

# **DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

## **PREVISÃO DE VIDA À FADIGA ATRAVÉS DE MODELO CDM MODIFICADO**

Por,  
**ALEXANDRE GONÇALVES DE SOUZA**

**Brasília, 15 de Fevereiro de 2018**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECANICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

Faculdade de Tecnologia  
Departamento de Engenharia Mecânica

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**PREVISÃO DE VIDA À FADIGA ATRAVÉS  
DE MODELO CDM MODIFICADO**

POR,

**ALEXANDRE GONÇALVES DE SOUZA**

Dissertação de Mestrado submetida ao Departamento de Engenharia Mecânica da Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ciências Mecânicas.

**Banca Examinadora**

Prof. Lucival Malcher, PhD, UnB/ ENM  
(Orientador)

---

Prof. Jorge Luiz de Almeida Ferreira UnB/ ENM  
(Examinador Interno)

---

Prof. Luis Augusto Veloso, UnB/ ENM  
(Examinador Externo)

---

Prof. Fábio Comes de Castro, UnB/ ENM  
(Suplente)

---

Brasília, 15 de fevereiro de 2018

## **FICHA CATALOGRÁFICA**

**SOUZA, ALEXANDRE GONÇALVES DE**

### **PREVISÃO DE VIDA À FADIGA ATRAVÉS DE MODELO CDM MODIFICADO**

104p., 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Mestre, Ciências Mecânicas, 2018)

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.  
Departamento de Engenharia Mecânica.

1. Fadiga

2. Plasticidade

3. Mecânica do Dano Contínuo

4. Denominador de dano

I. ENM/FT/UnB

II. Título (ENM.DM-276/2018)

## **REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA**

SOUZA, A. G., (2018), Previsão de vida à fadiga através de modelo CDM modificado. Dissertação de mestrado, Publicação ENM.DM-276/2018, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, DF, 104p.

## **CESSÃO DE DIREITOS**

AUTOR: Alexandre Gonçalves de Souza.

TÍTULO: Previsão de vida à fadiga através de modelo CDM modificado.

GRAU: Mestre ANO: 2018

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

**Alexandre Gonçalves de Souza**

Correio Eletrônico: alexandregz@hotmail.com

*Dedico esta dissertação ao meu querido  
filho Caio Miguel e a minha eterna e  
amada companheira, Bárbara Saviani.*

*Alexandre Gonçalves de Souza*

## **Agradecimentos**

*Agradeço aos Professores Jorge Luiz e José Alexander pelo convívio e ótima oportunidade de aprimorar ainda na graduação, nossos conhecimentos sobre fadiga através de trabalhos desenvolvidos no Laboratório de Ensaios Mecânicos.*

*Essas experiências gratificantes, aliadas ao entusiasmo transmitido pelo querido amigo Marcus Sá, nos motivaram a trilhar o caminho rumo ao Mestrado em Ciências Mecânicas.*

*Agradeço também ao meu orientador, o Professor Lucival Malcher, pela amizade, orientação acadêmica, disponibilidade em atender a dúvidas e inclusive pelo suporte material, ao nos fornecer ferramentas de trabalho que permitiram o pleno desenvolvimento desta dissertação.*

*Agradeço a minha mãe, Fátima Cristina, e minha avó, Ermelinda Cândido, que tenho como exemplo de mulheres aguerridas e pelo papel maravilhoso que tem desempenhado em minha vida, sempre com muito amor e dedicação.*

*Agradeço imensamente a minha amada esposa, Bárbara Letícia, e ao meu filho querido, Caio Miguel, pelo amor incondicional que sempre nos impulsiona a superar de maneira positiva os desafios apresentados pela vida. Muito obrigado também por compreenderem a grandeza deste momento em que tive que me manter por diversas vezes ausente para me dedicar ao Mestrado.*

*Por fim, agradeço imensamente a Deus pelo dom da vida!*

*Alexandre Gonçalves de Souza*

---

## RESUMO

Neste trabalho, busca-se comparar os resultados experimentais apresentados por Jiang (2007) com os obtidos a partir dos modelos de Lemaitre e CDM modificado, ambos com a lei de evolução de Chaboche para o endurecimento cinemático. Para tanto, elaborou-se modelos matemáticos e em seguida implementou-se em linguagem FORTRAN os modelos numéricos. Na solução das equações constitutivas, levou-se em consideração as propriedades mecânicas do aço S460N, trajetórias com carregamentos multiaxiais proporcionais e não-proporcionais, a lei de Chaboche com três termos e a discretização implícita de Euler. Com base nos dados aferidos foi possível calibrar os parâmetros de tensão, de dano e os denominadores de dano para alta e baixa triaxialidade. Na sequência, realizou-se a análise comparativa das amplitudes de tensão, vida em fadiga e evolução do dano. Analisando os resultados, nota-se que de um modo geral o modelo CDM modificado previu a vida em fadiga do aço S460N com maior precisão que o modelo de Lemaitre para trajetórias axiais, cisalhantes, proporcionais e não proporcionais.

---

## ABSTRACT

In this work, the experimental results presented by Jiang (2007) are compared with those obtained from the Lemaitre and modified CDM models, both with the Chaboche evolution law for kinematic hardening. For that, mathematical models were elaborated and then the numerical models were implemented in FORTRAN language. In the solution of the constitutive equations, the mechanical properties of S460N steel, proportional and non-proportional multiaxial loading trajectories, Chaboche's three-law law, and Euler's implicit discretization were considered. Based on the data, it was possible to calibrate the voltage, damage and denominator parameters for high and low triaxiality. Then, the comparative analysis of tension amplitudes, life in fatigue and evolution of the damage was performed. Analyzing the results, it is noted that in general the modified CDM model predicted the fatigue life of S460N steel with greater precision than the Lemaitre model for axial, shear, proportional and non-proportional trajectories.

# SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 MOTIVAÇÃO	1
1.2 OBJETIVOS	4
1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	4
<b>2 ASPECTOS TEÓRICOS</b>	<b>6</b>
2.1 INTRODUÇÃO	6
2.2 NATUREZA FÍSICA DO DANO POR FADIGA	6
2.3 FADIGA MULTIAXIAL	9
2.4 TEORIA DA PLASTICIDADE	10
2.4.1 MODELOS DE PLASTICIDADE CÍCLICA	10
2.4.2 PRAGER	11
2.4.3 ARMSTRONG-FREDERICK	13
2.4.4 CHABOCHE	14
2.4.5 CRITÉRIO DE ESCOAMENTO DE MISES	14
2.5 MECÂNICA DO DANO	17
2.5.1 VARIÁVEL DE DANO UNIDIMENSIONAL	18
2.5.2 TENSÃO EFETIVA E PRINCÍPIO DE EQUIVALÊNCIA DE DEFORMAÇÃO	19
2.5.3 CRITÉRIO DE RUPTURA	19
2.5.4 DANO ISOTRÓPICO TRIDIMENSIONAL	20
2.5.5 LEIS DE EVOLUÇÃO DO DANO	21
2.5.6 MODELO DE LEMAITRE COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO DE CHABOCHE	23
2.5.7 MODELO CDM MODIFICADO COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO	27
<b>3 MODELOS NUMÉRICOS</b>	<b>31</b>
3.1 INTRODUÇÃO	31
3.2 MODELO DE VON MISES COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO DE CHABOCHE	32
3.3 MODELO DE LEMAITRE COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO DE CHABOCHE	39
3.4 MODELO CDM MODIFICADO COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO DE CHABOCHE	47
<b>4 ESTRATÉGIA DE IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS</b>	<b>57</b>
4.1 INTRODUÇÃO	57
4.2 CALIBRAÇÃO DOS PARÂMETROS DO MATERIAL	58
4.2.1 CALIBRAÇÃO DOS PARÂMETROS DE TENSÃO	58
4.2.2 CALIBRAÇÃO DO DANO CRÍTICO E DOS DENOMINADORES DE DANO	60
<b>5 RESULTADOS E DISCUSSÃO</b>	<b>65</b>
5.1 ANÁLISE DOS RESULTADOS	65
5.2 CARREGAMENTOS	65
5.3 VIDA EM FADIGA	66
5.4 EVOLUÇÃO DO DANO	71
5.5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	75
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>77</b>
<b>ANEXOS</b>	<b>79</b>
A. ALGORITMO DE IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS ELASTOPLÁSTICOS	80
B. ALGORITMO PARA O MODELO DE LEMAITRE COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO DE CHABOCHE	81
C. ALGORITMO PARA O MODELO CDM MODIFICADO COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO DE CHABOCHE	87

# LISTA DE FIGURAS

1.1	Análise estrutural de um braço de suspensão inferior de um carro através do método de elementos finitos (Compass Automotive Groupe, 2013).....	1
2.1	Deslizamento em metais dúcteis devido a carregamentos cíclicos (NDT Centro de Pesquisa).....	6
2.2	Formação de intrusões e extrusões, captado por microscópio eletrônico de varredura (MEV) (Ma & Laird, 1989).....	7
2.3	Formação de PSBs em apenas alguns grãos. (Meyers & Chawla, 2009).....	8
2.4	Estrias de fadiga em liga de alumínio 2014-T6 visto em MEV (Meyers & Chawla, 2009).....	8
2.5	Falha por fadiga de um parafuso de porca em razão de flexão unidirecional repetida. A falha começou na raiz da rosca em A, propagou-se ao longo da maior parte da seção transversal como evidenciado pelas marcas de praia em B, antes da fratura rápida final em C (Shigley, 2005).....	9
2.6	Endurecimento isotrópico (KACHANOV, 1971).....	10
2.7	Endurecimento cinemático (KACHANOV, 1971).....	11
2.8	Resultados do modelo de Prager (Bari e Hassan, 2000).....	12
2.9	Resultados do modelo de Prager para laço de histerese em tensão controlada com tensão média sobreposta (Bari e Hassan, 2000).....	13
2.10	Curvas de histerese para os modelos de endurecimento.....	14
2.11	Redução da área efetiva da seção devido à formação de microtrincas ou microcavidades.....	18
2.12	Dependência entre o denominador de dano e a razão de triaxialidade (Malcher, 2011).....	22
3.1	Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas.....	31
4.1	Algoritmo de calibração dos parâmetros do modelo constitutivo.....	57
4.2	Comparação entre dados experimentais e valores obtidos com regressão.....	60
4.3	Variação do dano com o denominador de dano, número de ciclos e amplitudes de deformação normal.....	61
4.4	Variação do dano com o denominador de dano, número de ciclos e amplitudes de deformação cisalhante.....	62
5.1	Históricos de carregamento impostos para o aço S460N (Jiang et al., 2007).....	65
5.2	Comparação entre a vida observada experimentalmente e a vida calculada pelo modelo de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche, $S_{0.33} = 5.33, D_c = 0.20$ .....	68
5.3	Comparação entre a vida observada experimentalmente e a vida calculada pelo modelo de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche, $S_{0.33} = 0.83, D_c = 0.30$ .....	69
5.4	Comparação entre a vida observada experimentalmente e a vida calculada pelo modelo CDM modificado com endurecimento cinemático de Chaboche e $S_{0.33} = 5.33, S_{0.00} = 86.67, D_c = 0.20$ .....	69
5.5	Comparação entre a vida observada experimentalmente e a vida calculada pelo modelo CDM modificado com endurecimento cinemático de Chaboche e $S_{0.33} = 0.83, S_{0.00} = 60.00, D_c = 0.30$ .....	70
5.6	Comparação entre a vida observada experimentalmente e a vida calculada pelos modelos de Lemaitre ( $S_{0.33} = 5.33$ ) e CDM modificado ( $S_{0.33} = 5.33$ e $S_{0.00} = 86.67$ ), $D_c = 0,20$ , ambos com endurecimento cinemático de Chaboche.....	70
5.7	Comparação entre a vida observada experimentalmente e a vida calculada pelos modelos de Lemaitre ( $S_{0.33} = 0.83$ ) e CDM modificado ( $S_{0.33} = 0.83$ e $S_{0.00} = 60.00$ ), $D_c = 0,30$ , ambos com endurecimento cinemático de Chaboche.....	71

5.8	Evolução do dano para o aço S460N para trajetórias axiais e modelo de dano de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche. ....	71
5.9	Evolução do dano para o aço S460N para trajetórias cisalhantes e modelo de dano de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche. ....	72
5.10	Evolução do dano para o aço S460N para trajetórias proporcionais e modelo de dano de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche. ....	72
5.11	Evolução do dano para o aço S460N para trajetórias não proporcionais e modelo de dano de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche. ....	73
5.12	Evolução do dano para o aço S460N para trajetórias axiais e modelo de dano CDM modificado com endurecimento cinemático de Chaboche. ....	73
5.13	Evolução do dano para o aço S460N para trajetórias cisalhantes e modelo de dano CDM modificado com endurecimento cinemático de Chaboche. ....	74
5.14	Evolução do dano para o aço S460N para trajetórias proporcionais e modelo de dano CDM modificado com endurecimento cinemático de Chaboche. ....	74
5.15	Evolução do dano para o aço S460N para trajetórias não proporcionais e modelo de dano CDM modificado com endurecimento cinemático de Chaboche. ....	75

## LISTA DE TABELAS

2.1 Modelo Matemático para o critério de Von Mises com endurecimento cinemático de Chaboche .....	17
2.2 Variáveis de estado e forças termodinâmicas associadas .....	20
2.3 Modelo Matemático para o modelo de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche .....	26
2.4 Modelo Matemático para o modelo associativo modificado de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche .....	30
3.1 Modelo Numérico - Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas para o modelo de Von Mises com endurecimento cinemático de Chaboche .....	37
3.2 Algoritmo de resolução do sistema não linear para o modelo de Von Mises com endurecimento cinemático de Chaboche .....	38
3.3 Modelo Numérico - Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas para o modelo elastoplástico de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche .....	44
3.4 Algoritmo de resolução do sistema não linear para o modelo elastoplástico de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche .....	45
3.5 Modelo Numérico - Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas para o modelo elastoplástico associativo modificado de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche .....	54
3.6 Algoritmo de resolução do sistema não linear para o modelo elastoplástico associativo modificado de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche .....	55
4.1 Parâmetros de Ramberg-Osgood, módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson para o aço S460N (Jiang et al., 2007) .....	59
4.2 Resultados da calibração por amplitude para o modelo de Chaboche e parâmetros da curva de Ramberg-Osgood obtidos da literatura para o aço S460N .....	59
4.3 Ensaios de fadiga conduzidos utilizando espécimes cilíndricos (Jiang et al., 2007) .....	60
4.4 Relação de valores obtidos para o dano a partir da variação do denominador de dano, número de ciclos e amplitude de deformação normal .....	61
4.5 Relação de valores obtidos para o dano a partir da variação do denominador de dano, número de ciclos e amplitude de deformação cisalhante (continuação) .....	62
4.6 Denominadores de dano obtidos a partir de simulações com tensões normais e utilizados na previsão de vida em fadiga com os modelos de Lemaitre e CDM modificado.....	63
4.7 Denominadores de dano obtidos a partir de simulações com tensões cisalhantes e utilizados na previsão de vida em fadiga com o modelo CDM modificado.....	64
5.1 Amplitudes de deformação impostas com $S_{0,33} = 5.33$ , vida experimental e vida calculada obtidas para o aço S460N .....	66
5.2 Amplitudes de deformação impostas com $S_{0,33} = 0.83$ , vida experimental e vida calculada obtidas para o aço S460N .....	67
5.3 Amplitudes de deformação impostas com $S_{0,33} = 5.33$ e $S_{0,00} = 86.67$ , vida experimental e vida calculada obtidas para o aço S460N .....	67
5.4 Amplitudes de deformação impostas com $S_{0,33} = 0.83$ e $S_{0,00} = 60.00$ , vida experimental e vida calculada obtidas para o aço S460N .....	68

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\beta$	Tensor das tensões cinemáticas
$\beta_{n+1}$	Tensão de endurecimento cinemático no pseudo-tempo $t_{n+1}$
$\beta_n^i$	Termo $i$ da tensão de endurecimento cinemático no pseudo-tempo $t_n$
$\beta_{n+1}^i$	Termo $i$ da tensão de endurecimento cinemático no pseudo-tempo $t_{n+1}$
$\dot{\beta}$	Lei de evolução para o tensor das tensões cinemáticas
$\dot{\beta}_i$	Termo $i$ da taxa de evolução do tensor das tensões cinemáticas
$\Gamma$	Razão de triaxialidade
$\dot{\gamma}$	Taxa de evolução do multiplicador plástico
$\Delta\gamma$	Incremento do multiplicador plástico
$\Delta\epsilon^p$	Incremento de deformação plástica
$\Delta\bar{\epsilon}^p$	Incremento de deformação plástica equivalente
$E$	Módulo de elasticidade
$\epsilon^e$	Deformação elástica
$\epsilon_{n+1}^e$	Tensor das deformações elásticas no pseudo-tempo $t_{n+1}$
$\epsilon_{n+1}^{e\,trial}$	Tensor das deformações elásticas tentativa no pseudo-tempo $t_{n+1}$
$\dot{\epsilon}^p$	Taxa de evolução da deformação plástica
$\bar{\epsilon}_n^p$	Deformação plástica equivalente no pseudo-tempo $t_n$
$\bar{\epsilon}_{n+1}^p$	Deformação plástica equivalente no pseudo-tempo $t_{n+1}$
$H'$	Coefficiente de endurecimento cíclico
$H^k$	Módulo de endurecimento cinemático
$H_i^k$	Termo $i$ do módulo de endurecimento cinemático
$\eta$	Tensor relativo
$N$	Vida sob fadiga
$\mathbf{N}$	Vetor de fluxo
$\mathbf{N}_{n+1}$	Vetor de fluxo no pseudo-tempo $t_{n+1}$
$\bar{N}$	Vetor de fluxo efetivo
$\bar{N}_{n+1}$	Vetor de fluxo normalizado no pseudo-tempo $t_{n+1}$
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\xi$	Terceiro invariante normalizado do tensor desviador
$\sigma_{m\acute{a}x}$	Tensão máxima
$\sigma_{m\acute{i}n}$	Tensão mínima
$\sigma_r$	Gama de tensão
$\sigma_m$	Tensão média
$\sigma_a$	Tensão alternante
$\sigma$	Tensor tensão de Cauchy
$\sigma_{n+1}$	Tensor tensão no pseudo-tempo $t_{n+1}$
$\sigma_{n+1}^{trial}$	Tensor tensão tentativa no pseudo-tempo $t_{n+1}$
$\sigma_{y_0}$	Tensão de escoamento inicial
$Y$	Força termodinâmica associada ao dano
$Y_{n+1}$	Força termodinâmica associada ao dano no pseudo-tempo $t_{n+1}$
$\psi^{ed}$	Contribuição devido a elasticidade-dano na energia livre

$a$	Constante
$b$	Constante do material relativa ao endurecimento cinemático
$b_i$	Termo $i$ da constante do material relativa ao endurecimento cinemático
$D$	Variável isotrópica de dano
$D_{n+1}$	Variável de dano no pseudo-tempo $t_{n+1}$
$D_c$	Dano crítico
$\dot{D}$	Lei de evolução para a variável isotrópica de dano
$\mathbb{D}^e$	Tensor constitutivo
$f$	Fração
$G$	Módulo de cisalhamento
$\mathbf{I}$	Matriz identidade de segunda ordem
$\mathbb{I}$	Matriz identidade
$J_2$	Segundo invariante do tensor tensão desviador
$K$	Módulo volumétrico
$n$	Fator de segurança
$n'$	Expoente de endurecimento cíclico
$m$	Número de termos não lineares no somatório da lei de Chaboche
$p$	Pressão hidrostática
$p_{n+1}$	Pressão hidrostática no pseudo-tempo $t_{n+1}$
$\bar{q}$	Tensão equivalente de Von Mises
$\bar{q}_{n+1}$	Tensão equivalente de Von Mises no pseudo-tempo $t_{n+1}$
$R$	Razão de variação das tensões
$r$	Terceiro invariante
$S_{ut}$	Limite de resistência a tração
$S_y$	Limite de resistência ao escoamento
$S_e$	Limite de resistência a fadiga
$S_f$	Resistência a fadiga
$S_{0.00}$	Denominador de dano para baixa triaxialidade
$S_{0.33}$	Denominador de dano para alta triaxialidade
$S(\Gamma, \xi)$	Função denominador de dano
$\mathbf{S}$	Tensor das tensões desviadoras
$\mathbf{S}_{n+1}$	Tensor desviador no pseudo-tempo $t_{n+1}$
$s$	Expoente de dano
$\phi$	Função de escoamento
$\phi_{n+1}$	Função de escoamento segundo Lemaitre no pseudo-tempo $t_{n+1}$
$\rho$	Densidade do material
$\bar{\rho}$	Densidade do material na configuração de referência
$(*)$	Estado real
$(*)_{trial}$	Estado tentativa

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 MOTIVAÇÃO

O projeto de produtos tem demandado dos Engenheiros análises de viabilidade rápidas, que levem em consideração a economia de insumos e o uso de estruturas mais leves.

De acordo com Jiang (2007), nem sempre é possível utilizar-se de um teste experimental para avaliar novos protótipos devido a considerações que envolvem custo e tempo de execução.

Portanto, as dificuldades associadas a um ensaio exclusivamente experimental tem estimulado a implementação de modelos numéricos que contam com parâmetros obtidos a partir de ensaios e produzem resultados ágeis no que diz respeito ao comportamento elastoplástico de materiais selecionados e expostos a carregamentos, principalmente devido aos progressos computacionais recentes.

A figura 1.1, por exemplo, ilustra a análise de fadiga por elementos finitos de um braço de suspensão inferior de um carro. O cálculo em questão visa estimar a vida em fadiga deste componente a partir dos valores das tensões flutuantes.

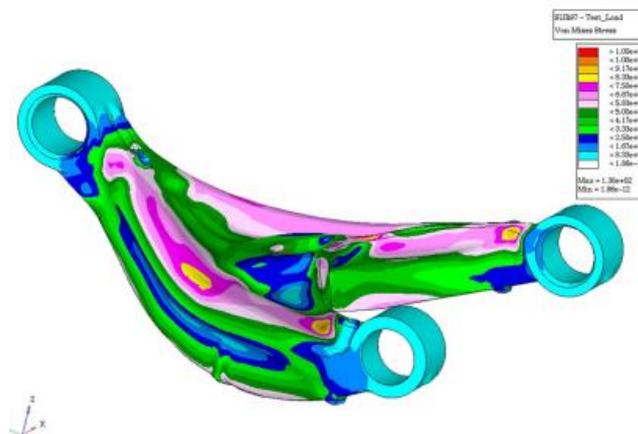


Figura 1.1 – Análise estrutural de um braço de suspensão inferior de um carro através do método de elementos finitos (Compass Automotive Groupe, 2013).

Jiang (2007) argumenta também que as simulações computacionais possibilitam a análise de vida em fadiga de componentes submetidos a tensões multiaxiais não-proporcionais.

A seguir apresentaremos um breve histórico dos trabalhos e principais fatos relativos ao estudo da fadiga, plasticidade e mecânica do dano em materiais:

Em 1837 Wilhelm desenvolveu uma máquina para ensaio de correntes transportadoras utilizadas em minas e publicou um artigo sobre fadiga mostrando a correlação entre a carga aplicada e a durabilidade das correntes (Schütz, 1996).

De acordo com Schütz (1996), Poncelet cunhou em 1839 o termo fadiga em um livro sobre mecânica. Wohler, por sua vez, com base nos resultados obtidos a partir de ensaios em eixos mecânicos ferroviários (realizados ao longo de 10 anos), concluiu em 1870 que o intervalo de tensão cíclica é mais importante que o pico de tensão e introduziu os conceitos de Curva S-N e limite de fadiga (Schütz, 1996).

Segundo Socie & Marquis (2000), Lanza elaborou em 1887 o primeiro trabalho em fadiga multiaxial, além de desenvolver a primeira máquina de teste de fadiga rotativa de flexão-torção. Ewing, após realizar estudos da microestrutura dos metais, propôs em 1903 que as falhas por fadiga eram devidas a bandas de deslizamento persistentes e que a fratura de componentes mecânicos estava relacionada a uma única trinca dominante. (Schütz, 1996).

Em 1910, após analisar os dados obtidos por Wohler em ensaios de fadiga, Basquin indicou uma relação log-log entre a tensão ( $S$ ) e a vida ( $N$ ) para representar a curva  $S-N$ , tendo em vista a constatação de que o número de ciclos se relacionava potencialmente com a tensão aplicada. Ao combinar os resultados apresentados em pesquisas de Bauschinger e Ewing, bem como realizar ensaios com carregamentos cíclicos acima do limite de escoamento do material, Bairstow identificou em 1911 o fenômeno conhecido por laços de histerese (Schütz, 1996).

Miner contribuiu através de seus estudos em 1945 para que a hipótese de acúmulo de dano linear em fadiga, inicialmente pesquisada por Palmgreen (1924), se consolidasse como a Regra de Palmgreen-Miner. Com o objetivo de identificar se as falhas por fadiga ocorreram devido a carregamentos cíclicos multiaxiais, Gough (1950) e Pollard (1935) propuseram equações tanto para materiais dúcteis quanto para materiais frágeis.

Coffin (1954) e Manson (1953) estabeleceram um novo conceito de análise de fadiga em materiais ao obter de forma independente curvas  $\epsilon - N$ , ao invés das curvas S-N propostas por Wohler. Em 1959 Findley desenvolveu a ideia de plano crítico para determinar a vida em fadiga de componentes mecânicos expostos a carregamentos cíclicos multiaxiais. Paris criou em 1961 a Teoria de Propagação de Trincas que utiliza os conceitos de fator de intensidade de tensões em carregamentos cíclicos para prever a taxa de crescimento de uma trinca individual (Schütz, 1996).

O método de contagem de ciclos Rainflow, com autoria de Matsuishi e Endo relativa ao ano de 1968, possibilitou a estimativa de vida em fadiga de componentes mecânicos sujeitos a carregamentos cíclicos com amplitude variável (Schütz, 1996). Elber pesquisou em 1970 o fenômeno de fechamento da trinca e ao introduzi-lo, obteve melhora significativa dos resultados relacionados a previsão de vida em fadiga com a Mecânica da Fratura (Schütz, 1996).

Conforme exposto por Malcher (2011), desde o trabalho pioneiro de Kachanov (1958), inúmeros outros desenvolvimentos em mecânica aplicada foram feitos, no sentido de formular novos modelos constitutivos que sejam capazes de descrever a degradação interna de sólidos, de acordo com os princípios da mecânica do contínuo. Segundo Lemaitre (1985), a Mecânica do Dano Contínuo (MDC) surgiu como uma formulação alternativa para a introdução de novas variáveis de estado dentro dos modelos constitutivos.

O comportamento elastoplástico do material relaciona-se ao modelo constitutivo e ao dano interno, que se inicia através de micro-trincas e pode ser corretamente representado através de variáveis internas com grandezas de natureza escalar, vetorial ou tensorial. Para mensurar as variáveis de dano, podemos considerar os defeitos no interior de um volume representativo elementar (VRE). Ainda de acordo com Malcher (2011), sua evolução deve ser definida através das relações termodinâmicas constitutivas, normalmente representadas por um sistema de equações diferenciais no tempo.

Lemaitre, Chaboche, Paas e outros pesquisadores, propuseram modelos de acúmulo de dano em fadiga baseados na Mecânica do Dano Contínuo (Desmorat, 2006). H. C. Wang e M. W. Brown (1996) foram os responsáveis por propor um método que ficou conhecido como versão multiaxial da Regra de Palmgreen-Miner.

De acordo com Socie (2000), no século XX ocorreu uma disseminação e utilização intensa de ferramentas computacionais na resolução de problemas de engenharia, principalmente no âmbito industrial. Segundo Malcher (2011), isto se deve a significativa ampliação da capacidade de processamento e conseqüente redução dos custos de implementação de modelos robustos e confiáveis a partir de computadores, corroborando desta forma para uma ampla aceitação de técnicas numéricas tanto no meio acadêmico como na iniciativa privada.

O emprego de métodos de elementos finitos por projetistas na resolução de problemas não-lineares da mecânica dos sólidos tem se consolidado devido ao fato destes estarem continuamente serem desenvolvidos e aperfeiçoados por pesquisadores diversos.

De acordo com Malcher (2011), apesar dos avanços constatados, questões como o desenvolvimento de modelos relativos a falha (fratura) de material, com progressiva deterioração em nível microestrutural a partir de grandes deformações ainda representam excelentes áreas de pesquisa e desenvolvimento.

Uma maior eficiência em processos tecnológicos aplicados na fabricação de superfícies maquinadas depende, portanto, da ampliação do conhecimento e da quantificação dos diferentes fenômenos físicos que ocorrem próximos da ruptura de materiais dúcteis.

## 1.2 OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo implementar o modelo associativo modificado de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche para estimar a vida em fadiga do aço S460N quando submetido a carregamentos uniaxiais ou multiaxiais.

Os históricos de tensões para diferentes amplitudes de deformação e números de ciclos foram obtidos com o uso de algoritmos implementados em linguagem FORTRAN a partir de modelos numéricos.

Durante a pesquisa trabalhamos com trajetórias uniaxiais, multiaxiais proporcionais e multiaxiais não-proporcionais, contabilizando uma série de quatro históricos de deformações cíclicas diferentes para o aço S460N.

Os dados obtidos foram aplicados ao modelo clássico de dano de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche, permitindo desta forma comparar sua capacidade preditiva com o modelo baseado na mecânica dos danos contínuos (CDM) desenvolvido por Malcher (2011) e com resultados provenientes de ensaios experimentais para fadiga de baixo e alto ciclo.

Além disso, pretende-se a partir das curvas de evolução de dano avaliar a influência da calibração do dano crítico e dos denominadores de alta e baixa triaxialidade sobre os resultados aferidos com os modelos elastoplásticos.

## 1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho foi dividido em 5 capítulos de forma a permitir a comparação dos resultados experimentais obtidos por Jiang (2007) com aqueles aferidos tanto pelo modelo de Lemaitre quanto pelo modelo CDM modificado, ambos com endurecimento cinemático de acordo com a lei de evolução proposta por Chaboche. No capítulo 1, formalizamos as motivações e definimos os objetivos que norteiam esta dissertação.

No capítulo 2, com o intuito de oferecer subsídios para implementar e calibrar os modelos elastoplásticos, bem como analisar os resultados aferidos e propor novos estudos, realiza-se uma revisão bibliográfica a partir de tópicos relativos a fadiga, plasticidade e mecânica do dano. Além disso, são apresentados os modelos matemáticos de acordo com as premissas estabelecidas por von Mises, Lemaitre e para o CDM modificado.

