

Universidade de Brasília  
Instituto de Física

Tese de Doutorado

**Termodinâmica e criticalidade dos estados de  
sincronização de osciladores de fase acoplados**

Pedro Dias Pinto

Brasília, agosto de 2015

# Termodinâmica e criticalidade dos estados de sincronização de osciladores de fase acoplados

Pedro Dias Pinto

Orientador:

Prof. Dr. Fernando Albuquerque de Oliveira

Co-orientador:

Prof. Dr. André Luiz Almeida Penna

Brasília, agosto de 2015

# **Termodinâmica e criticalidade dos estados de sincronização de osciladores de fase acoplados**

Por

Pedro Dias Pinto

Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Física.

Aprovada por:

**Prof. Dr. Fernando Albuquerque de Oliveira**

(Orientador) IF - UnB

**Prof. Dr. Tarcísio Marciano da Rocha Filho**

IF - UnB

**Prof. Dr. Jefferson Adriany R. da Cunha**

UFG

**Prof. Dr. Bernardo de Assunção Mello**

IF - UnB

**Prof. Dr. Marco Aurélio Alves Barbosa**

FUP - UnB

Brasília, 27 de agosto de 2015

**Prof. Dr. Fernando Albuquerque de Oliveira**

Coordenador de Pós-Graduação

Instituto de Física - UnB

## Resumo

Nesta tese exploramos a termodinâmica e criticalidade de um sistema de osciladores de fase sob ação de ruídos aditivos e multiplicativos. O ruído multiplicativo é controlado por um acoplamento de ruído que pode amplificar ou reduzir o estado de sincronização do sistema. Isto nos permite caracterizar fases distintas no sistema que designamos como fase sincronizada e fase parasincronizada, em analogia com o magnetismo. Neste formalismo, a densidade de fase estacionária, parâmetro de ordem, energia livre, entropia, energia interna, calor específico e susceptibilidade do modelo são determinadas, no equilíbrio termodinâmico, precisamente. Baseando-se no conceito de campo de sincronização, formulamos a susceptibilidade e a relação de flutuação-dissipação para o sistema. A fase sincronizada apresenta uma região de anomalia interessante com susceptibilidade negativa, muito similar ao que acontece em líquidos complexos. Além disso, o comportamento crítico do sistema é investigado sistematicamente e os quatro expoentes críticos principais, que estão de acordo com as leis de escala de Rushbrooke e Widom, são obtidos pela primeira vez.

# Abstract

In this thesis we explore the thermodynamics and criticality of a phase oscillator system induced by additive and multiplicative noise. The multiplicative noise is controlled by a noise coupling which may amplify or reduce the synchronization state of the system. This allows us to characterize distinct phases in the system that we have denoted here synchronized and parasynchronized phases, in analogy with magnetism. In this framework the stationary phase-density, order parameter, free energy, entropy functional, internal energy, specific heat and susceptibility of the model are determined precisely in thermodynamics equilibrium. Based on the concept of a synchronization field, we formulate the susceptibility and the fluctuation-dissipation relation of the system. The synchronized phase presents a curious anomalous region with negative susceptibility very similar to complex liquids. Moreover the system's critical behaviour is systematically investigated and the four main critical exponents which are in agreement with the scaling laws of Rushbrooke and Widom are obtained firsthand.

# Sumário

|   |            |
|---|------------|
| <b>Resumo</b>   | <b>v</b>   |
| <b>Abstract</b>   | <b>vi</b>  |
| <b>Sumário</b>  | <b>vii</b> |
| <b>Lista de Figuras</b>   | <b>x</b>   |
| <b>1 Introdução</b>   | <b>1</b>   |
| 1.1 A descoberta de Huygens . . . . .                                     | 1          |
| 1.2 Sincronização na natureza . . . . .                                   | 2          |
| 1.3 Definindo sincronização . . . . .                                     | 4          |
| 1.4 Objetivos e panorama da tese . . . . .                                | 5          |
| <b>2 Osciladores de fase acoplados</b>                                    | <b>8</b>   |
| 2.1 Método de descrição da dinâmica da fase . . . . .                     | 8          |
| 2.2 Equações para dinâmica da fase de $N$ osciladores acoplados . . . . . | 13         |
| 2.3 O modelo de Kuramoto de osciladores globalmente acoplados . . . . .   | 16         |
| 2.3.1 Parâmetro de ordem e sincronização . . . . .                        | 17         |
| 2.3.2 Distribuição de frequências e comportamento crítico . . . . .       | 21         |
| 2.3.3 Efeitos de ruído na transição de fase . . . . .                     | 24         |
| <b>3 Termodinâmica de osciladores de fase com ruído aditivo</b>           | <b>28</b>  |
| 3.1 Equações de Langevin e Fokker-Planck . . . . .                        | 29         |

---

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 3.2      | Estabilidade do estado incoerente . . . . .                          | 31        |
| 3.3      | Abordagem termodinâmica . . . . .                                    | 34        |
| 3.3.1    | Análise do equilíbrio . . . . .                                      | 34        |
| 3.3.2    | Entropia . . . . .   | 38        |
| 3.3.3    | Energia interna . . . . .  | 40        |
| 3.3.4    | Calor específico . . . . .   | 41        |
| <b>4</b> | <b>Termodinâmica de osciladores de fase com ruído multiplicativo</b> | <b>44</b> |
| 4.1      | Equações de Langevin e Fokker-Planck . . . . .                       | 44        |
| 4.2      | Estabilidade do estado incoerente . . . . .                          | 48        |
| 4.3      | Abordagem termodinâmica . . . . .                                    | 51        |
| 4.3.1    | Análise do equilíbrio . . . . .                                      | 51        |
| 4.3.2    | Entropia . . . . .   | 61        |
| 4.3.3    | Energia interna . . . . .  | 65        |
| 4.3.4    | Calor específico . . . . .   | 66        |
| 4.4      | Efeitos de campo . . . . .   | 69        |
| 4.4.1    | Campo de sincronização . . . . .                                     | 69        |
| 4.4.2    | Campo externo e susceptibilidade . . . . .                           | 73        |
| <b>5</b> | <b>Criticalidade de osciladores de fase com ruído multiplicativo</b> | <b>76</b> |
| 5.1      | Expoentes críticos . . . . .   | 76        |
| 5.2      | Relação de flutuação-dissipação . . . . .                            | 79        |
| <b>6</b> | <b>Conclusão</b>   | <b>81</b> |
|          | <b>Referências Bibliográficas</b>                                    | <b>83</b> |

