com a Definição 3.3 a superfície é desenvolvível. \square

Teorema 3.2. *Um aberto S de uma superfície regular é um aberto de uma superfície desenvolvível se, e somente se, a curvatura Gaussiana K é zero em todos os seus pontos.*

Demonstração. *Vamos mostrar primeiro que dada uma superfície regrada*

$$X(t, u) = \alpha(t) + uw(t),$$

X é desenvolvível se, e somente se, $K = 0$. Para isso, calculemos os coeficientes da segunda forma quadrática.

Temos

$$\begin{aligned}
X_t &= \alpha' + uw', \\
X_{tt} &= \alpha'' + uw'', \\
X_u &= w, \\
X_{uu} &= 0, \\
X_{ut} &= w', \\
N &= \frac{X_t \times X_u}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\alpha' \times w + u(w' \times w)}{\sqrt{EG - F^2}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$e = \langle X_{uu}, N \rangle = 0,$$

$$\begin{aligned}
f &= \langle X_{ut}, N \rangle = \frac{\langle w', \alpha' \times w \rangle + \langle uw', w' \times w \rangle}{\sqrt{EG - F^2}}, \\
g &= \langle X_{tt}, N \rangle = \frac{\langle \alpha' + uw'', \alpha' \times w + u(w' \times w) \rangle}{\sqrt{EG - F^2}}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, usando o fato de que $\langle w', \alpha' \times w \rangle = \langle \alpha', w \times w' \rangle$ e $\langle uw', w' \times w \rangle = 0$, temos que $f = \frac{\langle \alpha', w \times w' \rangle}{\sqrt{EG - F^2}}$. Portanto,

$$K = \frac{-f^2}{EG - F^2} = \frac{-\langle \alpha', w \times w' \rangle^2}{EG - F^2}. \quad (3.7)$$

Portanto, a superfície regrada é desenvolvível se, e só se, $\langle \alpha', w \times w' \rangle = 0$, de acordo com o Teorema 3.1. Logo $K = 0$.

Considere agora uma superfície $X(u, v)$ com curvatura $K = 0$ e provemos que X é desenvolvível. Como

$$K = 0 \Leftrightarrow eg - f^2 = 0 \quad (3.8)$$

temos a analisar dois casos:

1. Suponha que $e = g = f = 0$, i.e $K = H = 0$. Sendo assim a superfície é formada por pontos planares de acordo com a Definição (2.14). Pelas fórmulas de Weingarten (2.68)-(2.69), temos

$$N_u = b_{11}X_u + b_{12}X_v,$$

$$N_v = b_{21}X_u + b_{22}X_v$$

e, portanto, N_u e N_v são nulos por conta das equações (2.70)-(2.73). Segue que N é um vetor constante e, portanto, a superfície é um plano.

Um plano de equação $ax + by + cz + d = 0$, em que supomos $a \neq 0$, pode ser parametrizado por

$$X(z, y) = \left(\frac{d - cz}{a}, 0, z\right) + y\left(-\frac{b}{a}, 1, 0\right). \quad (3.9)$$

Reconhecemos aqui uma parametrização do tipo $X(z, y) = \alpha(z) + yw(z)$ em que

$$\dot{\alpha} = \left(-\frac{c}{a}, 0, 1\right),$$

$$w = \left(-\frac{b}{a}, 1, 0\right),$$

$$\dot{w} = (0, 0, 0).$$

Logo, de acordo com o Teorema 3.1, temos $\langle \dot{\alpha}, w \times \dot{w} \rangle = 0$ e a superfície é desenvolvível.

2. Vamos supor que os coeficientes da segunda forma quadrática não são todos nulos. Como $eg = f^2$, e e g têm mesmo sinal e podemos reescrever a equação (2.53), $e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0$, como

$$(au' + bv')^2 = 0, \quad (3.10)$$

em que $a^2 = e$ e $b^2 = g$. Segue disso que há apenas uma família $\beta(u(t), v(t))$ de curvas assintóticas em cada ponto. Se tomarmos $v = v_0$ (constante) como sendo a curva assintótica, segue diretamente de (3.10) que $e = 0$. Como $eg = f^2$, vamos ter $f = 0$. Das fórmulas de Weingarten (2.68), temos que $N_u = b_{11}X_u + b_{12}X_v$. Pelas equações (2.70) e (2.71), temos

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \\ b_{12} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2} \end{aligned}$$

e segue de $e = f = 0$ que $b_{11} = b_{12} = 0$. Dessa forma, $N_u = 0$ e o vetor normal unitário é constante em relação a u , i.e, N não depende de u ao longo das linhas assintóticas v constante.

Se $g \neq 0$ obtemos, a partir das equações de Codazzi-Mainardi (2.95)

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2$$

e das fórmulas de Weingarten, em virtude de termos $e = f = 0$, que $\Gamma_{11}^2 = 0$, $a_{11} = e = 0$ e, assim, $X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u$. Portanto, sobre as curvas $\alpha(t) = X(u(t), v_0)$ (v_0 constante) X_u e X_{uu} são vetores linearmente dependentes. Segue que

$$\begin{aligned} \alpha' &= u' X_u, \\ \alpha'' &= u'^2 X_{uu} + u'' X_u, \\ &= (u''\Gamma_{11}^1 + u'')X_u. \end{aligned}$$

Logo, a curvatura k de $\alpha(t)$, dada por

$$k(t) = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3} \quad (3.11)$$

é nula, o que implica que as linhas assintóticas são retas. Segue que $X(u, v)$ é uma superfície regrada, cujas geratrizes são as curvas coordenadas v constante, e ela tem curvatura Gaussiana nula. Pelo Teorema 3.1, ela deve ser desenvolvível.

□

3.2 Cone e cilindro generalizados

Considere uma superfície cilíndrica geral na forma

$$X(s, u) = \alpha(s) + u w(s),$$

em que $\alpha(s)$ é uma curva regular plana, w é um vetor constante transversal ao plano da curva. Vamos mostrar que essa superfície é desenvolvível. Para isso precisamos mostrar que a curvatura Gaussiana é nula para todos os pontos regulares de X . Temos

$$\begin{aligned} X_s &= \alpha', \\ X_u &= w, \\ X_{ss} &= \alpha'', \\ X_{uu} &= 0, \\ X_{su} &= 0, \\ N &= \frac{X_s \times X_u}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\alpha' \times w}{\sqrt{EG - F^2}} \end{aligned}$$

e obtemos os coeficientes da segunda forma quadrática

$$\begin{aligned} e &= \langle X_{ss}, N \rangle = \frac{\langle \alpha'', \alpha' \times w \rangle}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ f &= \langle X_{su}, N \rangle = 0. \\ g &= \langle X_{uu}, N \rangle = 0. \end{aligned}$$

Sendo assim, temos que $K = 0$ pois $eg - f^2 = 0$.

Considere um cone geral na forma

$$X(s, u) = \alpha(s) + u(p - \alpha(s)),$$

sendo $0 \leq u \leq 1$, $\alpha(s)$ uma curva plana regular e p (o vértice do cone) é um ponto fora do plano que contém α . O único ponto singular é p , já que para $u = 1$, temos $X_s \times X_u = 0$. Vamos mostrar que o cone é uma superfície desenvolvível. Para isso precisamos mostrar que a curvatura Gaussiana é nula nos pontos regulares de X .

Temos

$$X_s = \alpha' - u\alpha',$$

$$\begin{aligned}
X_u &= p - \alpha, \\
X_{ss} &= \alpha'' - u\alpha'', \\
X_{uu} &= 0, \\
X_{su} &= -\alpha', \\
N &= \frac{X_s \times X_u}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{(\alpha' - u\alpha') \times (p - \alpha)}{\sqrt{EG - F^2}}, \\
&= \frac{(1 - u)\alpha' \times (p - \alpha)}{\sqrt{EG - F^2}}.
\end{aligned}$$

Obtemos os coeficientes da segunda forma quadrática

$$\begin{aligned}
e &= \langle X_{uu}, N \rangle = 0, \\
f &= \langle X_{us}, N \rangle = 0, \\
g &= \langle X_{ss}, N \rangle = \frac{\langle (\alpha'' - \alpha''u), (\alpha' - \alpha'u) \times (p - \alpha) \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} = \\
&= \frac{(1 - u)^2 \langle \alpha'', \alpha' \times (p - \alpha) \rangle}{\sqrt{EG - F^2}}.
\end{aligned}$$

Portanto, $eg - f^2 = 0$, i.e., $K = 0$ nos pontos regulares de X .

3.3 Resultados gerais II

Nesta seção, com base na referência [3], provaremos teoremas essenciais relativos às superfícies desenvolvíveis que mostram que uma superfície desenvolvível nada mais é do que um pedaço de plano encurvado, i.e. que uma superfície desenvolvível é isométrica a um plano. Como mencionado na introdução, essa propriedade das superfícies desenvolvíveis é fundamental na fabricação de vários produtos industriais ou artesanais.