No capítulo 3, desenvolve-se a partir da discretização de Euler e aplicação do método de Newton-Raphson, a solução do conjunto de equações dos modelos constitutivos de Lemaitre e CDM modificado para o aço S460N, considerando o critério de von Mises para a função de escoamento.

No capítulo 4, discorre-se sobre a estratégia de calibração dos modelos elastoplásticos para o aço S460N, a qual compreende a identificação tanto dos parâmetros de tensão quanto do dano crítico e dos denominadores de dano para alta e baixa triaxialidade.

No capítulo 5 compara-se os resultados de ensaios experimentais disponíveis na literatura para o aço S460N quando exposto a carregamentos com trajetórias uniaxiais, multiaxiais proporcionais ou multiaxiais não proporcionais, com a vida calculada através dos modelos de Lemaitre ou CDM modificado. Também são analisadas as curvas de evolução do dano. Em seguida apresenta-se as conclusões e propostas para eventuais trabalhos futuros.

## 2 ASPECTOS TEÓRICOS

### 2.1 INTRODUÇÃO

Segundo Lemaitre (1985), os conceitos estabelecidos na mecânica dos danos baseiam-se na metalurgia e permitem uma melhor compreensão de fraturas em estruturas expostas a carregamentos multiaxiais. Isso torna-se possível ao estabelecermos correlações entre uma variável de dano e a deterioração dos materiais antes do surgimento de trincas.

Para descrever o comportamento elastoplástico do material e implementar corretamente a modelagem numérica do modelo, faz-se necessário uma revisão bibliográfica de conceitos relacionados a fadiga, plasticidade e mecânica do dano.

### 2.2 NATUREZA FÍSICA DO DANO POR FADIGA

A maioria dos metais estruturais são policristalinos, ou seja, constituídos por um grande número de cristais individuais ordenados (grãos). As propriedades mecânicas, as direções de ordenação assim como outras características diferem de um para outro grão.

Alguns grãos são orientados de tal forma que planos de deslizamento estão na direção da máxima tensão de cisalhamento aplicada. O deslizamento pode ser verificado tanto em carregamentos cíclicos quanto em carregamentos estáticos. Em metais dúcteis, o deslizamento ocorre no interior dos grãos individuais ao longo de planos cristalográficos.

De acordo com Fatemi et. al (2000), Forsyth mostrou através da microscopia eletrônica que ambas as bandas de deslizamento por intrusões e extrusões ocorrem na superfície dos metais quando estes são submetidos a carregamentos cíclicos. As Figuras 2.1 e 2.2 representam as considerações apresentadas.

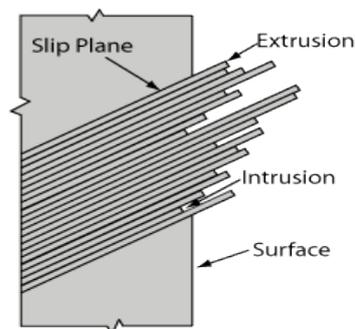


Figura 2.1 - Deslizamento em metais dúcteis devido a carregamentos cíclicos (NDT Centro de Pesquisa).

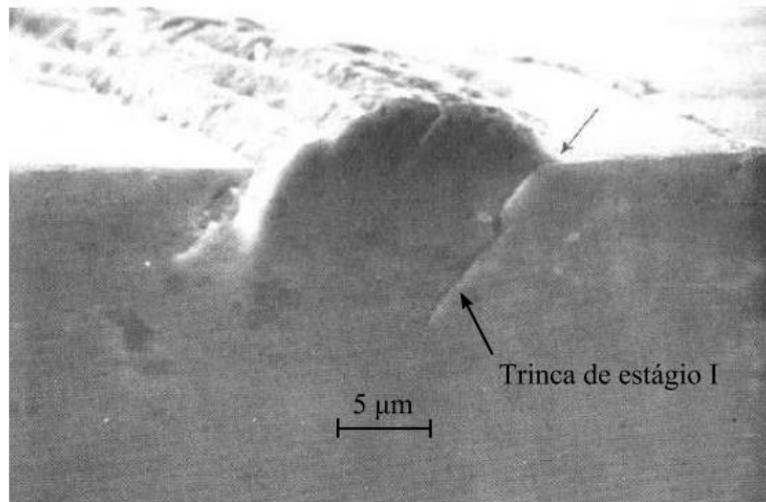


Figura 2.2 – Formação de intrusões e extrusões, captado por microscópio eletrônico de varredura (MEV) (Ma & Laird, 1989).

Faixas de deslizamento relacionadas a intrusões são responsáveis por uma grande concentração de tensões, que pode vir a ser o local a partir do qual trincas irão se desenvolver. Dentre as várias condições que podem acelerar a formação de trincas, podemos citar: tensões residuais de tração, temperaturas elevadas, ciclagem térmica, ambientes corrosivos assim como ciclagem de alta frequência.

A maioria das bandas de deslizamento pode ser eliminada através do eletropolimento. A vida à fadiga será substancialmente melhorada se estas forem suprimidas. Isto significa que as fases iniciais da fadiga são essencialmente um fenômeno de superfície. Entretanto, uma pequena quantidade das faixas de deslizamento não poderá ser eliminada através desse processo de forma que estas são conhecidas como "bandas de deslizamento persistente".

O surgimento das trincas por fadiga está relacionado a bandas locais de deslizamento ao passo que o crescimento das mesmas tende a ocorrer num plano de máxima amplitude de tensão cisalhante. Esse crescimento é extremamente pequeno, geralmente da ordem de vários grãos. Como o número de ciclos aumenta com o passar do tempo, as trincas tendem a fundir-se e crescer ao longo de planos de máxima amplitude de tração.

O mecanismo de fadiga em metais frágeis ou de alta resistência não ocorre devido a bandas de deslizamento persistentes (PSBs). Microtrincas surgem imediatamente em descontinuidades, tais como inclusões ou vazios e, em seguida crescem ao longo dos planos de tensões máximas de tração.

Podemos dividir o processo de falha devido à fadiga em três etapas principais: (1) nucleação da trinca de fadiga; (2) propagação segundo os estágios I e II; (3) ruptura final (Dowling, 1993).

De uma forma geral, os mecanismos que podem caracterizar a propagação da trinca em materiais dúcteis são a estrição e a coalescência de microcavidades ao passo que em materiais frágeis frequentemente surgem microclivagens (Crooker et al, 1976).

O estágio III diz respeito ao ciclo de carga final, quando a integridade física do material foi severamente comprometida e este, não suportando os esforços aplicados, irá falhar de forma súbita. Uma falha de estágio III poderá ser frágil, dúctil ou uma combinação de ambas. As fases da vida à fadiga foram ilustradas através das Fig. 2.2 a 2.5.

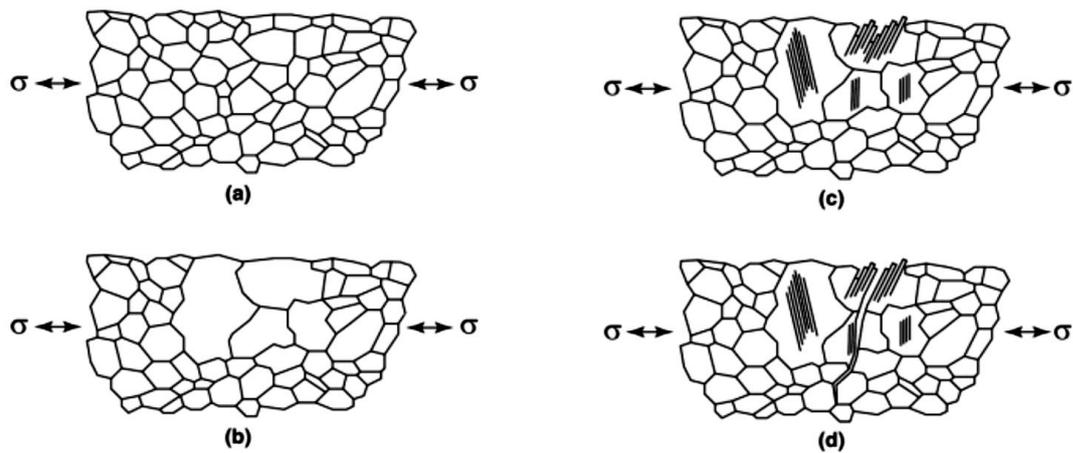


Figura 2.3 – Formação de PSBs em apenas alguns grãos. (Meyers & Chawla, 2009).

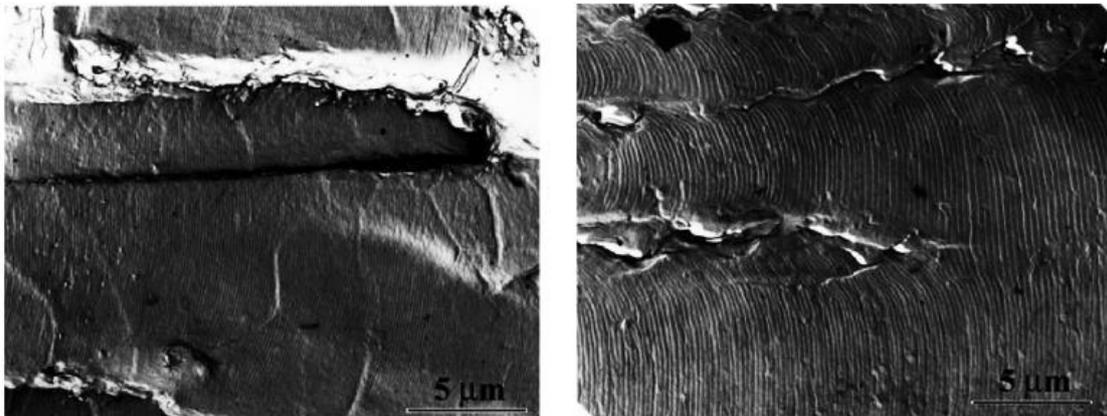


Figura 2.4 – Estrias de fadiga em liga de alumínio 2014-T6 visto em MEV (Meyers & Chawla, 2009).

A vida de um componente exposto à fadiga está relacionada com o número de ciclos necessários para que ocorra a ruptura do mesmo em determinado nível de tensão. Apesar de certas abordagens não considerarem a presença de trincas de fadiga, podemos definir a falha da estrutura através da soma do número de ciclos até a nucleação das trincas com o número de ciclos para sua propagação até que o componente falhe (Moura Branco, 1985).

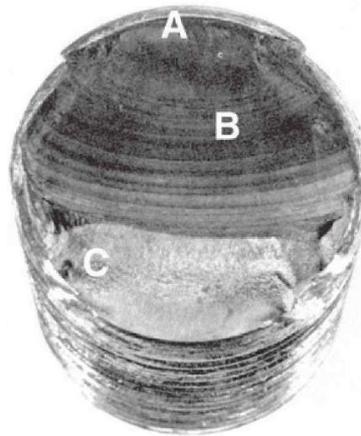


Figura 2.5 - Falha por fadiga de um parafuso de porca em razão de flexão unidirecional repetida. A falha começou na raiz da rosca em A, propagou-se ao longo da maior parte da seção transversal como evidenciado pelas marcas de praia em B, antes da fratura rápida final em C (Shigley, 2005).

### 2.3 FADIGA MULTIAXIAL

Falha por fadiga multiaxial é um dos principais modos de falha de componentes e tem sido amplamente estudado. Entretanto, apresenta desafios adicionais quando comparada a fadiga uniaxial, uma vez que envolve endurecimento do material e efeitos decorrentes de tensões normais e cisalhantes médias.

De acordo com Liu et. al (2017), devido ao nível de complexidade de mecanismos de falha em fadiga multiaxial e a relação com a microestrutura do material, os diferentes modelos aplicados na previsão de falha em fadiga podem ser resumidos nas seguintes categorias: modelos de tensão/deformação equivalente, modelos baseados em critérios de energia, modelos baseados em mecanismos de dano e em planos críticos.

Os modelos de Fatemi-Socie, Wang-Brown e Findley representam abordagens baseadas no plano crítico. Por vezes, faz-se necessário determinar constantes materiais que dependem do número de ciclos até a falha. Esta etapa desenvolve-se através da realização de ensaios dos materiais, regressão dos dados de fadiga e a partir de fórmulas. Dessa forma, de acordo Liu et. al (2017), o processo de determinação da vida em fadiga torna-se em alguns casos inconveniente.

Malcher & Balthazar (2007) ressaltam que a ideia principal na abordagem baseada nos invariantes do tensor tensão é relacionar diretamente a resistência a fadiga com o segundo invariante do tensor desviador e o primeiro invariante do tensor.

Os modelos de Sines, Crossland e Kakuno-Kawada podem ser considerados como uma combinação da abordagem de tensão equivalente, uma vez que utilizam a tensão cisalhante equivalente para tensões multiaxiais aplicadas, além da abordagem do plano crítico para

encontrar os valores máximos de seus parâmetros, em planos com a maior interseção com o caminho do tensor tensão desviador (Malcher, 2006).

## 2.4 TEORIA DA PLASTICIDADE

Nos tópicos 2.8.1 a 2.8.4 será apresentada uma breve revisão com as principais características dos modelos de plasticidade cíclica comumente empregados em análises e simulações computacionais.

Em seguida, desenvolveremos no tópico 2.8.5 o modelo matemático para o critério de von Mises, o qual traz conceitos fundamentais para a plena compreensão de modelos elastoplásticos com dano acoplado.

### 2.4.1 MODELOS DE PLASTICIDADE CÍCLICA

De acordo com Kachanov (1971), qualquer alteração no tamanho da superfície de escoamento pode ser relacionada a taxas de deformação plástica, comumente mensuradas através do trabalho plástico total por unidade de volume, deformação plástica acumulada ou taxa de deformação plástica volumétrica, por exemplo.

A Figura 2.6 representa uma expansão uniforme da superfície de escoamento após a aplicação de um incremento de tensão entre as etapas  $i$  e  $i + 1$ .

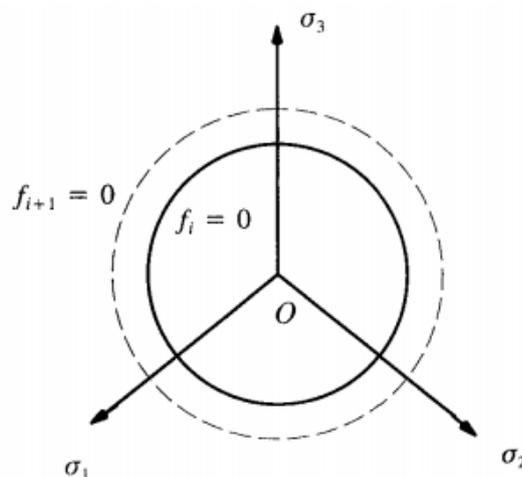


Figura 2.6 - Endurecimento isotrópico (KACHANOV, 1971).

Uma vez que a superfície de escoamento depende da deformação plástica ( $\epsilon^p$ ), esta pode ser matematicamente expressa da seguinte forma:

$$f(\sigma, \epsilon^p) = 0 \quad (2.10)$$

O tamanho da superfície em qualquer estágio do carregamento é determinado através de uma lei de evolução. Conforme o nível de deformação plástica inicialmente aplicado e o histórico de carregamentos, poderá ocorrer a contração da superfície de escoamento e o conseqüente amolecimento do material. Por outro lado, o endurecimento ou encruamento será verificado para processos com expansão do limite de escoamento. Por fim, o material em análise será denominado perfeitamente plástico quando for submetido a carregamentos cíclicos e não houver alterações em sua superfície de escoamento.

A lei de endurecimento isotrópico estabelece que durante o processo de fluxo plástico ocorrem expansões ou contrações da superfície de escoamento. Por outro lado, são mantidos o centro, formato e orientação da superfície em questão.

Ao submetermos um espécime a cargas de tração que ultrapassem o limite de elasticidade do material metálico e em seguida invertermos a direção de deformação, observaremos uma menor resistência a novo carregamento na direção inicial. Este fenômeno é conhecido como efeito de Bauschinger e descreve a dependência direcional após deformações plásticas. Isso ocorre devido a adições e bloqueamentos de discordâncias (falhas) no material.

O termo endurecimento cinemático foi introduzido por Prager em 1955 com o intuito inicial de modelar o efeito de Bauschinger, comumente observado em ensaios com carregamentos cíclicos. Conforme podemos constatar através da Fig. 2.7, durante o fluxo plástico ocorre uma translação da superfície de escoamento no espaço das tensões, na direção da taxa de deformação plástica. O formato e tamanho da superfície, entretanto, não sofrem alterações.

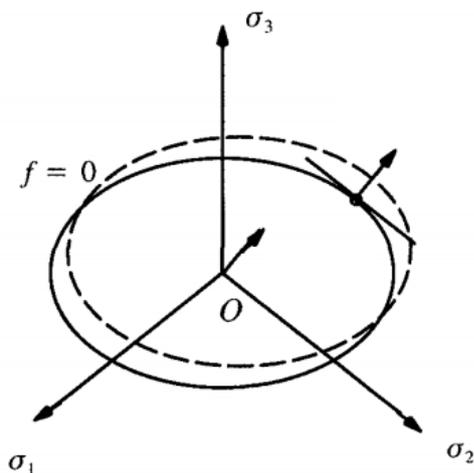


Figura 2.7 - Endurecimento cinemático (KACHANOV, 1971).

#### 2.4.2 PRAGER

A seguir apresentamos a lei de evolução do endurecimento cinemático proposta por Prager em 1956. O modelo em questão prevê o comportamento plástico de materiais através da

relação linear entre as taxas de variação do tensor cinemático e da deformação plástica equivalente, onde a proporcionalidade é obtida através do módulo de endurecimento cinemático  $H_k$ .

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{2}{3} H_k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (2.11)$$

onde,  $\dot{\boldsymbol{\beta}}$  é a taxa de evolução da tensão de endurecimento cinemático,  $H_k$  é o módulo de endurecimento cinemático e  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  corresponde a taxa de evolução da deformação plástica.

Apesar de representar bem o efeito de Bauschinger, a lei proposta por Prager não contempla de maneira adequada à parte inicial não linear da curva de histerese experimental, o que pode ser constatado através da imagem abaixo.

De acordo com Bari e Hassan (2000), o modelo também não contempla o fenômeno conhecido por ratcheting que corresponde ao colapso incremental do material, uma vez que este não diferencia as curvas de histerese, resultando em laços fechados, independente do carregamento ser reverso ou não (Bari e Hassan, 2000), conforme apresentado na Fig. 2.8.

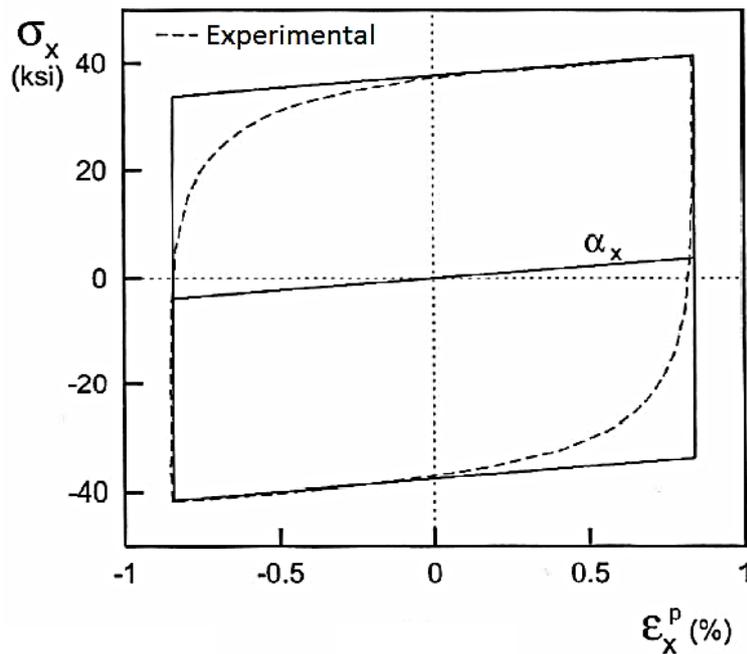


Figura 2.8 - Resultados do modelo de Prager (Bari e Hassan, 2000).

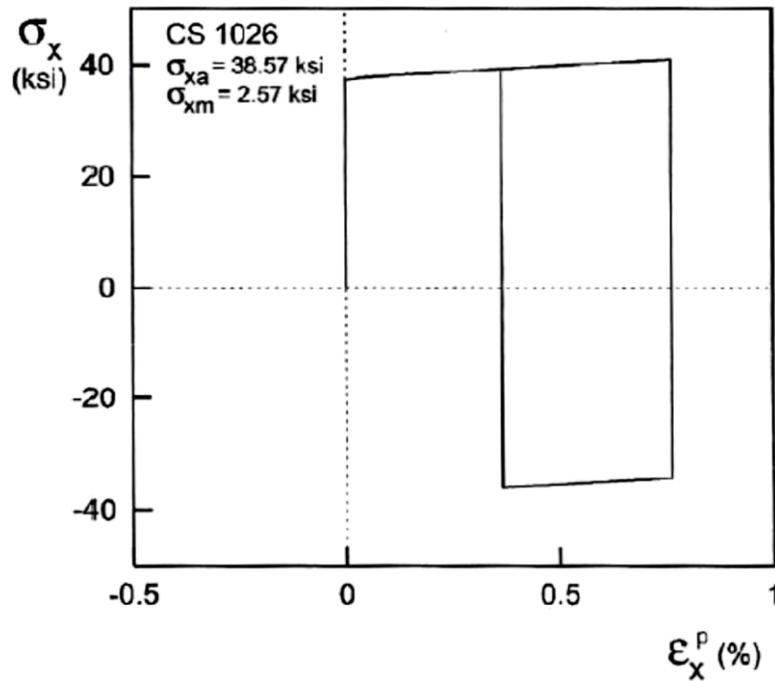


Figura 2.9 - Resultados do modelo de Prager para laço de histerese em tensão controlada com tensão média sobreposta (Bari e Hassan, 2000).

### 2.4.3 ARMSTRONG-FREDERICK

Armstrong & Frederick (1966) introduziram o efeito de saturação a lei de Prager através da inclusão de um termo não linear composto pela tensão de endurecimento cinemático ( $\beta$ ), uma constante do material ( $b$ ) e a taxa de variação da deformação plástica equivalente ( $\dot{\epsilon}^p$ ).

De acordo com Chaboche (1986), verifica-se uma descrição mais efetiva de cargas cíclicas através da lei de Armstrong-Frederick, uma vez que esta permite correções relativas à forma do laço de histerese, estabilização do ciclo, relações entre as amplitudes do ciclo estabilizado, modelagem do efeito de Bauschinger e a não linearidade das evoluções de tensão-deformação.

$$\dot{\beta} = \frac{2}{3} H_k \dot{\epsilon}^p - \dot{\epsilon}^p b \beta \quad (2.12)$$

onde,  $\dot{\beta}$  é a taxa de evolução da tensão de endurecimento cinemático,  $\beta$  é a tensão de endurecimento cinemático,  $H_k$  é o módulo de endurecimento cinemático,  $\dot{\epsilon}^p$  é a taxa de evolução da deformação plástica,  $\dot{\epsilon}^p$  é a taxa de evolução da deformação plástica equivalente e  $b$  corresponde a um parâmetro do material relativo ao endurecimento cinemático.

Segundo Armstrong & Frederick (1966) o material apresentará comportamento perfeitamente plástico caso tenhamos o valor máximo para o termo de saturação, ou seja, quanto maior  $\beta$ , menor será sua evolução.

#### 2.4.4 CHABOCHE

A Fig. 2.10 apresentada a seguir, traz as curvas tensão-deformação de ciclo estabilizado uniaxial para os modelos de endurecimento isotrópico linear, cinemático linear (Prager) e cinemático não linear (Armstrong-Frederick ou Chaboche).

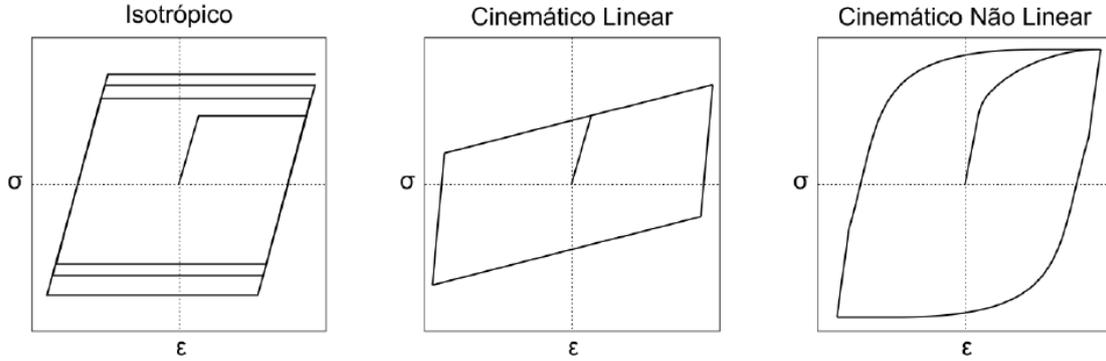


Figura 2.10 - Curvas de histerese para os modelos de endurecimento.

Devido o modelo de Armstrong-Frederick superestimar os efeitos de ratchetting, Chaboche (1986) propôs sua generalização, com maior flexibilidade no ajuste dos parâmetros materiais ( $b$  e  $H^k$ ), conforme pode ser verificado através da Eq. 2.13, na qual  $m$  representa o número de termos do somatório.

$$\dot{\beta} = \sum_{i=1}^m \left( \frac{2}{3} H_i^k \dot{\epsilon}^p - \dot{\bar{\epsilon}}^p b_i \beta_i \right) \quad (2.13)$$

onde,  $\dot{\beta}$  é a taxa de evolução da tensão de endurecimento cinemático,  $\beta_i$  é o termo  $i$  da tensão de endurecimento cinemático,  $H_i^k$  é o termo  $i$  do módulo de endurecimento cinemático,  $\dot{\epsilon}^p$  é a taxa de evolução da deformação plástica,  $\dot{\bar{\epsilon}}^p$  é a taxa de evolução da deformação plástica equivalente,  $b_i$  é o termo  $i$  do parâmetro do material relativo ao endurecimento cinemático e  $m$  corresponde ao número de termos da lei de evolução de Chaboche.

#### 2.4.5 CRITÉRIO DE ESCOAMENTO DE MISES

Neste tópico apresentaremos o critério de escoamento de von Mises com o endurecimento cinemático de acordo com a lei de evolução de Chaboche. Além disso, consideraremos que a evolução do vetor de fluxo plástico ocorre em direção normal à superfície de escoamento no espaço das tensões, conforme estabelecido pela plasticidade associativa. Importante frisar também que o modelo independe do tempo.

A resolução do modelo desenvolve-se através da definição da função de escoamento, do vetor de fluxo plástico e das leis de evolução das variáveis internas.

### 1) Função de escoamento

$$\phi = \bar{q} - \sigma_{y_0} \quad (2.14)$$

onde,  $\phi$  é a função de escoamento,  $\bar{q}$  é a tensão equivalente de Von Mises e  $\sigma_{y_0}$  é o limite de tensão de escoamento inicial. A tensão equivalente é matematicamente determinada por:

$$\bar{q}(\boldsymbol{\eta}) = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}} \quad (2.15)$$

onde,  $\boldsymbol{\eta}$  é o tensor relativo, cujo cálculo é realizado através da expressão abaixo:

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{S} - \boldsymbol{\beta} \quad (2.16)$$

onde,  $\boldsymbol{\beta}$  é o tensor das tensões cinemáticas e  $\boldsymbol{S}$  é o tensor das tensões desviadoras.

### 2) Vetor de fluxo

$$\boldsymbol{N} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3\boldsymbol{\eta}}{2\bar{q}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\eta}\|} \quad (2.17)$$

onde,  $\boldsymbol{N}$  é o vetor de fluxo.

### 3) Lei de fluxo plástico

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \equiv \dot{\gamma} \boldsymbol{N} \quad (2.18)$$

onde,  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$  e  $\dot{\gamma}$  representam as taxas de evolução, respectivamente, da deformação plástica e do multiplicador plástico.

#### 4) Lei de evolução para outras variáveis internas

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \equiv \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} = \dot{\gamma} \quad (2.19)$$

onde,  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  é a taxa de evolução da deformação plástica equivalente. A seguir iremos definir  $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ , ou seja, a lei de evolução para o tensor das tensões cinemáticas.

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \sum_{i=1}^m \dot{\boldsymbol{\beta}}_i = \sum_{i=1}^m \dot{\gamma} \left( \frac{2}{3} H_i^k \mathbf{N} - b_i \boldsymbol{\beta}_i \right) \quad (2.20)$$

onde,  $m$  é o número de termos não lineares no somatório da lei de evolução de Chaboche,  $\dot{\boldsymbol{\beta}}_i$  é o termo  $i$  da taxa de evolução do tensor das tensões cinemáticas,  $H^k$  é módulo de endurecimento cinemático e  $b_i$  corresponde ao termo  $i$  da constante do material relativa ao endurecimento cinemático.

#### 5) Lei de Hooke generalizada

O tensor tensão, por sua vez, é dado segundo a lei de Hooke generalizada, conforme apresentado a seguir:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.21)$$

A Tabela 2.1, por sua vez, apresenta um resumo das equações que governam o modelo elastoplástico de von Mises com endurecimento cinemático de Chaboche.

Tabela 2.1 - Modelo Matemático para o critério de Von Mises com endurecimento cinemático de Chaboche.

i) Decomposição aditiva da deformação:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$$

ii) Lei de Hooke:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

iii) Função de escoamento:

$$\phi = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}} - \sigma_{y_0}$$

vi) Lei de fluxo plástico:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \equiv \dot{\gamma} \mathbf{N}$$

$$\mathbf{N} = \frac{3\boldsymbol{\eta}}{2q} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\eta}\|}$$

e leis de evolução para outras variáveis internas

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p \equiv \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \sum_{i=1}^m \dot{\boldsymbol{\beta}}_i = \sum_{i=1}^m \dot{\gamma} \left( \frac{2}{3} H_i^k \bar{\mathbf{N}} - b_i \boldsymbol{\beta}_i \right)$$

v) Regra da Complementariedade

$$\dot{\gamma} \geq 0$$

$$\phi \leq 0$$

$$\dot{\gamma} \phi = 0$$

## 2.5 MECÂNICA DO DANO

O processo físico que ocorre simultaneamente a deformação do material e resulta em sua falha é denominado dano. A mecânica do dano estuda o fenômeno da degradação do material submetido a carregamentos, desde a etapa inicial até o desenvolvimento da trinca.

Há três diferentes estágios ou escalas de interesse quando consideramos o dano de materiais:

- Microescala: o dano é considerado como uma acumulação de microtrincas na vizinhança de defeitos ou interfaces.