# Lista de Figuras

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1.1 | Relógios de Huygens. . . . .   | 2  |
| 1.2 | Potencial de ação e sinapse. . . . .   | 3  |
| 2.1 | Ciclo limite estável de um sistema bidimensional. . . . .  | 9  |
| 2.2 | Isócronas $I(\theta)$ nas vizinhanças de um ciclo limite estável. . . . .  | 11 |
| 2.3 | Representação geométrica do parâmetro de ordem. . . . .  | 18 |
| 2.4 | Evolução do parâmetro de ordem na sincronização. . . . .   | 18 |
| 2.5 | Parâmetro de ordem $r$ em função do acoplamento $K$ para o modelo de Kuramoto com distribuição de Lorentz para as frequências naturais | 23 |
| 2.6 | Parâmetro de ordem $r$ em função do acoplamento $K$ para o modelo de Kuramoto com distribuição uniforme para as frequências naturais.  | 23 |
| 3.1 | Parâmetro de ordem $r$ em função da temperatura $T$ para o modelo de Kuramoto com ruído aditivo. . . . .                               | 38 |
| 3.2 | Entropia $S$ em função da temperatura $T$ para o modelo de Kuramoto com ruído aditivo. . . . .   | 39 |
| 3.3 | Calor específico $C$ em função da temperatura $T$ para o modelo de Kuramoto com ruído aditivo. . . . .                                 | 42 |
| 4.1 | Parâmetro de ordem $r$ em função da temperatura efetiva $T_{eff}$ para vários valores de $\sigma$ . . . . .                            | 58 |
| 4.2 | O espectro do parâmetro de ordem $r$ no espaço $(T_{eff}, \sigma)$ . . . . .   | 59 |

---

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 4.3 | O parâmetro de ordem $r$ como função do acoplamento de ruído $\sigma$ para as isothermas $T = 1$ , $T > 1$ e $T < 1$ . . . . . | 60 |
| 4.4 | O parâmetro de ordem $r$ como uma função da temperatura $T$ para três valores de $\sigma$ . . . . .                            | 61 |
| 4.5 | Entropia como uma função da temperatura $T$ para valores de $\sigma$ . . . . .   | 63 |
| 4.6 | O calor específico $C_\sigma(T)$ como uma função da temperatura $T$ para valores de $\sigma$ . . . . .                         | 68 |
| 4.7 | O parâmetro de ordem $r$ como uma função do campo externo $H_\sigma$ para três isothermas $T$ . . . . .                        | 72 |
| 4.8 | Inverso da susceptibilidade $\chi^{-1}$ como uma função do campo externo $H_\sigma$ para isothermas fixas $T$ . . . . .        | 74 |

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 A descoberta de Huygens

O primeiro relato do fenômeno de sincronização é atribuído ao cientista holandês Christiaan Huygens, registrado em uma carta enviada ao seu pai no dia 26 de fevereiro de 1665 [1]. Mais conhecido por seus estudos em ótica, Huygens foi responsável também por uma melhoria considerável nas medições de tempo, com a invenção e aperfeiçoamento dos relógios de pêndulo. Certa vez em que estava enfermo, deitado na cama, Huygens passou a observar dois relógios que tinha construído recentemente e que compartilhavam de um mesmo suporte. Observando os pêndulos dos relógios por um certo tempo, Huygens percebeu que eles sincronizavam em oposição de fases, independentemente das diferenças de ângulos que os pêndulos eram postos a oscilar inicialmente. Intrigado com isso, ele passou vários dias perturbando deliberadamente os movimentos dos pêndulos constatando sempre, que após um certo tempo eles readquiriam sincronia, em oposição de fase. Huygens descreveu o fenômeno em sua carta como uma “simpatia entre dois relógios”, afirmando que a causa da sincronização era devida a transmissão de movimento entre os pêndulos por meio do suporte em comum [2].

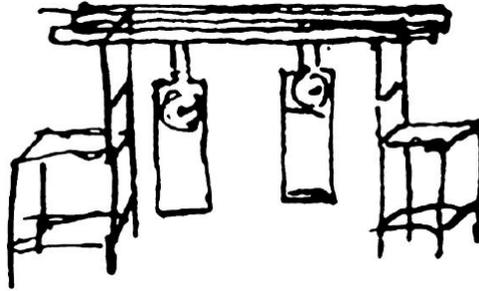


FIGURA 1.1: Desenho original de Christiaan Huygens ilustrando seus experimentos com dois relógios de pêndulo pendurados em um suporte em comum [1].

## 1.2 Sincronização na natureza

Desde o relato feito por Huygens em 1665 até hoje, a ocorrência de sincronização foi verificada em diversos fenômenos na natureza e, dentre eles, os ritmos circadianos têm um papel de destaque devido a sua abrangência [3, 4]. De acordo com a biologia, ritmos circadianos são oscilações de variáveis biológicas em intervalos regulares de tempo, com duração aproximada de 24 horas, o que explica a etimologia do termo, que provém do latim *circa diem* e significa “cerca de um dia” [5].