Definição 3.4. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada regular. A superfície*

$$X(s, u) = \alpha(s) + u\alpha'(s)$$

é denominada superfície tangente da curva α .

Teorema 3.3. *Qualquer superfície desenvolvível $X(s, u)$, pode ser subdividida em intervalos s suficientemente pequenos e adequados para que o aberto da superfície correspondente a qualquer um desses intervalos seja um aberto de um plano, de um cilindro, de um cone ou de uma superfície tangente.*

Demonstração. *Seja $X(s, u) = \alpha(s) + u w(s)$ uma superfície desenvolvível. Sem perda*

de generalidade, podemos considerar $w(s)$ como sendo um vetor unitário. Então os vetores $\dot{\alpha}$, w e \dot{w} são linearmente dependentes e existem três funções $c(s)$, $d(s)$ e $e(s)$, nem todas nulas para qualquer valor de s , tais que

$$c\dot{\alpha} + dw + e\dot{w} = 0. \quad (3.12)$$

Podemos assumir que as funções c, d e e são de classe C^∞ se α e w são dessa classe.

1. Se $c(s) = 0$ para todos os valores de s em um intervalo $I = (s_0, s_1)$, então em I temos

$$dw + e\dot{w} = 0, \quad (3.13)$$

onde em cada ponto de I pelo menos uma das funções d ou e é diferente de zero. Como w é um vetor unitário, $\langle w, \dot{w} \rangle = 0$, e a equação (3.13) será satisfeita se, e somente se, $\dot{w} = 0$. Do contrário, $\dot{w} \neq 0 \Rightarrow w \neq 0$, logo $dw + e\dot{w} \neq 0$ pelo fato de ao menos uma das funções d ou e ser não nula. Concluímos que a equação (3.13) só será satisfeita se $\dot{w} = 0$. Sendo assim w é constante. Conseqüentemente, neste caso temos um aberto de um plano ou de um cilindro.

2. Se $c(s) \neq 0$ em todo intervalo $I' = (s_2, s_3)$, então (3.12) pode ser reescrita na forma

$$\dot{\alpha} = \lambda w + \phi \dot{w}, \quad (3.14)$$

em que $\lambda = -\frac{d}{c}$, $\phi = -\frac{e}{c}$. Defina a função α^* como

$$\alpha^* = \alpha - \phi w. \quad (3.15)$$

Diferenciando a equação (3.15) com respeito a s e usando a equação (3.14) temos que

$$\dot{\alpha}^* = \dot{\alpha} - \phi \dot{w} - \dot{\phi} w = Aw, \quad (3.16)$$

em que usamos $A = \lambda - \dot{\phi}$.

- (a) Se $A = 0$ no intervalo I' então $\dot{\alpha}^* = 0$. Conseqüentemente $\alpha^* = \alpha_0^* =$ constante. Sendo assim,

$$X(s, u) = \alpha_0^* + (u + \phi)w. \quad (3.17)$$

Essa equação representa um cone de vértice α_0^* .

- (b) Se, no entanto, $A \neq 0$ em um subintervalo I'' de I' então, como consequência

da equação (3.16), no intervalo I'' temos

$$w = \frac{\dot{\alpha}^*}{A}. \quad (3.18)$$

Portanto, de acordo com a equação (3.15)

$$X = \alpha + uw = \alpha^* + v\dot{\alpha}^*, \quad (3.19)$$

$$\text{em que } v = \frac{u + \phi}{A}.$$

Neste caso $X(s, u)$ é uma superfície tangente da curva $\alpha^*(s)$.

□

Teorema 3.4. *Um aberto (suficientemente pequeno) de uma superfície regular é isométrica a um plano se, e somente se, for um aberto de uma superfície desenvolvível.*

Vamos agora introduzir o conceito de coordenadas geodésicas paralelas para provar o Teorema 3.4

Uma família de geodésicas a um parâmetro em uma superfície S é chamada de "campo de geodésicas" em um aberto S' de S se, através de cada ponto de S' passa (apenas uma vez) exatamente uma dessas geodésicas.

Vamos introduzir coordenadas u^*, v^* em um aberto suficientemente pequeno de S da seguinte maneira: escolhemos um campo de geodésicas em S como sendo as curvas coordenadas $v^* = v_0^*$ (constante) e suas trajetórias ortogonais como sendo as curvas coordenadas $u^* = u_0^*$ (constante) parametrizadas pelo comprimento de arco. Essas coordenadas ortogonais são chamadas coordenadas geodésicas paralelas.

Como as coordenadas u^* e v^* são ortogonais, o coeficiente F^* da primeira forma quadrática é nulo.

Como $v^* = v_0^*$ (constante) é geodésica ($\kappa_g = 0$), temos como consequência da equação (2.80),

$$\begin{aligned} \kappa_g &= [\Gamma_{11}^{*2}(u^{*'})^3 + (2\Gamma_{12}^{*2} - \Gamma_{11}^{*1})(u^{*'})^2 v^{*'} + (\Gamma_{22}^{*2} - 2\Gamma_{12}^{*1})(u^{*'})(v^{*'})^2 - \Gamma_{22}^{*1}(v^{*'})^3 \\ &+ u^{*'} v^{*''} - u^{*''} v^{*'}] \sqrt{E^* G^* - F^{*2}}, \end{aligned}$$

que

$$\Gamma_{11}^{*2} = 0. \quad (3.20)$$

Pela expressão de Γ_{11}^{*2} e como $F^* = 0$, vem que $E_{v^*}^* = 0$. Dessa forma E^* depende apenas da variável u^* .

Usando a transformação

$$\begin{cases} u &= \int_0^{u^*} \sqrt{E^*} du^*, \\ v &= v^*. \end{cases} \quad (3.21)$$

as curvas $v^* = v_0^*$ (constante) permanecem inalteradas. Portanto, suas trajetórias ortogonais também se mantêm inalteradas; é claro que os valores correspondentes $u^* = u_0^*$ (constante), serão transformados em outros valores $u = u_0$ (constante).

De acordo com a regra da cadeia e (3.21)

$$X_{u^*} = X_u \frac{du}{du^*} + X_v \frac{dv}{du^*} = X_u \sqrt{E^*} \quad (3.22)$$

e segue que $E = 1$. Como, $X_v^* = X_v$, segue que $G = G^*$ e $F = 0$. Assim a primeira forma fundamental correspondente às coordenadas u, v é dada pela expressão

$$I_q(w) = (u')^2 + G(v')^2. \quad (3.23)$$

Para provar o Teorema 3.4 precisaremos também das equações para a curvatura geodésica κ_g nos casos em que as curvas $u = u_0$ (constante) e $v = v_0$ (constante) são parametrizadas pelo comprimento de arco. Também precisaremos da curvatura Gaussiana K expressa apenas em termos dos coeficientes da primeira forma quadrática. Essas expressões são representadas a seguir.

Se $u = u_0$, então $u' = 0$, logo as curvas $\alpha(t) = (u_0, v(t))$ satisfazem $\alpha' = v'X_v$. Supondo-se α parametrizada pelo comprimento de arco, segue que

$$\begin{aligned} |\alpha'| &= 1 \\ \Rightarrow v' &= \frac{1}{\sqrt{G}} \end{aligned}$$

e, a partir disso,

$$(\kappa_g)_{u=u_0} = -\Gamma_{22}^1 \frac{\sqrt{EG - F^2}}{G^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.24)$$

De forma análoga, se $v = v_0$ e $\alpha(t) = (u, v_0)$ é parametrizada pelo comprimento de arco, segue que

$$\begin{aligned} |\alpha'| &= 1 \\ \Rightarrow u' &= \frac{1}{\sqrt{E}} \end{aligned}$$

e, a partir disso, temos

$$(\kappa_g)_{v=v_0} = \Gamma_{11}^2 \frac{\sqrt{EG - F^2}}{E^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.25)$$

Se (u, v) são ortogonais, temos pelas equações (2.78) e (2.75) que

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} = -\frac{1}{2E} \frac{\partial G}{\partial u} = -\frac{1}{2E} G_u, \quad (3.26)$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} = -\frac{1}{2G} \frac{\partial E}{\partial v} = -\frac{1}{2G} E_v. \quad (3.27)$$

Sendo assim temos a partir das equações (3.24), (3.25), (3.26) e (3.27) que

$$(\kappa_g)_{u=u_0} = \frac{G_u}{2\sqrt{EG}}, \quad (3.28)$$

$$(\kappa_g)_{v=v_0} = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}. \quad (3.29)$$

Se (u, v) são coordenadas ortogonais, ou seja $F = 0$, os símbolos de Christoffel são dados por

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_u}{2E}, \quad (3.30)$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{E_v}{2G}, \quad (3.31)$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E}, \quad (3.32)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G}, \quad (3.33)$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G}. \quad (3.34)$$

Substituindo os coeficientes acima na equação de Gauss (2.94)

$$-EK = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2,$$

teremos a seguinte equação, que representa a curvatura Gaussiana K para coordenadas (u, v) ortogonais,

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \right). \quad (3.35)$$

Vamos agora provar o Teorema 3.4.