- Mesoescala: o dano é considerado como o crescimento e coalescência de microtrincas e microvazios que dão início a trinca.
- Macroescala: o dano é considerado como uma descontinuidade na escala macro que conduz a uma falha global (fratura).

Os dois primeiros estágios são geralmente estudados através de variáveis de dano definidas no nível da mesoescala a partir da mecânica do contínuo. O terceiro estágio, por sua vez, é comumente analisado através da mecânica da fratura, com as variáveis de dano definidas no nível da macroescala.

### 2.5.1 VARIÁVEL DE DANO UNIDIMENSIONAL

A abordagem fenomenológica para modelagem do dano originou-se a partir do trabalho de Kachanov (1968) e Rabotnov (1966). Lazar Kachanov introduziu o conceito de parâmetro de dano ( $D$ ) conforme representado na Fig. 2.11, ou seja, definido como a razão entre a área efetiva das interseções de todas as microtrincas ou microcavidades ( $A_D$ ) em uma seção de um elemento de volume representativo ( $RVE$ ) com um plano dado pela área da seção ( $S$ ) do RVE:

$$D = A_D/A \tag{2.22}$$

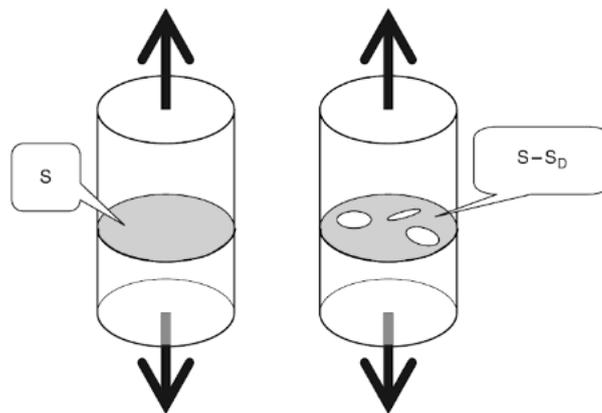


Figura 2.11 – Redução da área efetiva da seção devido à formação de microtrincas ou microcavidades.

De acordo com Mishnaevsky (2007), a iniciação e acumulação de microtrincas (danos) são descritas pela lei de evolução do dano, que apresenta (em um caso geral) uma relação entre a taxa de crescimento do parâmetro de danos, as condições de carregamento, o dano acumulado e as propriedades do material.

## 2.5.2 TENSÃO EFETIVA E PRINCÍPIO DE EQUIVALÊNCIA DE DEFORMAÇÃO

A tensão de tração para um corpo cilíndrico de seção transversal com área  $A$ , submetido a cargas uniaxiais através da aplicação de uma força  $F$ , é dada por:

$$\sigma = F/A \quad (2.23)$$

Para um corpo danificado onde a área dos microdefeitos corresponde a  $A_D$ , verifica-se que a área efetiva que resiste ao carregamento equivale a  $(A - A_D)$ . A partir desta definição temos a seguinte expressão matemática relativa à tensão efetiva  $\tilde{\sigma}$ :

$$\tilde{\sigma} = F/(A - A_D) \quad (2.24)$$

Uma vez que  $D = A_D/A$ , tem-se:

$$\tilde{\sigma} = \sigma/(1 - D) \quad (2.25)$$

Rabotnov (1968) propôs a expressão acima, válida somente para carregamentos de tração, uma vez que para materiais submetidos à compressão não se verifica a ampliação da seção transversal relativa aos microdefeitos, ou seja, neste caso a tensão efetiva ( $\tilde{\sigma}$ ) e a tensão usual ( $\sigma$ ) são idênticas.

Segundo o Princípio de Equivalência de Lemaitre, entretanto, ao substituirmos a tensão usual ( $\sigma$ ) pela tensão efetiva ( $\tilde{\sigma}$ ), é possível obtermos qualquer equação constitutiva para determinado material danificado. Para exemplificarmos este conceito, apresentamos a seguinte Lei de Hooke unidimensional para um material danificado:

$$\tilde{\sigma} = E\varepsilon^e(1 - D) = \tilde{E}\varepsilon^e \quad (2.26)$$

## 2.5.3 CRITÉRIO DE RUPTURA

A ideia fenomenológica do parâmetro de dano  $D$  levar em consideração na escala macroscópica deteriorações microscópicas (vazios, microtrincas, etc.) é geralmente aceita (Krempf, 1977) com as seguintes limitações:

- Para um material que não foi submetido a carregamentos temos  $D = 0$ .
- A iniciação da trinca macroscópica ocorre para  $D = D_c$ .
- A falha pode ser constatada para  $D < 1$ , devido a processos de instabilidade.
- A ruptura do material ocorre quando  $D = 1$ .

O dano crítico pode ser definido através das características intrínsecas ao material e das condições de carregamento como  $D_c \cong 0$  para fratura puramente frágil e  $D_c \cong 1$  para fratura

puramente dúctil. De acordo com Lemaitre (1996), comumente verifica-se, entretanto, que  $0.2 < D_c < 0.5$ .

## 2.5.4 DANO ISOTRÓPICO TRIDIMENSIONAL

Para modelar a elasticidade, plasticidade e o dano em um processo isotérmico, as variáveis apresentadas na tabela abaixo devem ser introduzidas. Dessa forma é possível definir tanto as equações de estado quanto às constitutivas.

Tabela 2.2 – Variáveis de estado e forças termodinâmicas associadas.

Mecanismo	Variáveis de Estado		Força Termodinâmica
	Observáveis	Internas	Associada
Elasticidade	$\boldsymbol{\varepsilon}^e$		$\boldsymbol{\sigma}$
Plasticidade		$\boldsymbol{\varepsilon}^p$	$-\boldsymbol{\sigma}$
Endurecimento Cinemático		$\boldsymbol{\beta}$	$\mathbf{X}$
Dano		$D$	$Y$

A energia livre de Helmholtz ( $\Psi$ ) corresponde a um potencial termodinâmico no qual a elasticidade e a plasticidade não estão acopladas, conforme Eq. 2.27.

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D, \boldsymbol{\beta}) = \Psi^{ed}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D) + \Psi^p(\boldsymbol{\beta}) \quad (2.27)$$

De acordo com Lemaitre (1996), a equação acima pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D, \boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e (1 - D) + \frac{bH_k}{3} \boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\beta} \right] \quad (2.28)$$

A partir da Eq. 2.28 verifica-se que não há dependência entre a componente plástica da energia livre de Helmholtz ( $\Psi^p$ ), a deformação elástica ( $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ ) e o dano ( $D$ ). Portanto, sabendo que as derivadas de  $\Psi^p$  com relação à  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  e  $D$  são nulas, é possível obter a partir da segunda lei da termodinâmica a seguinte expressão  $\boldsymbol{\sigma}$ :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \rho \frac{\partial \Psi^{ed}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e (1 - D) \quad (2.29)$$

Modificando a Lei de Hooke expressa pela Eq. 2.29 com a aplicação do tensor efetivo, temos as seguintes equações:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.30)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\mathbf{1}}{(1 - D)} \boldsymbol{\sigma} \quad (2.31)$$

Desenvolvendo raciocínio semelhante para a variável interna de dano ( $D$ ), temos:

$$Y = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial D} = \rho \frac{\partial \Psi^{ed}}{\partial D} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.32)$$

Levando em consideração a Lei de Hooke para a Eq. 2.32, temos:

$$-Y = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{D}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \quad (2.33)$$

onde,  $Y$  corresponde a densidade de energia de deformação liberada devido ao dano, sendo igual a metade da variação da densidade da energia de Lemaitre (Malcher, 2011).

A Eq. 2.33, por sua vez, pode ser reescrita em termos das constantes de Lamé ( $G$  e  $K$ ), módulo de elasticidade ( $E$ ), coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), pressão hidrostática ( $p$ ) e da tensão equivalente de von Mises ( $\bar{q}$ ), conforme verifica-se através ad Eq. 2.34.

$$-Y = \frac{\bar{q}^2}{6G(1-D)^2} + \frac{p^2}{2K(1-D)^2} \quad (2.34)$$

## 2.5.5 LEIS DE EVOLUÇÃO DO DANO

A seguir apresentamos através da Eq. 2.35 a lei de evolução de dano proposta por Lemaitre em 1985. Conforme pode ser observado, no cálculo da taxa de variação de dano ( $\dot{D}$ ) considera-se a densidade de energia de deformação ( $-Y$ ), a deformação plástica equivalente ( $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ ), bem como o denominador ( $S$ ) e o expoente de dano ( $s$ ).

$$\dot{D} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \left( \frac{-Y}{S} \right)^s \quad (2.35)$$

Ao analisar diversas pesquisas publicadas nas últimas décadas, Malcher (2011) constatou que a capacidade preditiva de modelos elastoplásticos com dano acoplado era fortemente dependente da condição de calibração utilizada para determinação dos parâmetros materiais.

De acordo com Bai et al. (2007 e 2008), a razão entre a pressão hidrostática ( $p$ ) e a tensão equivalente de von Mises ( $q$ ) é denominada triaxialidade ( $\Gamma$ ). Trata-se de importante parâmetro nos estudos da elasto-plasticidade, uma vez que está relacionado ao tamanho do regime elástico do material.

$$\Gamma = \frac{p}{q} \quad (2.36)$$

Segundo Malcher (2011), outro parâmetro elasto-plástico bastante relevante é o terceiro invariante do tensor desviador ( $r$ ), expresso matematicamente da seguinte forma:

$$r = \left( \frac{27}{2} \det \mathbf{S} \right)^{1/3} \quad (2.37)$$

onde,  $\mathbf{S}$  corresponde ao tensor das tensões desviadoras. Ao normalizarmos o terceiro invariante do tensor desviador, temos:

$$\xi = \left(\frac{r}{q}\right)^3 = \frac{27}{2} \frac{\det \mathbf{S}}{q^3} \quad (2.38)$$

Com base na Mecânica do Dano Contínuo, Malcher (2011) propõe em seu trabalho o aperfeiçoamento da lei de evolução de dano de Lemaitre para materiais dúcteis, ao tratar o denominador de dano como uma função relacionada ao nível de triaxialidade ( $\Gamma$ ) e ao terceiro invariante normalizado ( $\xi$ ).

$$\dot{D} = \dot{\epsilon}^p \left(\frac{-Y}{S(\Gamma, \xi)}\right)^s \quad (2.39)$$

Através da Fig. 2.12 é possível observar que o denominador de dano decresce com o aumento da triaxialidade, independentemente da região estudada.

A aplicação da função denominadora de dano garante uma maior representatividade das regiões de alta (tração predominante) e baixa triaxialidade (cisalhamento predominante). Além disso, outra vantagem é a necessidade de um menor número de pontos para calibração do modelo (Malcher, 2011).

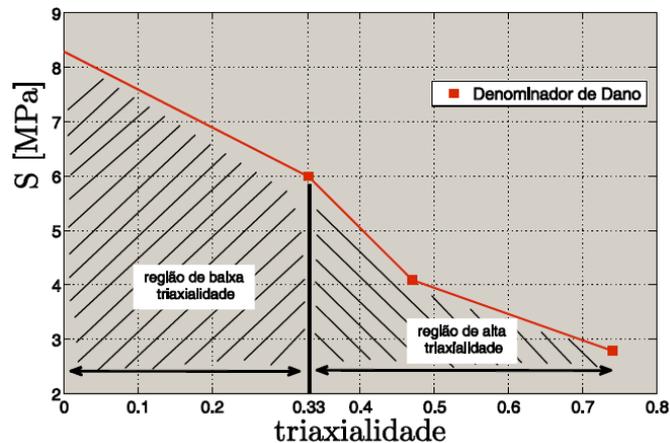


Figura 2.12 - Dependência entre o denominador de dano e a razão de triaxialidade (Malcher, 2011).

Na região de alta triaxialidade, aplicam-se os resultados experimentais obtidos com base em um ensaio de tração pura ( $\Gamma \geq 0.33$ ) em um corpo de prova cilíndrico liso. Por sua vez, para a região de baixa triaxialidade, utiliza-se a condição de cisalhamento puro ( $\Gamma = 0$ ) como segundo ponto de calibração. Portanto, é possível distinguir a partir da razão de triaxialidade o tipo de carregamento aplicado.

Para que a função denominadora de dano seja aplicável simultaneamente em ambas às regiões, as expressões fenomenológicas sugeridas por Malcher (2011) para as faixas de alta e baixa triaxialidade deverão ser acopladas. Como resultado temos a Eq. 2.40, apresentada a seguir.

$$S(\Gamma, \xi) = \frac{S_{0.33}}{3|\Gamma| + \frac{S_{0.33}}{S_{0.00}}(1 - \xi^2)} \quad (2.40)$$

onde,  $S_{0.33}$  e  $S_{0.00}$  representam, respectivamente, os denominadores de dano calibrados através ensaios sob tração e cisalhamento puros.

## 2.5.6 MODELO DE LEMAITRE COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO DE CHABOCHE

Seguindo os passos apresentados na seção anterior, define-se o algoritmo de atualização para o modelo de dano de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche, com  $m=3$ , ou seja, três termos não lineares no somatório da lei de evolução de Chaboche. Primeiramente, o estado tentativa é dado por:

### 1) Função de escoamento

$$\phi = \frac{\bar{q}}{1 - D} - \sigma_{y_0} \quad (2.41)$$

onde,  $\phi$  é a função de escoamento segundo Lemaitre,  $\bar{q}$  é a tensão equivalente de Von Mises,  $D$  é a variável isotrópica de dano e  $\sigma_{y_0}$  é a tensão de escoamento inicial. A tensão equivalente é matematicamente determinada por:

$$\bar{q}(\boldsymbol{\eta}) = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}} \quad (2.42)$$

onde,  $\boldsymbol{\eta}$  é o tensor relativo, cujo cálculo é realizado através da expressão abaixo:

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{S} - \boldsymbol{\beta} \quad (2.43)$$

onde,  $\boldsymbol{\beta}$  é o tensor das tensões cinemáticas e  $\boldsymbol{S}$  é o tensor das tensões desviadoras.

### 2) Vetor de fluxo

$$\mathbf{N} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3\boldsymbol{\eta}}{2\bar{q}} \frac{1}{(1-D)} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\eta}\|} \frac{1}{(1-D)} \quad (2.44)$$

onde,  $\mathbf{N}$  é o vetor de fluxo. A seguir definimos o vetor de fluxo efetivo  $\bar{\mathbf{N}}$ :

$$\bar{\mathbf{N}} = \frac{3\boldsymbol{\eta}}{2\bar{q}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\eta}\|} \quad (2.45)$$

O vetor de fluxo pode ser reescrito ao substituirmos a variável  $\bar{\mathbf{N}}$  na Eq. 2.45:

$$\mathbf{N} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \bar{\mathbf{N}} \frac{1}{(1-D)} \quad (2.46)$$

### 3) Lei de fluxo plástico

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \equiv \dot{\gamma} \mathbf{N} = \dot{\gamma} \bar{\mathbf{N}} \frac{1}{(1-D)} \quad (2.47)$$

onde,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  e  $\dot{\gamma}$  representam respectivamente, a taxa de evolução da deformação plástica e do multiplicador plástico.

### 4) Lei de evolução para outras variáveis internas

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p \equiv \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} = \frac{\dot{\gamma}}{1-D} \quad (2.48)$$

onde,  $\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p$  é a taxa de evolução da deformação plástica equivalente. A seguir iremos definir  $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ , ou seja, a lei de evolução para o tensor das tensões cinemáticas.

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \sum_{i=1}^m \dot{\boldsymbol{\beta}}_i = \sum_{i=1}^m \frac{\dot{\gamma}}{1-D} \left( \frac{2}{3} H_i^k \bar{\mathbf{N}} - b_i \boldsymbol{\beta}_i \right) \quad (2.49)$$

onde,  $m$  é o número de termos não lineares no somatório da lei de evolução de Chaboche,  $\dot{\boldsymbol{\beta}}_i$  é o termo  $i$  da taxa de evolução do tensor das tensões cinemáticas,  $H^k$  é módulo de endurecimento cinemático e  $b_i$  corresponde ao termo  $i$  da constante do material relativa ao endurecimento cinemático. A Eq. 2.50, por sua vez, traz a lei de evolução para a variável isotrópica de dano.

$$\dot{D} = \frac{\dot{\gamma}}{1-D} \left( \frac{-Y}{S} \right)^S \quad (2.50)$$

onde,  $Y$  é força termodinâmica associada ao dano e  $s$  é o expoente de dano. A força termodinâmica associada a variável interna de dano,  $Y$ , deriva do potencial de estado devido à elasticidade-dano e pode ser escrita como:

$$Y = \bar{\rho} \frac{\partial \psi^{ed}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D)}{\partial D} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : (1 - D) \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.51)$$

onde,  $\bar{\rho}$  é a densidade do material na configuração de referência,  $\psi^{ed}$  é a contribuição devido a elasticidade-dano na energia livre,  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  é a deformação elástica e  $\mathbb{D}$  é o tensor constitutivo. Após algumas manipulações matemáticas, é possível escrever  $Y$  em função da pressão hidrostática,  $p$ , da tensão equivalente de Von Mises (independe do endurecimento cinemático),  $\bar{q}$ , do módulo de cisalhamento,  $G$ , e do módulo volumétrico,  $K$ :

$$-Y = \frac{\bar{q}^2}{6G(1 - D)^2} + \frac{p^2}{2K(1 - D)^2} \quad (2.52)$$

### 5) Lei de Hooke generalizada

O tensor tensão, por sua vez, é dado segundo a lei de Hooke generalizada, conforme apresentado a seguir:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D) \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.53)$$

A Tabela 2.3, por sua vez, apresenta um resumo das equações que governam o modelo elastoplástico de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche.

Tabela 2.3 - Modelo Matemático para o modelo de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche.

i) Decomposição aditiva da deformação:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$$

ii) Lei de Hooke:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)\mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

iii) Função de escoamento:

$$\phi = \frac{1}{1 - D} \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}} - \sigma_{y_0}$$

vi) Lei de fluxo plástico:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \equiv \dot{\gamma} \mathbf{N} = \dot{\gamma} \bar{\mathbf{N}} \frac{1}{(1 - D)}$$

$$\bar{\mathbf{N}} = \frac{3\boldsymbol{\eta}}{2\bar{q}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\eta}\|}$$

e leis de evolução para outras variáveis internas

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p \equiv \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} = \frac{\dot{\gamma}}{1 - D}$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \sum_{i=1}^m \dot{\boldsymbol{\beta}}_i = \sum_{i=1}^m \frac{\dot{\gamma}}{1 - D} \left( \frac{2}{3} H_i^k \bar{\mathbf{N}} - b_i \boldsymbol{\beta}_i \right)$$

$$\dot{D} = \frac{\dot{\gamma}}{1 - D} \left( \frac{-Y}{S} \right)^s$$

$$-Y = \frac{\bar{q}^2}{6G(1 - D)^2} + \frac{p^2}{2K(1 - D)^2}$$

v) Regra da Complementariedade

$$\dot{\gamma} \geq 0$$

$$\phi \leq 0$$

$$\dot{\gamma} \phi = 0$$

## 2.5.7 MODELO CDM MODIFICADO COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO

### 1) Função de escoamento

$$\phi = \frac{\bar{q}}{1-D} - \sigma_{y_0} \quad (2.54)$$

onde,  $\phi$  é a função de escoamento segundo Lemaitre,  $\bar{q}$  é a tensão equivalente de Von Mises,  $D$  é a variável isotrópica de dano e  $\sigma_{y_0}$  é a tensão de escoamento inicial. A tensão equivalente é matematicamente determinada por:

$$\bar{q}(\boldsymbol{\eta}) = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}} \quad (2.55)$$

onde,  $\boldsymbol{\eta}$  é o tensor relativo, cujo cálculo é realizado através da expressão abaixo:

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{S} - \boldsymbol{\beta} \quad (2.56)$$

onde,  $\boldsymbol{\beta}$  é o tensor das tensões cinemáticas e  $\boldsymbol{S}$  é o tensor das tensões desviadoras.

### 2) Vetor de fluxo

$$\boldsymbol{N} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3\boldsymbol{\eta}}{2\bar{q}} \frac{1}{(1-D)} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\eta}\|} \frac{1}{(1-D)} \quad (2.57)$$

onde,  $\boldsymbol{N}$  é o vetor de fluxo. A seguir definimos o vetor de fluxo efetivo  $\bar{\boldsymbol{N}}$ :

$$\bar{\boldsymbol{N}} = \frac{3\boldsymbol{\eta}}{2\bar{q}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\eta}\|} \quad (2.58)$$

O vetor de fluxo pode ser reescrito ao substituírmos a variável  $\bar{\boldsymbol{N}}$  na Eq. 2.58:

$$\boldsymbol{N} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \bar{\boldsymbol{N}} \frac{1}{(1-D)} \quad (2.59)$$

### 3) Lei de fluxo plástico

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \equiv \dot{\gamma} \boldsymbol{N} = \dot{\gamma} \bar{\boldsymbol{N}} \frac{1}{(1-D)} \quad (2.60)$$

onde,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  e  $\dot{\gamma}$  representam respectivamente, a taxa de evolução da deformação plástica e do multiplicador plástico.

#### 4) Lei de evolução para outras variáveis internas

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p \equiv \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} = \frac{\dot{\gamma}}{1-D} \quad (2.61)$$

onde,  $\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p$  é a taxa de evolução da deformação plástica equivalente. A seguir iremos definir  $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ , ou seja, a lei de evolução para o tensor das tensões cinemáticas.

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \sum_{i=1}^m \dot{\boldsymbol{\beta}}_i = \sum_{i=1}^m \frac{\dot{\gamma}}{1-D} \left( \frac{2}{3} H_i^k \bar{N} - b_i \boldsymbol{\beta}_i \right) \quad (2.62)$$

onde,  $m$  é o número de termos não lineares no somatório da lei de evolução de Chaboche,  $\dot{\boldsymbol{\beta}}_i$  é o termo  $i$  da taxa de evolução do tensor das tensões cinemáticas,  $H^k$  é módulo de endurecimento cinemático e  $b_i$  corresponde ao termo  $i$  da constante do material relativa ao endurecimento cinemático. A Eq. 2.63, por sua vez, traz a lei de evolução para a variável isotrópica de dano.

$$\dot{D} = \frac{\dot{\gamma}}{1-D} \left( \frac{-Y}{S(\Gamma, \xi)} \right)^s \quad (2.63)$$

onde,  $Y$  é força termodinâmica associada ao dano,  $s$  é o expoente de dano e  $S(\Gamma, \xi)$  é a função denominador de dano.

Conforme pode ser constatado através da Eq. 2.64, a última variável mencionada depende do terceiro invariante normalizado do tensor desviador  $\xi$ , da razão de triaxialidade  $\Gamma$ , do denominador de dano para baixa triaxialidade  $S_{0,00}$  e do denominador de dano para alta triaxialidade  $S_{0,33}$ .

$$S(\Gamma, \xi) = \frac{S_{0,33}}{3|\Gamma| + \frac{S_{0,33}}{S_{0,00}} (1 - \xi^2)} \quad (2.64)$$

O terceiro invariante normalizado do tensor desviador  $\xi$ , por sua vez, está relacionado ao tensor das tensões desviadoras  $\boldsymbol{S}$  e a tensão equivalente de Von Mises  $q$ . Matematicamente, temos:

$$\xi = \frac{(27/2) \det \boldsymbol{S}}{q^3} \quad (2.65)$$

A tensão equivalente de Von Mises na Eq. 2.66 independe do endurecimento cinemático. Dessa forma, temos a seguinte expressão matemática para  $q$ :

$$q = \sqrt{3J_2(\mathbf{S})} = \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{S}:\mathbf{S}} \quad (2.66)$$

onde,  $J_2$  é o segundo invariante do tensor tensão desviador  $\mathbf{S}$ . Na Eq. 2.63 observamos também a variável denominada triaxialidade, definida matematicamente pela razão entre dois parâmetros elastoplásticos, conforme apresentado a seguir:

$$\Gamma = p/q \quad (2.67)$$

onde,  $p$  é conhecido por tensão hidrostática e  $q$  por tensão equivalente de Von Mises (independe do endurecimento cinemático).

A força termodinâmica associada a variável interna de dano,  $Y$ , deriva do potencial de estado devido à elasticidade-dano e pode ser escrita como:

$$Y = \bar{\rho} \frac{\partial \psi^{ed}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D)}{\partial D} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : (1 - D) \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.68)$$

onde,  $\bar{\rho}$  é a densidade do material na configuração de referência,  $\psi^{ed}$  é a contribuição devido a elasticidade-dano na energia livre,  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  é a deformação elástica e  $\mathbb{D}$  é o tensor constitutivo.

Após algumas manipulações matemáticas, é possível escrever  $Y$  em função da pressão hidrostática,  $p$ , da tensão equivalente de Von Mises (independe do endurecimento cinemático),  $\bar{q}$ , do módulo de cisalhamento,  $G$ , e do módulo volumétrico,  $K$ :

$$-Y = \frac{\bar{q}^2}{6G(1 - D)^2} + \frac{p^2}{2K(1 - D)^2} \quad (2.69)$$

## 5) Lei de Hooke generalizada

O tensor tensão, por sua vez, é dado segundo a lei de Hooke generalizada, conforme apresentado a seguir:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D) \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.70)$$

A Tabela 2.4 apresenta um resumo das equações que governam o modelo elastoplástico associativo modificado de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche.

Tabela 2.4 - Modelo Matemático para o modelo associativo modificado de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche.

i) Decomposição aditiva da deformação:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$$

ii) Lei de Hooke:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)\mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

iii) Função de escoamento:

$$\phi = \frac{1}{1 - D} \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}} - \sigma_{y_0}$$

vi) Lei de fluxo plástico:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \equiv \dot{\gamma} \mathbf{N} = \dot{\gamma} \bar{N} \frac{1}{(1-D)}, \text{ com } \bar{N} = \frac{3\eta}{2\bar{q}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\eta}\|}$$

e leis de evolução para outras variáveis internas

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \equiv \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} = \frac{\dot{\gamma}}{1 - D}$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \sum_{i=1}^m \dot{\boldsymbol{\beta}}_i = \sum_{i=1}^m \frac{\dot{\gamma}}{1 - D} \left( \frac{2}{3} H_i^k \bar{N} - b_i \boldsymbol{\beta}_i \right)$$

$$\dot{D} = \frac{\dot{\gamma}}{1 - D} \left( \frac{-Y}{S(\Gamma, \xi)} \right)^s$$

$$S(\Gamma, \xi) = \frac{S_{0.33}}{3|\Gamma| + \frac{S_{0.33}}{S_{0.00}} (1 - \xi^2)}$$

$$-Y = \frac{q^2}{6G(1 - D)^2} + \frac{p^2}{2K(1 - D)^2}$$

v) Regra da Complementariedade

$$\dot{\gamma} \geq 0$$

$$\phi \leq 0$$

$$\dot{\gamma} \phi = 0$$

# 3 MODELOS NUMÉRICOS

## 3.1 INTRODUÇÃO

Para materiais e modelos elastoplásticos cujo comportamento é dependente da trajetória, a solução do conjunto de equações do modelo constitutivo requer a formulação de um algoritmo de integração numérica. Este procedimento será detalhado a seguir para os modelos de Von Mises, Lemaitre e CDM modificado. Nestes casos teremos três termos não lineares no somatório da lei de evolução de Chaboche para a tensão de endurecimento cinemático, ou seja,  $m = 3$ .

Inicialmente, estabelece-se um pseudo-intervalo de tempo  $[t_n, t_{n+1}]$ , em que o estado  $n$  é conhecido e deseja-se obter o estado  $n + 1$ . Dentro do pseudotempo o algoritmo numérico deverá ser capaz de atualizar a tensão  $\sigma_{n+1}$  e as variáveis internas  $\alpha_{n+1}$  através de metodologia amplamente utilizada na plasticidade computacional e conhecida por decomposição do operador.

Posteriormente, é realizada a discretização das equações constitutivas no pseudo-tempo, com base no algoritmo de Euler implícito. A atualização das tensões e das variáveis internas é realizada em duas partes:

- i. Preditor elástico: o problema é assumido como completamente elástico;
- ii. Corretor plástico: um sistema de equações residuais não-lineares e discretizado é resolvido com o método de Newton-Raphson, considerando os valores obtidos a partir do preditor elástico como valores iniciais.

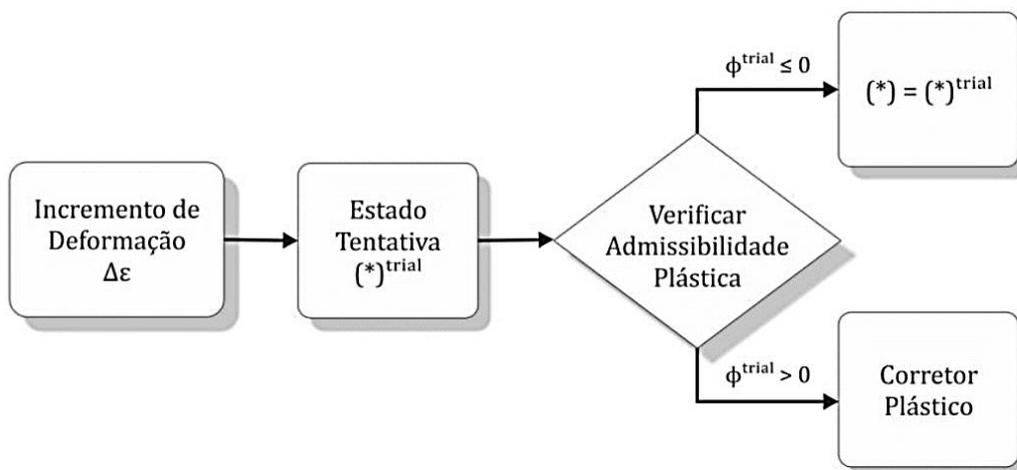


Figura 3.1 - Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas.

Na Figura 3.1 temos o algoritmo o algoritmo de mapeamento de retorno ou de atualização das tensões e das variáveis internas. Assume-se que um incremento de deformação

$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  completamente elástico foi aplicado. A partir disso, obtém-se o estado tentativa  $(*)_{trial}$ . Em seguida é realizada a avaliação da função de escoamento para o estado tentativa  $\phi_{trial}$ . Caso tenhamos  $\phi_{trial} \leq 0$ , o passo dado será puramente elástico, e o estado real  $(*)_{n+1}$  será idêntico ao estado tentativa  $(*)_{trial}$ . Caso contrário teremos  $\phi_{trial} > 0$  e será necessário corrigir o estado tentativa aplicando o corretor plástico. Para este comportamento, o incremento de deformação plástica será removido da deformação elástica tentativa.