Todos os organismos vivos apresentam algum tipo de variação rítmica fisiológica que costuma estar associada com (não originada por) uma mudança ambiental rítmica. Hoje em dia é conhecido, para o caso dos mamíferos, que esses ritmos têm origem em células do sistema nervoso [6] situadas em uma área cerebral denominada núcleo suprasimpático, localizada no hipotálamo. Esses ritmos entram em sincronia com os ritmos externos do ambiente e são responsáveis por adequar as respostas fisiológicas do organismo.

A natureza está repleta de populações de “osciladores biológicos” que sincronizam seus ritmos na realização de uma determinada função. As batidas do coração, por exemplo, tem origem em uma região chamada nodo sinoatrial, a qual possui um grupo de células independentes que são responsáveis por enviarem sinais aos ventrículos, ativando sua função de bombeamento do sangue [7]. O marcapasso que controla a frequência cardíaca não é uma célula única, mas, sim, milhares de

células que precisam disparar de forma síncrona para que o coração funcione corretamente.

O cérebro é composto de bilhões de neurônios acoplados em uma hierarquia de conectividade de redes complexas [8]. Os neurônios do cérebro estão conectados, em grande parte, aos seus vizinhos mais próximos e a comunicação entre eles é feita por meio de trocas químicas e elétricas nas sinapses Fig. (1.2), desencadeadas pelos disparos de potenciais de ação, que caracterizam a atividade oscilatória do cérebro [9]. Pesquisas relatam que os neurônios se agrupam em áreas corticais funcionais e a sincronização dos disparos neuronais permite a eficiência de comunicação entre essas áreas [10]. Por outro lado, o excesso de atividade e sincronização de redes neurais são associadas a disfunções cerebrais, tais como crises epiléticas [11] e doença de Parkinson [12].

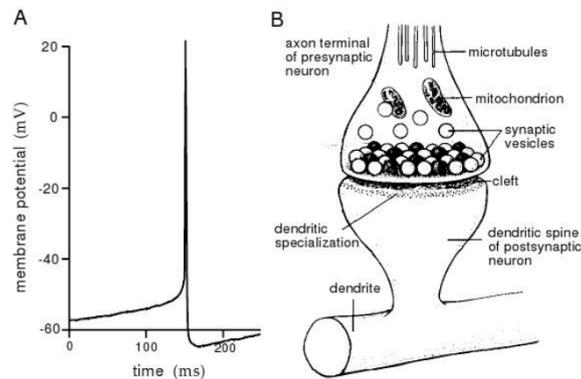


FIGURA 1.2: (A) Potencial de ação gravado intercelularmente. (B) Representação da sinapse, região entre neurônios onde ocorre as trocas de informações químicas e elétricas. [13]

No sudoeste da Ásia, em lugares como a Tailândia, Malásia ou Bornéu, os vagalumes exibem um comportamento cooperativo muito interessante [14]. Na época de reprodução é possível ver, durante a noite, milhares de vagalumes piscando de forma síncrona nas árvores ribeirinhas. O fenômeno começa com cada inseto emitindo luzes em seu próprio ritmo, um certo tempo depois, começam a surgir bolsões de luzes em sincronia que se ampliam, formando uma nuvem de vagalumes piscando em conjunto. Apenas vagalumes machos participam deste fenômeno, que

tem por objetivo facilitar o acasalamento, pois, piscando em sincronia, conseguem chamar mais atenção das fêmeas.

### 1.3 Definindo sincronização

Nesta seção vamos delimitar a noção de sincronização utilizada nesta tese. Não é o objetivo aqui fornecer uma definição rigorosa pois os conceitos ficarão estabelecidos no desenvolvimento matemático posterior, mas, por agora, é necessário elucidar alguns termos de uso corrente. De forma qualitativa, podemos dizer que sincronização é um *ajuste de ritmos de objetos oscilantes devido a sua interação fraca* [1].

Entendemos por *objetos oscilantes*, elementos ativos e autossustentados, ou seja, objetos que possuem uma fonte de energia interna que é transformada em movimento oscilatório. Quando isolados, continuam a gerar seus ritmos próprios até consumir completamente essa fonte de energia. Matematicamente, esse tipo de oscilador é descrito como um sistema dinâmico autônomo e tem como característica principal oscilações estáveis a pequenas perturbações, determinadas unicamente pelos parâmetros do sistema e não sobre como ele foi acionado.

Osciladores autossustentados podem exibir *ritmos* de variadas formas, de simples ondas senoidais a uma sequência de pulsos curtos. É comum caracterizar o ritmo pelo número de ciclos de oscilação por unidade de tempo, ou seja, pela frequência de oscilação  $f = 1/T$  que é igual ao inverso do período  $T$ . No tratamento teórico da sincronização, a frequência angular  $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$  é, geralmente, mais conveniente. A frequência de oscilação pode ser alterada por causa de uma ação externa sobre o oscilador ou devido a sua interação com outro sistema. Para evitar ambiguidades, a frequência de um oscilador autônomo isolado é chamada de “frequência natural”.

Podem ocorrer diversas formas de *interação* ou “acoplamento” entre dois osciladores, isso vai depender do tipo de objetos oscilantes que estão interagindo.

Relógios de pêndulo interagem por meio da troca de vibrações em um suporte em comum, neurônios podem interagir por meio de trocas de informações químicas e elétricas nas sinapses, vagalumes interagem dentro de um “campo visual” assim como dois grilos ou cigarras podem interagir dentro de um “campo audível”. O requisito para que se trate de um fenômeno de sincronização é que o acoplamento entre os sistemas seja fraco. A distinção da fronteira que separa uma interação fraca ou forte não é simples, em termos gerais, podemos dizer que a introdução do acoplamento não deve mudar qualitativamente o comportamento de cada um dos osciladores interagentes e não deve privá-los da sua individualidade. Em particular, se um oscilador para de oscilar, ele não pode impedir o segundo de manter o seu ritmo próprio.