Demonstração. *A curvatura Gaussiana K é invariante por meio de isometrias de acordo com o Teorema 2.4. Consequentemente, para que um aberto de uma superfície S possa ser isométrico a uma região aberta de um plano, devemos ter necessariamente $K = 0$. Portanto, em consequência do Teorema 3.2, S é um aberto de uma superfície desenvol-*

vível. Vamos agora provar que um aberto (suficientemente pequeno) S de uma superfície desenvolvível é isométrico a uma região aberta de um plano. Vamos introduzir em S coordenadas geodésicas paralelas (u, v) de modo que a curva $u = 0$ seja uma geodésica J , as curvas $v = v_0$ (constantes) sejam geodésicas que interceptam J perpendicularmente, e as curvas $u = u_0$ sejam geodésicas paralelas a J . De acordo com a discussão anterior, podemos usar uma transformação de coordenadas como (3.21) de forma a obter os coeficientes da primeira forma fundamental como dados por (3.23).

Além disso, se a coordenada v for o comprimento de arco de J , então $ds = dv$ sobre J , e portanto

$$G(0, v) = 1. \quad (3.36)$$

Uma vez que J é uma geodésica, temos da equação (3.28), que

$$G_u(0, v) = 0. \quad (3.37)$$

Em consequência do Teorema 3.2, como S é desenvolvível, $K = 0$ em S . Então pela equação (3.35) e pela expressão da primeira forma quadrática (3.23) a equação (3.35) se escreve como:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \left\{ \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} \right\} = 0. \quad (3.38)$$

Sendo assim temos

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = 0. \quad (3.39)$$

Integrando a relação acima, encontramos

$$\sqrt{G} = c_1(v)u + c_2(v) \quad (3.40)$$

em que c_1 e c_2 são funções apenas de v . De acordo com a equação (3.36) temos $c_2 = 1$ e, de acordo com a equação (3.37), $c_1 = 0$. Conseqüentemente $E = 1, F = 0$ e $G = 1$. Mas esses coeficientes são os mesmos que os coeficientes da primeira forma fundamental do plano (u, v) , parametrizado por $Y(u, v) = (u, v, 0)$. Portanto, a definição 2.18 permite concluir que a superfície desenvolvível S é isométrica a um plano. \square

4 Aplicações

Neste capítulo analisaremos as parametrizações dos desenvolvimentos no plano, de curvas descritas sobre cilindros e cones. Entendemos por desenvolvimento, no plano, de uma curva C dada sobre o cone ou cilindro como sendo a imagem de C pela isometria que leva o cone ou cilindro no plano.

4.1 Curvas em cilindros

Considere dois cilindros ortogonais C_1 e C_2 , de equações respectivas $m(x, y) = 0$ e $p(x, z) = 0$. Esses cilindros se interceptam ao longo da curva C . Chamaremos o plano xz de plano de desenvolvimento. Neste plano, considere as seguintes curvas: a curva C_p que é a projeção ortogonal de C e a curva C_u , de equação $u(x, z) = 0$, que é a curva obtida pelo desenvolvimento da curva C sobre o plano xz .

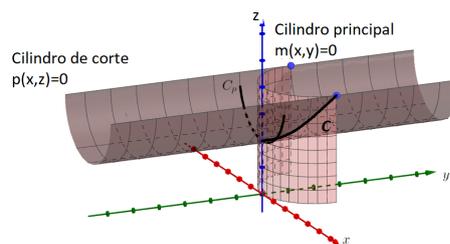


Figura 6: Interseção entre cilindro principal e cilindro de corte, gerando a curva C e sua projeção ortogonal C_p .

A caracterização de C_u é dada pelo teorema seguinte [1].

Teorema 4.1. *Para uma curva C , interseção de dois cilindros cujas geratrizes são ortogonais, a equação de perfil $p(t, z) = 0$ para C_p e a equação da curva desenvolvida*

$u(x, z) = 0$ para C_u estão relacionadas da seguinte forma

$$u(x, z) = p(s^{-1}(x), z), \quad (4.1)$$

$$p(t, z) = u(s(t), z). \quad (4.2)$$

Demonstração. Suponha que a curva de interseção C passa pelo ponto $(0, 0, z)$. Vamos considerar os pontos P sobre a curva de perfil $m(x, y) = 0$ e parametrizar esta curva por meio do comprimento de arco. Seja $P = (t, y_P, z_P)$ um ponto da curva de interseção C e seja $s(t)$ o comprimento de arco, de 0 a t , da curva de perfil (i.e. interseção entre o cilindro de equação $m(x, y) = 0$ e o plano $z = z_P$). A Figura 7 ilustra essa situação. Dessa forma os pontos da curva C_p a uma altura z do plano xy são expressos pela equação de perfil $p(t, z) = 0$. Vamos agora desenvolver o cilindro principal e, com ele, a curva C .

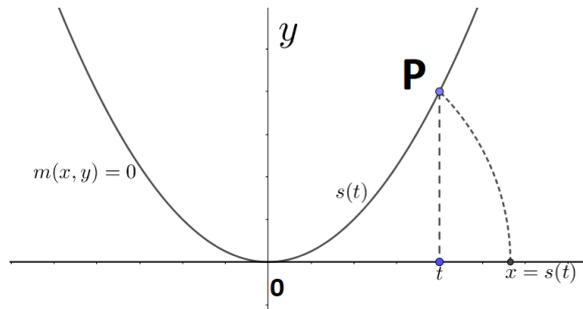


Figura 7: Relação entre um ponto P no perfil do cilindro principal, descrito em termos dos parâmetros t e $s(t)$.

Os pontos $P(x, y, z_P)$ da curva de perfil $m(x, y) = 0$, para $z = z_P$, são levados nos pontos de coordenadas $(s(t), 0, z_P)$. Assim, os pontos da curva C_u de cota z podem ser expressos por $u(s(t), z) = 0$. Logo $p(t, z) = u(s(t), z)$. Sendo assim provamos a equação (4.2).

Agora considere uma porção do comprimento de arco $x = s(t)$, tal que $s(t)$ seja invertível. Logo podemos escrever $t = s^{-1}(x)$ e obtemos de $p(t, z) = u(s(t), z)$ a equação $u(x, z) = p(s^{-1}(x), z)$ \square

Como a obtenção da equação cartesiana da curva desenvolvida depende do comprimento de arco da curva de perfil, há casos em que essas equações não podem ser dadas de forma explícita. De fato, se considerarmos, como cilindro principal, um cilindro reto de base elíptica, não obteríamos uma relação explícita entre x e t , uma vez que $s(t) = x$ seria dado por uma integral elíptica.

A restrição do Teorema 4.1 ao caso em que o cilindro principal é um cilindro circular reto é dada a seguir [1].

Teorema 4.2. Em um cilindro circular reto de raio r , seja C uma curva definida pelo

perfil C_p de um cilindro de corte horizontal e seja C_u a curva desenvolvida de C sobre o plano de desenvolvimento. Então a equação de perfil $p(t, z) = 0$ para C_p e a equação de desenvolvimento $u(x, z) = 0$ para C_u estão relacionadas da seguinte forma:

$$u(x, z) = p\left(r \operatorname{sen} \frac{x}{r}, z\right), \quad (4.3)$$

$$p(t, z) = u\left(r \operatorname{arcsen} \frac{t}{r}, z\right). \quad (4.4)$$

Demonstração. Considere o Teorema 4.1 restrito a um cilindro circular reto de raio da base r . A abscissa do ponto P é dada por

$$t = r \operatorname{sen} \theta \quad (4.5)$$

e o comprimento de arco será

$$s(t) = x = r\theta. \quad (4.6)$$

Logo, substituindo a equação (4.6) em (4.5) temos que

$$t = r \operatorname{sen} \frac{x}{r} \quad (4.7)$$

e

$$s(t) = x = r \operatorname{arcsen} \frac{t}{r}. \quad (4.8)$$

Portanto, a equação (4.1) passa a ser

$$p(t, z) = u\left(r \operatorname{arcsen} \frac{t}{r}, z\right)$$

e a equação (4.2) torna-se

$$u(x, z) = p\left(r \operatorname{sen} \frac{x}{r}, z\right).$$

□

Vamos agora aplicar o resultado do Teorema 4.2 para determinar a parametrização do desenvolvimento da curva de interseção de dois cilindros circulares retos perpendiculares de mesmo raio como ilustrado na Figura 8.