### 3.2 MODELO DE VON MISES COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO DE CHABOCHE

Nesta seção será tratada a formulação dos modelos numéricos considerando a abordagem de Von Mises com endurecimento cinemático de Chaboche. Para tanto, serão desenvolvidos o algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas bem como o algoritmo de resolução do sistema não linear.

#### 1) Atualização de variáveis internas

Para o modelo de Von Mises com lei de evolução do tensor de endurecimento cinemático dado por Chaboche, temos a seguinte atualização do tensor deformação elástica:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} - \Delta \gamma \mathbf{N}_{n+1} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} - \Delta \gamma \bar{\mathbf{N}}_{n+1}\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$  é o tensor das deformações elásticas no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}$  é o tensor das deformações elásticas tentativa no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ ,  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p$  é o incremento de deformação plástica,  $\Delta \gamma$  é o incremento do multiplicador plástico,  $\mathbf{N}_{n+1}$  é o vetor de fluxo no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ ,  $\bar{\mathbf{N}}_{n+1}$  é o vetor de fluxo normalizado no pseudo-tempo  $t_{n+1}$  e  $\bar{q}_{n+1}$  é a tensão equivalente de Von Mises no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ . A seguir temos atualização do tensor tensão com a aplicação da lei de Hooke:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - 2G\Delta\gamma\mathbf{N}_{n+1} \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \mathbb{D}:\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} - 2G\Delta\gamma\bar{\mathbf{N}}_{n+1}\end{aligned}\tag{3.2}$$

onde,  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  é o tensor tensão no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}$  é o tensor tensão tentativa no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ ,  $G$  é o módulo de cisalhamento e  $\mathbb{D}$  é o tensor constitutivo.

## 2) Atualização de outras variáveis internas

De forma discretizada, a atualização da deformação plástica equivalente é dada pela Eq. 3.3. Ao invés de remover o incremento de deformação plástica equivalente, este deve ser adicionado. Matematicamente, temos:

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta\gamma\end{aligned}\tag{3.3}$$

onde,  $\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  é o incremento de deformação plástica,  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$  é a deformação plástica equivalente no pseudo-tempo  $t_{n+1}$  e  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p$  é a deformação plástica equivalente no pseudo-tempo  $t_n$ .

Para o tensor das tensões cinemáticas é necessário definir o valor de  $m$ , ou seja, o número de termos não lineares no somatório da lei de evolução de Chaboche. Com  $m = 3$ , temos:

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1} = \sum_{i=1}^3 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^i = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 + \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 + \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3\tag{3.4}$$

onde,  $\boldsymbol{\beta}_{n+1}$  é a tensão de endurecimento cinemático no pseudo-tempo  $t_{n+1}$  e  $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^i$  é o termo  $i$  da tensão de endurecimento cinemático no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ . Analisando a Eq. 3.4, verifica-se que é necessário atualizar cada termo  $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^i$  separadamente, para em seguida considerar o somatório de forma a obter  $\boldsymbol{\beta}_{n+1}$ . Portanto, com base na lei de evolução de Chaboche, temos:

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^i = \boldsymbol{\beta}_n^i + \Delta\gamma \left( \frac{2}{3} H_i^k \bar{N}_{n+1} - b_i \boldsymbol{\beta}_{n+1}^i \right)\tag{3.5}$$

onde,  $\boldsymbol{\beta}_n^i$  é o termo  $i$  da tensão de endurecimento cinemático no pseudo-tempo  $t_n$ ,  $H_i^k$  é o termo  $i$  do módulo de endurecimento cinemático e  $b_i$  é termo  $i$  da constante do material relativa ao endurecimento cinemático. Finalmente, a função de escoamento no estado real é dada segundo a Eq. 3.6.

$$\phi_{n+1} = \bar{q}_{n+1} - \sigma_{y_0}\tag{3.6}$$

onde,  $\bar{q}_{n+1}$  é a tensão equivalente de Von Mises normalizada (independe do endurecimento cinemático) no pseudo-tempo  $t_{n+1}$  e  $\phi_{n+1}$  é a função de escoamento segundo no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ .

### 3) Sistema de equações não-lineares

Verifica-se a formação de um sistema não linear de equações cujos valores para as variáveis  $\sigma_{n+1}$ ,  $\Delta\gamma$ ,  $\beta_{n+1}^1$ ,  $\beta_{n+1}^2$  e  $\beta_{n+1}^3$  são desconhecidos no estado real.

$$\begin{cases} \sigma_{n+1} = \mathbb{D}: \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} - 2G\Delta\gamma\bar{N}_{n+1} \\ \phi_{n+1} = \bar{q}_{n+1} - \sigma_{y_0} \\ \beta_{n+1}^1 = \beta_n^1 + \Delta\gamma \left( \frac{2}{3} H_1^k \bar{N}_{n+1} - b_1 \beta_{n+1}^1 \right) \\ \beta_{n+1}^2 = \beta_n^2 + \Delta\gamma \left( \frac{2}{3} H_2^k \bar{N}_{n+1} - b_2 \beta_{n+1}^2 \right) \\ \beta_{n+1}^3 = \beta_n^3 + \Delta\gamma \left( \frac{2}{3} H_3^k \bar{N}_{n+1} - b_3 \beta_{n+1}^3 \right) \end{cases} \quad (3.7)$$

### 4) Sistema de equações não-lineares na forma de equações residuais

As equações de atualização na forma de resíduos são dadas por:

$$\begin{cases} R_{\sigma_{n+1}} = \sigma_{n+1} - \mathbb{D}: \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} + 2G\Delta\gamma\bar{N}_{n+1} \\ R_{\Delta\gamma} = \bar{q}_{n+1} - \sigma_{y_0} \\ R_{\beta_{n+1}^1} = \beta_{n+1}^1 - \beta_n^1 - \Delta\gamma \left( \frac{2}{3} H_1^k \bar{N}_{n+1} - b_1 \beta_{n+1}^1 \right) \\ R_{\beta_{n+1}^2} = \beta_{n+1}^2 - \beta_n^2 - \Delta\gamma \left( \frac{2}{3} H_2^k \bar{N}_{n+1} - b_2 \beta_{n+1}^2 \right) \\ R_{\beta_{n+1}^3} = \beta_{n+1}^3 - \beta_n^3 - \Delta\gamma \left( \frac{2}{3} H_3^k \bar{N}_{n+1} - b_3 \beta_{n+1}^3 \right) \end{cases} \quad (3.8)$$

### 5) Linearização do sistema

A Tabela 3.1 apresenta de forma resumida o algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas para o modelo de Von Mises com endurecimento cinemático de Chaboche. Para a aplicação do método de Newton-Raphson, o sistema deve ser reescrito na forma linearizada, conforme apresentado através da Eq. 3.9.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^3} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \delta\sigma_{n+1} \\ \delta\Delta\gamma \\ \delta\beta_{n+1}^1 \\ \delta\beta_{n+1}^2 \\ \delta\beta_{n+1}^3 \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} R_{\sigma_{n+1}} \\ R_{\Delta\gamma} \\ R_{\beta_{n+1}^1} \\ R_{\beta_{n+1}^2} \\ R_{\beta_{n+1}^3} \end{bmatrix}^k \quad (3.9)$$

## 6) Derivada das equações residuais

A Tabela 3.2 mostra, de forma resumida, a aplicação do método de Newton-Raphson para a resolução do sistema não linear. O estado inicial, ou seja, para  $k = 0$ , é tomado como sendo o estado tentativa.

Para a primeira equação residual, temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \mathbb{I} + 2G\Delta\gamma \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial S_{n+1}} \\
 \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} &= 2G\bar{N}_{n+1} \\
 \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^1} &= 2G\Delta\gamma \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^1} \\
 \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^2} &= 2G\Delta\gamma \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^2} \\
 \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^3} &= 2G\Delta\gamma \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^3}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Para a segunda equação residual, temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \bar{N}_{n+1} \\
 \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} &= 0 \\
 \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^1} &= \bar{N}_{n+1} \\
 \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^2} &= \bar{N}_{n+1} \\
 \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^3} &= \bar{N}_{n+1}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Para a terceira equação residual, temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \sigma_{n+1}} &= -\Delta\gamma \frac{2}{3} H_1^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \\
 \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \Delta\gamma} &= -\frac{2}{3} H_1^k \bar{N}_{n+1} - b_1 \beta_{n+1}^1 \\
 \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^1} &= \mathbb{I} - \Delta\gamma \left( \frac{2}{3} H_1^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^1} - b_1 \mathbb{I} \right) \\
 \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^2} &= -\Delta\gamma \frac{2}{3} H_1^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^2} \\
 \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^3} &= -\Delta\gamma \frac{2}{3} H_1^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^3}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Para a quarta equação residual, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \sigma_{n+1}} &= -\Delta\gamma \frac{2}{3} H_2^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \Delta\gamma} &= -\frac{2}{3} H_2^k \bar{N}_{n+1} - b_2 \beta_{n+1}^2 \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^1} &= -\Delta\gamma \frac{2}{3} H_2^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^1} \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^2} &= \mathbb{I} - \Delta\gamma \left( \frac{2}{3} H_2^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^2} - b_2 \mathbb{I} \right) \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^3} &= -\Delta\gamma \frac{2}{3} H_2^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^3}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Para a quinta equação residual, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \sigma_{n+1}} &= -\Delta\gamma \frac{2}{3} H_3^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \Delta\gamma} &= -\frac{2}{3} H_3^k \bar{N}_{n+1} - b_3 \beta_{n+1}^3 \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^1} &= -\Delta\gamma \frac{2}{3} H_3^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^1} \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^2} &= -\Delta\gamma \frac{2}{3} H_3^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^2} \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^3} &= \mathbb{I} - \Delta\gamma \left( \frac{2}{3} H_3^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^3} - b_3 \mathbb{I} \right)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Outras derivadas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \frac{3}{2\bar{q}_{n+1}} \left[ \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \frac{3}{2(\bar{q}_{n+1})^2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} \otimes \boldsymbol{\eta}_{n+1} \right] \\
\frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^1} &= -\frac{3}{2\bar{q}_{n+1}} \left[ \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \frac{3}{2(\bar{q}_{n+1})^2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} \otimes \boldsymbol{\eta}_{n+1} \right] \\
\frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^2} &= -\frac{3}{2\bar{q}_{n+1}} \left[ \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \frac{3}{2(\bar{q}_{n+1})^2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} \otimes \boldsymbol{\eta}_{n+1} \right] \\
\frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^3} &= -\frac{3}{2\bar{q}_{n+1}} \left[ \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \frac{3}{2(\bar{q}_{n+1})^2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} \otimes \boldsymbol{\eta}_{n+1} \right]
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Tabela 3.1 - Modelo Numérico - Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas para o modelo de Von Mises com endurecimento cinemático de Chaboche

i) Dado um incremento de deformação  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ , determinar o estado tentativa:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{p\ trial} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p$$

$$\bar{q}_{n+1}^{trial} = \sqrt{(3/2)\boldsymbol{\eta}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\eta}_{n+1}}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = (1 - D_n)\mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}$$

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{1\ trial} = \boldsymbol{\beta}_n^1$$

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{2\ trial} = \boldsymbol{\beta}_n^2$$

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{3\ trial} = \boldsymbol{\beta}_n^3$$

ii) Verificar a admissibilidade plástica:

$$\phi^{trial} = \bar{q}_{n+1}^{trial} - \sigma_{y_0}$$

Se  $\phi^{trial} \leq 0$ , então (passo elástico):  $(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^{trial}$

Se  $\phi^{trial} > 0$ , então (passo plástico): algoritmo de retorno.

iii) Algoritmo de retorno:

Resolver o sistema de equações não lineares pelo método de Newton-Raphson, tendo como variáveis  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ ,  $\Delta\gamma$ ,  $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1$ ,  $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2$  e  $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3$ .

$$\begin{cases} R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} + 2G\Delta\gamma\bar{\mathbf{N}}_{n+1} \\ R_{\Delta\gamma} = \bar{q}_{n+1} - \sigma_{y_0} \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 - \boldsymbol{\beta}_n^1 - \Delta\gamma \left( \frac{2}{3}H_1^k\bar{\mathbf{N}}_{n+1} - b_1\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 \right) \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 - \boldsymbol{\beta}_n^2 - \Delta\gamma \left( \frac{2}{3}H_2^k\bar{\mathbf{N}}_{n+1} - b_2\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 \right) \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 - \boldsymbol{\beta}_n^3 - \Delta\gamma \left( \frac{2}{3}H_3^k\bar{\mathbf{N}}_{n+1} - b_3\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 \right) \end{cases}$$

iv) Atualizar as outras variáveis internas.

v) Fim.

Tabela 3.2 - Algoritmo de resolução do sistema não linear para o modelo de Von Mises com endurecimento cinemático de Chaboche.

i) Dado o estado tentativa como parâmetros iniciais:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(0)} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} \quad \Delta\gamma^{(0)} = 0$$

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{1(0)} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{1 trial} \quad \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{2(0)} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{2 trial} \quad \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{3(0)} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{3 trial}$$

ii) Resolver o sistema de equações para  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ ,  $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^i$  e  $\Delta\gamma$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ \delta\Delta\gamma \\ \delta\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 \\ \delta\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 \\ \delta\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \\ R_{\Delta\gamma} \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \end{bmatrix}^k$$

iii) Calcular:

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{1(k+1)} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{1(k)} + \delta\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{1(k+1)} \quad \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{2(k+1)} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{2(k)} + \delta\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{2(k+1)}$$

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{3(k+1)} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{3(k)} + \delta\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{3(k+1)} \quad \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k+1)} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} + \delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k+1)}$$

$$\Delta\gamma_{n+1}^{(k+1)} = \Delta\gamma_{n+1}^{(k)} + \delta\Delta\gamma_{n+1}^{(k+1)}$$

iv) Verificar a convergência:

$$\phi^{(k+1)} = \bar{q}^{(k+1)} - \sigma_{y_0}$$

$$erro = \frac{\phi^{(k+1)}}{\sigma_{y_0}} \leq \text{tolerância}$$

v) Fim.

### 3.3 MODELO DE LEMAITRE COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO DE CHABOCHE

Nesta seção será tratada a formulação dos modelos numéricos considerando a abordagem de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche. Para tanto, serão desenvolvidos o algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas bem como o algoritmo de resolução do sistema não linear.

#### 1) Atualização de variáveis internas

Para o modelo de Lemaitre com lei de evolução do tensor de endurecimento cinemático dado por Chaboche, temos a seguinte atualização do tensor de deformação elástica:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} - \Delta\gamma\mathbf{N}_{n+1} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} - \Delta\gamma\bar{\mathbf{N}}_{n+1} \frac{1}{(1-D_{n+1})}\end{aligned}\quad (3.16)$$

onde,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$  é o tensor das deformações elásticas no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial}$  é o tensor das deformações elásticas tentativa no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ ,  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$  é o incremento de deformação plástica,  $\Delta\gamma$  é o incremento do multiplicador plástico,  $\mathbf{N}_{n+1}$  é o vetor de fluxo no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ ,  $\bar{\mathbf{N}}_{n+1}$  é o vetor de fluxo normalizado no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ ,  $\bar{q}_{n+1}$  é a tensão equivalente de Von Mises no pseudo-tempo  $t_{n+1}$  e  $D_{n+1}$  é a variável de dano no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ .

Atualização do tensor tensão com a aplicação da lei de Hooke danificada:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - (1 - D_{n+1})2G\Delta\gamma\mathbf{N}_{n+1} \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= (1 - D_{n+1})\mathbb{D}:\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} - (1 - D_{n+1})2G\Delta\gamma\frac{\bar{\mathbf{N}}_{n+1}}{(1-D_{n+1})} \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= (1 - D_{n+1})\mathbb{D}:\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} - 2G\Delta\gamma\bar{\mathbf{N}}_{n+1}\end{aligned}\quad (3.17)$$

onde,  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  é o tensor tensão no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}$  é o tensor tensão tentativa no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ ,  $G$  é o módulo de cisalhamento e  $\mathbb{D}$  é o tensor constitutivo.

#### 2) Atualização de outras variáveis internas

De forma discretizada, a atualização da deformação plástica equivalente é dada pela Eq. 3.18. Ao invés de remover o incremento de deformação plástica equivalente, este deve ser adicionado. Matematicamente, temos:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \frac{\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}{1-D_{n+1}}\quad (3.18)$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}}$$

onde,  $\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  é o incremento de deformação plástica,  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$  é a deformação plástica equivalente no pseudo-tempo  $t_{n+1}$  e  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p$  é a deformação plástica equivalente no pseudo-tempo  $t_n$ .

Para o tensor das tensões cinemáticas é necessário definir o valor de  $m$ , ou seja, o número de termos não lineares no somatório da lei de evolução de Chaboche. Com  $m = 3$ , temos:

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1} = \sum_{i=1}^3 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^i = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 + \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 + \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 \quad (3.19)$$

onde,  $\boldsymbol{\beta}_{n+1}$  é a tensão de endurecimento cinemático no pseudo-tempo  $t_{n+1}$  e  $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^i$  é o termo  $i$  da tensão de endurecimento cinemático no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ .

Analisando a Eq. 3.19, verifica-se que é necessário atualizar cada termo  $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^i$  separadamente, para em seguida considerar o somatório de forma a obter  $\boldsymbol{\beta}_{n+1}$ . Portanto, com base na lei de evolução de Chaboche, temos:

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^i = \boldsymbol{\beta}_n^i + \frac{\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})} \left( \frac{2}{3} H_i^k \bar{N}_{n+1} - b_i \boldsymbol{\beta}_{n+1}^i \right) \quad (3.20)$$

onde,  $\boldsymbol{\beta}_n^i$  é o termo  $i$  da tensão de endurecimento cinemático no pseudo-tempo  $t_n$ ,  $H_i^k$  é o termo  $i$  do módulo de endurecimento cinemático e  $b_i$  é termo  $i$  da constante do material relativa ao endurecimento cinemático. Com relação a evolução da variável isotrópica de dano, temos:

$$D_{n+1} = D_n + \frac{\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})} \left( \frac{-Y_{n+1}}{S} \right)^s \quad (3.21)$$

Na Eq. 3.21 o termo  $Y_{n+1}$  corresponde à força termodinâmica associada ao dano no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ .

$$-Y_{n+1} = \frac{q_{n+1}^2}{6G(1-D_{n+1})^2} + \frac{p_{n+1}^2}{2K(1-D_{n+1})^2} \quad (3.22)$$

onde,  $q_{n+1}$  é a tensão equivalente de Von Mises (independe do endurecimento cinemático) no pseudo-tempo  $t_{n+1}$  e  $p_{n+1}$  é a pressão hidrostática no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ . Finalmente, a função de escoamento no estado real é dada segundo a Eq. 3.23.

$$\phi_{n+1} = \frac{\bar{q}_{n+1}}{(1 - D_{n+1})} - \sigma_{y_0} \quad (3.23)$$

onde,  $\phi_{n+1}$  é a função de escoamento segundo Lemaitre no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ .

### 3) Sistema de equações não-lineares

Verifica-se a formação de um sistema não linear de equações cujos valores para as variáveis  $\sigma_{n+1}$ ,  $\Delta\gamma$ ,  $D_{n+1}$ ,  $\beta_{n+1}^1$ ,  $\beta_{n+1}^2$  e  $\beta_{n+1}^3$  são desconhecidos no estado real.

$$\begin{cases} \sigma_{n+1} = (1 - D_{n+1})\mathbb{D}: \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} - 2G\Delta\gamma\bar{N}_{n+1} \\ \phi_{n+1} = \frac{\bar{q}_{n+1}}{(1 - D_{n+1})} - \sigma_{y_0} \\ D_{n+1} = D_n + \frac{\Delta\gamma}{(1 - D_{n+1})} \left( \frac{-Y_{n+1}}{S} \right)^s \\ \beta_{n+1}^1 = \beta_n^1 + \frac{\Delta\gamma}{(1 - D_{n+1})} \left( \frac{2}{3} H_1^k \bar{N}_{n+1} - b_1 \beta_{n+1}^1 \right) \\ \beta_{n+1}^2 = \beta_n^2 + \frac{\Delta\gamma}{(1 - D_{n+1})} \left( \frac{2}{3} H_2^k \bar{N}_{n+1} - b_2 \beta_{n+1}^2 \right) \\ \beta_{n+1}^3 = \beta_n^3 + \frac{\Delta\gamma}{(1 - D_{n+1})} \left( \frac{2}{3} H_3^k \bar{N}_{n+1} - b_3 \beta_{n+1}^3 \right) \end{cases} \quad (3.24)$$

### 4) Sistema de equações não-lineares na forma de equações residuais

As equações de atualização na forma de resíduos são dadas por:

$$\begin{cases} R_{\sigma_{n+1}} = \sigma_{n+1} - (1 - D_{n+1})\mathbb{D}: \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} + 2G\Delta\gamma\bar{N}_{n+1} \\ R_{\Delta\gamma} = \frac{\bar{q}_{n+1}}{(1 - D_{n+1})} - \sigma_{y_0} \\ R_{D_{n+1}} = D_{n+1} - D_n - \frac{\Delta\gamma}{(1 - D_{n+1})} \left( \frac{-Y_{n+1}}{S} \right)^s \\ R_{\beta_{n+1}^1} = \beta_{n+1}^1 - \beta_n^1 - \frac{\Delta\gamma}{(1 - D_{n+1})} \left( \frac{2}{3} H_1^k \bar{N}_{n+1} - b_1 \beta_{n+1}^1 \right) \\ R_{\beta_{n+1}^2} = \beta_{n+1}^2 - \beta_n^2 - \frac{\Delta\gamma}{(1 - D_{n+1})} \left( \frac{2}{3} H_2^k \bar{N}_{n+1} - b_2 \beta_{n+1}^2 \right) \\ R_{\beta_{n+1}^3} = \beta_{n+1}^3 - \beta_n^3 - \frac{\Delta\gamma}{(1 - D_{n+1})} \left( \frac{2}{3} H_3^k \bar{N}_{n+1} - b_3 \beta_{n+1}^3 \right) \end{cases} \quad (3.25)$$

### 5) Linearização do sistema

A Tabela 3.3 apresenta de forma resumida o algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas para o modelo elastoplástico associativo modificado de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche.

Para a aplicação do método de Newton-Raphson, o sistema deve ser reescrito na forma linearizada, conforme apresentado na Eq. 3.26.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^3} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \delta\sigma_{n+1} \\ \delta\Delta\gamma \\ \delta D_{n+1} \\ \delta\beta_{n+1}^1 \\ \delta\beta_{n+1}^2 \\ \delta\beta_{n+1}^3 \end{bmatrix}^{k+1} \quad (3.26)$$

$$= - \begin{bmatrix} R_{\sigma_{n+1}} \\ R_{\Delta\gamma} \\ R_{D_{n+1}} \\ R_{\beta_{n+1}^1} \\ R_{\beta_{n+1}^2} \\ R_{\beta_{n+1}^3} \end{bmatrix}^k$$

## 6) Derivada das equações residuais

A Tabela 3.4 mostra, de forma resumida, a aplicação do método de Newton-Raphson para a resolução do sistema não linear. O estado inicial, ou seja, para  $k = 0$ , é tomado como sendo o estado tentativa.

Para a primeira equação residual, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \mathbb{I} + 2G\Delta\gamma \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial S_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} &= 2G\bar{N}_{n+1} \\ \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} &= \mathbb{D}: \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} \\ \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^1} &= 2G\Delta\gamma \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^1} \\ \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^2} &= 2G\Delta\gamma \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^2} \\ \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^3} &= 2G\Delta\gamma \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^3} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Para a segunda equação residual, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{\Delta Y}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \frac{1}{1-D_{n+1}} \bar{N}_{n+1} \\
\frac{\partial R_{\Delta Y}}{\partial \Delta Y} &= 0 \\
\frac{\partial R_{\Delta Y}}{\partial D_{n+1}} &= \frac{\bar{q}_{n+1}}{(1-D_{n+1})^2} \\
\frac{\partial R_{\Delta Y}}{\partial \beta_{n+1}^1} &= \frac{1}{1-D_{n+1}} \bar{N}_{n+1} \\
\frac{\partial R_{\Delta Y}}{\partial \beta_{n+1}^2} &= \frac{1}{1-D_{n+1}} \bar{N}_{n+1} \\
\frac{\partial R_{\Delta Y}}{\partial \beta_{n+1}^3} &= \frac{1}{1-D_{n+1}} \bar{N}_{n+1}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Para a terceira equação residual, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} &= -\frac{s\Delta Y}{s(1-D_{n+1})} \left(\frac{-Y_{n+1}}{s}\right)^{s-1} \frac{\partial(-Y_{n+1})}{\partial \sigma_{n+1}} \\
\frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \Delta Y} &= -\frac{1}{(1-D_{n+1})} \left(\frac{-Y_{n+1}}{s}\right)^s \\
\frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} &= 1 - \frac{1}{(1-D_{n+1})^2} \left(\frac{-Y_{n+1}}{s}\right)^s - \frac{s\Delta Y}{s(1-D_{n+1})} \left(\frac{-Y_{n+1}}{s}\right)^{s-1} \frac{\partial(-Y_{n+1})}{\partial \sigma_{n+1}} \\
\frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^1} &= 0 \\
\frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^2} &= 0 \\
\frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^3} &= 0
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Para a quarta equação residual, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \sigma_{n+1}} &= -\frac{\Delta Y}{1-D_{n+1}} \frac{2}{3} H_1^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \Delta Y} &= -\frac{1}{1-D_{n+1}} \left( \frac{2}{3} H_1^k \bar{N}_{n+1} - b_1 \beta_{n+1}^1 \right) \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial D_{n+1}} &= \frac{\Delta Y}{(1-D_{n+1})^2} \left( \frac{2}{3} H_1^k \bar{N}_{n+1} - b_1 \beta_{n+1}^1 \right) \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^1} &= \mathbb{I} - \frac{\Delta Y}{1-D_{n+1}} \left( \frac{2}{3} H_1^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^1} - b_1 \mathbb{I} \right) \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^2} &= -\frac{\Delta Y}{1-D_{n+1}} \frac{2}{3} H_1^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^2} \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^3} &= -\frac{\Delta Y}{1-D_{n+1}} \frac{2}{3} H_1^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^3}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Tabela 3.3 - Modelo Numérico - Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas para o modelo elastoplástico de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche.

i) Dado um incremento de deformação  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ , determinar o estado tentativa:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{p\ trial} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p$$

$$\bar{q}_{n+1}^{trial} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} : \boldsymbol{\eta}_{n+1}}$$

$$D_{n+1}^{trial} = D_n$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = (1 - D_n) \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}$$

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{1\ trial} = \boldsymbol{\beta}_n^1$$

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{2\ trial} = \boldsymbol{\beta}_n^2$$

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{3\ trial} = \boldsymbol{\beta}_n^3$$

ii) Verificar a admissibilidade plástica:

$$\phi^{trial} = \frac{\bar{q}_{n+1}^{trial}}{(1 - D_{n+1}^{trial})} - \sigma_{y_0}$$

Se  $\phi^{trial} \leq 0$ , então (passo elástico):  $(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^{trial}$

Se  $\phi^{trial} > 0$ , então (passo plástico): algoritmo de retorno.

iii) Algoritmo de retorno:

Resolver o sistema de equações não lineares pelo método de Newton-Raphson, tendo como variáveis  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ ,  $\Delta \gamma$ ,  $D_{n+1}$ ,  $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1$ ,  $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2$  e  $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3$ .

$$\begin{cases} R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - (1 - D_{n+1}) \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} + 2G\Delta\gamma\bar{\mathbf{N}}_{n+1} \\ R_{\Delta\gamma} = \frac{\bar{q}_{n+1}}{(1 - D_{n+1})} - \sigma_{y_0} \\ R_{D_{n+1}} = D_{n+1} - D_n - \frac{\Delta\gamma}{(1 - D_{n+1})} \left( \frac{-Y_{n+1}}{S} \right)^s \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 - \boldsymbol{\beta}_n^1 - \frac{\Delta\gamma}{(1 - D_{n+1})} \left( \frac{2}{3} H_1^k \bar{\mathbf{N}}_{n+1} - b_1 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 \right) \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 - \boldsymbol{\beta}_n^2 - \frac{\Delta\gamma}{(1 - D_{n+1})} \left( \frac{2}{3} H_2^k \bar{\mathbf{N}}_{n+1} - b_2 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 \right) \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 - \boldsymbol{\beta}_n^3 - \frac{\Delta\gamma}{(1 - D_{n+1})} \left( \frac{2}{3} H_3^k \bar{\mathbf{N}}_{n+1} - b_3 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 \right) \end{cases}$$

iv) Atualizar as outras variáveis internas.

v) Fim.

Tabela 3.4 - Algoritmo de resolução do sistema não linear para o modelo elastoplástico de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche.

i) Dado o estado tentativa como parâmetros iniciais:

$$\sigma_{n+1}^{(0)} = \sigma_{n+1}^{trial} \quad \Delta\gamma^{(0)} = 0 \quad D_{n+1}^{(0)} = D_{n+1}^{trial}$$

$$\beta_{n+1}^{1(0)} = \beta_{n+1}^{1 trial} \quad \beta_{n+1}^{2(0)} = \beta_{n+1}^{2 trial} \quad \beta_{n+1}^{3(0)} = \beta_{n+1}^{3 trial}$$

ii) Resolver o sistema de equações para  $\sigma_{n+1}$ ,  $\beta_{n+1}^i$ ,  $\Delta\gamma$  e  $D_{n+1}$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^3} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \delta\sigma_{n+1} \\ \delta\Delta\gamma \\ \delta D_{n+1} \\ \delta\beta_{n+1}^1 \\ \delta\beta_{n+1}^2 \\ \delta\beta_{n+1}^3 \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} R_{\sigma_{n+1}} \\ R_{\Delta\gamma} \\ R_{D_{n+1}} \\ R_{\beta_{n+1}^1} \\ R_{\beta_{n+1}^2} \\ R_{\beta_{n+1}^3} \end{bmatrix}^k$$

iii) Calcular:

$$\beta_{n+1}^{1(k+1)} = \beta_{n+1}^{1(k)} + \delta\beta_{n+1}^{1(k+1)} \quad \beta_{n+1}^{2(k+1)} = \beta_{n+1}^{2(k)} + \delta\beta_{n+1}^{2(k+1)}$$

$$\beta_{n+1}^{3(k+1)} = \beta_{n+1}^{3(k)} + \delta\beta_{n+1}^{3(k+1)} \quad \sigma_{n+1}^{(k+1)} = \sigma_{n+1}^{(k)} + \delta\sigma_{n+1}^{(k+1)}$$

$$\Delta\gamma_{n+1}^{(k+1)} = \Delta\gamma_{n+1}^{(k)} + \delta\Delta\gamma_{n+1}^{(k+1)} \quad D_{n+1}^{(k+1)} = D_{n+1}^{(k)} + \delta D_{n+1}^{(k+1)}$$

iv) Verificar a convergência:

$$\phi^{(k+1)} = \frac{\bar{q}^{(k+1)}}{1 - D_{n+1}^{(k+1)}} - \sigma_{y_0}$$

$$erro = \frac{\phi^{(k+1)}}{\sigma_{y_0}} \leq \text{tolerância}$$

v) Fim.