Um *ajuste de ritmos* acontece quando dois osciladores ou mais, acoplados, passam a oscilar com uma frequência em comum, em geral, diferente das suas frequências individuais. Dois osciladores diferentes, com frequências naturais  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , acoplados, podem vir a oscilar com uma frequência igual, a depender dos seguintes fatores: a “intensidade de acoplamento”, que descreve o quão forte (ou fraco) a interação se efetua, a “intensidade de ruído” que corresponde a perturbações externas aleatórias, entre elas o efeito da temperatura e, por último, a “desintonia de frequências”  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ , que quantifica quão diferentes são os osciladores desacoplados. O ajuste desses fatores determina a possibilidade de um sistema sincronizar.

## 1.4 Objetivos e panorama da tese

O estudo formal do fenômeno da sincronização ganhou impulso com a abordagem por meio de osciladores de fase acoplados. O pioneiro nessa abordagem foi o biólogo teórico Arthur T. Winfree que formulou o problema em seu artigo de 1967 [15], considerando os elementos interagentes como osciladores de ciclo limite quase idênticos e assumindo que as interações entre eles fossem suficientemente fracas. Intrigado pelos resultados de Winfree, o físico japonês Yoshiki Kuramoto

começou a trabalhar com sincronização coletiva em 1975 e, utilizando as mesmas hipóteses do seu antecessor, estabeleceu o problema de maneira rigorosa, desenvolvendo uma formulação matemática denominada de “método de redução de fase” [16]. A partir dessa formulação, Kuramoto pode captar a essência do mecanismo de sincronização, propondo o modelo mais simples que exhibe esse fenômeno, um sistema de osciladores de fase acoplados que ficou conhecido amplamente como “modelo de Kuramoto”.

Apesar de uma grande quantidade de trabalhos dedicados a investigar o modelo de Kuramoto e suas mais diversas variações, desde a sua primeira publicação [17] até os dias atuais, existe uma ausência inegável de um estudo sistemático dentro da termodinâmica do estado de sincronização de tais sistemas, bem como, uma análise ampla do seu comportamento crítico. Enfatizamos aqui que a dinâmica da sincronização é um processo fora do equilíbrio, no entanto, em algumas situações, para tempos suficientemente longos, o estado estacionário pode ser considerado um estado de equilíbrio do sistema, onde a termodinâmica clássica pode ser aplicada. O objetivo desta tese é apresentar a termodinâmica do estado de sincronização de osciladores de fase acoplados sob a ação de ruídos aditivos e multiplicativos e estudar seu comportamento crítico. Com esse fim, organizamos a exposição da tese da seguinte maneira:

No Capítulo (2) apresentamos o método de redução de fase para descrever osciladores autosustentados de ciclo limite estável. É um método geral que se aplica quando a perturbação externa periódica é fraca e cujo principal objetivo é simplificar a descrição dinâmica do sistema, capturando suas principais propriedades. No final deste capítulo apresentamos o modelo de Kuramoto e sua generalização com ruído aditivo feita por Sakaguchi.

No Capítulo (3) iniciamos as contribuições originais da tese apresentando a abordagem termodinâmica do modelo de Kuramoto com ruído aditivo. Para este modelo, utilizando o formalismo da equação de Fokker-Planck, obtemos a distribuição estacionária e demonstramos que ela corresponde a distribuição que caracteriza o

equilíbrio termodinâmico. A partir da distribuição de equilíbrio obtemos e analisamos pela primeira vez as expressões analíticas para entropia e calor específico do modelo.

No Capítulo (4) propomos uma generalização do modelo de Kuramoto com ruído aditivo e estudamos as suas propriedades termodinâmicas. O ruído multiplicativo proposto é interpretado como um campo que pode tanto ampliar como reduzir o estado de sincronização. Assim, extendemos ainda mais a analogia termodinâmica do modelo de Kuramoto obtendo, além da entropia e calor específico, o campo externo atuando sobre os osciladores e a susceptibilidade do sistema. A riqueza de comportamento do modelo proposto é evidenciada nas analogias de comportamento com sistemas magnéticos e sistemas fluidos.

No Capítulo (5) estudamos sistematicamente o comportamento crítico das quantidades termodinâmicas previamente estabelecidas, bem como obtemos os expoentes críticos de campo médio envolvidos. Finalizamos o capítulo demonstrando a relação de flutuação-dissipação que relaciona a flutuação do parâmetro de ordem com a susceptibilidade do sistema.

No Capítulo (6) discutimos as conclusões da tese e as perspectivas de aplicação e extensão do modelo em trabalhos futuros.

## Capítulo 2

# Osciladores de fase acoplados

Neste Capítulo inicialmente apresentaremos um método desenvolvido por Malkin [18] e Kuramoto [16] para descrever osciladores autossustentados, com ciclo-limite estável, em termos de uma fase de oscilação. É um método geral que se aplica quando a perturbação externa periódica é fraca e cujo principal objetivo é simplificar a descrição dinâmica do sistema, capturando suas principais propriedades. As Seções (2.1) e (2.2) seguem a exposição apresentada por Pikovsky e Rosenblum em [1] e na Seção (2.3) é apresentado o modelo de Kuramoto [16] de osciladores acoplados e sua generalização com efeitos de ruído feita por Sakaguchi [19].

### 2.1 Método de descrição da dinâmica da fase

Considere um sistema dissipativo autônomo geral com dimensão  $L$  ( $L \geq 2$ ) de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_L), \quad (2.1)$$

e suponha que este sistema tenha uma solução estável periódica (com período  $T_0$ )  $\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}_0(t+T_0)$ . No *espaço de fase* esta solução é uma trajetória isolada e atrativa, chamada de *ciclo limite*. Na Fig. (2.1) mostramos a representação de um ciclo limite

para um sistema bidimensional  $L = 2$ .