Seja r o raio dos cilindros e seja $p(t, z) = t^2 + z^2 - r^2 = 0$ a equação do cilindro de perfil. Considerando-se que $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, a equação (4.3) fornece diretamente

$$\left(r \operatorname{sen} \frac{x}{r}\right)^2 + z^2 = r^2 \quad (4.9)$$

e

$$z = \pm r \cos \frac{x}{r}. \quad (4.10)$$

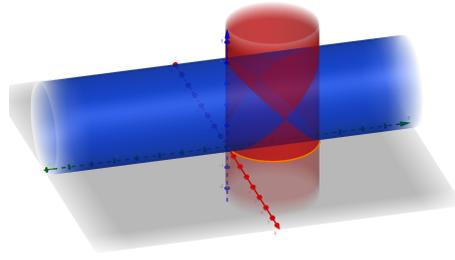


Figura 8: Aplicação do Teorema 4.2 utilizando a interseção ortogonal de dois cilindros circulares retos de mesmo raio.

O gráfico desta função está representado na Figura 9.

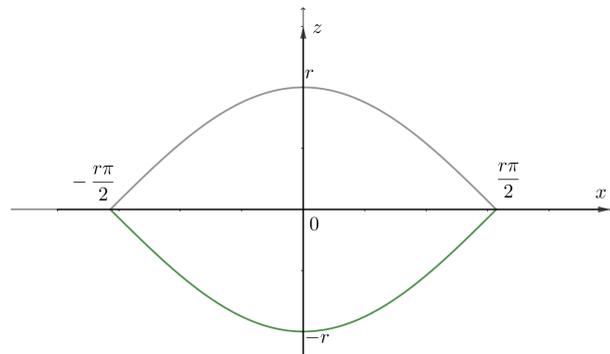


Figura 9: Representação da curva C_u , referente à interseção de dois cilindros circulares retos de mesmo raio, $r = 1$, no plano de desenvolvimento.

A curva C_p é dada por $t^2 + z^2 = r^2$, que é uma circunferência de raio r projetada ortogonalmente a partir da curva C no plano de visualização xz .

Vamos agora determinar a parametrização da curva C_u desenvolvida a partir da curva de interseção entre um cilindro circular reto e um cilindro circular oblíquo ambos de mesmo raio, como ilustrado na Figura 10. Para isso considere um cilindro circular reto de raio

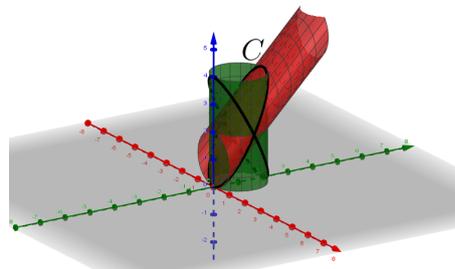


Figura 10: Interseção de dois cilindros de bases circulares de mesmo raio.

da base r , parametrizado por

$$X_1(\theta, v) = (r \operatorname{sen} \theta, r(1 - \cos \theta), 0) + v(0, 0, 1). \quad (4.11)$$

Considere agora um cilindro circular oblíquo, com base paralela ao plano xz e geratriz pertencendo à reta $z = ay$, em que $a \geq 0$. Podemos parametrizar essa superfície por

$$X_2(s, u) = (r \operatorname{sen} s, 0, r(1 - \cos s)) + u(0, 1, a). \quad (4.12)$$

A interseção $X_1 \cap X_2$ é determinada por

$$\begin{cases} r \operatorname{sen}(\theta) = r \operatorname{sen}(s), \\ r(1 - \cos \theta) = u, \\ v = r(1 - \cos s) + ua. \end{cases}$$

Para $\theta = s$, a curva de interseção é dada por

$$\alpha(s) = (r \operatorname{sen} s, r(1 - \cos s), (1 + a)r(1 - \cos s)) \quad (4.13)$$

e para $\theta = \pi - s$, temos

$$\alpha(s) = (r \operatorname{sen} s, r(1 + \cos s), r(1 - \cos s) + ar(1 + \cos s)). \quad (4.14)$$

Portanto, para $s \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, obtemos duas curvas e só há simetria entre elas se $a = 0$.

A curva (4.13) possui projeção ortogonal no plano xz dada pela curva

$$C_p(s) = (r \operatorname{sen} s, 0, (1 + a)r(1 - \cos s)). \quad (4.15)$$

Fazendo $t = r \operatorname{sen} s$, a curva C_p nas coordenadas (t, z) descreve a elipse

$$\frac{t^2}{r^2} + \left(\frac{z - r(1 + a)}{r(1 + a)}\right)^2 = 1. \quad (4.16)$$

De maneira análoga, a curva (4.14) possui projeção ortogonal no plano xz dada pela curva

$$C_p(s) = (r \operatorname{sen} s, 0, r(1 - \cos s) + ar(1 + \cos s)), \quad (4.17)$$

que também é descrita nas coordenadas (t, z) pela elipse

$$\frac{t^2}{r^2} + \left(\frac{z - r(1 + a)}{r(a - 1)}\right)^2 = 1. \quad (4.18)$$

Como o ângulo θ é o ângulo central dado na parametrização (4.11), a abscissa do desenvolvido de P sobre a curva C_u é $x = r\theta$. A Figura 11 ilustra essa situação.

Dessa forma, para $\theta = s$ ou $\theta = \pi - s$, temos

$$t = r \operatorname{sen} \left(\frac{x}{r}\right). \quad (4.19)$$

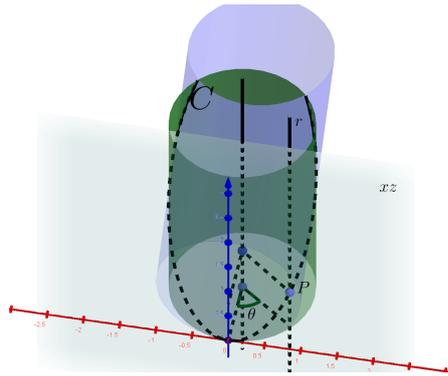


Figura 11: Representação dos elementos geométricos para o desenvolvimento da curva C_u .

Logo as curvas C_u podem ser expressas pelas relações

$$z = r(1 + a) \pm r(1 + a) \cos\left(\frac{x}{r}\right) \quad (4.20)$$

$$z = r(1 + a) \pm r(a - 1) \cos\left(\frac{x}{r}\right). \quad (4.21)$$

A Figura 12 mostra, para $x \in \left[-\frac{\pi r}{2}, \frac{\pi r}{2}\right]$, os traços de C_u para vários valores de a . Observamos que para $a = 0$, obtemos a representação dada na Figura 9.

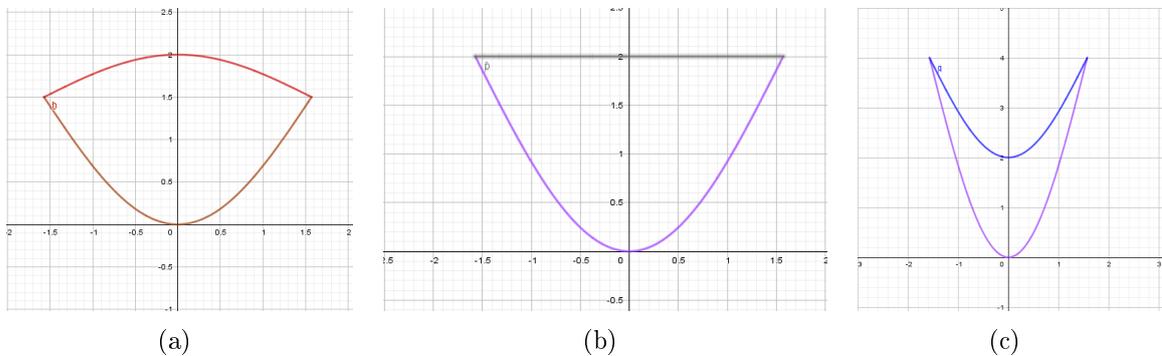


Figura 12: Representação da curva C_u , referente à interseção de dois cilindros circulares retos de mesmo raio, $r = 1$: (a) $a = 0,5$; (b) $a = 1$; (c) $a = 3$.

4.2 Curvas em cones

Vamos agora tentar determinar a parametrização do desenvolvimento de uma curva particular de um cone, no plano de desenvolvimento. A parametrização de um cone com vértice no ponto $V = (0, 0, c)$ e base circular contido no plano $ax + z = 0$, pode ser expressa por

$$X(\varphi, u) = \alpha(\varphi)(1 - u) + uV \quad (4.22)$$

em que $u \in (0, 1)$ e a curva $\alpha(\varphi)$ é a circunferência contida no plano $z = -ax$ e centrada na origem. A parametrização de α é dada por

$$\alpha(\varphi) = \left(\frac{R \cos \varphi}{\sqrt{1+a^2}}, R \operatorname{sen} \varphi, -\frac{aR \cos \varphi}{\sqrt{1+a^2}} \right), \quad (4.23)$$

em que $\varphi \in (0, 2\pi)$ é o ângulo polar. Sendo assim a equação (4.22) pode ser reescrita como

$$X(\varphi, u) = \left(\frac{R \cos \varphi (1-u)}{\sqrt{1+a^2}}, R \operatorname{sen} \varphi (1-u), -\frac{aR \cos \varphi (1-u)}{\sqrt{1+a^2}} + uc \right). \quad (4.24)$$

Note que, para $a = 0$, temos um cone reto.