Para a quinta equação residual, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \sigma_{n+1}} &= -\frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \frac{2}{3} H_2^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \Delta\gamma} &= -\frac{1}{1-D_{n+1}} \left( \frac{2}{3} H_2^k \bar{N}_{n+1} - b_2 \beta_{n+1}^2 \right) \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial D_{n+1}} &= \frac{\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})^2} \left( \frac{2}{3} H_2^k \bar{N}_{n+1} - b_2 \beta_{n+1}^2 \right) \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^1} &= -\frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \frac{2}{3} H_2^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^1} \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^2} &= \mathbb{I} - \frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \left( \frac{2}{3} H_2^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^2} - b_2 \mathbb{I} \right) \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^3} &= -\frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \frac{2}{3} H_2^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^3}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Para a sexta equação residual, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \sigma_{n+1}} &= -\frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \frac{2}{3} H_3^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \Delta\gamma} &= -\frac{1}{1-D_{n+1}} \left( \frac{2}{3} H_3^k \bar{N}_{n+1} - b_3 \beta_{n+1}^3 \right) \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial D_{n+1}} &= \frac{\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})^2} \left( \frac{2}{3} H_3^k \bar{N}_{n+1} - b_3 \beta_{n+1}^3 \right) \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^1} &= -\frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \frac{2}{3} H_3^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^1} \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^2} &= -\frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \frac{2}{3} H_3^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^2} \\
\frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^3} &= \mathbb{I} - \frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \left( \frac{2}{3} H_3^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^3} - b_3 \mathbb{I} \right)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Outras derivadas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \frac{3}{2\bar{q}_{n+1}} \left[ \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \frac{3}{2(\bar{q}_{n+1})^2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} \otimes \boldsymbol{\eta}_{n+1} \right] \\
\frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^1} &= -\frac{3}{2\bar{q}_{n+1}} \left[ \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \frac{3}{2(\bar{q}_{n+1})^2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} \otimes \boldsymbol{\eta}_{n+1} \right] \\
\frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^2} &= -\frac{3}{2\bar{q}_{n+1}} \left[ \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \frac{3}{2(\bar{q}_{n+1})^2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} \otimes \boldsymbol{\eta}_{n+1} \right] \\
\frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^3} &= -\frac{3}{2\bar{q}_{n+1}} \left[ \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \frac{3}{2(\bar{q}_{n+1})^2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} \otimes \boldsymbol{\eta}_{n+1} \right]
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(-Y_{n+1})}{\partial\sigma_{n+1}} &= \frac{1}{(1-D_{n+1})^2} \left[ \frac{S_{n+1}}{2G} + \frac{p_{n+1}I}{3K} \right] \\
\frac{\partial(-Y_{n+1})}{\partial D_{n+1}} &= \frac{q_{n+1}^2}{3G(1-D_{n+1})^3} + \frac{p_{n+1}^2}{K(1-D_{n+1})^3} \\
\frac{\partial(-Y_{n+1})}{\partial\beta_{n+1}^1} &= 0 \\
\frac{\partial(-Y_{n+1})}{\partial\beta_{n+1}^2} &= 0 \\
\frac{\partial(-Y_{n+1})}{\partial\beta_{n+1}^3} &= 0
\end{aligned} \tag{3.34}$$

### 3.4 MODELO CDM MODIFICADO COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO DE CHABOCHE

Nesta seção será tratada a formulação dos modelos numéricos considerando a abordagem associativa modificada de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche. Para tanto, serão desenvolvidos o algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas bem como o algoritmo de resolução do sistema não linear.

#### 1) Atualização do tensor deformação elástica:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} - \Delta\gamma\mathbf{N}_{n+1} \\
\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} - \Delta\gamma\bar{\mathbf{N}}_{n+1} \frac{1}{(1-D_{n+1})}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

onde,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$  é o tensor das deformações elásticas no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}$  é o tensor das deformações elásticas tentativa no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ ,  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$  é o incremento de deformação plástica,  $\Delta\gamma$  é o incremento do multiplicador plástico,  $\mathbf{N}_{n+1}$  é o vetor de fluxo no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ ,  $\bar{\mathbf{N}}_{n+1}$  é o vetor de fluxo normalizado no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ ,  $\bar{q}_{n+1}$  é a tensão equivalente de Von Mises no pseudo-tempo  $t_{n+1}$  e  $D_{n+1}$  é a variável de dano no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ . Atualização do tensor tensão com a aplicação da lei de Hooke danificada:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - (1-D_{n+1})2G\Delta\gamma\mathbf{N}_{n+1} \\
\boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= (1-D_{n+1})\mathbb{D}:\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} - (1-D_{n+1})2G\Delta\gamma\frac{\bar{\mathbf{N}}_{n+1}}{(1-D_{n+1})} \\
\boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= (1-D_{n+1})\mathbb{D}:\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} - 2G\Delta\gamma\bar{\mathbf{N}}_{n+1}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

onde,  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  é o tensor tensão no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}$  é o tensor tensão tentativa no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ ,  $G$  é o módulo de cisalhamento e  $\mathbb{D}$  é o tensor constitutivo.

## 2) Atualização das variáveis internas

De forma discretizada, a atualização da deformação plástica equivalente é dada pela Eq. 3.37. Ao invés de remover o incremento de deformação plástica equivalente, este deve ser adicionado. Matematicamente, temos:

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}^p = \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_n^p + \frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \quad (3.37)$$

onde,  $\Delta\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^p$  é o incremento de deformação plástica,  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}^p$  é a deformação plástica equivalente no pseudo-tempo  $t_{n+1}$  e  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_n^p$  é a deformação plástica equivalente no pseudo-tempo  $t_n$ .

Para o tensor das tensões cinemáticas é necessário definir o valor de  $m$ , ou seja, o número de termos não lineares no somatório da lei de evolução de Chaboche. Com  $m = 3$ , temos:

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1} = \sum_{i=1}^3 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^i = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 + \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 + \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 \quad (3.38)$$

onde,  $\boldsymbol{\beta}_{n+1}$  é a tensão de endurecimento cinemático no pseudo-tempo  $t_{n+1}$  e  $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^i$  é o termo  $i$  da tensão de endurecimento cinemático no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ .

Analisando a Eq. 3.38, verifica-se que é necessário atualizar cada termo  $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^i$  separadamente, para em seguida considerar o somatório de forma a obter  $\boldsymbol{\beta}_{n+1}$ . Portanto, com base na lei de evolução de Chaboche, temos:

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^i = \boldsymbol{\beta}_n^i + \frac{\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})} \left( \frac{2}{3} H_i^k \bar{N}_{n+1} - b_i \boldsymbol{\beta}_{n+1}^i \right) \quad (3.39)$$

onde,  $\boldsymbol{\beta}_n^i$  é o termo  $i$  da tensão de endurecimento cinemático no pseudo-tempo  $t_n$ ,  $H_i^k$  é o termo  $i$  do módulo de endurecimento cinemático e  $b_i$  é termo  $i$  da constante do material relativa ao endurecimento cinemático. Com relação a evolução da variável isotrópica de dano, temos:

$$D_{n+1} = D_n + \frac{\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})} \left( \frac{-Y_{n+1}}{S(\Gamma, \xi)} \right)^s \quad (3.40)$$

Na Eq. 3.40 o termo  $Y_{n+1}$  corresponde à força termodinâmica associada ao dano no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ . As grandezas  $E$ ,  $\nu$  e  $\rho$ , por sua vez, são respectivamente, o módulo de elasticidade, o coeficiente de Poisson e a densidade do material.

$$-Y_{n+1} = \frac{q_{n+1}^2}{6G(1-D_{n+1})^2} + \frac{p_{n+1}^2}{2K(1-D_{n+1})^2} \quad (3.41)$$

onde,  $q_{n+1}$  é a tensão equivalente de Von Mises (independe do endurecimento cinemático) no pseudo-tempo  $t_{n+1}$  e  $p_{n+1}$  é a pressão hidrostática no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ . Finalmente, a função de escoamento no estado real é dada segundo a Eq. 3.42.

$$\phi_{n+1} = \frac{\bar{q}_{n+1}}{(1-D_{n+1})} - \sigma_{y_0} \quad (3.42)$$

onde,  $\phi_{n+1}$  é a função de escoamento segundo Lemaitre no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ .

### 3) Sistema de equações não-lineares

Verifica-se a formação de um sistema não linear de equações cujos valores para as variáveis  $\sigma_{n+1}$ ,  $\Delta\gamma$ ,  $D_{n+1}$ ,  $\beta_{n+1}^1$ ,  $\beta_{n+1}^2$  e  $\beta_{n+1}^3$  são desconhecidos no estado real.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{n+1} = (1-D_{n+1})\mathbb{D}:\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} - 2G\Delta\gamma\bar{\mathbf{N}}_{n+1} \\ \phi_{n+1} = \frac{\bar{q}_{n+1}}{(1-D_{n+1})} - \sigma_{y_0} \\ D_{n+1} = D_n + \frac{\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})} \left( \frac{-Y_{n+1}}{S(\Gamma, \xi)} \right)^s \\ \beta_{n+1}^1 = \beta_n^1 + \frac{\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})} \left( \frac{2}{3} H_1^k \bar{\mathbf{N}}_{n+1} - b_1 \beta_{n+1}^1 \right) \\ \beta_{n+1}^2 = \beta_n^2 + \frac{\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})} \left( \frac{2}{3} H_2^k \bar{\mathbf{N}}_{n+1} - b_2 \beta_{n+1}^2 \right) \\ \beta_{n+1}^3 = \beta_n^3 + \frac{\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})} \left( \frac{2}{3} H_3^k \bar{\mathbf{N}}_{n+1} - b_3 \beta_{n+1}^3 \right) \end{array} \right. \quad (3.43)$$

#### 4) Sistema de equações não-lineares na forma de equações residuais

As equações de atualização na forma de resíduos são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{\sigma_{n+1}} = \sigma_{n+1} - (1 - D_{n+1})\mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ trial}} + 2G\Delta\gamma\bar{N}_{n+1} \\ R_{\Delta\gamma} = \frac{\bar{q}_{n+1}}{(1 - D_{n+1})} - \sigma_{y_0} \\ R_{D_{n+1}} = D_{n+1} - D_n - \frac{\Delta\gamma}{(1 - D_{n+1})} \left( \frac{-Y_{n+1}}{S(\Gamma, \xi)} \right)^s \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 - \boldsymbol{\beta}_n^1 - \frac{\Delta\gamma}{(1 - D_{n+1})} \left( \frac{2}{3} H_1^k \bar{N}_{n+1} - b_1 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 \right) \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 - \boldsymbol{\beta}_n^2 - \frac{\Delta\gamma}{(1 - D_{n+1})} \left( \frac{2}{3} H_2^k \bar{N}_{n+1} - b_2 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 \right) \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 - \boldsymbol{\beta}_n^3 - \frac{\Delta\gamma}{(1 - D_{n+1})} \left( \frac{2}{3} H_3^k \bar{N}_{n+1} - b_3 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 \right) \end{array} \right. \quad (3.44)$$

#### 5) Linearização do sistema

A Tabela 3.5 apresenta de forma resumida o algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas para o modelo elastoplástico associativo modificado de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche.

Para a aplicação do método de Newton-Raphson, o sistema deve ser reescrito na forma linearizada, conforme apresentado na Eq. 3.45.

$$\left[ \begin{array}{cccccc} \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \end{array} \right]^k \begin{bmatrix} \delta \sigma_{n+1} \\ \delta \Delta\gamma \\ \delta D_{n+1} \\ \delta \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 \\ \delta \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 \\ \delta \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 \end{bmatrix}^{k+1} \quad (3.45)$$

$$= - \begin{bmatrix} R_{\sigma_{n+1}} \\ R_{\Delta\gamma} \\ R_{D_{n+1}} \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \end{bmatrix}^k$$

## 6) Derivadas das equações residuais

A Tabela 3.6 mostra, de forma resumida, a aplicação do método de Newton-Raphson para a resolução do sistema não linear. O estado inicial, ou seja, para  $k = 0$ , é tomado como sendo o estado tentativa.

Para a primeira equação residual, temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \mathbb{I} + 2G\Delta\gamma \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial S_{n+1}} \\
 \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} &= 2G\bar{N}_{n+1} \\
 \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} &= \mathbb{D}: \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ trial}} \\
 \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} &= 2G\Delta\gamma \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} \\
 \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} &= 2G\Delta\gamma \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} \\
 \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} &= 2G\Delta\gamma \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Para a segunda equação residual, temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \frac{1}{1-D_{n+1}} \bar{N}_{n+1} \\
 \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} &= 0 \\
 \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial D_{n+1}} &= \frac{\bar{q}_{n+1}}{(1-D_{n+1})^2} \\
 \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} &= \frac{1}{1-D_{n+1}} \bar{N}_{n+1} \\
 \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} &= \frac{1}{1-D_{n+1}} \bar{N}_{n+1} \\
 \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} &= \frac{1}{1-D_{n+1}} \bar{N}_{n+1}
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Para a terceira equação residual, temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} &= -\frac{s\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})} \left( \frac{-Y_{n+1}}{S(\Gamma, \xi)} \right)^{s-1} \frac{\partial(-Y_{n+1}/S(\Gamma, \xi))}{\partial \sigma_{n+1}} \\
 \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} &= -\frac{1}{(1-D_{n+1})} \left( \frac{-Y_{n+1}}{S(\Gamma, \xi)} \right)^s \\
 \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} &= 1 - \frac{\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})^2} \left( \frac{-Y_{n+1}}{S(\Gamma, \xi)} \right)^s - \frac{s\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})} \left( \frac{-Y_{n+1}}{S(\Gamma, \xi)} \right)^{s-1} \frac{\partial(-Y_{n+1}/S(\Gamma, \xi))}{\partial D_{n+1}} \\
 \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} &= 0 \\
 \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^3} = 0$$

Para a quarta equação residual, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \sigma_{n+1}} &= -\frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \frac{2}{3} H_1^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \Delta\gamma} &= -\frac{1}{1-D_{n+1}} \left( \frac{2}{3} H_1^k \bar{N}_{n+1} - b_1 \beta_{n+1}^1 \right) \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial D_{n+1}} &= \frac{\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})^2} \left( \frac{2}{3} H_1^k \bar{N}_{n+1} - b_1 \beta_{n+1}^1 \right) \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^1} &= \mathbb{I} - \frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \left( \frac{2}{3} H_1^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^1} - b_1 \mathbb{I} \right) \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^2} &= -\frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \frac{2}{3} H_1^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^2} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^3} &= -\frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \frac{2}{3} H_1^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^3} \end{aligned} \tag{3.49}$$

Para a quinta equação residual, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \sigma_{n+1}} &= -\frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \frac{2}{3} H_2^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \Delta\gamma} &= -\frac{1}{1-D_{n+1}} \left( \frac{2}{3} H_2^k \bar{N}_{n+1} - b_2 \beta_{n+1}^2 \right) \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial D_{n+1}} &= \frac{\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})^2} \left( \frac{2}{3} H_2^k \bar{N}_{n+1} - b_2 \beta_{n+1}^2 \right) \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^1} &= -\frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \frac{2}{3} H_2^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^1} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^2} &= \mathbb{I} - \frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \left( \frac{2}{3} H_2^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^2} - b_2 \mathbb{I} \right) \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^3} &= -\frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \frac{2}{3} H_2^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^3} \end{aligned} \tag{3.50}$$

Para a sexta equação residual, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \sigma_{n+1}} &= -\frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \frac{2}{3} H_3^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \Delta\gamma} &= -\frac{1}{1-D_{n+1}} \left( \frac{2}{3} H_3^k \bar{N}_{n+1} - b_3 \beta_{n+1}^3 \right) \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial D_{n+1}} &= \frac{\Delta\gamma}{(1-D_{n+1})^2} \left( \frac{2}{3} H_3^k \bar{N}_{n+1} - b_3 \beta_{n+1}^3 \right) \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^1} &= -\frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \frac{2}{3} H_3^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^1} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^2} &= -\frac{\Delta\gamma}{1-D_{n+1}} \frac{2}{3} H_3^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^2} \end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\frac{\partial^R \beta_{n+1}^3}{\partial \beta_{n+1}^3} = \mathbb{I} - \frac{\Delta \gamma}{1-D_{n+1}} \left( \frac{2}{3} H_3^k \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^3} - b_3 \mathbb{I} \right)$$

Outras derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \frac{3}{2\bar{q}_{n+1}} \left[ \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \frac{3}{2(\bar{q}_{n+1})^2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} \otimes \boldsymbol{\eta}_{n+1} \right] \\ \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^1} &= -\frac{3}{2\bar{q}_{n+1}} \left[ \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \frac{3}{2(\bar{q}_{n+1})^2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} \otimes \boldsymbol{\eta}_{n+1} \right] \\ \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^2} &= -\frac{3}{2\bar{q}_{n+1}} \left[ \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \frac{3}{2(\bar{q}_{n+1})^2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} \otimes \boldsymbol{\eta}_{n+1} \right] \\ \frac{\partial \bar{N}_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^3} &= -\frac{3}{2\bar{q}_{n+1}} \left[ \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \frac{3}{2(\bar{q}_{n+1})^2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} \otimes \boldsymbol{\eta}_{n+1} \right] \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left( \frac{-Y_{n+1}}{S(\Gamma, \xi)} \right)}{\partial \sigma_{n+1}} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_{n+1}} (-Y_{n+1}) S(\Gamma, \xi)^{-1} \\ \frac{\partial \left( \frac{-Y_{n+1}}{S(\Gamma, \xi)} \right)}{\partial \sigma_{n+1}} &= S(\Gamma, \xi)^{-1} \frac{\partial -Y_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} - (-Y_{n+1}) S(\Gamma, \xi)^{-2} \frac{\partial S(\Gamma, \xi)}{\partial \sigma_{n+1}} \\ \frac{\partial \left( \frac{-Y_{n+1}}{S(\Gamma, \xi)} \right)}{\partial D_{n+1}} &= \frac{\partial}{\partial D_{n+1}} (-Y_{n+1}) S(\Gamma, \xi)^{-1} = S(\Gamma, \xi)^{-1} \frac{\partial -Y_{n+1}}{\partial D_{n+1}} \\ \frac{\partial \left( \frac{-Y_{n+1}}{S(\Gamma, \xi)} \right)}{\partial \beta_{n+1}^1} &= 0 \\ \frac{\partial \left( \frac{-Y_{n+1}}{S(\Gamma, \xi)} \right)}{\partial \beta_{n+1}^2} &= 0 \\ \frac{\partial \left( \frac{-Y_{n+1}}{S(\Gamma, \xi)} \right)}{\partial \beta_{n+1}^3} &= 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial -Y_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \frac{1}{(1-D_{n+1})^2} \left[ \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{2G} + \frac{\mathbf{p}_{n+1} l}{3K} \right] \\ \frac{\partial -Y_{n+1}}{\partial D_{n+1}} &= \frac{q_{n+1}^2}{3G(1-D_{n+1})^3} + \frac{\mathbf{p}_{n+1}^2}{K(1-D_{n+1})^3} \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\Gamma, \xi)}{\partial \sigma_{n+1}} &= \frac{S_{0.33}}{\left[ 3|\Gamma| + \frac{S_{0.33}}{S_{0.00}}(1-\xi^2) \right]^2} \left( \frac{3\Gamma}{|\Gamma|} \frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma_{n+1}} - \frac{2\xi S_{0.33}}{S_{0.00}} \frac{\partial \xi}{\partial \sigma_{n+1}} \right) \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma_{n+1}} &= \frac{1}{2q_{n+1}} \mathbf{I} - \frac{3\Gamma}{2q_{n+1}^2} \mathbf{S}_{n+1} \\ \frac{\partial \xi}{\partial \sigma_{n+1}} &= 3\xi \frac{\partial r}{\partial \sigma_{n+1}} \frac{1}{r} - \frac{\partial q_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \frac{1}{q} \end{aligned} \quad (3.55)$$

Tabela 3.5 - Modelo Numérico - Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas para o modelo elastoplástico associativo modificado de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche.

i) Dado um incremento de deformação  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ , determinar o estado tentativa:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^p & \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{p\ trial} &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p \\ \bar{q}_{n+1}^{trial} &= \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} : \boldsymbol{\eta}_{n+1}} & D_{n+1}^{trial} &= D_n & \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} &= (1 - D_n) \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} \\ \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{1\ trial} &= \boldsymbol{\beta}_n^1 & \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{2\ trial} &= \boldsymbol{\beta}_n^2 & \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{3\ trial} &= \boldsymbol{\beta}_n^3 \end{aligned}$$

ii) Verificar a admissibilidade plástica:

$$\phi^{trial} = \frac{\bar{q}_{n+1}^{trial}}{(1 - D_{n+1}^{trial})} - \sigma_{y_0}$$

Se  $\phi^{trial} \leq 0$ , então (passo elástico):  $(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^{trial}$

Se  $\phi^{trial} > 0$ , então (passo plástico): algoritmo de retorno.

iii) Algoritmo de retorno:

Resolver o sistema de equações não lineares pelo método de Newton-Raphson, tendo como variáveis  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ ,  $\Delta \gamma$ ,  $D_{n+1}$ ,  $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1$ ,  $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2$  e  $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3$ .

$$\left\{ \begin{aligned} R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - (1 - D_{n+1}) \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} + 2G\Delta\gamma \bar{\mathbf{N}}_{n+1} \\ R_{\Delta\gamma} &= \frac{\bar{q}_{n+1}}{(1 - D_{n+1})} - \sigma_{y_0} \\ R_{D_{n+1}} &= D_{n+1} - D_n - \frac{\Delta\gamma}{(1 - D_{n+1})} \left( \frac{-Y_{n+1}}{S(\Gamma, \zeta)} \right)^s \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} &= \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 - \boldsymbol{\beta}_n^1 - \frac{\Delta\gamma}{(1 - D_{n+1})} \left( \frac{2}{3} H_1^k \bar{\mathbf{N}}_{n+1} - b_1 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 \right) \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} &= \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 - \boldsymbol{\beta}_n^2 - \frac{\Delta\gamma}{(1 - D_{n+1})} \left( \frac{2}{3} H_2^k \bar{\mathbf{N}}_{n+1} - b_2 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 \right) \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} &= \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 - \boldsymbol{\beta}_n^3 - \frac{\Delta\gamma}{(1 - D_{n+1})} \left( \frac{2}{3} H_3^k \bar{\mathbf{N}}_{n+1} - b_3 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 \right) \end{aligned} \right.$$

iv) Atualizar as outras variáveis internas.

v) Fim.

Tabela 3.6 - Algoritmo de resolução do sistema não linear para o modelo elastoplástico associativo modificado de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche.

i) Dado o estado tentativa como parâmetros iniciais:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(0)} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} \quad \Delta\gamma^{(0)} = 0 \quad D_{n+1}^{(0)} = D_{n+1}^{trial}$$

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{1(0)} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{1 trial} \quad \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{2(0)} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{2 trial} \quad \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{3(0)} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{3 trial}$$

ii) Resolver o sistema de equações para  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ ,  $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^i$ ,  $\Delta\gamma$  e  $D_{n+1}$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{D_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial D_{n+1}} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ \delta \Delta\gamma \\ \delta D_{n+1} \\ \delta \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 \\ \delta \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 \\ \delta \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \\ R_{\Delta\gamma} \\ R_{D_{n+1}} \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} \end{bmatrix}^k$$

iii) Calcular:

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{1(k+1)} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{1(k)} + \delta \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{1(k+1)} \quad \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{2(k+1)} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{2(k)} + \delta \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{2(k+1)}$$

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{3(k+1)} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{3(k)} + \delta \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{3(k+1)} \quad \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k+1)} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} + \delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k+1)}$$

$$\Delta\gamma_{n+1}^{(k+1)} = \Delta\gamma_{n+1}^{(k)} + \delta \Delta\gamma_{n+1}^{(k+1)} \quad D_{n+1}^{(k+1)} = D_{n+1}^{(k)} + \delta D_{n+1}^{(k+1)}$$

iv) Verificar a convergência:

$$\phi^{(k+1)} = \frac{\bar{q}^{(k+1)}}{1 - D_{n+1}^{(k+1)}} - \sigma_{y_0}$$

$$erro = \frac{\phi^{(k+1)}}{\sigma_{y_0}} \leq \text{tolerância}$$

v) Fim.

onde,  $\frac{\partial r}{\partial \sigma_{n+1}}$  e  $\frac{\partial q_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}}$  representam as derivadas, respectivamente, do terceiro invariante e da tensão equivalente de Von Mises, em relação ao tensor tensão, que são determinadas como:

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathcal{S}_{n+1}}{\|\mathcal{S}_{n+1}\|} \\ \frac{\partial r}{\partial \sigma_{n+1}} &= \frac{9}{2r^2} \frac{\partial \det \mathcal{S}_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}}\end{aligned}\tag{3.56}$$

onde,  $\frac{\partial \det \mathcal{S}_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}}$  representa a derivada do determinante do tensor desviador  $\mathcal{S}_{n+1}$  em relação ao tensor tensão, que pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \det \mathcal{S}_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} = \frac{\partial \det \mathcal{S}_{n+1}}{\partial \mathcal{S}_{n+1}} : \frac{\partial \mathcal{S}_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}}\tag{3.57}$$

As Eq. 3.58 e 3.59, por sua vez, estão relacionadas respectivamente, a derivada do determinante do tensor desviador  $\mathcal{S}_{n+1}$  com relação ao tensor desviador e a derivada do tensor desviador com relação ao tensor tensão  $\sigma_{n+1}$ .

$$\frac{\partial \det \mathcal{S}_{n+1}}{\partial \mathcal{S}_{n+1}} = \det(\mathcal{S}_{n+1} \mathcal{S}_{n+1}^{-T})\tag{3.58}$$

$$\frac{\partial \mathcal{S}_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} = \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}\tag{3.59}$$

# 4 ESTRATÉGIA DE IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS

## 4.1 INTRODUÇÃO

Os problemas numéricos diretos ocorrem quando o modelo constitutivo, a geometria inicial e as condições de contorno são conhecidas. Trata-se de um problema clássico de elementos finitos onde o objetivo é determinar a geometria final, as tensões e deformações bem como a evolução das grandezas do processo.

Os problemas de otimização de pré-forma e problemas de identificação de parâmetros, por sua vez, correspondem a classes dos problemas numéricos inversos. No primeiro caso, espera-se identificar a geometria inicial após especificarmos a deformação e geometria final de determinada estrutura ou componente. A outra classe trata da aplicação de modelos constitutivos para identificar parâmetros a partir de resultados experimentais.

A Fig. 4.1 resume o processo de calibração dos parâmetros de tensão e de dano dos modelos constitutivos elastoplásticos. Nos tópicos seguintes iremos detalhar, portanto, a referida estratégia de identificação do dano crítico, denominadores de dano, módulos e constantes de endurecimento cinemático, bem como do limite de escoamento inicial.

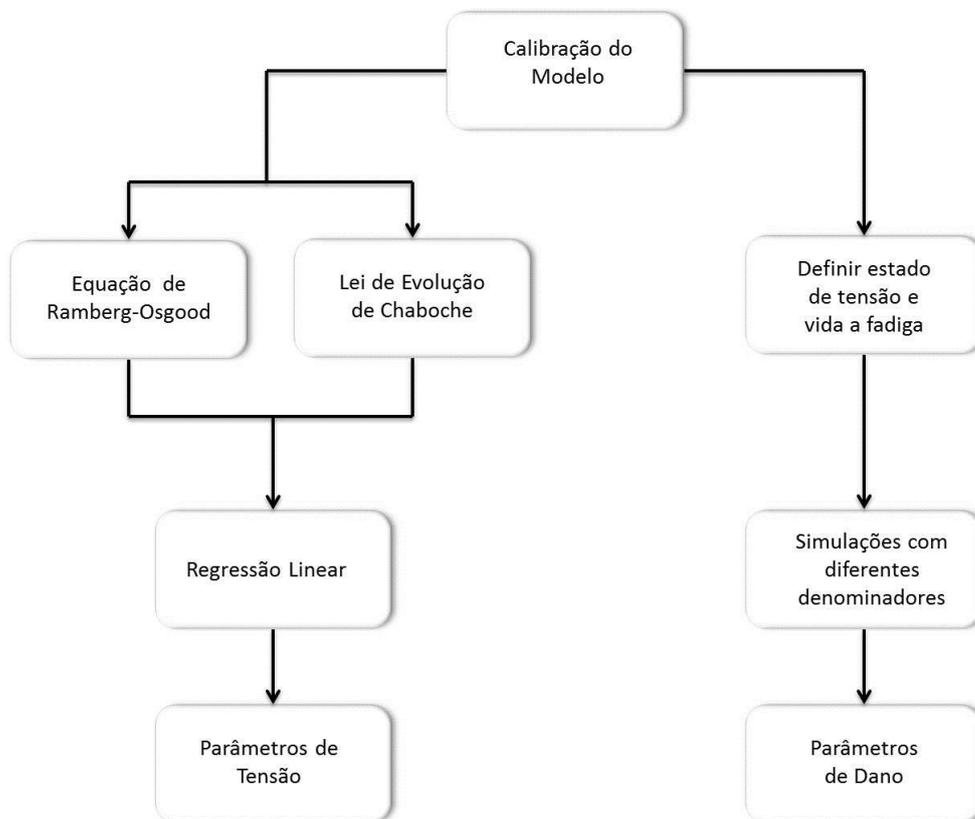


Figura 4.1 – Algoritmo de calibração dos parâmetros de tensão e de dano do modelo constitutivo.

## 4.2 CALIBRAÇÃO DOS PARÂMETROS DO MATERIAL

Para definir os parâmetros materiais do aço S460N foi utilizado o modelo de Lemaitre com endurecimento cinemático conforme teoria proposta por Chaboche para dois termos não lineares e um termo linear, resultando na lei de evolução do tensor tensão de endurecimento cinemático conforme descrito pela equação abaixo:

$$\dot{\beta} = \frac{2}{3}H_1^k \dot{\epsilon}^p - \dot{\gamma}b_1\beta_1 + \frac{2}{3}H_2^k \dot{\epsilon}^p - \dot{\gamma}b_2\beta_2 + \frac{2}{3}H_3^k \dot{\epsilon}^p \quad (4.1)$$

Dessa forma, os seguintes parâmetros deverão ser obtidos:  $\sigma_{y_0}$ ,  $H_1^k$ ,  $H_2^k$ ,  $H_3^k$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  e  $S$ . Considera-se o expoente de dano  $s = 1$  para a maioria dos materiais metálicos dúcteis como o aço S460N (Malcher, 2011).