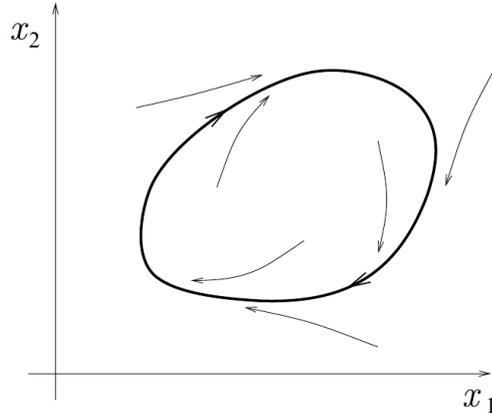


FIGURA 2.1: Ciclo limite estável de um sistema bidimensional. As setas indicam que todos os pontos na vizinhança são atraídos para o ciclo limite.

Um ponto no espaço de fase movendo-se ao longo do ciclo representa oscilações autossustentadas. Nosso primeiro objetivo é descrever este movimento em termos da fase de oscilação. Introduzimos a fase  $\theta$  como uma coordenada ao longo do ciclo limite, tal que ela cresce monotonicamente e ganha  $2\pi$  durante cada rotação. No entanto, impomos que a fase cresça uniformemente no tempo de modo que ela obedeça a equação

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 \quad (2.2)$$

onde  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  é a frequência das oscilações autossustentadas. Quando tratarmos de oscilações forçadas por acoplamento iremos nos referir a  $\omega_0$  como a *frequência natural*, ou seja, a frequência do oscilador isolado. Note que uma tal uniformidade de rotação da fase sempre existe e pode ser obtida de qualquer rotação com período de  $2\pi$  de uma variável de ângulo  $\phi$  sobre o ciclo por meio da transformação

$$\theta = \omega_0 \int_0^\phi \left[ \frac{d\phi}{dt} \right]^{-1} d\phi. \quad (2.3)$$

As variáveis  $\mathbf{x}$  do sistema sobre o ciclo são funções  $2\pi$ -periódicas da fase de oscilação. Sobre o ciclo limite, o deslocamento de tempo  $\Delta t$  é equivalente ao deslocamento de fase  $\Delta\theta = \omega_0\Delta t$ .

Agora consideremos o efeito de uma força externa periódica fraca sobre as oscilações autossustentadas. Descrevemos o sistema forçado pelas equações

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \epsilon \mathbf{p}(\mathbf{x}, t), \quad (2.4)$$

onde a força  $\epsilon \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \epsilon \mathbf{p}(\mathbf{x}, t+T)$  tem um período  $T$ , o qual em geral é diferente de  $T_0$ . A força é proporcional a um pequeno parâmetro  $\epsilon$ , e no que segue, consideramos somente os efeitos de primeira ordem em  $\epsilon$

A força externa dirige a trajetória para fora do ciclo limite mas, uma vez que ela é fraca e o ciclo limite é estável, a trajetória desvia apenas levemente da original  $\mathbf{x}_0(t)$ , isto é, ela se mantém na vizinhança próxima do ciclo limite estável. Assim, a ideia chave é definir a variável de fase de tal maneira que ela rotaciona uniformemente de acordo com a Eq. (2.2) não somente sobre o ciclo, mas também na sua vizinhança. Para fazer isso, primeiro definimos a *isócrona* [15, 20].

Vamos observar o sistema dinâmico Eq. (2.1) em um intervalo de tempo correspondendo exatamente ao período  $T_0$  do ciclo limite. Assim, obtemos o mapeamento

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}(t + T_0) \equiv \Phi(\mathbf{x}). \quad (2.5)$$

Este mapeamento tem todos os pontos sobre o ciclo limite como pontos fixos, e todos os pontos na vizinhança do ciclo são atraídos para eles. Vamos escolher um ponto fixo  $\mathbf{x}^*$  sobre o ciclo e considerar todos os pontos na vizinhança que são atraídos para  $\mathbf{x}^*$  sob a ação de  $\Phi(\mathbf{x})$ . Eles formam um hipersuperfície  $I$  de dimensão  $(L-1)$  chamada de *isócrona* que atravessa o ciclo limite em  $\mathbf{x}^*$ . Uma hipersuperfície isócrona pode ser desenhada atravessando cada ponto sobre o ciclo. Assim, podemos parametrizar a hipersuperfície de acordo com a fase como  $I(\theta)$  Fig. (2.2). Agora extendemos a definição da fase para a vizinhança do ciclo limite exigindo que ela seja constante sobre cada isócrona  $I(\theta)$ . Desta maneira, definimos a fase na vizinhança do ciclo limite, no mínimo, onde a isócrona existe. Assim, segue imediatamente que a fase obedece a Eq. (2.2) porque as isócronas rotacionam com a mesma velocidade de um ponto sobre o ciclo limite. Além disso, a evolução durante o período  $T_0$  do ciclo

mantém essa hipersuperfície invariante.

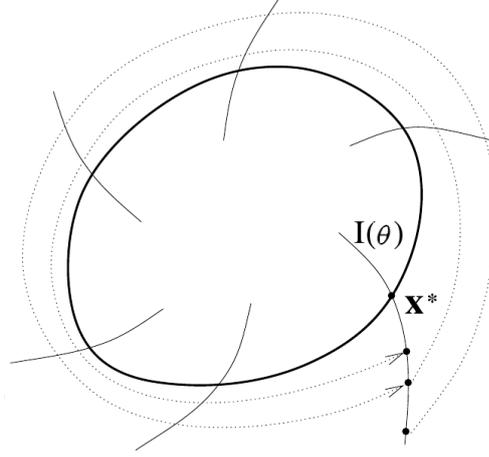


FIGURA 2.2: Isócronas  $I(\theta)$  nas vizinhanças de um ciclo limite estável.