Vamos considerar uma curva $\beta(\varphi)$ tal que $d(\beta, V) = 1$. Portanto, a relação entre os parâmetros u e φ que determina a curva β é dada por

$$\begin{aligned} \frac{R^2 \cos^2 \varphi (1-u)^2}{1+a^2} + R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi (1-u)^2 + (1-u)^2 \left(\frac{aR \cos \varphi}{\sqrt{1+a^2}} + c \right)^2 &= 1. \\ (1-u)^2 \left(R^2 + c^2 + \frac{2acR \cos \varphi}{\sqrt{1+a^2}} \right) &= 1. \end{aligned}$$

Vamos chamar $1-u = A(\varphi)$, em que

$$A(\varphi) = \left(R^2 + c^2 + \frac{2aRc \cos \varphi}{\sqrt{1+a^2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.25)$$

e, dessa forma, temos que

$$\beta(\varphi) = \left(\frac{AR \cos \varphi}{\sqrt{1+a^2}}, AR \operatorname{sen} \varphi, \frac{-aRA \cos \varphi}{\sqrt{1+a^2}} + (1-A)c \right). \quad (4.26)$$

A curva β tem como seu desenvolvimento no plano uma circunferência de raio 1 em torno do vértice V . Para determinar a relação entre o comprimento do arco e o ângulo central da circunferência, deve ser possível calcular

$$s(\varphi) = \int_0^\varphi |\beta'(\varphi)| d\varphi. \quad (4.27)$$

Usando

$$A' = \frac{aRc \operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{1+a^2}} A^3, \quad (4.28)$$

obtemos

$$|\beta'(\varphi)| = AR \left[1 - \frac{a^2 c^2}{1+a^2} \operatorname{sen}^2 \varphi A^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.29)$$

Sendo assim temos que

$$s(\varphi) = \int_0^\varphi AR \left[1 - \frac{a^2 c^2}{1+a^2} \operatorname{sen}^2 \varphi A^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\varphi. \quad (4.30)$$

Usando $M = \frac{ac}{\sqrt{1+a^2}}$ e $K^2 = R^2 + c^2$, temos

$$s(\varphi) = R \int_0^\varphi \frac{[(R + M \cos \varphi)^2 + c^2 - M^2]^{\frac{1}{2}}}{c^2 + R(R + 2M \cos \varphi)} d\varphi. \quad (4.31)$$

Sob a mudança de variável

$$x = R + M \cos \varphi \quad (4.32)$$

$$dx = -M \operatorname{sen} \varphi d\varphi. \quad (4.33)$$

obtemos finalmente

$$s(\varphi) = -R \int_0^\varphi \frac{[(x^2 + c^2 - M^2)(M^2 - (x - R)^2)]^{\frac{1}{2}}}{(c^2 + R(2x - R)(M^2 - (x - R)^2))} dx. \quad (4.34)$$

Definição 4.1. Se $R(x, y)$ é uma função racional de x e y , onde y^2 é um polinômio de grau 3 ou 4 em x , a integral

$$\int R(x, y) dx \quad (4.35)$$

é chamada de integral elíptica (Ver [5], capítulo 17 "Elliptic integrals", seção 17.1 Equação 17.1.1).

De acordo com Definição 4.1, $s(\varphi)$ é uma integral elíptica e, a menos que

$$a = 0,$$

não é possível obter sua expressão explícita em termos de funções usuais.

No caso do cone reto, obtemos $s(\varphi) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + c^2}} \varphi$ e, se representarmos por θ o ângulo entre duas geratrizes no plano de desenvolvimento, obtemos a relação

$$\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + c^2}} \varphi$$

entre θ e φ , i.e.,

$$\theta = \frac{R\varphi}{\sqrt{R^2 + c^2}}. \quad (4.36)$$

A partir dessa relação é possível estabelecer as equações de desenvolvimento de uma curva contida num cone circular reto.

Considere uma curva C , obtida pela interseção entre um cone circular reto e um plano

cuja normal é $(0, -\operatorname{sen}\beta, \operatorname{cos}\beta)$. Considere também a circunferência sobre o cone formada pelos pontos que distam $R(0)$ do vértice. Essa circunferência é chamada de circunferência de base e seu desenvolvimento é um arco de circunferência de raio $R(0)$, como ilustrado na Figura 13.

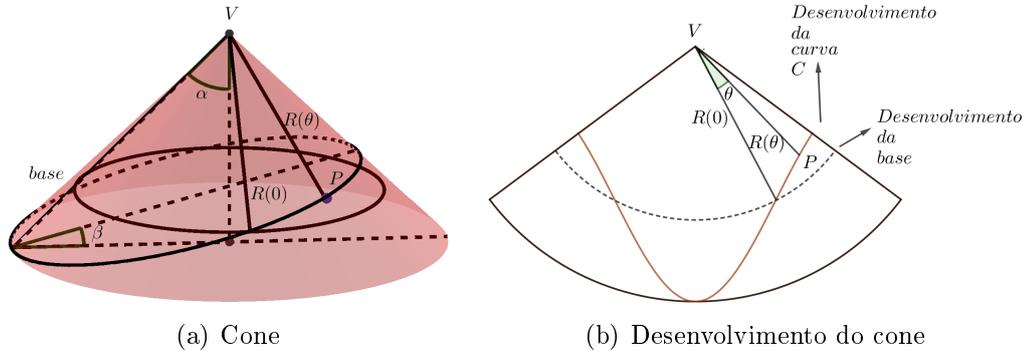


Figura 13: Seção em um cone gerando uma curva C e seu desenvolvimento no plano.

Estamos interessados em descrever analiticamente o desenvolvimento da curva C no plano de desenvolvimento. Como podemos observar na Figura 13 os pontos P sobre a curva C podem ser associados com seus correspondentes sobre a curva desenvolvida, usando coordenadas polares $(R(\theta), \theta)$, tal que $R(\theta)$ é a distância radial entre os pontos P sobre a curva C e o vértice V do cone, e $R(0)$ representa a distância inicial de um ponto localizado na interseção entre a curva C e a circunferência de base. O ângulo polar θ é medido entre $R(0)$ e $R(\theta)$.

Como vimos anteriormente, no caso de um cone reto a equação (4.36) estabelece a relação entre o ângulo de rotação do cone, em torno do seu eixo, e o ângulo correspondente entre duas geratrizes desenvolvidas sobre o plano.

Se s é o comprimento do segmento da geratriz de cone medido do vértice à base, que é igual ao raio da circunferência descrita no plano de desenvolvimento pelos pontos da base do cone, temos

$$s\theta = \rho\varphi. \quad (4.37)$$

A Figura 14 representa essa situação.

Note que podemos tornar a relação independente de ρ e s . Usando o fato de que $s \operatorname{sen}\alpha = \rho$, em que α é metade do ângulo no vértice V para todo $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\varphi = k\theta, \quad (4.38)$$

em que $k = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$.

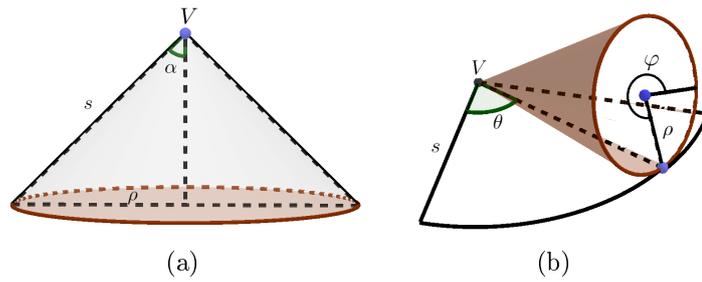


Figura 14: (a)Cone e seus elementos; (b) Desenvolvimento do cone no plano.

Vamos agora analisar curvas C sobre a superfície de um cone circular reto, usando sua projeção ortogonal no plano π perpendicular ao seu eixo e que contém seu vértice. Chamaremos esse plano π de plano de visualização [1]. A curva C é projetada ortogonalmente em uma curva C_0 , que pode ser descrita pela equação polar $r = r(\varphi)$, onde $r = r(\varphi)$ é a distância radial dos pontos de C_0 até o eixo de simetria do cone. A Figura 15 representa essa situação.