Verifica-se que o denominador de dano ( $S$ ) está relacionado a taxa de crescimento da variável de dano. Os parâmetros  $\sigma_{y_0}$ ,  $H_i^k$  e  $b_i$ , por sua vez, estão relacionados aos níveis de tensão do material. Dessa forma, verifica-se que uma calibração dos parâmetros elencados de forma simultânea não seria o ideal.

O processo de calibração dos denominadores de dano consistiu na identificação dos parâmetros de tensão ( $\sigma_{y_0}$ ,  $H_i^k$  e  $b_i$ ) e na identificação dos parâmetros de dano ( $S_{0,33}$  e  $S_{0,00}$ ). Uma vez que estas análises levam em consideração níveis de tensão diferentes, dividiu-se o processo de calibração em duas etapas.

### 4.2.1 CALIBRAÇÃO DOS PARÂMETROS DE TENSÃO

Observa-se uma relação analítica entre as amplitudes de deformação aplicadas em estado uniaxial e as amplitudes de tensão obtidas na análise dos parâmetros de tensão. De acordo com Chaboche (1986), considerando um carregamento uniaxial cíclico com amplitude de deformação plástica  $\epsilon_a^p$  e amplitude de tensão  $\sigma_a$ , verifica-se que a lei de endurecimento cinemático de Chaboche é composta por dois termos não lineares e um termo linear, conforme exposto através da Eq. 4.24.

$$\sigma_a = \frac{H_1^k}{b_1} \tanh(b_1 \epsilon_a^p) + \frac{H_2^k}{b_2} \tanh(b_2 \epsilon_a^p) + H_3^k \epsilon_a^p + \sigma_{y_0} \quad (4.2)$$

Os parâmetros materiais  $H'$  e  $n'$  presentes na Eq. 4.3 foram obtidos para o aço S460N a partir da literatura (Jiang et al, 2007). Considerando também as amplitudes de deformação plástica e de tensão, é possível definir os parâmetros de tensão ( $H_i^k$ ,  $b_i$  e  $\sigma_{y_0}$ ) com um ajuste da

curva de Ramberg-Osgood, uma vez que esta relaciona  $\sigma_a$  e  $\varepsilon_a^p$ . Importante frisar que ao aplicarmos na regressão dados experimentais relativos ao aço S460N, os resultados para a calibração dos parâmetros de tensão deverão ser mais precisos.

$$\varepsilon_a^p = \left(\frac{\sigma_a}{H'}\right)^{1/n'} \quad (4.3)$$

Através de um algoritmo (anexo A) desenvolvido no programa Matlab®, realizou-se um ajuste linear, considerando a função nlinfit e uma tolerância de  $10^{-8}$  para cada parâmetro. A seguir apresentamos, respectivamente, nas Tabelas 4.1 e 4.2 os parâmetros relativos à equação de Ramberg-Osgood e os resultados aferidos para a lei de endurecimento cinemático proposta por Chaboche.

Tabela 4.1 – Parâmetros de Ramberg-Osgood, módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson para o aço S460N (Jiang et al., 2007).

Parâmetro	S460N (Jiang et al., 2007)
$H'$ (MPa)	1115
$n'$	0,161
$E$ (GPa)	208
$\nu$	0,30

Tabela 4.2 – Resultados da calibração por amplitude para o modelo de Chaboche e parâmetros da curva de Ramberg-Osgood obtidos da literatura para o aço S460N.

Parâmetro	S460N (Jiang et al., 2007)
$H_1^k$ (MPa)	84908
$H_2^k$ (MPa)	980350
$H_3^k$ (MPa)	11602
$b_1$	611,35
$b_2$	9282,50
$\sigma_{y_0}$ (MPa)	170

Através da Fig. 4.2 é possível comparar os dados relativos à equação de Ramberg-Osgood com os valores aferidos através da regressão com a função nlinfit, que relaciona a amplitude de tensão e a amplitude de deformação plástica para o modelo de Chaboche.

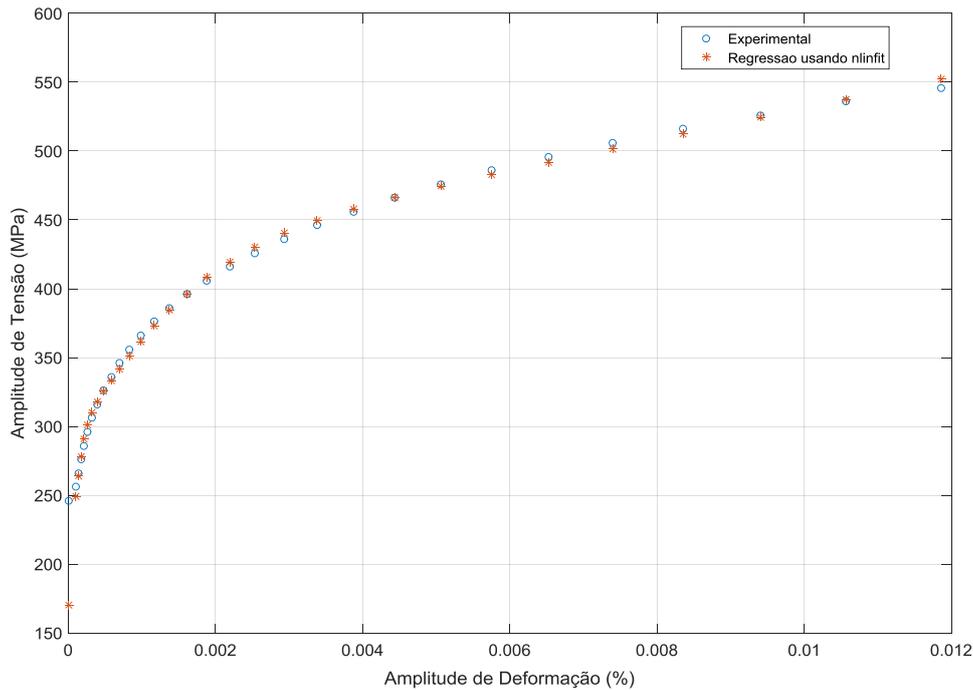


Figura 4.2 – Comparação entre dados experimentais e valores obtidos com regressão.

#### 4.2.2 CALIBRAÇÃO DO DANO CRÍTICO E DOS DENOMINADORES DE DANO

A tabela 4.3 contém dados extraídos do trabalho desenvolvido por Jiang (2007), onde espécimes cilíndricos fabricados a partir do aço S460N foram submetidos a ensaios de fadiga com carregamentos uniaxiais normais ou cisalhantes.

Definido o número de ciclos e a amplitude de deformações, foi possível identificar o valor do dano para diferentes denominadores de dano, conforme apresentado na tabela 4.4.

Tabela 4.3 – Ensaio de fadiga conduzidos utilizando espécimes cilíndricos (Jiang et al., 2007).

Carregamento	$\epsilon$ (%)	$\gamma$ (%)	$\sigma$ (MPa)	$\tau$ (MPa)	N (ciclos)
Normal	0.50	-	450.20	-	1630
	0.33	-	385.00	-	7690
	0.22	-	338.10	-	33100
Cisalhante	-	0.43	-	204.00	38250
	-	1.00	-	257.50	1820
	-	0.45	-	212.70	23000

Ainda com relação à tabela abaixo, em verde e azul, respectivamente, foram destacados os valores de dano crítico próximos a 0.20 e 0.30. Com base na Figura 4.2 é possível verificar

que a tendência no limite é de convergência para o dano com a ampliação do denominador de dano, independentemente do nível de deformação aplicado.

Tabela 4.4 – Relação de valores obtidos para o dano a partir da variação do denominador de dano, número de ciclos e amplitude de deformação normal.

Denominador	Dano		
0.10	0.66	0.50	0.40
0.50	0.35	0.28	0.32
1.00	0.27	0.26	0.29
2.00	0.20	0.23	0.26
3.00	0.19	0.22	0.25
4.00	0.18	0.21	0.24
5.00	0.17	0.20	0.23
6.00	0.17	0.19	0.22
7.00	0.16	0.19	0.21
8.00	0.16	0.18	0.20
9.00	0.15	0.18	0.20
10.00	0.15	0.17	0.19
15.00	0.14	0.16	0.16
20.00	0.13	0.15	0.14
25.00	0.12	0.14	0.13
30.00	0.11	0.13	0.11
N (ciclos)	33100	7690	1630
$\epsilon$ (%)	0.22	0.33	0.50

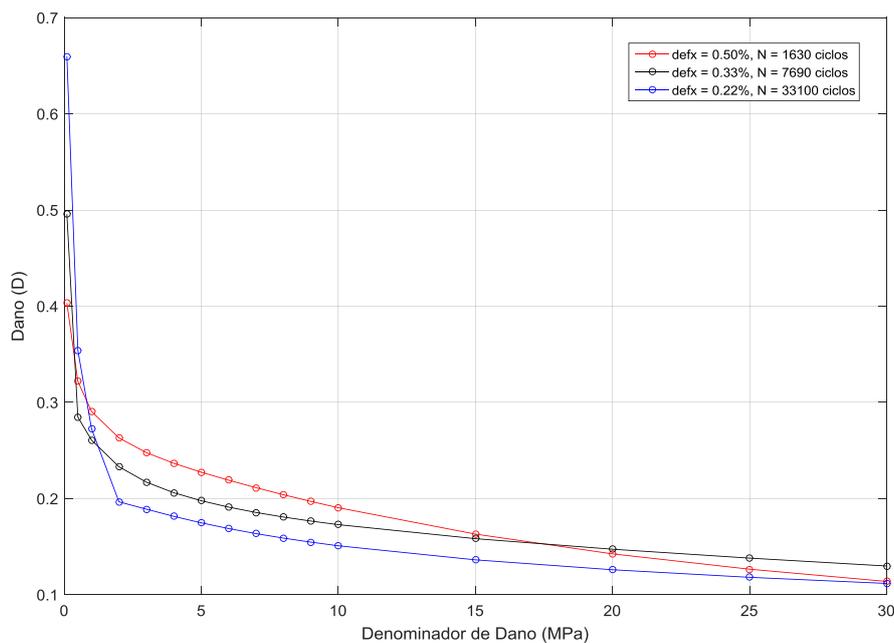


Figura 4.3 – Variação do dano com o denominador de dano, número de ciclos e amplitudes de deformação normal.

A Figura 4.3, por sua vez, mostra de que forma o dano variou com a alteração do denominador de dano entre 0.1 e 130 bem como do número de ciclos e amplitude de deformação cisalhante aplicada ao aço S460N. Todos os dados obtidos foram relacionados na tabela 4.5 e novamente destacou-se em verde e azul, respectivamente, os valores de dano crítico próximos a 0.20 e 0.30.

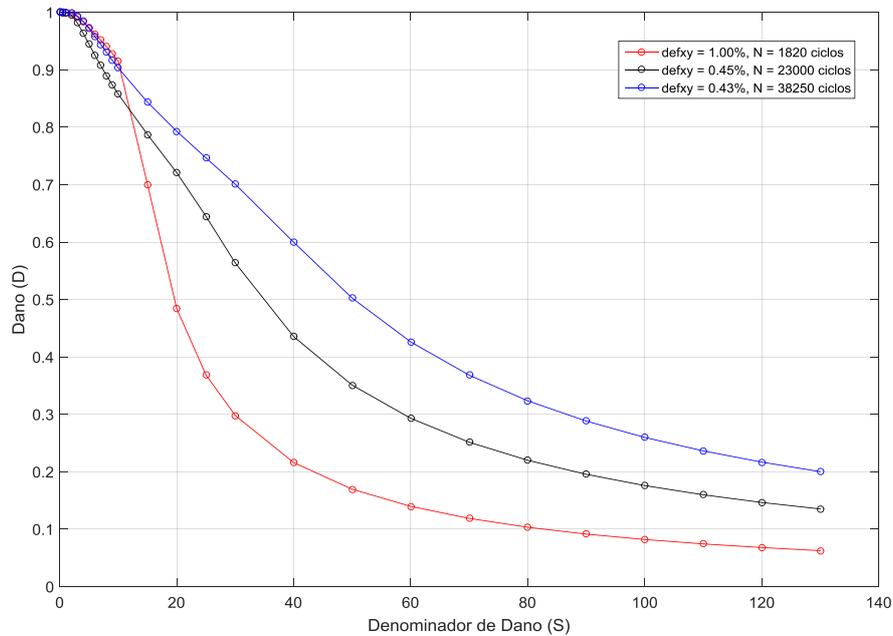


Figura 4.4 – Variação do dano com o denominador de dano, número de ciclos e amplitudes de deformação cisalhante.

Tabela 4.5 – Relação de valores obtidos para o dano a partir da variação do denominador de dano, número de ciclos e amplitude de deformação cisalhante.

Denominador		Dano	
0.10	1.00	1.00	1.00
0.50	1.00	1.00	1.00
1.00	1.00	1.00	1.00
2.00	1.00	1.00	1.00
3.00	0.99	0.98	0.99
4.00	0.98	0.96	0.98
5.00	0.97	0.94	0.97
6.00	0.96	0.93	0.96
7.00	0.95	0.91	0.94
8.00	0.94	0.89	0.93
9.00	0.93	0.87	0.92
10.00	0.91	0.86	0.90
15.00	0.70	0.79	0.84
20.00	0.48	0.72	0.79
25.00	0.37	0.64	0.75

30.00	0.30	0.56	0.70
40.00	0.22	0.44	0.60
50.00	0.17	0.35	0.50
60.00	0.14	0.29	0.43
70.00	0.12	0.25	0.37
80.00	0.10	0.22	0.32
90.00	0.09	0.20	0.29
100.00	0.08	0.18	0.26
110.00	0.07	0.16	0.24
120.00	0.07	0.15	0.22
130.00	0.06	0.14	0.20
N (ciclos)	1820	23000	38250
$\gamma$ (%)	1.00	0.45	0.43

A tabela 4.6, além de resumir a tabela 4.4, traz os denominadores de dano para alta triaxialidade ( $S_{0,33}$ ). Considerando a média dos denominadores aferidos para um dano crítico de 0.20, temos  $S_{0,33}$  igual a 5.33. Por sua vez, para um dano de 0.30,  $S_{0,33}$  corresponde a 0.83.

Tabela 4.6 – Denominadores de dano obtidos a partir de simulações com tensões normais e utilizados na previsão de vida em fadiga com os modelos de Lemaitre e CDM modificado.

	Dano		S [MPa]	$S_{1/3}$ [MPa]
0.20	-	-	2.00	
-	0.20	-	5.00	5.33
-	-	0.20	9.00	
0.27	-	-	1.00	
-	0.28	-	0.50	0.83
-	-	0.29	1.00	
0.22	0.33	0.50	$\varepsilon$ (%)	
33100	7690	1630	N (ciclos)	

Conforme pode ser observado abaixo, a tabela 4.7 traz os denominadores de dano de baixa triaxialidade ( $S_{0,00}$ ) para os danos críticos de 0.20 e 0.30, os quais equivalem respectivamente a 86.67 e 60.00. Importante ressaltar que o algoritmo implementado em MATLAB® e utilizado para identificação dos danos a partir da definição das amplitudes de deformação cisalhantes e normais bem como do número de ciclos e do denominador de dano, encontra-se no Anexo A.

Tabela 4.7 – Denominadores de dano obtidos a partir de simulações com tensões cisalhantes e utilizados na previsão de vida em fadiga com o modelo CDM modificado.

	Dano		S [MPa]	$S_0$ [MPa]
0.22	-	-	40.00	
-	0.20	-	90.00	86.67
-	-	0.20	130.00	
0.30	-	-	30.00	
-	0.29	-	60.00	60.00
-	-	0.29	90.00	
1.00	0.45	0.43	$\gamma$ (%)	
1820	23000	38250	N (ciclos)	

# 5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

## 5.1 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo, serão apresentados os resultados referentes à implementação do modelo de dano de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche para o aço S460N, submetido a carregamentos uniaxiais e multiaxiais. Em seguida, os dados aferidos serão comparados ao modelo CDM modificado com endurecimento cinemático de Chaboche. Os parâmetros do material analisado foram apresentados no Capítulo 4.

Com o objetivo de comparar a capacidade dos modelos apresentados de prever o comportamento elastoplástico do aço S460N quando submetido a carregamentos axiais e cisalhantes, proporcionais ou não proporcionais, implementou-se o algoritmo de atualização de tensões aplicado em um ponto material com o uso da linguagem computacional FORTRAN.

Na seção 5.2 os históricos de carregamentos aplicados ao material em estudo são apresentados. Na seção 5.3, por sua vez, realiza-se uma comparação entre os resultados aferidos de vida em fadiga e os disponíveis em literatura. A seção 5.4 traz as curvas de evolução de dano, ao passo que na seção 5.5 observa-se as conclusões referentes aos tópicos elencados neste capítulo.

## 5.2 CARREGAMENTOS

No trabalho desenvolvido por Jiang et. al (2007), foram aplicados ao aço S460N os carregamentos com trajetórias uniaxiais (A e B), multiaxiais proporcionais (C) e multiaxiais não proporcionais (D), conforme apresentado através da Fig. 5.1. Os anexos B e C trazem as rotinas de carregamento desenvolvidas em linguagem FORTRAN.

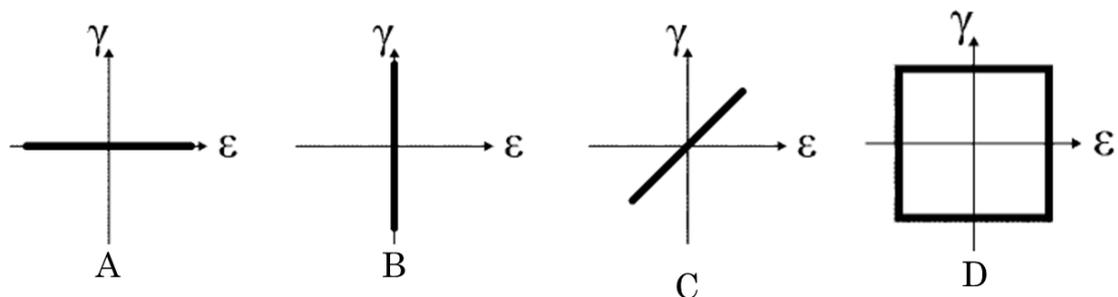


Figura 5.1 – Históricos de carregamento impostos para o aço S460N (Jiang et al., 2007).

### 5.3 VIDA EM FADIGA

As Tabelas 5.1 a 5.4 apresentam as amplitudes de deformação impostas, a vida experimental obtida da literatura e a vida numérica calculada a partir dos modelos de Lemaitre e CDM modificado para o aço S460N, levando em consideração também a lei de evolução do endurecimento cinemático proposta por Chaboche.

As Figuras 5.2 e 5.3 apresentam a comparação entre a vida em fadiga obtida experimentalmente e a vida estimada pelo modelo de dano contínuo de Lemaitre para o aço S460N, com o denominador de dano calibrado, respectivamente, em 5.33 e 0.83. As Figuras 5.4 e 5.5, por sua vez, expõem tanto os dados aferidos a partir do modelo CDM modificado quanto os disponibilizados na literatura. Finalmente, as Figuras 5.6 e 5.7 reúnem, os resultados experimentais e numéricos de ambos os modelos cujos danos críticos correspondem respectivamente a 0.2 e 0.3.

Tabela 5.1 – Amplitudes de deformação impostas com  $S_{0.33} = 5.33$ , vida experimental e vida calculada, obtidas para o aço S460N a partir do modelo de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche.

$\varepsilon$ (%)	$\gamma$ (%)	$N_f$ (ciclos)	DANO	$N_e$ (ciclos)
0.220	-	1.23E+05	0.20	3.31E+04
0.330	-	8.73E+03	0.20	7.69E+03
0.500	-	1.02E+03	0.20	1.63E+03
-	0.430	1.57E+03	0.20	3.83E+04
-	0.450	1.40E+03	0.20	2.30E+04
-	1.000	2.27E+02	0.20	1.82E+03
0.173	0.300	2.78E+03	0.20	3.11E+04
0.104	0.180	3.08E+04	0.20	5.21E+05
0.144	0.250	5.88E+03	0.20	1.30E+05
0.173	0.300	2.04E+03	0.20	6.73E+03
0.144	0.250	4.33E+03	0.20	1.80E+04

Comparando as Figuras 5.2 a 5.4, verificamos que a previsão de vida em fadiga de ambos os modelos é mais efetiva para maiores amplitudes de deformação normal, situação na qual o mecanismo de degradação do material é caracterizado pela deformação plástica macroscópica. Ocorre o oposto quando se trata de trajetórias cisalhantes, ou seja, os modelos de Lemaitre e CDM modificado apresentam melhores resultados com menores amplitudes de deformação.

Observa-se também uma pequena melhora na estimativa de vida em fadiga com carregamentos proporcionais e um significativo ganho para carregamentos não proporcionais, quando aplicado o modelo CDM modificado. Nota-se também ao observar as Figuras 5.6 e 5.7

que, apesar da diferença no que diz respeito à acurácia dos resultados, há certa semelhança na disposição dos dados quando comparamos os dois modelos em estudo.

Tabela 5.2 – Amplitudes de deformação impostas com  $S_{0.33} = 0.83$ , vida experimental e vida calculada, obtidas para o aço S460N a partir do modelo de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche.

$\varepsilon$ (%)	$\gamma$ (%)	$N_f$ (ciclos)	DANO	$N_e$ (ciclos)
0.220	-	4.66E+04	0.30	3.31E+04
0.330	-	2.74E+04	0.30	7.69E+03
0.500	-	1.69E+03	0.30	1.63E+03
-	0.430	3.69E+02	0.30	3.83E+04
-	0.450	3.27E+02	0.30	2.30E+04
-	1.000	5.10E+01	0.30	1.82E+03
0.173	0.300	7.96E+02	0.30	3.11E+04
0.104	0.180	9.31E+03	0.30	5.21E+05
0.144	0.250	1.88E+03	0.30	1.30E+05
0.173	0.300	6.58E+02	0.30	6.73E+03
0.144	0.250	1.58E+03	0.30	1.80E+04

Tabela 5.3 – Amplitudes de deformação impostas com  $S_{0.33} = 5.33$  e  $S_{0.00} = 86.67$ , vida experimental e vida calculada, obtidas para o aço S460N a partir do modelo CDM modificado com endurecimento cinemático de Chaboche.

$\varepsilon$ (%)	$\gamma$ (%)	S	$N_f$ (ciclos)	DANO	$N_e$ (ciclos)
0.220	-	$S_{0.33} = 5.33$	1.49E+05	0.20	3.31E+04
0.330	-	$S_{0.00} = 86.67$	1.04E+04	0.20	7.69E+03
0.500	-		1.17E+03	0.20	1.63E+03
-	0.430	$S_{0.33} = 5.33$	2.55E+04	0.20	3.83E+04
-	0.450	$S_{0.00} = 86.67$	2.27E+04	0.20	2.30E+04
-	1.000		3.67E+03	0.20	1.82E+03
0.173	0.300	$S_{0.33} = 5.33$	5.75E+03	0.20	3.11E+04
0.104	0.180	$S_{0.00} = 86.67$	6.19E+04	0.20	5.21E+05
0.144	0.250		1.25E+04	0.20	1.30E+05
0.173	0.300	$S_{0.33} = 5.33$	9.56E+03	0.20	6.73E+03
0.144	0.250	$S_{0.00} = 86.67$	1.99E+04	0.20	1.80E+04

Tabela 5.4 – Amplitudes de deformação impostas com  $S_{0,33} = 0.83$  e  $S_{0,00} = 60.00$ , vida experimental e vida calculada, obtidas para o aço S460N a partir do modelo CDM modificado com endurecimento cinemático de Chaboche.

$\varepsilon$ (%)	$\gamma$ (%)	S	$N_f$ (ciclos)	DANO	$N_e$ (ciclos)
0,220	-	$S_{0.33} = 0.83$	6.13E+04	0.30	3.31E+04
0,330	-	$S_{0.00} = 60.00$	3.78E+04	0.30	7.69E+03
0,500	-		2.27E+03	0.30	1.63E+03
-	0,430	$S_{0.33} = 0.83$	2.66E+04	0.30	3.83E+04
-	0,450	$S_{0.00} = 60.00$	2.35E+04	0.30	2.30E+04
-	1,000		3.66E+03	0.30	1.82E+03
0,173	0,300	$S_{0.33} = 0.83$	2.37E+03	0.30	3.11E+04
0,104	0,180	$S_{0.00} = 60.00$	2.42E+04	0.30	5.21E+05
0,144	0,250		5.76E+03	0.30	1.30E+05
0,173	0,300	$S_{0.33} = 0.83$	8.86E+03	0.30	6.73E+03
0,144	0,250	$S_{0.00} = 60.00$	1.96E+04	0.30	1.80E+04

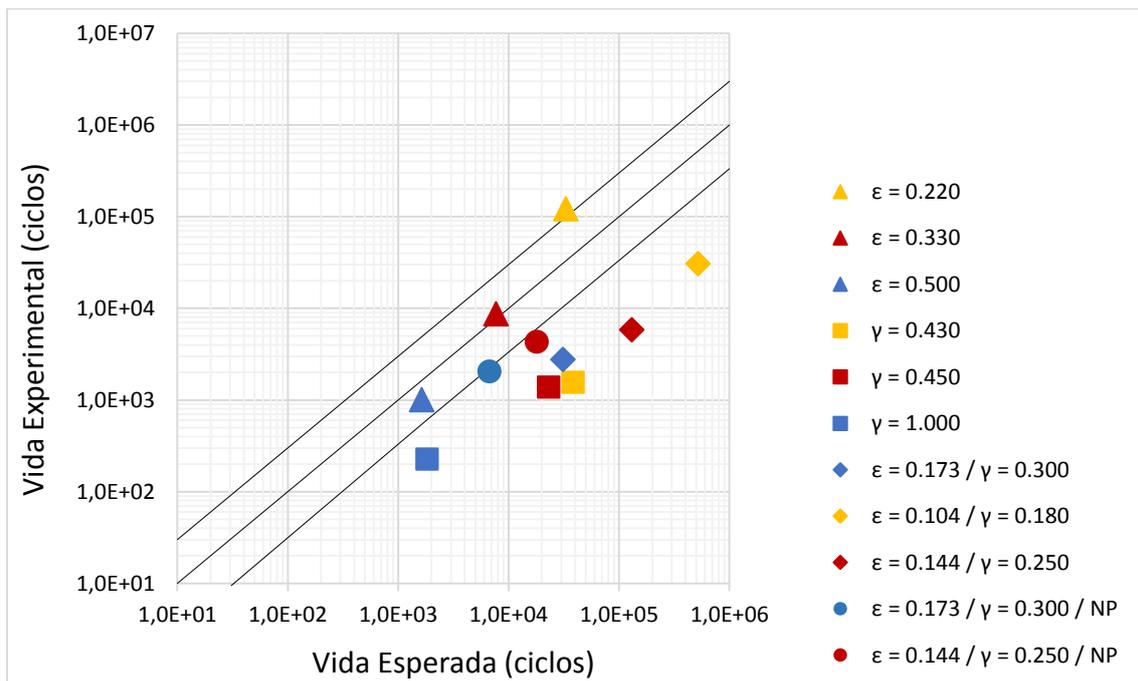


Figura 5.2 – Comparação entre a vida observada experimentalmente e a vida calculada pelo modelo de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche e  $S_{0,33} = 5.33.$ ,  $D_c = 0,20$ .

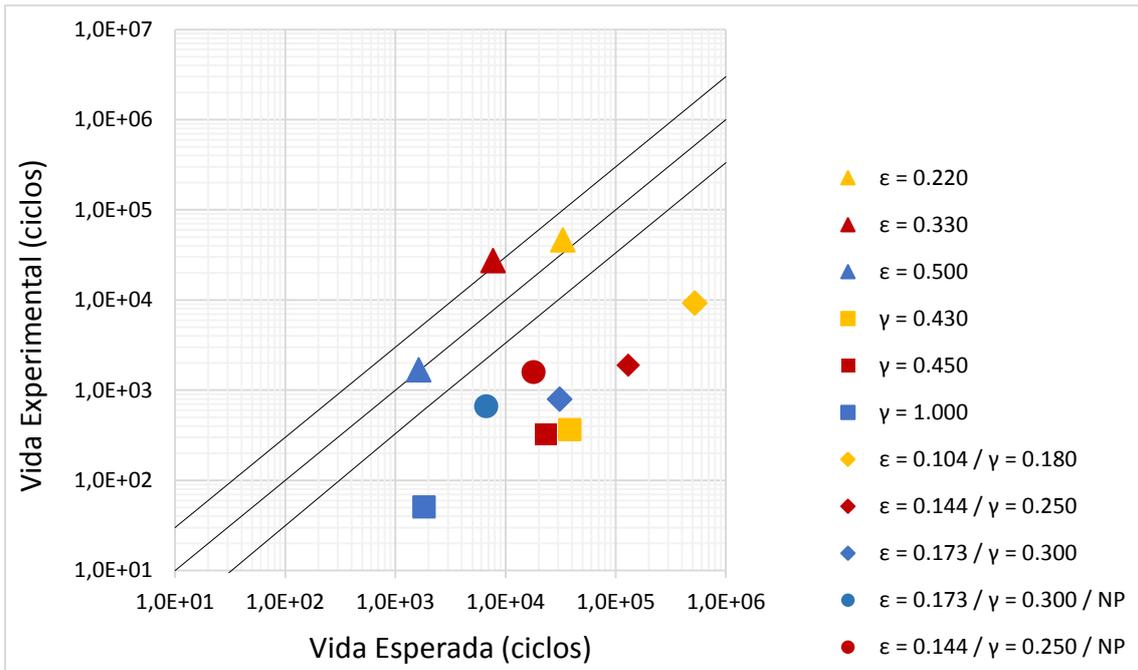


Figura 5.3 – Comparação entre a vida observada experimentalmente e a vida calculada pelo modelo de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche e  $S_{0,33} = 0.83$ ,  $D_c = 0,30$ .