Uma vez que definimos a fase vizinhança do ciclo limite, podemos escrever a Eq. (2.2) nesta vizinhança como

$$\frac{d\theta(\mathbf{x})}{dt} = \omega_0. \quad (2.6)$$

Como a fase é uma função suave das coordenadas  $\mathbf{x}$ , podemos representar sua derivada no tempo como

$$\frac{d\theta(\mathbf{x})}{dt} = \sum_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt}, \quad (2.7)$$

a qual, junto com a Eq. (2.1), fornece

$$\omega_0 = \sum_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} f_k(\mathbf{x}). \quad (2.8)$$

Consideremos agora o sistema perturbado. Substituindo a Eq. (2.4) na Eq. (2.7) e utilizando a definição “não perturbada” da fase, obtemos

$$\frac{d\theta(\mathbf{x})}{dt} = \sum_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} (f_k(\mathbf{x}) + \epsilon p_k(\mathbf{x}, t)) = \omega_0 + \epsilon \sum_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} p_k(\mathbf{x}, t). \quad (2.9)$$

O segundo termo do lado direito é pequeno  $\mathcal{O}(\epsilon)$ , e os desvios de  $\mathbf{x}$  do ciclo limite  $\mathbf{x}_0$  são pequenos também. Assim, em primeira aproximação, podemos desprezar estes desvios e assumir o último termo do lado direito sobre o ciclo limite como

$$\frac{d\theta(\mathbf{x})}{dt} = \omega_0 + \epsilon \sum_k \frac{\partial \theta(\mathbf{x}_0)}{\partial x_k} p_k(\mathbf{x}_0, t). \quad (2.10)$$

Como os pontos sobre o ciclo limite têm correspondência de um para um com a fase  $\theta$ , podemos escrever a equação para a fase

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \epsilon Q(\theta, t), \quad (2.11)$$

onde

$$Q(\theta, t) = \sum_k \frac{\partial \theta(\mathbf{x}_0(\theta))}{\partial x_k} p_k(\mathbf{x}_0(\theta), t). \quad (2.12)$$

Note que  $Q$  é uma função de período  $2\pi$  em  $\theta$  e de período  $T$  no tempo  $t$ .

Em uma aproximação de “ordem zero”, quando desprezamos o efeito da força externa ( $\epsilon = 0$ ), a Eq. (2.11) tem a solução

$$\theta = \omega_0 t + \theta_0. \quad (2.13)$$

Como a função  $Q$  é periódica em  $\theta$  e  $t$ , podemos representá-la como uma série de Fourier dupla escrevendo

$$Q(\theta, t) = \sum_{l,k} a_{l,k} e^{ik\theta + il\omega t}, \quad (2.14)$$

onde  $\omega = 2\pi/T$  é a frequência da força externa. Substituindo a solução de ordem zero Eq. (2.13) na Eq. (2.14) temos

$$Q(\theta, t) = \sum_{l,k} a_{l,k} e^{ik\theta_0} e^{i(k\omega_0 + l\omega)t}. \quad (2.15)$$

Vemos que a função  $Q$  contém termos oscilantes rápidos (comparados a escala de tempo  $1/\epsilon$ ) bem como, termos que variam lentamente. Os últimos são aqueles que satisfazem a condição de ressonância

$$k\omega_0 + l\omega \approx 0. \quad (2.16)$$

Os termos ressonantes na soma da Eq. (2.15) podem levar a grandes variações da fase (embora lentas, devido ao pequeno parâmetro  $\epsilon$ ) e são mais importantes para a dinâmica. Assim, para manter somente a dinâmica essencial, vamos considerar somente os termos ressonantes da Eq. (2.15). Os termos ressonantes

dependem da relação entre a frequência  $\omega$  da força externa e a frequência natural  $\omega_0$ . O caso mais simples é quando estas frequências são aproximadamente iguais,  $\omega \approx \omega_0$ , então, somente os termos com  $k = -l$  são ressonantes. A soma destes termos fornecem uma nova força média

$$\sum_{l=-k} a_{l,k} e^{ik\theta + il\omega t} = \sum_k a_{-k,k} e^{ik(\theta - \omega t)} = q(\theta - \omega t). \quad (2.17)$$

A força média  $q$  tem período  $2\pi$  de seus argumentos e contém todos os termos ressonantes. Substituindo ela na Eq. (2.11), obtemos

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \epsilon q(\theta - \omega t), \quad (2.18)$$

que é a equação para dinâmica da fase de um oscilador de ciclo limite fracamente perturbado.

## 2.2 Equações para dinâmica da fase de $N$ osciladores acoplados

Iniciamos considerando um sistema composto por dois osciladores interagentes dado pelas equações

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}^{(1)}}{dt} &= \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{x}^{(1)}) + \epsilon \mathbf{p}^{(1)}(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}), \\ \frac{d\mathbf{x}^{(2)}}{dt} &= \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{x}^{(2)}) + \epsilon \mathbf{p}^{(2)}(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(1)}). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Neste sistema, os osciladores podem oscilar de forma independente (quando  $\epsilon = 0$ ) e podem interagir um com o outro (quando  $\epsilon \neq 0$ ). Quando a constante  $\epsilon$  desaparece, cada oscilador tem um ciclo limite estável e como na seção anterior, podemos introduzir as duas equações para as fases sobre o ciclo e nas suas vizinhanças, como

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_1}{dt} &= \omega_1, \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= \omega_2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

No caso do sistema acoplado, podemos escrever equações para as fases análogas a Eq. (2.10).