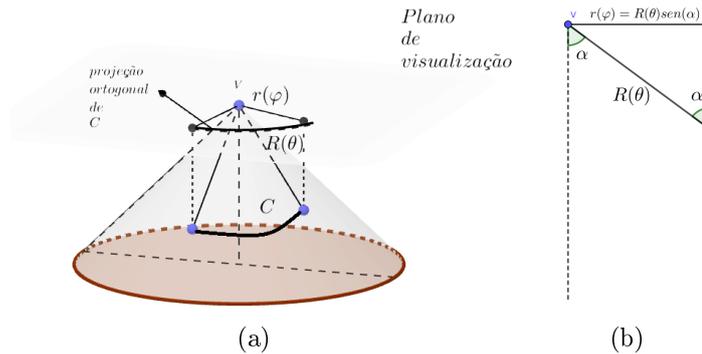


Figura 15: (a)Curva C sendo projetada ortogonalmente em C_0 no plano de visualização; (b)Relação entre $r = r(\varphi)$ e $R(\theta)$.

Ao juntarmos a relação

$$r = r(\varphi) = R(\theta) \text{sen } \alpha, \quad (4.39)$$

com $\varphi = k\theta$, obtemos diretamente o teorema a seguir.

Teorema 4.3. *Seja C uma curva sobre a superfície de um cone circular reto de ângulo no vértice 2α . Se sua projeção no plano de visualização tem uma equação polar na forma $r = r(\varphi)$, então a curva desenvolvida de C é dada pela equação polar*

$$R(\theta) = kr(k\theta), \quad (4.40)$$

onde $k = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$.

Dessa forma, se $R(\theta)$ for conhecida, $r(\varphi)$ será determinada pela equação

$$r(\varphi) = \frac{R\left(\frac{\varphi}{k}\right)}{k}. \quad (4.41)$$

Vamos aplicar os resultados vistos acima a curvas particulares da superfície de um cone circular reto, S . Considere uma curva C obtida pela interseção de S com um plano γ que forma um ângulo $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ com o plano de desenvolvimento. Sabemos que tal curva C é chamada de seção cônica. O plano γ intercepta o eixo do cone no ponto O , que é o centro da circunferência de base de raio ρ . Seja α a metade do ângulo no vértice do cone S , $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Considere agora uma das geratrizes de S , que passa por um ponto $P \in C$ e intercepta a base do cone em um ponto B que pode ser descrito em coordenadas polares por (ρ, φ) , onde φ é medido a partir do raio OA , sendo $A = (\rho, 0)$ (veja a Figura 16).

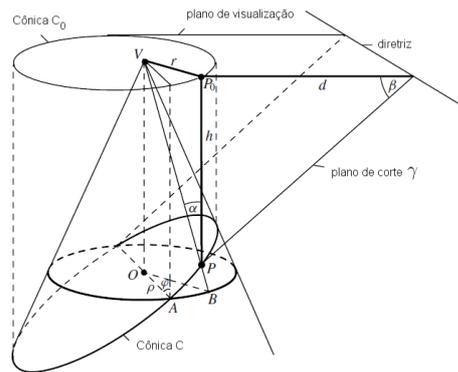


Figura 16: Representação do cone S com seção cônica dada por C .(figura adaptada de [1])

Teorema 4.4. *A projeção de uma cônica C sobre o plano de visualização é uma cônica C_0 que satisfaz as condições*

1. *um foco é o vértice V do cone;*
2. *a diretriz é a reta de interseção entre o plano de visualização e o plano de corte γ ;*
3. *Sua excentricidade é dada por $\lambda = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$;*
4. *Sua equação polar é dada por*

$$r(\varphi) = \frac{r(0)}{1 + \lambda \operatorname{sen} \varphi}. \quad (4.42)$$

Sendo $k = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$, a curva desenvolvida da cônica C é dada pela equação polar

$$R(\theta) = \frac{R(0)}{1 + \lambda \operatorname{sen}(k\theta)}, \quad (4.43)$$

onde $R(0) = kr(0)$.

Na demonstração do teorema 4.4, usaremos a seguinte definição de cônica.

Definição 4.2. Denomina-se cônica o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja razão entre as distâncias a um ponto fixo F e a uma reta fixa d é igual a uma constante não negativa e . O ponto fixo F é chamado de foco, a reta fixa d de diretriz e a razão constante e de excentricidade da cônica [8].

1. Se $e = 1$, a cônica é uma parábola.
2. Se $e < 1$, a cônica é uma elipse.
3. Se $e > 1$, a cônica é uma hipérbole.

Demonstração. Considere que L seja a reta de interseção do plano γ com o plano de visualização. Para qualquer cônica C , seja C_0 sua projeção ortogonal no plano de visualização e seja $P \in C$ um ponto tal que sua projeção ortogonal no plano de visualização seja P_0 . Considere d a distância entre o ponto P_0 e a reta L e r a distância de P_0 até o vértice V , como representado na Figura 16.

De acordo com os dados da Figura 16, vale a expressão $\frac{r}{d} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$. De fato temos, $\frac{r}{d} = \frac{r h}{h d}$, onde h é a distância de P até P_0 . De acordo com a Figura 16, $\frac{r}{h} = \operatorname{tg} \alpha$ e $\frac{h}{d} = \operatorname{tg} \beta$. Portanto,

$$\frac{r}{d} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta. \quad (4.44)$$

Como a razão $\frac{r}{d}$ é independente de P_0 segue da Definição 4.2 que C_0 é uma cônica. Essa razão irá representar a excentricidade de C_0 de acordo com essa definição. Denotamos a excentricidade por λ , ou seja, $\lambda = \frac{r}{d}$.

Além disso, um dos focos da cônica será o vértice V e sua diretriz será L .

Para provar a equação (4.42), vamos descrever a curva C_0 em coordenadas polares $(r(\varphi), \varphi)$, onde $r(\varphi)$ é a distância do vértice V até um ponto de C_0 , e φ é medido a partir de uma reta que passa por V e é paralela a L , como ilustrado na Figura 17. De acordo com o que vimos acima, a distância de um ponto ao foco V é proporcional à distância d ,

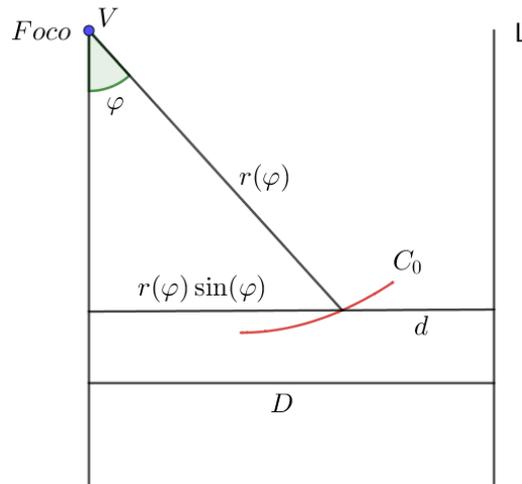


Figura 17: Representação polar da curva C_0 .

ou seja $r(\varphi) = \lambda d$. Mas de acordo com a Figura 17, temos $d = D - r(\varphi) \operatorname{sen} \alpha$, onde D é a distância do foco até a diretriz L . Segue que $r(\varphi) = \lambda(D - r(\varphi) \operatorname{sen}(\varphi))$, que podemos escrever

$$r(\varphi) = \frac{\lambda D}{1 + \lambda \operatorname{sen}(\varphi)}. \quad (4.45)$$

Como $\lambda D = r(0)$, obtemos a equação (4.42)

$$r(\varphi) = \frac{r(0)}{1 + \lambda \operatorname{sen}(\varphi)}.$$

Se estivermos interessados em determinar a curva desenvolvida da cônica C , basta usarmos a equação (4.40), dada por $R(\theta) = kr(k\theta)$, o fato de $\varphi = k\theta$ e $k = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \neq 1$. Segue que, relacionando essas equações temos:

$$R(\theta) = \frac{kr(0)}{1 + \lambda \operatorname{sen}(k\theta)}, \quad (4.46)$$

onde $R(0) = kr(0)$. □

A razão $e = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \frac{\alpha}{2}}$ é a excentricidade da curva C . Como $\lambda = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$ e $e = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \frac{\alpha}{2}}$, segue que: se $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, temos $e = 1 = \lambda$; se $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, temos $e, \lambda \in (0, 1)$; se $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$, temos $e, \lambda > 1$. Dessa forma a cônica C e sua cônica projetada C_0 são cônicas do mesmo tipo: elipses, parábolas ou hipérbolas.