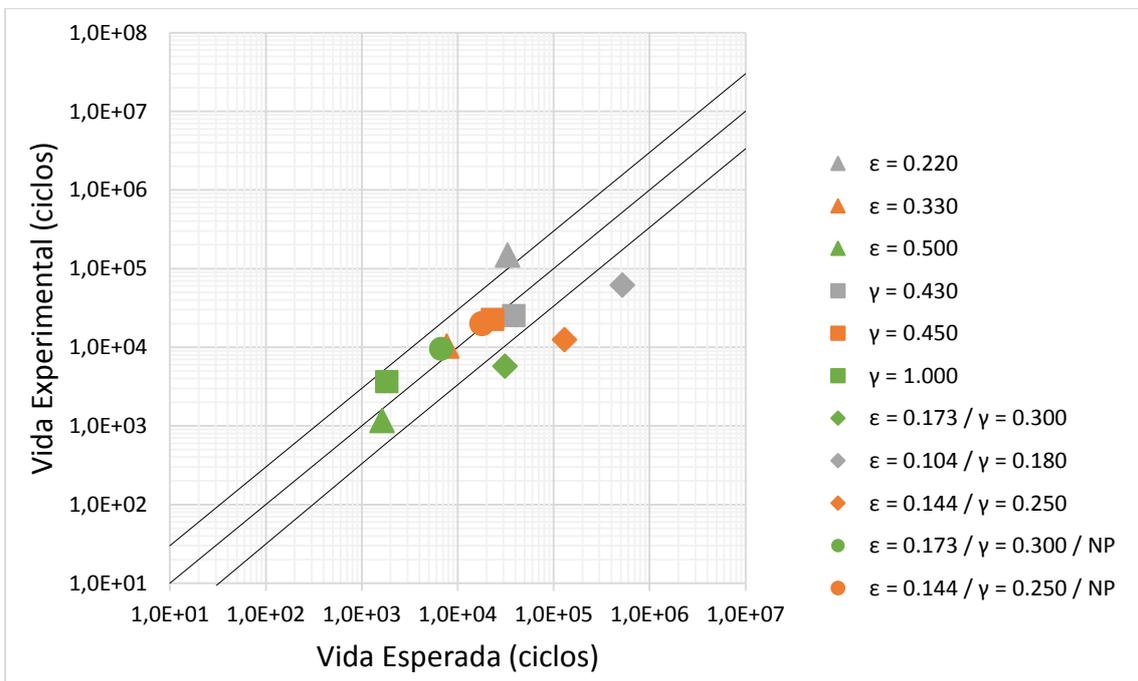


Figura 5.4 – Comparação entre a vida observada experimentalmente e a vida calculada pelo modelo de CDM modificado com endurecimento cinemático de Chaboche,  $S_{0,33} = 5.33$  e  $S_{0,00} = 86.67$ ,  $D_c = 0,20$ .

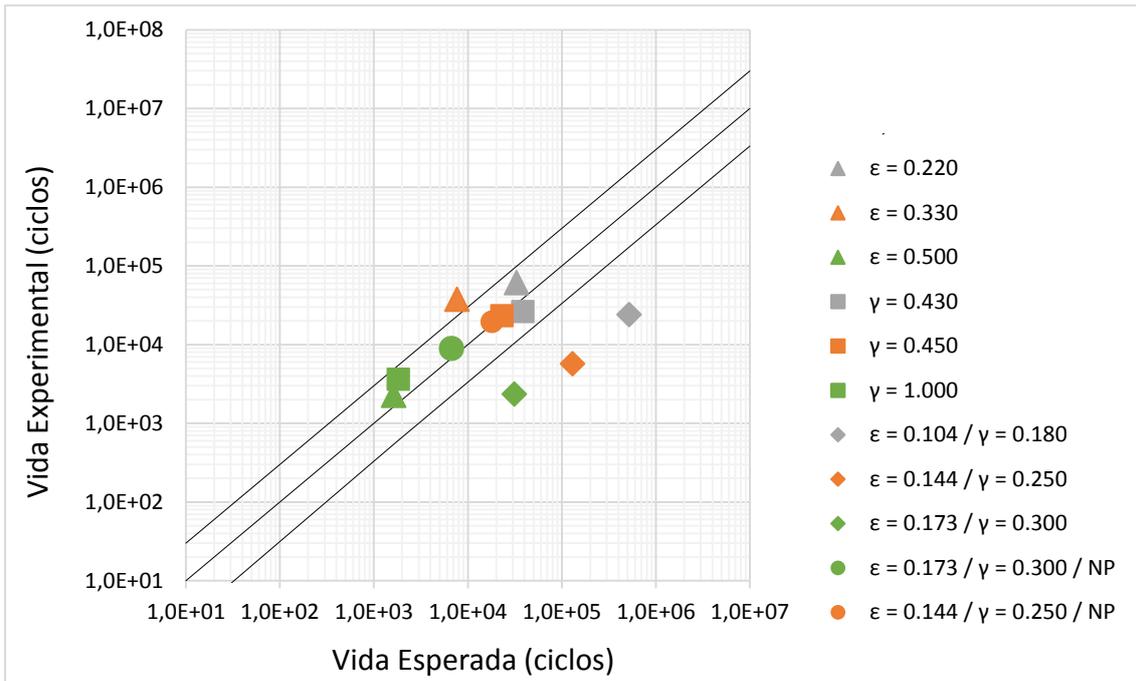


Figura 5.5 – Comparação entre a vida observada experimentalmente e a vida calculada pelo modelo CDM modificado com endurecimento cinemático de Chaboche,  $S_{0,33} = 0.83$  e  $S_{0,00} = 60.00$ ,  $D_c = 0,30$ .

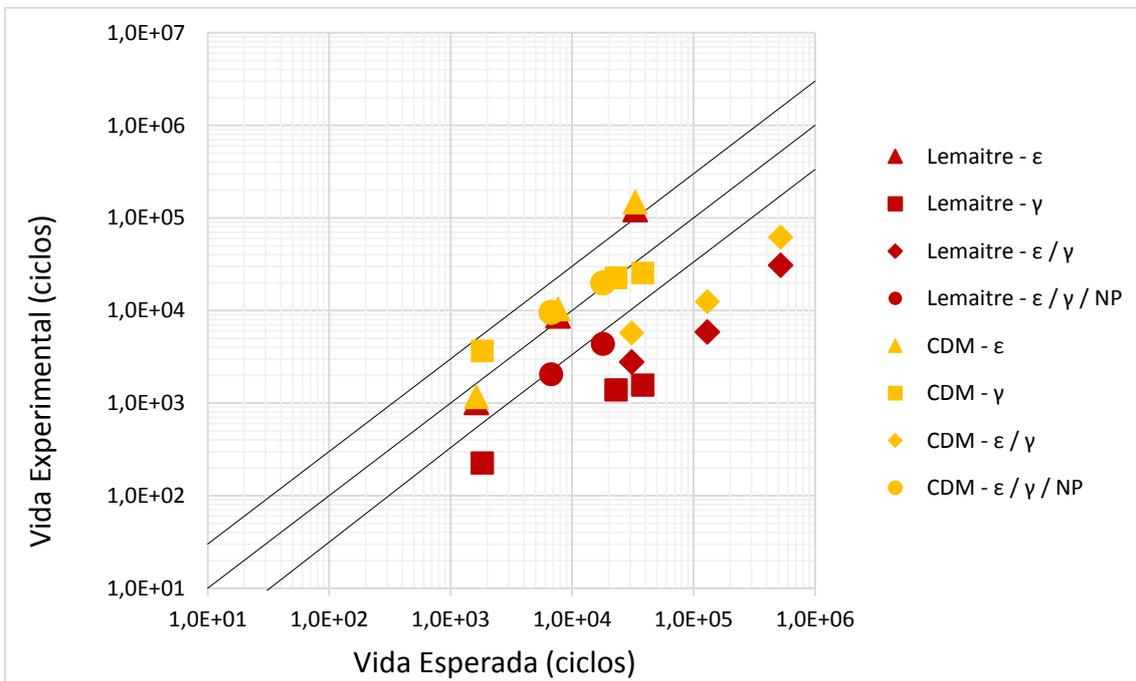


Figura 5.6 – Comparação entre a vida observada experimentalmente e a vida calculada pelos modelos de Lemaitre ( $S_{0,33} = 5.33$ ) e CDM modificado ( $S_{0,33} = 5.33$  e  $S_{0,00} = 86.67$ ),  $D_c = 0,20$ , ambos com endurecimento cinemático de Chaboche.

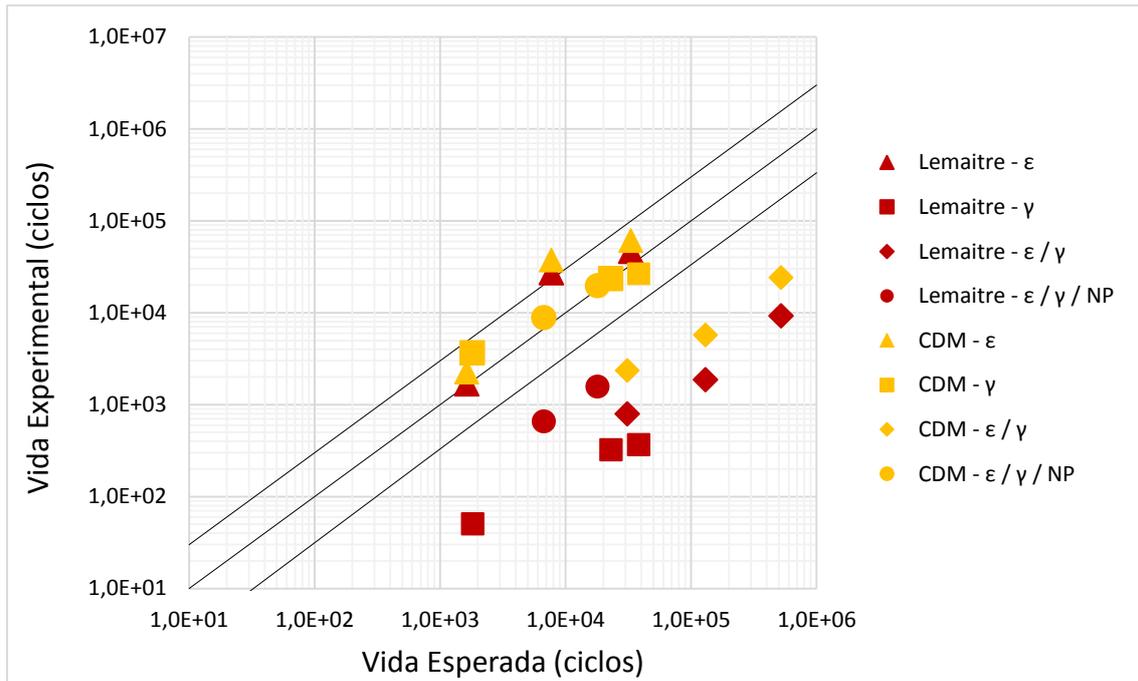


Figura 5.7 – Comparação entre a vida observada experimentalmente e a vida calculada pelos modelos de Lemaitre ( $S_{0.33} = 0.83$ ) e CDM modificado ( $S_{0.33} = 0.83$  e  $S_{0.00} = 60.00$ ),  $D_c = 0,30$ , ambos com endurecimento cinemático de Chaboche.

## 5.4 EVOLUÇÃO DO DANO

Os gráficos apresentados nas Figuras 5.8 a 5.15 dizem respeito a evolução do dano para o aço S460N quando submetido a carregamentos axiais, cisalhantes, proporcionais ou não proporcionais, levando-se em consideração os modelos de Lemaitre e CDM modificado, ambos com o endurecimento cinemático conforme Chaboche.

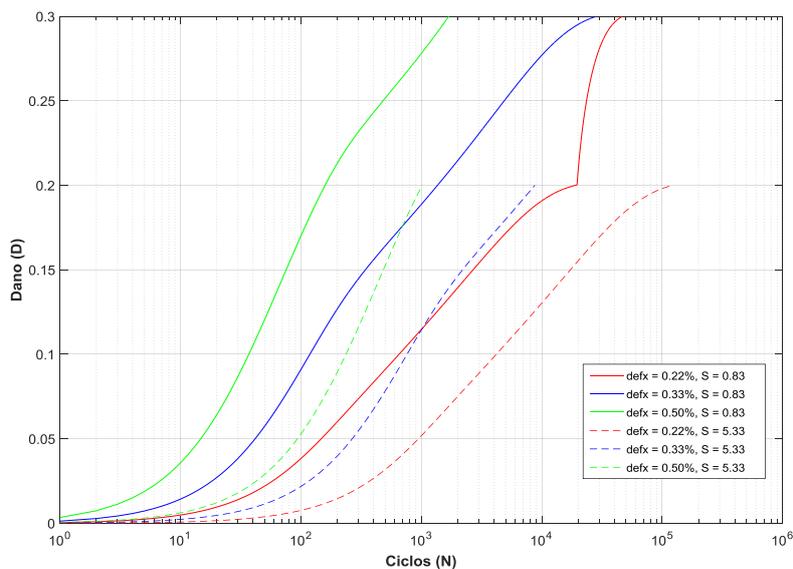


Figura 5.8 – Evolução do dano para o aço S460N para trajetórias axiais e modelo de dano de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche.

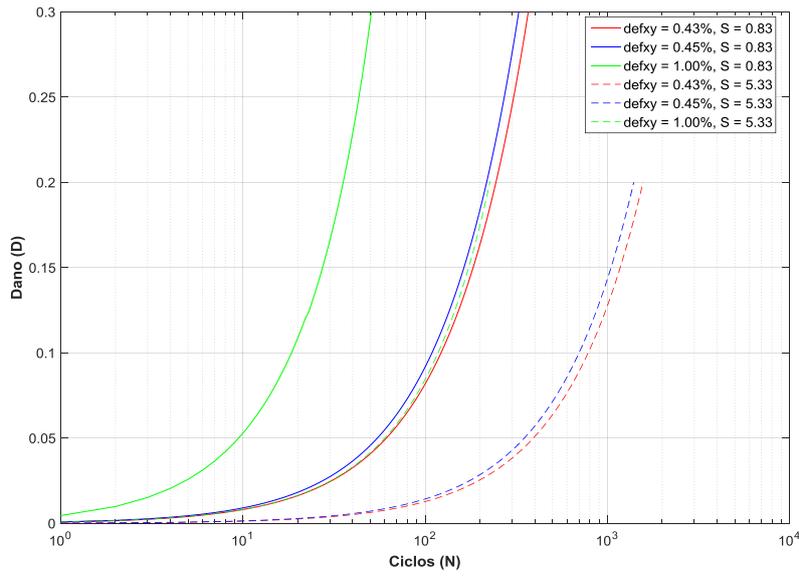


Figura 5.9 – Evolução do dano para o aço S460N para trajetórias cisalhantes e modelo de dano de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche.

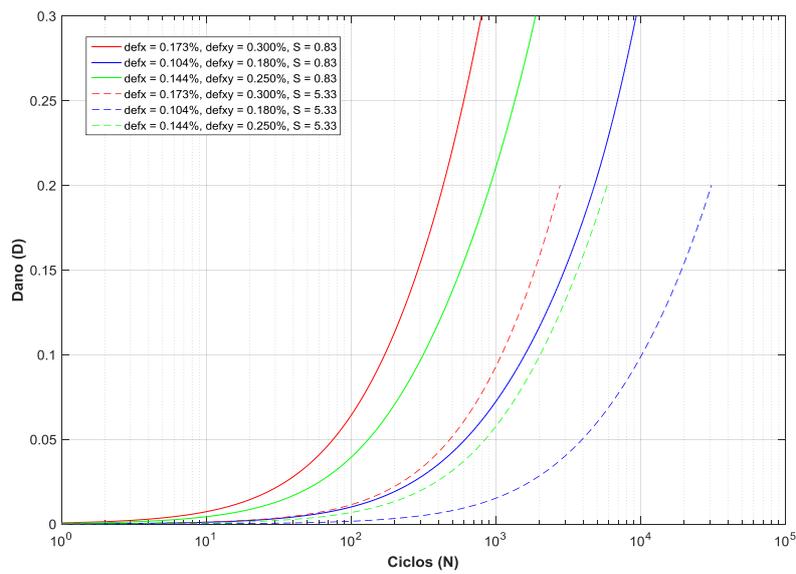


Figura 5.10 – Evolução do dano para o aço S460N para trajetórias proporcionais e modelo de dano de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche.

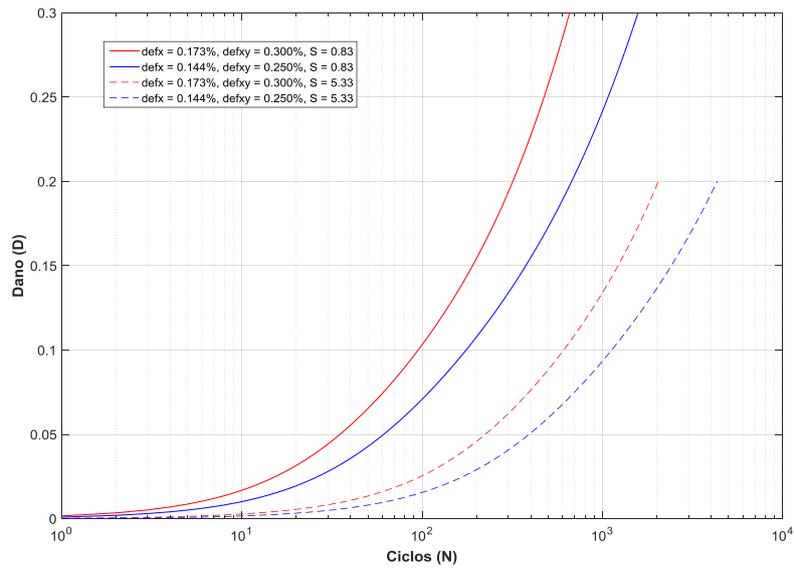


Figura 5.11 – Evolução do dano para o aço S460N para trajetórias não proporcionais e modelo de dano de Lemaitre com endurecimento cinemático de Chaboche.

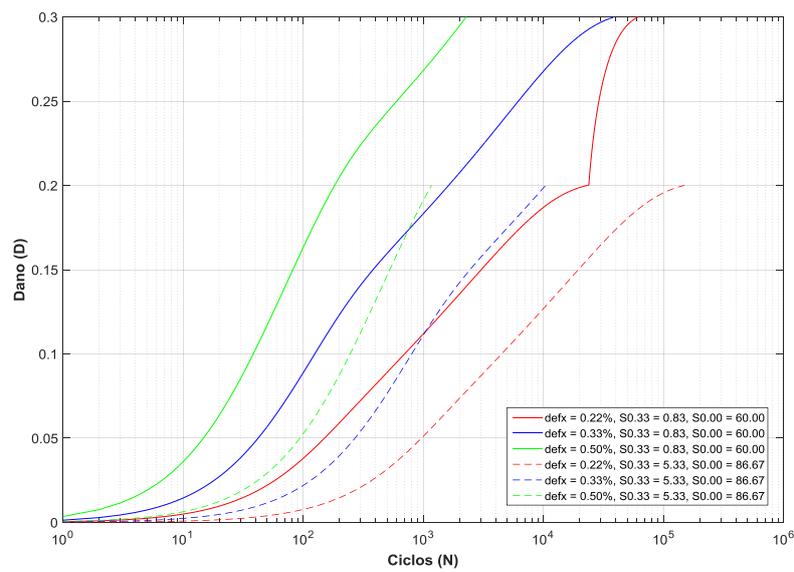


Figura 5.12 – Evolução do dano para o aço S460N para trajetórias axiais e modelo de dano CDM modificado com endurecimento cinemático de Chaboche.

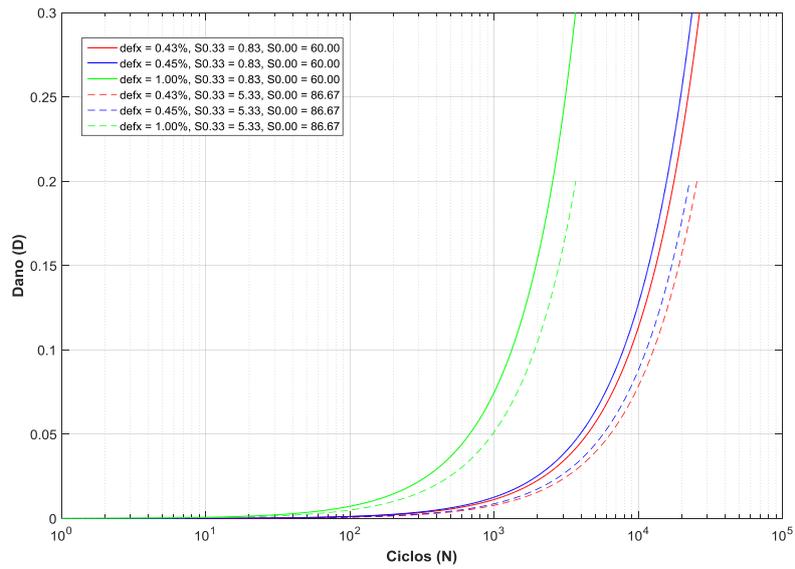


Figura 5.13 – Evolução do dano para o aço S460N para trajetórias cisalhantes e modelo CDM modificado com endurecimento cinemático de Chaboche.

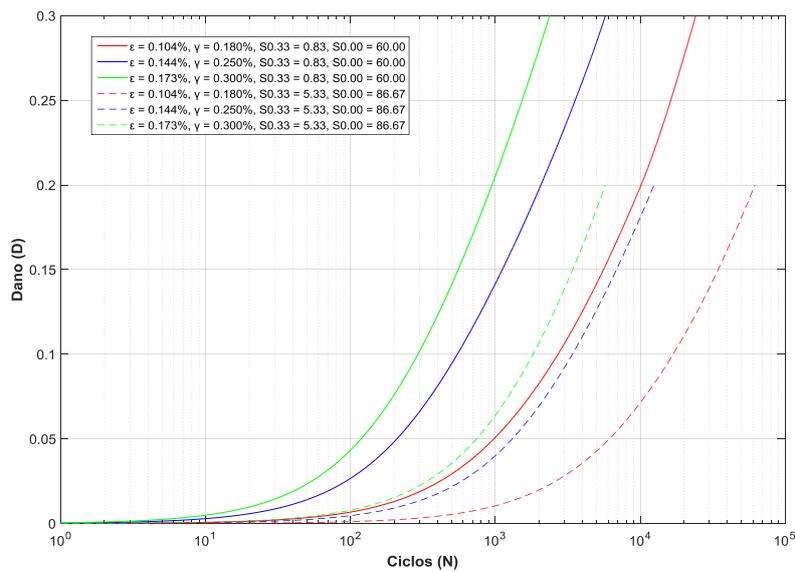


Figura 5.14 – Evolução do dano para o aço S460N para trajetórias proporcionais e modelo CDM modificado com endurecimento cinemático de Chaboche.

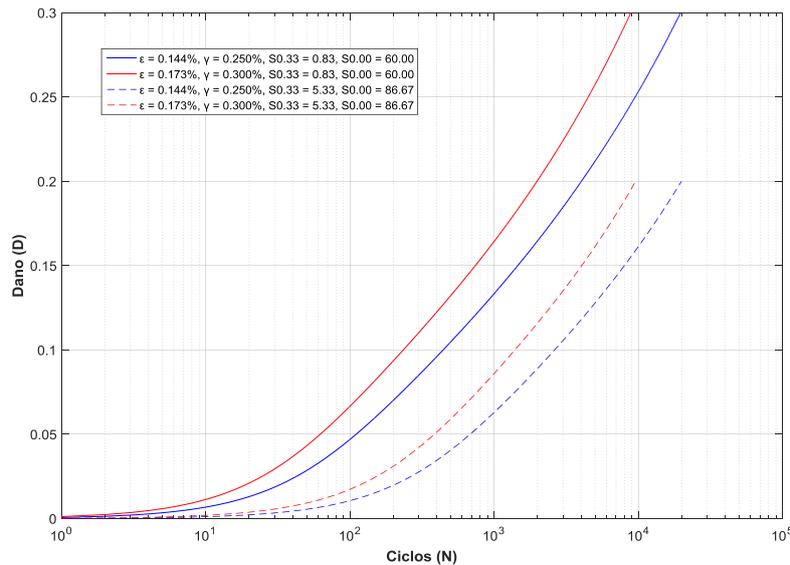


Figura 5.15 – Evolução do dano para o aço S460N para trajetórias não proporcionais e modelo CDM Modificado com endurecimento cinemático de Chaboche.

Verifica-se ao analisar as Figuras 5.8 a 5.15 que acréscimos na amplitude de deformação resultam em redução na vida do material, o que é caracterizado graficamente por curvas com maior inclinação.

Por outro lado, ao compararmos as curvas da Fig. 5.15 com semelhantes amplitudes de deformação e diferentes valores para os denominadores de alta e de baixa triaxialidade, constatamos que quando o dano crítico equivale a 0,2, por exemplo, para  $S_{0,33} = 0,83$  e  $S_{0,00} = 60,00$  a vida calculada é menor do que para  $S_{0,33} = 5,33$  e  $S_{0,00} = 86,67$ . Fato semelhante é observado para os demais gráficos com as curvas de evolução dos danos, o que corresponde a um indicativo da influência da calibração sobre os resultados aferidos.

## 5.5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Analisando o conjunto de resultados apresentados nas Fig. 5.6 e 5.7, nota-se que de um modo geral o modelo CDM modificado previu a vida em fadiga do aço S460N com maior precisão que o modelo de Lemaitre para trajetórias axiais, cisalhantes, proporcionais e não proporcionais.

Ao observarmos as Fig. 5.6 e 5.7 onde constam dados relativos a ambos os modelos, constata-se que os valores calculados para amplitudes de deformação normal são semelhantes. Entretanto, o modelo CDM apresenta resultados mais coerentes quando se trata de carregamentos exclusivamente cisalhantes bem como para os não-proporcionais.

Por sua vez, para carregamentos proporcionais verifica-se que, apesar dos valores aferidos com o modelo CDM serem mais próximos do que os do critério de Lemaitre se comparados aos dados divulgados por Jiang (2007), estes se encontram fora da faixa almejada.

Com relação às curvas de evolução é possível afirmar que para maiores amplitudes de deformação temos uma redução na vida do material, caracterizada através de uma maior inclinação dos gráficos.

Além disso, através da comparação entre curvas de evolução com mesmo dano crítico e diferentes denominadores de dano, é possível verificar o impacto da calibração sobre os resultados calculados no que diz respeito à previsão de vida em fadiga para o aço S460N.

Para os próximos trabalhos sugerimos aplicar a outros materiais modelos constitutivos que levem em consideração o acoplamento do dano, bem como o uso de novas terias relativas à evolução de endurecimento cinemático. Dentre os modelos possíveis de se avaliar podemos citar o de Jiang (2007).

Ressaltamos a importância de simular o comportamento dos materiais metálicos para um número maior de denominadores, de forma a refinar os cálculos e a calibração. Além disso, julgamos ser necessário que o cálculo dos denominadores de dano leve em consideração outros parâmetros além da média.

Uma vez que para fadiga de baixo ciclo o mecanismo de degradação do material é predominantemente caracterizado pela deformação plástica macroscópica, sugerimos que seja apresentada proposta de ajuste de denominadores de dano com um modelo multi-escala.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALTHAZAR, J.C., MALCHER, L., 2007, **A review on the main approaches for the determination of the multiaxial high cycle fatigue strength**, Mechanics of solids in Brazil, Marcilio Alves & Da Costa Mattos.

CHABOCHE, J. L. (1986). **Time-independent Constitutive Theories for Cyclic Plasticity**.

DESMORAT, R. (2006). **Damage and Fatigue: Continuum Damage Mechanics modeling for fatigue of materials and structures**. Technical report, LMT Cachan. <http://alertgeomaterials.eu/data/school/2006/8%20Desmorat%20R%20Damage%20and%20fatigue.pdf>

GOUGH, H. J. & POLLARD, H. V. (1935). **The strength of metals under combined alternating stresses**. In Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, volume 131, (pp. 3-103).

JIANG, Y., HERTEL, O., VORMWALD, M. (2007) **An experimental evaluation of three critical plane multiaxial fatigue criteria**. International Journal of Fatigue, 29, 1490-1502. Lemaitre (1984).

KACHANOV, **Foundations of The Theory of Plasticity**. North-Holland Pub. Co., 1971.

KACHANOV, L. M. (1986) **Introduction to Continuum Damage Mechanics** Martinus Nijhoff Dordrecht, The Netherlands.

LEMAITRE, J. (1985) **A continuous damage mechanics model for ductile fracture**. Journal of Engineering Materials and Technology.

LEMAITRE, J. (1996) **A Course on Damage Mechanics** Springer, 2nd edition.

MANSON, S. S. (1953). **Behaviour of materials under conditions of thermal stress**. In Heat Transfer Symposium, (pp. 9-75)., University of Michigan. Engineering Research Institute.

MA, B.T. & LAIRD, C. (1989). **Overview of fatigue behavior in copper single crystals: population, size, distribution and growth kinetics of stage I cracks for tests at constant strain amplitude**. Acta Metallurgica, 37, 337-348.

MALCHER, Lucival. **Um modelo para determinação da resistência à fadiga multiaxial para carregamentos de flexão e torção combinados, fora da fase e com amplitude constante: com base no critério do invariante do tensor**. 2006. 105 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Mecânicas)-Universidade de Brasília, Brasília, 2006.

MALCHER, L. (2011) **Da Mecânica do Dano Contínuo: Uma Evolução do Modelo de Lemaitre para Redução da Dependência do Ponto de Calibração**. Tese de doutorado em Ciências Mecânicas, Publicação ENM.TD – 09/2011. Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 122 p.

PALMGREN, A. (1924). **Die Lebensdauer von kugellagern**. Zeitschrift des Vereinesdeutscher Ingenierure, 68(14), 339-341. Gough (1950)

SCHUTZ, W. (1996). **A history of fatigue**. Engineering Fracture Mechanics, 54(2), 263-300.

STEPHENS, R. I., FATEMI, A., STEPHENS, R. R., FUCHS, H. O., **Metal Fatigue in Engineering**, John Wiley, Estados Unidos (2000).

SHIGLEY, J. E., MISCHKE, C. R. e BUDYNAS, R. G., **Projeto de Engenharia Mecânica**, Bookman, Porto Alegre (2005).

SOCIE, D.F. (2002). **Fatigue Made Easy: Historical Introduction**. [https://www.efatigue.com/training/fatigue\\_made\\_easy.pdf](https://www.efatigue.com/training/fatigue_made_easy.pdf). Class Notes.

WANG, C. H. & BROWN, M. W. (1996). **Life prediction techniques for variable amplitude multiaxial fatigue - part 1: Theories**. Journal of Engineering Materials and Technology, 118, 367-370.