$$\begin{aligned}\frac{d\theta_1(\mathbf{x}^{(1)})}{dt} &= \omega_1 + \epsilon \sum_k \frac{\partial \theta_1}{\partial x_k^{(1)}} p_k^{(1)}(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}), \\ \frac{d\theta_2(\mathbf{x}^{(2)})}{dt} &= \omega_2 + \epsilon \sum_k \frac{\partial \theta_1}{\partial x_k^{(2)}} p_k^{(2)}(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(1)}).\end{aligned}\quad (2.21)$$

Assumindo que para acoplamentos fracos os desvios de trajetória do ciclo limite são pequenos (dentro do limite definido na isócrona), podemos substituir os valores das variáveis  $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}$  sobre os ciclos, onde essas variáveis são funções apenas das fases. Assim, obtemos as equações de fases

$$\begin{aligned}\frac{d\theta_1}{dt} &= \omega_1 + \epsilon Q_1(\theta_1, \theta_2), \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= \omega_2 + \epsilon Q_2(\theta_2, \theta_1),\end{aligned}\quad (2.22)$$

com funções  $Q_{1,2}$  que possuem período de  $2\pi$  em seus argumentos.

Devido a periodicidade das funções  $Q_{1,2}$ , podemos escrevê-las por meio de séries de Fourier duplas

$$Q_1(\theta_1, \theta_2) = \sum_{k,l} a_1^{k,l} e^{ik\theta_1 + il\theta_2}, \quad Q_2(\theta_2, \theta_1) = \sum_{k,l} a_2^{l,k} e^{ik\theta_1 + il\theta_2}. \quad (2.23)$$

Em uma aproximação de ordem zero, as fases rotacionam sem perturbação nas frequências naturais

$$\theta_1 = \omega_1 t, \quad \theta_2 = \omega_2 t, \quad (2.24)$$

e nas funções  $Q_{1,2}$  todos os termos correspondem a oscilações rápidas, exceto para os quais a condição de ressonância é satisfeita

$$k\omega_1 + l\omega_2 \approx 0. \quad (2.25)$$

Vamos assumir que as duas frequências naturais estão próximas da ressonância

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \approx \frac{m}{n}. \quad (2.26)$$

Então, todos os termos na série de Fourier com  $k = -nj$ ,  $l = mj$  são ressonantes e contribuem para as equações médias. Como resultado obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d\theta_1}{dt} &= \omega_1 + \epsilon q_1(m\theta_2 - n\theta_1), \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= \omega_2 + \epsilon q_2(n\theta_1 - m\theta_2),\end{aligned}\quad (2.27)$$

onde

$$\begin{aligned}q_1(m\theta_2 - n\theta_1) &= \sum_j a_1^{-nj, mj} e^{ij(m\theta_2 - n\theta_1)}, \\ q_2(n\theta_1 - m\theta_2) &= \sum_j a_2^{-mj, nj} e^{ij(n\theta_1 - m\theta_2)}.\end{aligned}\quad (2.28)$$

O caso mais simples é o de ressonância 1:1, isto é, quando fazemos  $m = n = 1$  e as frequências naturais são aproximadamente iguais  $\omega_1 \approx \omega_2$ . Assim, as Eqs. (2.27) simplificam para

$$\begin{aligned}\frac{d\theta_1}{dt} &= \omega_1 + \epsilon q_1(\theta_2 - \theta_1), \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= \omega_2 + \epsilon q_2(\theta_1 - \theta_2),\end{aligned}\quad (2.29)$$

Podemos generalizar facilmente agora para  $N$  osciladores em interação partindo das Eqs. (2.22), escrevendo a função  $Q_i(\{\theta\})$  com  $\{\theta\} = \theta_1, \dots, \theta_N$  como [21]:

$$Q_i(\{\theta\}) = \sum_{j=1}^N Q_{ij}(\theta_i, \theta_j) \quad i = 1, \dots, N \quad i \neq j. \quad (2.30)$$

Assim, temos

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \epsilon \sum_{j=1}^N Q_{ij}(\theta_i, \theta_j) \quad i = 1, \dots, N \quad i \neq j. \quad (2.31)$$

Que, por sua vez, pode ser escrita como

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \epsilon \sum_{j=1}^N q_{ij}(\theta_j - \theta_i) \quad i = 1, \dots, N \quad i \neq j. \quad (2.32)$$

A Eq. (2.32) é uma equação geral que descreve a dinâmica de  $N$  osciladores de fase que interagem fracamente. Apesar de ser uma grande simplificação da

descrição dinâmica do sistema, ainda é complicada o suficiente para fazer avanços analíticos, uma vez que a função de interação das fases  $q_{ij}(\theta_j - \theta_i)$  é uma função periódica que pode conter um número arbitrário de harmônicos de Fourier e uma topologia de conexões quaisquer. Na próxima seção será apresentada a abordagem de Kuramoto para obtenção de um modelo “solúvel” de osciladores de fase.

### 2.3 O modelo de Kuramoto de osciladores globalmente acoplados

Em 1984 o físico japonês Yoshiki Kuramoto propôs no seu livro “Chemical Oscillations Waves and Turbulence” [16] uma subclasse de sistemas de osciladores de fase para os quais conseguiu obter resultados analíticos interessantes. O principal deles é que, sob certas condições, o sistema de osciladores pode sincronizar, mesmo partindo de um estado inicial completamente aleatório. Para isso, Kuramoto estabeleceu analogias do sistema de osciladores com a teoria de campo médio para transições de fase e, em particular, comparou os osciladores individuais com os spins de um sistema magnético.