De acordo com [1], uma curva plana descrita pela equação polar

$$R(\theta) = \frac{R_0}{1 + \lambda \operatorname{sen}(k\theta)}, \quad (4.47)$$

onde R_0 e λ são constantes não negativas e k é uma constante real, é chamada cônica

generalizada. Essas curvas são elipses, parábolas ou hipérboles generalizadas, se $\lambda < 1$, $\lambda = 1$ ou $\lambda > 1$, respectivamente. No caso aqui tratado, temos $k = \frac{1}{\text{sen}\alpha}$; dependendo do valor desta constante, tiramos as seguintes conclusões:

1. $k = 1 \Rightarrow \text{sen}\alpha = 1$. Logo o cone está contido no plano de visualização e a equação (4.46) é a equação polar de uma cônica com excentricidade λ com um dos focos no vértice V do cone.
2. Se $k > 1$, o Teorema 4.4 garante que a curva $R(\theta)$ é obtida pelo desenvolvimento de uma cônica C , de excentricidade λ na superfície de um cone de vértice V e ângulo no vértice 2α .
3. Se $k < 1$, então a curva $R(\theta)$ não pode ser desenvolvida a partir de uma cônica C sobre a superfície do cone.

As Figuras 18, 19 e 20 ilustram os traços de cônicas generalizadas dadas pela equação 4.47, em que $R_0 = 1$. É interessante notar que $R(\theta)$ tem período $\frac{2\pi}{k}$ e que, sendo assim, só teremos uma curva fechada para $k \in \mathbb{Q}^*$.

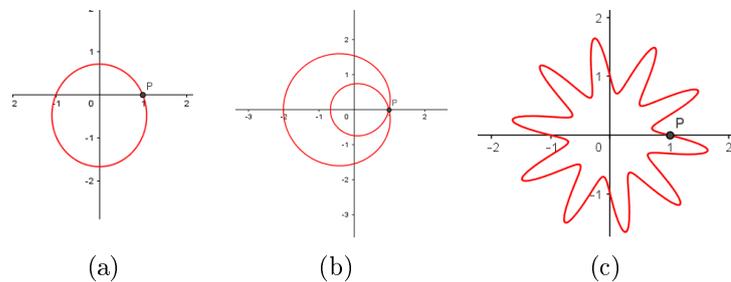


Figura 18: Elipses generalizadas: (a) $k = 1$ e $\lambda = 0,4$; (b) $k = 0,5$ e $\lambda = 0,5$; (c) $k = 10$ e $\lambda = 0,4$.

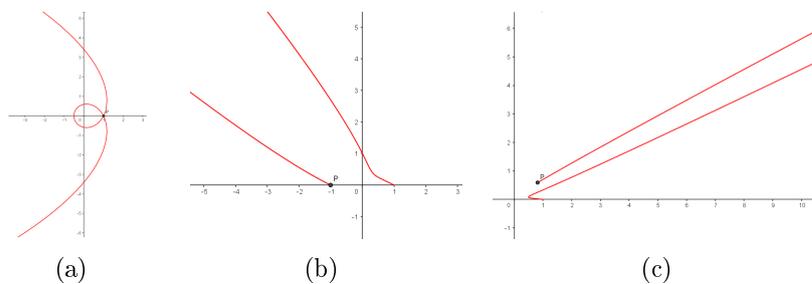


Figura 19: Parábolas generalizadas: (a) $k = 0,5$ e $\lambda = 1$; (b) $k = 2$ e $\lambda = 1$; (c) $k = 10$ e $\lambda = 1$

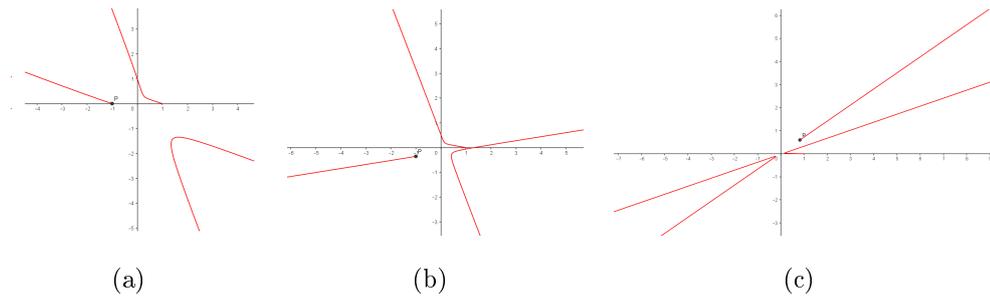


Figura 20: Hipérboles generalizadas:(a) $k = 2$ e $\lambda = 1, 5$;(b) $k = 1, 8$ $\lambda = 3$;(c) $k = 10$ e $\lambda = 5$

4.2.1 Geodésica do cone

Podemos aplicar os resultados obtidos na seção anterior para determinar a expressão das geodésicas sobre um cone reto. Sabemos que um cone é uma superfície desenvolvível e, portanto, uma geodésica se desenvolve como uma reta no plano de desenvolvimento. Da mesma forma, ao enrolar um plano em torno de um cone, uma reta seria enrolada sobre uma geodésica desse cone. Para construir uma geodésica sobre a superfície do cone, iniciamos com uma reta L no plano de desenvolvimento e vamos envolver esse plano para formar um cone. Consideraremos uma reta L que não passa pelo vértice V , pois, do contrário, sabemos que tais retas são levadas nas geratrizes do cone, o que não apresenta interesse. A equação polar das retas L , no referencial com origem no vértice V e ângulo polar θ medido a partir do raio do setor circular, são dadas por

$$R(\theta) = \frac{a}{\cos\theta}, \quad (4.48)$$

em que a é constante não nula, se L for perpendicular à geratriz $R(0)$, e

$$R(\theta) = \frac{b}{\sin\theta - a \cos\theta}, \quad (4.49)$$

em que $a \neq \tan\theta$ e b são constantes, se a reta não for perpendicular à geratriz $R(0)$. Considere o cone reto de base circular parametrizado por

$$X(\varphi, u) = (R \cos\varphi(1 - u), R \sin\varphi(1 - u), uc), \quad (4.50)$$

com vértice $V = (0, 0, c)$. Vamos determinar expressões para as geodésicas de $X(\varphi, u)$ a partir das retas (4.48) e (4.49) no plano de visualização.

Sendo $R(1 - u) = r(\varphi)$, temos $u = 1 - \frac{r(\varphi)}{R}$. Logo as curvas sobre o plano de

visualização descritas por $(r(\varphi), \varphi)$ são levadas no cone pela expressão

$$P(\varphi) = \left(r(\varphi) \cos(\varphi), r(\varphi) \sin(\varphi), c - \frac{r(\varphi)c}{R} \right). \quad (4.51)$$

Do Teorema 4.3, sabemos que $r(\varphi) = R(\theta) \sin(\alpha)$ e $\theta k = \varphi$. Logo, $r(\varphi) = R(\varphi/k) \sin \alpha$ e as curvas $P(\varphi)$ podem ser expressas por

$$P(\varphi) = \left(R \left(\frac{\varphi}{k} \right) \cos(\varphi) \sin \alpha, R \left(\frac{\varphi}{k} \right) \sin \varphi \sin \alpha, c - \frac{cR \left(\frac{\varphi}{k} \right) \sin \alpha}{R} \right). \quad (4.52)$$

Como estamos interessados em analisar as geodésicas sobre a superfície do cone a partir das retas (4.48) e (4.49), temos:

- para (4.48)

$$P(\varphi) = \left(\frac{a \cos \varphi}{k \cos \left(\frac{\varphi}{k} \right)}, \frac{a \sin \varphi}{k \cos \left(\frac{\varphi}{k} \right)}, c - \frac{ca}{kR \cos \left(\frac{\varphi}{k} \right)} \right); \quad (4.53)$$

- para (4.49)

$$P(\varphi) = \left(\frac{b \cos \varphi}{k \left(\sin \frac{\varphi}{k} - a \cos \frac{\varphi}{k} \right)}, \frac{b \sin \varphi}{k \left(\sin \frac{\varphi}{k} - a \cos \frac{\varphi}{k} \right)}, c - \frac{c}{R} \frac{b}{k \left(\sin \frac{\varphi}{k} - a \cos \frac{\varphi}{k} \right)} \right). \quad (4.54)$$

As Figuras 21 e 22 representam as equações (4.48) e (4.49) tais que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{R}$ e considerando $c = 3$ e $R = 2$.