# ANEXOS

		Pág.
<b>Anexo I</b>	Algoritmo de Identificação dos Parâmetros Elastoplásticos	<b>78</b>
<b>Anexo II</b>	Algoritmo para o Modelo de Lemaitre com Endurecimento Cinemático de Chaboche	<b>79</b>
<b>Anexo III</b>	Algoritmo para o Modelo CDM Modificado com Endurecimento Cinemático de Chaboche	<b>85</b>

## A. ALGORITMO DE IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS ELASTOPLÁSTICOS

```
close all
clear all
clc

%% Ler dados do primeiro worksheet para um array numerico:
load dados.txt
A = dados;

% Separacao das variaveis independente (x) e dependente (y):
x_R4 = A(:, 1);
y_R4 = A(:, 2);

%% Fitting data with the Power Equation

x = x_R4;
y = y_R4;

% Grafico - dado Experimental
plot(x,y, 'o')
hold on

%% Usando a funcao nlinfit

% Passo necessario para evitar overflowing
X = x;
y = y;

% Modelo da funcao
modelfun = @(b, x) 170 + ( ((b(1)/b(2))*tanh(b(2)*x)) +
((b(3)/b(4))*tanh(b(4)*x)) + b(5)*x );
beta0 = [1000 100 1000 100 1000];
options=statset('MaxIter',6000);

% Cálculos dos coeficientes
mdl = nlinfit(X,y,modelfun, beta0, options);

% Equacao de Ramberg-Osgood
y_mdl = 170 + ( ((mdl(1)/mdl(2))*tanh(mdl(2)*x)) +
((mdl(3)/mdl(4))*tanh(mdl(4)*x)) + mdl(5)*x );

% Grafico nlinfit
plot (X, y_mdl, '*')
hold on
legend('Experimental', 'Regressao usando nlinfit')
```

## B. ALGORITMO PARA O MODELO DE LEMAITRE COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO DE CHABOCHE

```
!DES
PROGRAM SIMULADOR

IMPLICIT NONE

!DECLARAÇÃO DE PARAMETROS
REAL (8) R0 /0.0D0/
REAL (8) R1 /1.0D0/
REAL (8) R2 /2.0D0/
REAL (8) R3 /3.0D0/
REAL (8) RP1 /0.10D0/
REAL (8) RP4 /0.40D0/

CHARACTER MATERIAL*256

!ESCALAR
INTEGER I, J, K, FF, DD, CICLOS, NTYPE, NRPROP, NIPROP, NRSTAV, NSTRA,
NSTRE, NLALGV, nincr, trajetoria, model

REAL (8) DGAMA, DENSE, YOUNG, POISS, SIGMAY, HKSLOPE1, BKIN1, &
HKSLOPE2, BKIN2, HKSLOPE3, BKIN3, EPBAR1, SIGMAY1, EPBAR2,
SIGMAY2, &
defx, defxy, MEXP1, MEXP2, MEXP3, &
DAMDEN, DAMEXP, DANOCRIT, TAU, MEXP

!ARRAY INTEIRO
INTEGER, ALLOCATABLE, DIMENSION (:):: IPROPS

!ARRAY REAL
REAL (8), ALLOCATABLE, DIMENSION (:):: RPROPS
REAL (8), ALLOCATABLE, DIMENSION (:):: RSTAVA
REAL (8), ALLOCATABLE, DIMENSION (:):: STRAN
REAL (8), ALLOCATABLE, DIMENSION (:):: STRES
REAL (8), ALLOCATABLE, DIMENSION (:):: EINCR
REAL (8), ALLOCATABLE, DIMENSION (:, :):: ETOT

!ARRAY LÓGICO
LOGICAL, DIMENSION (2):: LALGVA

!INICIALIZAÇÃO
I=0; J=0; K=0; NTYPE=0; NRPROP=0; NIPROP=0; NRSTAV=0; NSTRA=0;
NSTRE=0; NLALGV=0; nincr=0; model=0

DGAMA=R0; DENSE=R0; YOUNG=R0; POISS=R0; SIGMAY=R0; HKSLOPE1=R0;
BKIN1=R0; &
HKSLOPE2=R0; BKIN2=R0; HKSLOPE3=R0; BKIN3=R0; EPBAR1=R0; SIGMAY1=R0;
EPBAR2=R0; SIGMAY2=R0;
defx=r0; defxy=r0; MEXP1=R0; MEXP2=R0; MEXP3=R0; DANOCRIT=R0; TAU=R0;
MEXP=R0;

ALLOCATE (IPROPS (3)); IPROPS=0
ALLOCATE (RPROPS (18)); RPROPS=R0
ALLOCATE (RSTAVA (26)); RSTAVA=R0
ALLOCATE (STRAN (6)); STRAN=R0
ALLOCATE (STRES (6)); STRES=R0
ALLOCATE (EINCR (6)); EINCR=R0
ALLOCATE (ETOT (6, 9000)); ETOT=R0
1000 FORMAT (G15.6, G15.6, G15.6, G15.6, G15.6, G15.6)
```

```

CALL OPEN_FILE (MATERIAL)

!%%%%%%%%% ENTRADA DOS DADOS %%%%%%%%%%
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!PROPRIEDADES DO MATERIAL
! Parâmetros elásticos
DENSE=2.70D-006
YOUNG=208000.00D0 ![MPa]
POISS=0.3D0
! Parâmetros de encruamento
SIGMAY=170.0D0 ![MPa]
HKSLOPE1=84908.0D0 ![MPa]
HKSLOPE2=980350.0D0 ![MPa]
HKSLOPE3=11602.0D0 ![MPa]
BKIN1=611.35000D0
BKIN2=9282.500D0
BKIN3=0.00D0
TAU=0.000D0 ![MPa]-1
MEXP=0.0D0
! Parâmetros de dano
DAMDEN=5.33D0
DAMEXP=1.00D0
! !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
DANOCRIT=0.50D0
! !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! Carregamento: amplitude de formação normal e cisalhante
defx=0.173D0 ![%] def normal percentual
defxy=0.30D0 ![%] def cisalhante percentual
! Trajetória: (a)=1, (b)=2, (c)=3 ou (d)=4
trajetoria=4
! Ciclos de carga
CICLOS=12000
! Modelo material (1)=Dano com Chaboche (2) Dano com Desmorat
MODEL=1
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
EPBAR1=R0
SIGMAY1=SIGMAY
EPBAR2=R1
SIGMAY2=SIGMAY
!
!TIPO DE PROBLEMA
NTYPE=6
!NÚMERO PROPRIEDADES REAIS
NRPROP=18
!NÚMERO DE PROPRIEDADES INTEIRAS
NIPROP=3
!NÚMERO DE VARIÁVEIS DE ESTADO
NRSTAV=26 !Chaboche=26;Desmorat=20
!NUMERO DE COMPONENTES TENSOR TENSÃO/DEFORMAÇÃO
NSTRA=6
NSTRE=6
!NÚMERO DE VARIÁVEIS LÓGICAS
NLALGV=2
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!CARREGAR ARRAY IPROPS
IPROPS (1) =32
IPROPS (2) =1
IPROPS (3) =2
!CARREGAR ARRAY RPROPS
RPROPS (1) =DENSE

```

```

RPROPS (2)=YOUNG
RPROPS (3)=POISS
RPROPS (4)=SIGMAY
RPROPS (5)=HKSLOPE1
RPROPS (6)=BKIN1
RPROPS (7)=HKSLOPE2
RPROPS (8)=BKIN2
RPROPS (9)=HKSLOPE3
RPROPS (10)=BKIN3
RPROPS (11)=TAU
RPROPS (12)=MEXP
RPROPS (13)=DAMDEN
RPROPS (14)=DAMEXP
RPROPS (15)=EPBAR1
RPROPS (16)=SIGMAY1
RPROPS (17)=EPBAR2
RPROPS (18)=SIGMAY2
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!
nincr=100
EINCR (1)=(defx/nincr)/100      !EPSLON X
EINCR (2)=-POISS*EINCR (1)    !EPSLON Y
EINCR (3)=-POISS*EINCR (1)    !EPSLON Z
EINCR (4)=(defxy/nincr)/100   !GAMA XY
EINCR (5)=R0      !GAMA YZ
EINCR (6)=R0      !GAMA XZ

if (trajetoria.eq.4) then
DD=9
!MONTAR TRAJETÓRIA D
DO I=2, (nincr+1)
    ETOT (1, I)=ETOT (1, I-1)+EINCR (1)
    ETOT (2, I)=ETOT (2, I-1)+EINCR (2)
    ETOT (3, I)=ETOT (3, I-1)+EINCR (3)
    ETOT (4, I)=ETOT (4, I-1)
    ETOT (5, I)=ETOT (5, I-1)
    ETOT (6, I)=ETOT (6, I-1)
ENDDO
DO I=nincr+2, (2*nincr+1)
    ETOT (1, I)=ETOT (1, I-1)
    ETOT (2, I)=ETOT (2, I-1)
    ETOT (3, I)=ETOT (3, I-1)
    ETOT (4, I)=ETOT (4, I-1)+EINCR (4)
    ETOT (5, I)=ETOT (5, I-1)+EINCR (5)
    ETOT (6, I)=ETOT (6, I-1)+EINCR (6)
ENDDO
DO I=2*nincr+2, 3*nincr+1
    ETOT (1, I)=ETOT (1, I-1)-EINCR (1)
    ETOT (2, I)=ETOT (2, I-1)-EINCR (2)
    ETOT (3, I)=ETOT (3, I-1)-EINCR (3)
    ETOT (4, I)=ETOT (4, I-1)
    ETOT (5, I)=ETOT (5, I-1)
    ETOT (6, I)=ETOT (6, I-1)
ENDDO
DO I=3*nincr+2, 4*nincr+1
    ETOT (1, I)=ETOT (1, I-1)-EINCR (1)
    ETOT (2, I)=ETOT (2, I-1)-EINCR (2)
    ETOT (3, I)=ETOT (3, I-1)-EINCR (3)
    ETOT (4, I)=ETOT (4, I-1)
    ETOT (5, I)=ETOT (5, I-1)
    ETOT (6, I)=ETOT (6, I-1)

```

```

ENDDO
DO I=4*nincr+2, 5*nincr+1
  ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1)
  ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1)
  ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1)
  ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) -EINCR (4)
  ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) -EINCR (5)
  ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) -EINCR (6)
ENDDO
DO I=5*nincr+2, 6*nincr+1
  ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1)
  ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1)
  ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1)
  ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) -EINCR (4)
  ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) -EINCR (5)
  ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) -EINCR (6)
ENDDO
DO I=6*nincr+2, 7*nincr+1
  ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) +EINCR (1)
  ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) +EINCR (2)
  ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) +EINCR (3)
  ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1)
  ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
  ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)
ENDDO
DO I=7*nincr+2, 8*nincr+1
  ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) +EINCR (1)
  ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) +EINCR (2)
  ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) +EINCR (3)
  ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1)
  ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1)
  ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1)
ENDDO
DO I=8*nincr+2, 9*nincr+1
  ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1)
  ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1)
  ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1)
  ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) +EINCR (4)
  ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) +EINCR (5)
  ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) +EINCR (6)
ENDDO
else
!MONTAR HISTÓRICO A/B/C
DD=4
DO I=2, (nincr+1)
  ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) +EINCR (1)
  ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) +EINCR (2)
  ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) +EINCR (3)
  ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) +EINCR (4)
  ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) +EINCR (5)
  ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) +EINCR (6)
ENDDO
DO I=nincr+2, (2*nincr+1)
  ETOT (1, I) =ETOT (1, I-1) -EINCR (1)
  ETOT (2, I) =ETOT (2, I-1) -EINCR (2)
  ETOT (3, I) =ETOT (3, I-1) -EINCR (3)
  ETOT (4, I) =ETOT (4, I-1) -EINCR (4)
  ETOT (5, I) =ETOT (5, I-1) -EINCR (5)
  ETOT (6, I) =ETOT (6, I-1) -EINCR (6)
ENDDO
DO I=2*nincr+2, 3*nincr+1

```

```

ETOT (1, I) = ETOT (1, I-1) - EINCR (1)
ETOT (2, I) = ETOT (2, I-1) - EINCR (2)
ETOT (3, I) = ETOT (3, I-1) - EINCR (3)
ETOT (4, I) = ETOT (4, I-1) - EINCR (4)
ETOT (5, I) = ETOT (5, I-1) - EINCR (5)
ETOT (6, I) = ETOT (6, I-1) - EINCR (6)
ENDDO
DO I=3*nincr+2, 4*nincr+1
  ETOT (1, I) = ETOT (1, I-1) + EINCR (1)
  ETOT (2, I) = ETOT (2, I-1) + EINCR (2)
  ETOT (3, I) = ETOT (3, I-1) + EINCR (3)
  ETOT (4, I) = ETOT (4, I-1) + EINCR (4)
  ETOT (5, I) = ETOT (5, I-1) + EINCR (5)
  ETOT (6, I) = ETOT (6, I-1) + EINCR (6)
ENDDO
endif

!
!

DO I=2, 101
  STRAN (1) = RSTAVA (1) + (ETOT (1, I) - ETOT (1, I-1))
  STRAN (2) = RSTAVA (2) + (ETOT (2, I) - ETOT (2, I-1))
  STRAN (3) = RSTAVA (3) + (ETOT (3, I) - ETOT (3, I-1))
  STRAN (4) = RSTAVA (4) + (ETOT (4, I) - ETOT (4, I-1))
  STRAN (5) = RSTAVA (5) + (ETOT (5, I) - ETOT (5, I-1))
  STRAN (6) = RSTAVA (6) + (ETOT (6, I) - ETOT (6, I-1))
  DGAMA = R0
  LALGVA (1) = .FALSE.
  LALGVA (2) = .FALSE.
  STRES = R0 !ARRAY
  if (model.eq.1) then
    CALL SUDCHA3D (DGAMA , IPROPS , LALGVA , NTYPE , RPROPS ,
RSTAVA , STRAN , &
    STRES , NRPROP , NIPROP , NRSTAV , NSTRA , NSTRE ,
NLALGV)
  elseif (model.eq.2) then
    CALL SUDD3D (DGAMA , IPROPS , LALGVA , NTYPE , RPROPS ,
RSTAVA , STRAN , &
    STRES , NRPROP , NIPROP , NRSTAV , NSTRA , NSTRE ,
NLALGV)
  endif

  !if (j.eq.CICLOS) then
  !WRITE (15,1000) STRES (1), ETOT (1, I), STRES (4), ETOT (4, I)
  !WRITE (16,*) J, RSTAVA (8)
  !endif
ENDDO

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! para trajetoria D
DO J=1, CICLOS
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

DO I=102, (DD*nincr+1)
  STRAN (1) = RSTAVA (1) + (ETOT (1, I) - ETOT (1, I-1))
  STRAN (2) = RSTAVA (2) + (ETOT (2, I) - ETOT (2, I-1))
  STRAN (3) = RSTAVA (3) + (ETOT (3, I) - ETOT (3, I-1))
  STRAN (4) = RSTAVA (4) + (ETOT (4, I) - ETOT (4, I-1))
  STRAN (5) = RSTAVA (5) + (ETOT (5, I) - ETOT (5, I-1))

```

```

STRAN(6)=RSTAVA(6)+(ETOT(6,I)-ETOT(6,I-1))
DGAMA=R0
LALGVA(1)=.FALSE.
LALGVA(2)=.FALSE.
STRES=R0 !ARRAY

  if (model.eq.1) then
    CALL SUDCHA3D(DGAMA , IPROPS , LALGVA , NTYPE , RPROPS ,
RSTAVA , STRAN , &
          STRES , NRPROP , NIPROP , NRSTAV , NSTRA , NSTRE ,
NLALGV)
    elseif (model.eq.2) then
    CALL SUDES3D(DGAMA , IPROPS , LALGVA , NTYPE , RPROPS ,
RSTAVA , STRAN , &
          STRES , NRPROP , NIPROP , NRSTAV , NSTRA , NSTRE ,
NLALGV)
    endif

  if (j.eq.CICLOS) then
    WRITE(15,1000) STRES(1), ETOT(1,I), STRES(4), ETOT(4,I)
    !WRITE(16,*) J,RSTAVA(8)
  endif

ENDDO

WRITE(16,*) J, RSTAVA(8)
WRITE(*,*) J, RSTAVA(8)

!IF (RSTAVA(8).GT.(DANOCRIT)) THEN
!GOTO 100
!ENDIF

ENDDO

100 CONTINUE

!
CALL CLOSE_FILE

DEALLOCATE(RPROPS,RSTAVA,STRES,STRAN)
END

```

## C. ALGORITMO PARA O MODELO CDM MODIFICADO COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO DE CHABOCHE

```
!DES
PROGRAM SIMULADOR

IMPLICIT NONE

!DECLARAÇÃO DE PARAMETROS
REAL (8) R0 /0.0D0/
REAL (8) R1 /1.0D0/
REAL (8) R2 /2.0D0/
REAL (8) R3 /3.0D0/
REAL (8) RP1 /0.10D0/
REAL (8) RP4 /0.40D0/

CHARACTER MATERIAL*256

!ESCALAR
INTEGER I, J, K, FF, DD, CICLOS, NTYPE, NRPROP, NIPROP, NRSTAV, NSTR,
NSTRE, NLALGV, nincr, trajetoria, model

REAL (8) DGAMA, DENSE, YOUNG, POISS, SIGMAY, HKSLOPE1, BKIN1, &
HKSLOPE2, BKIN2, HKSLOPE3, BKIN3, EPBAR1, SIGMAY1, EPBAR2,
SIGMAY2, &
defx, defxy, MEXP1, MEXP2, MEXP3, &
DAMDEN, DAMEXP, DANOCRIT, TAU, MEXP, DAMDEN0

!ARRAY INTEIRO
INTEGER, ALLOCATABLE, DIMENSION (:):: IPROPS

!ARRAY REAL
REAL (8), ALLOCATABLE, DIMENSION (:):: RPROPS
REAL (8), ALLOCATABLE, DIMENSION (:):: RSTAVA
REAL (8), ALLOCATABLE, DIMENSION (:):: STRAN
REAL (8), ALLOCATABLE, DIMENSION (:):: STRES
REAL (8), ALLOCATABLE, DIMENSION (:):: EINCR
REAL (8), ALLOCATABLE, DIMENSION (:, :):: ETOT

!ARRAY LÓGICO
LOGICAL, DIMENSION (2):: LALGVA

!INICIALIZAÇÃO
I=0; J=0; K=0; NTYPE=0; NRPROP=0; NIPROP=0; NRSTAV=0; NSTR=0;
NSTRE=0; NLALGV=0; nincr=0; model=0

DGAMA=R0; DENSE=R0; YOUNG=R0; POISS=R0; SIGMAY=R0; HKSLOPE1=R0;
BKIN1=R0; &
HKSLOPE2=R0; BKIN2=R0; HKSLOPE3=R0; BKIN3=R0; EPBAR1=R0; SIGMAY1=R0;
EPBAR2=R0; SIGMAY2=R0;
defx=r0; defxy=r0; MEXP1=R0; MEXP2=R0; MEXP3=R0; DANOCRIT=R0; TAU=R0;
MEXP=R0;

ALLOCATE (IPROPS (3)); IPROPS=0
ALLOCATE (RPROPS (19)); RPROPS=R0
ALLOCATE (RSTAVA (26)); RSTAVA=R0
ALLOCATE (STRAN (6)); STRAN=R0
ALLOCATE (STRES (6)); STRES=R0
ALLOCATE (EINCR (6)); EINCR=R0
ALLOCATE (ETOT (6, 9000)); ETOT=R0
1000 FORMAT (G15.6, G15.6, G15.6, G15.6, G15.6, G15.6)
```

```

CALL OPEN_FILE (MATERIAL)

!%%%%%%%%% ENTRADA DOS DADOS %%%%%%%%%%
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!PROPRIEDADES DO MATERIAL
! Parâmetros elásticos
DENSE=2.70D-006
YOUNG=208000.00D0 ![MPa]
POISS=0.3D0
! Parâmetros de encruamento
SIGMAY=170.0D0 ![MPa]
HKSLOPE1=84908.0D0 ![MPa]
HKSLOPE2=980350.0D0 ![MPa]
HKSLOPE3=11602.0D0 ![MPa]
BKIN1=611.35000D0
BKIN2=9282.500D0
BKIN3=0.00D0
TAU=0.000D0 ![MPa]-1
MEXP=0.0D0
! Parâmetros de dano
DAMDEN0=86.670D0 !(S a 0)
DAMDEN=5.330D0 !(S a 1/3)
DAMEXP=1.00D0
! !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
DANOCRIT=0.50D0
! !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! Carregamento: amplitude de deformação normal e cisalhante
defx=0.1730D0 ![%] def normal percentual
defxy=0.30D0 ![%] def cisalhante percentual
! Trajetória: (a)=1, (b)=2, (c)=3 ou (d)=4
trajetoria=4
! Ciclos de carga
CICLOS=50
! Modelo material (1)=Dano com Chaboche (2) Dano com Desmorat (3)=Dano
CDM com Chaboche
MODEL=3
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
EPBAR1=R0
SIGMAY1=SIGMAY
EPBAR2=R1
SIGMAY2=SIGMAY
!
!TIPO DE PROBLEMA
NTYPE=6
!NÚMERO PROPRIEDADES REAIS
NRPROP=19
!NÚMERO DE PROPRIEDADES INTEIRAS
NIPROP=3
!NÚMERO DE VARIÁVEIS DE ESTADO
NRSTAV=26 !Chaboche=26;Desmorat=20
!NUMERO DE COMPONENTES TENSOR TENSÃO/DEFORMAÇÃO
NSTR=6
NSTRE=6
!NÚMERO DE VARIÁVEIS LÓGICAS
NLALGV=2
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!CARREGAR ARRAY IPROPS
IPROPS(1)=32
IPROPS(2)=1
IPROPS(3)=2

```

```

!CARREGAR ARRAY RPROPS
RPROPS (1)=DENSE
RPROPS (2)=YOUNG
RPROPS (3)=POISS
RPROPS (4)=SIGMAY
RPROPS (5)=HKSLOPE1
RPROPS (6)=BKIN1
RPROPS (7)=HKSLOPE2
RPROPS (8)=BKIN2
RPROPS (9)=HKSLOPE3
RPROPS (10)=BKIN3
RPROPS (11)=TAU
RPROPS (12)=MEXP
RPROPS (13)=DAMDEN
RPROPS (14)=DAMDEN0
RPROPS (15)=DAMEXP
RPROPS (16)=EPBAR1
RPROPS (17)=SIGMAY1
RPROPS (18)=EPBAR2
RPROPS (19)=SIGMAY2
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!
nincr=100
EINCR (1)=(defx/nincr)/100      !EPSLON X
EINCR (2)=-POISS*EINCR (1)    !EPSLON Y
EINCR (3)=-POISS*EINCR (1)    !EPSLON Z
EINCR (4)=(defxy/nincr)/100    !GAMA XY
EINCR (5)=R0      !GAMA YZ
EINCR (6)=R0      !GAMA XZ

if (trajetoria.eq.4) then
DD=9
!MONTAR TRAJETÓRIA D
DO I=2, (nincr+1)
    ETOT (1, I)=ETOT (1, I-1)+EINCR (1)
    ETOT (2, I)=ETOT (2, I-1)+EINCR (2)
    ETOT (3, I)=ETOT (3, I-1)+EINCR (3)
    ETOT (4, I)=ETOT (4, I-1)
    ETOT (5, I)=ETOT (5, I-1)
    ETOT (6, I)=ETOT (6, I-1)
ENDDO
DO I=nincr+2, (2*nincr+1)
    ETOT (1, I)=ETOT (1, I-1)
    ETOT (2, I)=ETOT (2, I-1)
    ETOT (3, I)=ETOT (3, I-1)
    ETOT (4, I)=ETOT (4, I-1)+EINCR (4)
    ETOT (5, I)=ETOT (5, I-1)+EINCR (5)
    ETOT (6, I)=ETOT (6, I-1)+EINCR (6)
ENDDO
DO I=2*nincr+2, 3*nincr+1
    ETOT (1, I)=ETOT (1, I-1)-EINCR (1)
    ETOT (2, I)=ETOT (2, I-1)-EINCR (2)
    ETOT (3, I)=ETOT (3, I-1)-EINCR (3)
    ETOT (4, I)=ETOT (4, I-1)
    ETOT (5, I)=ETOT (5, I-1)
    ETOT (6, I)=ETOT (6, I-1)
ENDDO
DO I=3*nincr+2, 4*nincr+1
    ETOT (1, I)=ETOT (1, I-1)-EINCR (1)
    ETOT (2, I)=ETOT (2, I-1)-EINCR (2)
    ETOT (3, I)=ETOT (3, I-1)-EINCR (3)

```

```

    ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)
    ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
    ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)
ENDDO
DO I=4*nincr+2, 5*nincr+1
    ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)
    ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)
    ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)
    ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)-EINCR(4)
    ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)-EINCR(5)
    ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)-EINCR(6)
ENDDO
DO I=5*nincr+2, 6*nincr+1
    ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)
    ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)
    ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)
    ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)-EINCR(4)
    ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)-EINCR(5)
    ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)-EINCR(6)
ENDDO
DO I=6*nincr+2, 7*nincr+1
    ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)+EINCR(1)
    ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)+EINCR(2)
    ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)+EINCR(3)
    ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)
    ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
    ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)
ENDDO
DO I=7*nincr+2, 8*nincr+1
    ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)+EINCR(1)
    ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)+EINCR(2)
    ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)+EINCR(3)
    ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)
    ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)
    ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)
ENDDO
DO I=8*nincr+2, 9*nincr+1
    ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)
    ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)
    ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)
    ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)+EINCR(4)
    ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)+EINCR(5)
    ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)+EINCR(6)
ENDDO
else
!MONTAR HISTÓRICO A/B/C
DD=4
DO I=2, (nincr+1)
    ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)+EINCR(1)
    ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)+EINCR(2)
    ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)+EINCR(3)
    ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)+EINCR(4)
    ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)+EINCR(5)
    ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)+EINCR(6)
ENDDO
DO I=nincr+2, (2*nincr+1)
    ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)-EINCR(1)
    ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)-EINCR(2)
    ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)-EINCR(3)
    ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)-EINCR(4)
    ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)-EINCR(5)

```

```

        ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)-EINCR(6)
ENDDO
DO I=2*nincr+2, 3*nincr+1
    ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)-EINCR(1)
    ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)-EINCR(2)
    ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)-EINCR(3)
    ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)-EINCR(4)
    ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)-EINCR(5)
    ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)-EINCR(6)
ENDDO
DO I=3*nincr+2, 4*nincr+1
    ETOT(1,I)=ETOT(1,I-1)+EINCR(1)
    ETOT(2,I)=ETOT(2,I-1)+EINCR(2)
    ETOT(3,I)=ETOT(3,I-1)+EINCR(3)
    ETOT(4,I)=ETOT(4,I-1)+EINCR(4)
    ETOT(5,I)=ETOT(5,I-1)+EINCR(5)
    ETOT(6,I)=ETOT(6,I-1)+EINCR(6)
ENDDO
endif

!
!
!DO J=1,CICLOS

DO I=2, 101
    STRAN(1)=RSTAVA(1)+(ETOT(1,I)-ETOT(1,I-1))
    STRAN(2)=RSTAVA(2)+(ETOT(2,I)-ETOT(2,I-1))
    STRAN(3)=RSTAVA(3)+(ETOT(3,I)-ETOT(3,I-1))
    STRAN(4)=RSTAVA(4)+(ETOT(4,I)-ETOT(4,I-1))
    DGAMA=R0
    LALGVA(1)=.FALSE.
    LALGVA(2)=.FALSE.
    STRES=R0 !ARRAY
    if (model.eq.1) then
        CALL SUDCHA3D(DGAMA , IPROPS , LALGVA , NTYPE , RPROPS ,
RSTAVA , STRAN , &
                STRES , NRPROP , NIPROP , NRSTAV , NSTRA , NSTRE ,
NLALGV)
    elseif (model.eq.2) then
        CALL SUDD3D(DGAMA , IPROPS , LALGVA , NTYPE , RPROPS ,
RSTAVA , STRAN , &
                STRES , NRPROP , NIPROP , NRSTAV , NSTRA , NSTRE ,
NLALGV)
    elseif (model.eq.3) then
        CALL SUD2CHA3D(DGAMA , IPROPS , LALGVA , NTYPE , RPROPS ,
RSTAVA , STRAN , &
                STRES , NRPROP , NIPROP , NRSTAV , NSTRA , NSTRE ,
NLALGV)
    endif

!   if (j.eq.CICLOS) then
!   WRITE(15,1000) STRES(1), ETOT(1,I), STRES(4), ETOT(4,I)
!   WRITE(16,*) J,RSTAVA(8)
!   endif
ENDDO

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! para trajetoria D
DO J=1,CICLOS
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

```

```

DO I=102, (DD*nincr+1)
  STRAN(1)=RSTAVA(1)+(ETOT(1,I)-ETOT(1,I-1))
  STRAN(2)=RSTAVA(2)+(ETOT(2,I)-ETOT(2,I-1))
  STRAN(3)=RSTAVA(3)+(ETOT(3,I)-ETOT(3,I-1))
  STRAN(4)=RSTAVA(4)+(ETOT(4,I)-ETOT(4,I-1))
  STRAN(5)=RSTAVA(5)+(ETOT(5,I)-ETOT(5,I-1))
  STRAN(6)=RSTAVA(6)+(ETOT(6,I)-ETOT(6,I-1))
  DGAMA=R0
  LALGVA(1)=.FALSE.
  LALGVA(2)=.FALSE.
  STRES=R0 !ARRAY

  if (model.eq.1) then
    CALL SUDCHA3D(DGAMA , IPROPS , LALGVA , NTYPE , RPROPS ,
RSTAVA , STRAN , &
          STRES , NRPROP , NIPROP , NRSTAV , NSTRA , NSTRE ,
NLALGV)
  elseif (model.eq.2) then
    CALL SUDES3D(DGAMA , IPROPS , LALGVA , NTYPE , RPROPS ,
RSTAVA , STRAN , &
          STRES , NRPROP , NIPROP , NRSTAV , NSTRA , NSTRE ,
NLALGV)
  elseif (model.eq.3) then
    CALL SUD2CHA3D(DGAMA , IPROPS , LALGVA , NTYPE , RPROPS ,
RSTAVA , STRAN , &
          STRES , NRPROP , NIPROP , NRSTAV , NSTRA , NSTRE ,
NLALGV)
  endif

  if (j.eq.CICLOS) then
    WRITE(15,1000) STRES(1), ETOT(1,I), STRES(4), ETOT(4,I)
    !WRITE(16,*) J,RSTAVA(8)
  endif

ENDDO

WRITE(16,*) J, RSTAVA(8)
WRITE(*,*) J, RSTAVA(8)

!IF (RSTAVA(8).GT.(DANOCRIT)) THEN
!GOTO 100
!ENDIF

ENDDO

100 CONTINUE

!
CALL CLOSE_FILE

DEALLOCATE (RPROPS,RSTAVA,STRES,STRAN)
END

```