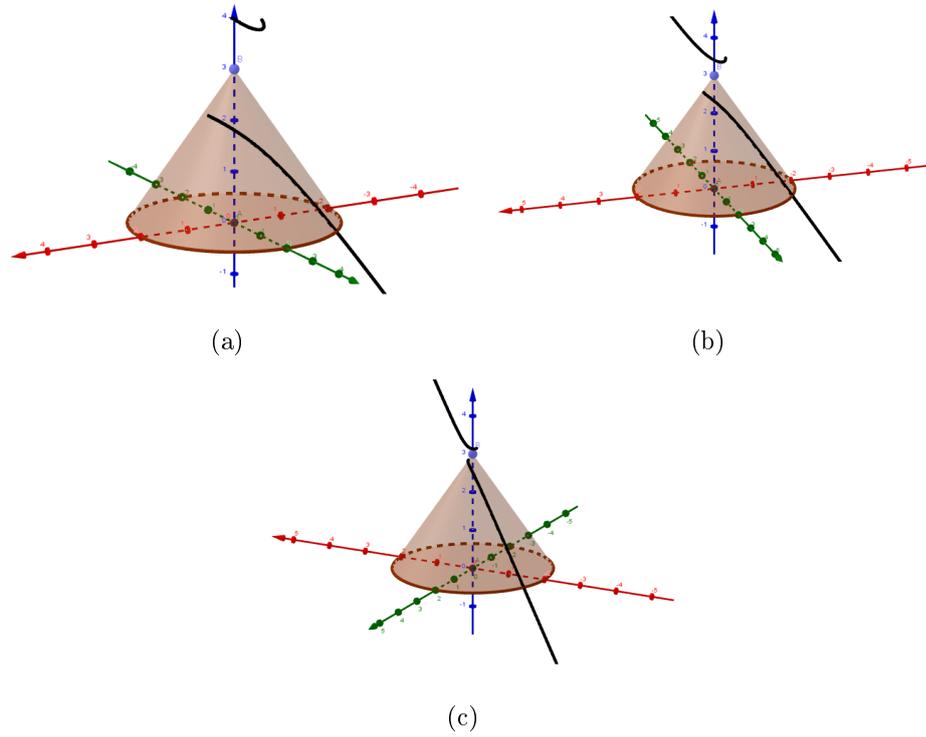


Figura 21: Geodésicas correspondentes à equação (4.48):(a) $a = 1$; (b) $a = 0,5$; (c) $a = 0,2$.

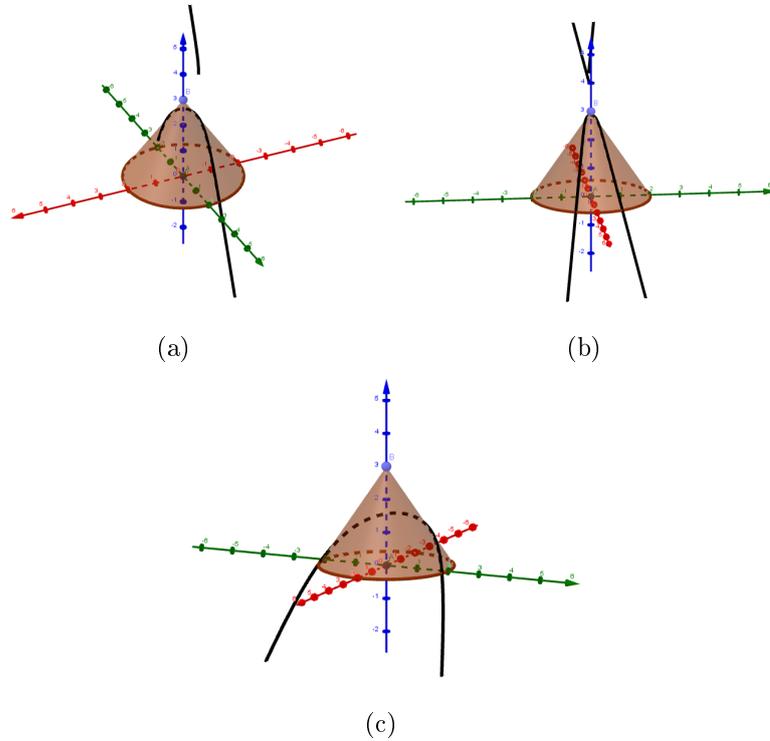


Figura 22: Geodésicas correspondentes à equação (4.49) : (a) $a = 1, b = 1$; (b) $a = 0,2$ e $b = 0,2$; (c) $a = 0,2$ e $b = 2$.

Observamos, por fim, que essas curvas podem ser facilmente obtidas experimental-

mente, tal como ilustram as Figuras 23, 24 e 25.

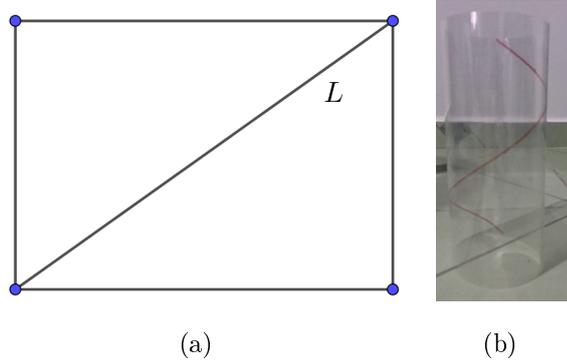


Figura 23: (a) geodésica L no plano; (b) Geodésica no cilindro ao envolver a diagonal na superfície do cilindro.

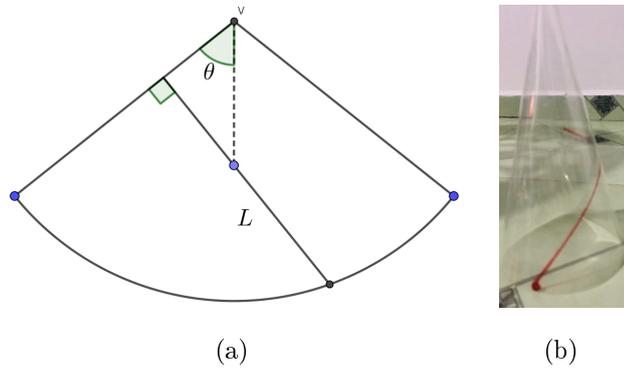


Figura 24: (a) Geodésica L de acordo com a equação (4.48) no plano de desenvolvimento; (b) Geodésica no cone ao envolver a reta L na superfície do cone.

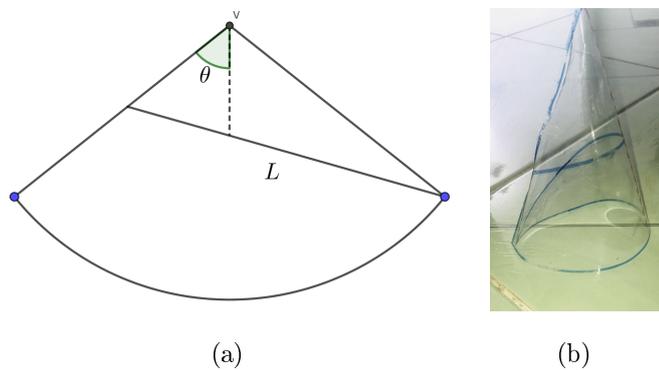


Figura 25: (a) Geodésica L de acordo com a equação (4.49) no plano de desenvolvimento; (b) Geodésica no cone ao envolver a reta L na superfície do cone.

5 *Conclusão*

Nesta dissertação realizamos o estudo formal de superfícies desenvolvíveis, enunciando e provando teoremas que caracterizam essas superfícies.

Como citado na introdução, esse tema tem larga aplicação em áreas como engenharia naval, aeronáutica, arquitetura, computação e indústria.

Essas aplicações deveriam ser motivos suficientes para esse tema ser explorado no ensino básico. De fato, o que torna o tópico de superfícies desenvolvíveis de fácil abordagem em sala de aula, é exatamente o que o torna essencial para a construção de produtos manufaturados, a saber: o fato de poder encurvar um ou vários pedaços de plano para formar uma superfície mais complexa. A grande vantagem deste tópico é a possibilidade de experimentação; entre as possíveis abordagens está a determinação de curvas especiais como ilustramos no capítulo anterior. A análise do comportamento de geodésicas, no plano de desenvolvimento e como essas geodésicas são levadas na superfície do cone ou do cilindro se constitui num exemplo ímpar de abordagem experimental da matemática, além de propiciar um tratamento analítico acessível a alunos de ensino médio.

A elaboração de atividades próprias para o ensino básico, que visam explorar tanto a parte analítica quanto geométrica deste tópico, é assunto de um futuro trabalho.

Referências

- [1] APOSTOL, T.M. E MAMIKON, A.M. *Unwrapping Curves from Cylinders and Cones*. THE MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA, maio de 2007, pp 388-416.
- [2] TRAUNG, J.O. *Fishing Boats of the World: 3*, FISHING NEWS (BOOKS) LIMITED, 1967.
- [3] KREYSZIG, E. *Differential Geometry*, DOVER PUBLICATIONS, 1991.
- [4] LETCHER, J. *The Geometry of Ships*, The Principles of Naval Architecture Series, J.Randolph Paulling, Editor, 2009.
- [5] ABRAMOWITZ, M. E STEGUN, I.A. *Handbook of mathematical Functions*, NBS, 1972.
- [6] POTTMANN, H. EIGENSATZ, M. VAXMAN, A. WALLNER, J. *Architectural Geometry*. Computers Graphics Volume 47, abril de 2015, pp 145-164.
- [7] TENENBLAT, K. *Introdução a Geometria Diferencial*, ED. EDGARD BLUCHER, 2008.
- [8] UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Rede internacional de educação. Disponível em:
http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/rived/modulo_excentricidade/excen_teor.html.