Como vimos na seção anterior, embora o método de descrição de fase represente uma grande simplificação da dinâmica do sistema de osciladores acoplados, a Eq. (2.32) ainda é muito difícil de ser analisada na sua forma geral. A proposta de Kuramoto para fazer progressos analíticos foi considerar uma expressão de campo médio para função de interação da Eq. (2.32) sendo ela igual para todos os pares de osciladores, ou seja  $q_{ij}(\theta_j - \theta_i) = q(\theta_j - \theta_i)$  para todo  $i$  e  $j$ . O caso mais simples para essa função pode ser escrito como

$$q(\theta_j - \theta_i) = \sin(\theta_j - \theta_i). \quad (2.33)$$

É importante considerar que a magnitude da interação seja da ordem de  $N^{-1}$  pois isso garante que a intensidade do campo local experimentado por cada oscilador seja independente do número total  $N$  de osciladores. Assumindo que  $\epsilon = K/N$  sendo  $K$

a intensidade de acoplamento, Kuramoto obteve o sistema de equações

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.34)$$

Aqui vale ressaltar que Kuramoto assumiu uma constante de acoplamento positiva  $K > 0$  a qual torna o acoplamento atrativo. Para  $K < 0$  (acoplamentos repulsivos) oscilações coletivas não seriam possíveis para este modelo. Modelos de Kuramoto com parte dos osciladores do sistema com acoplamentos repulsivos foram estudados posteriormente onde foi mostrado que o acoplamento negativo é análogo a uma interação antiferromagnética [22] e também que este tipo de acoplamento pode levar a uma transição vítrea [23].

As frequências naturais  $\omega_i$  da Eq. (2.34) são distribuídas de acordo com alguma densidade de probabilidade  $g(\omega)$ . Kuramoto assumiu que  $g(\omega)$  é unimodal e simétrica em torno de uma frequência média  $\omega_0$ , isto é,  $g(\omega_0 + \omega) = g(\omega_0 - \omega)$  para todo  $\omega$ .

### 2.3.1 Parâmetro de ordem e sincronização

Em analogia a teoria de transições de fases da termodinâmica, Kuramoto definiu um parâmetro de ordem para o sistema de osciladores. A escolha conveniente foi uma quantidade complexa definida pela equação

$$r e^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}, \quad (2.35)$$

onde o módulo do parâmetro de ordem  $r(t)$  é uma medida da quantidade de comportamento coletivo no sistema e  $\psi(t)$  é a fase média de todos os osciladores. Uma boa maneira de visualizar o que significa isso é imaginar cada oscilador como um ponto movendo-se em torno de um círculo de raio unitário. Então, o parâmetro de ordem pode ser interpretado como uma seta apontando do centro deste círculo, como mostrado na Fig. (2.3)

O parâmetro de ordem  $r$  pode assumir valores entre  $0 \leq r \leq 1$ . Os osciladores rotacionam de tal forma que se suas fases movem agrupadas em torno do círculo

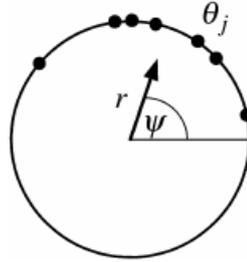


FIGURA 2.3: Representação geométrica do parâmetro de ordem Eq. (2.35) [24].

de raio unitário, temos  $r \simeq 1$  e o sistema está sincronizado, se comportando como um oscilador macroscópico. Por outro lado, se as fases estão distribuídas uniformemente em torno do círculo  $r \simeq 0$ , os osciladores se comportam incoerentemente e nenhum ritmo macroscópico é observado. Na Fig. (2.4) é mostrado a evolução do parâmetro de ordem no processo de sincronização de cinco osciladores acoplados.

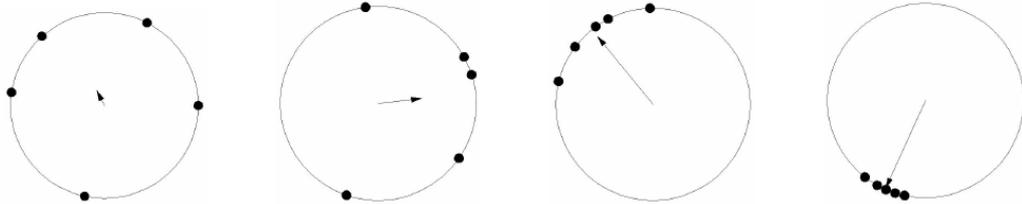


FIGURA 2.4: Evolução do parâmetro de ordem no processo de sincronização [25].

O modelo de Kuramoto pode ser escrito em termos do parâmetro de ordem e da fase média. Multiplicando a Eq. (2.35) por  $e^{-i\theta_i}$  e considerando a parte imaginária, temos:  $r \sin(\psi - \theta_i) = N^{-1} \sum_j \sin(\theta_j - \theta_i)$ . Substituindo esse resultado na Eq. (2.34),

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + Kr \sin(\psi - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.36)$$

encontra-se uma equação desacoplada que evidencia que a fase de cada oscilador é atraída pela fase média e a intensidade de acoplamento é proporcional a magnitude do parâmetro de ordem. Isso simplifica enormemente a forma de pensar sobre o problema da sincronização.

No limite termodinâmico, quando o número de osciladores vai para infinito  $N \rightarrow \infty$ , é mais conveniente descrever o sistema por meio de uma função de

distribuição  $\rho(\theta, \omega, t)$  cuja evolução é governada pela equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v), \quad (2.37)$$

sendo a velocidade instantânea de cada oscilador  $v = d\theta/dt$  dada por

$$v(\theta, \omega, t) = \omega + Kr \sin(\psi - \theta), \quad (2.38)$$

e o parâmetro de ordem no limite contínuo expresso por

$$r e^{i\psi} = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta} \rho(\theta, \omega, t) g(\omega) d\omega d\theta. \quad (2.39)$$

É de interesse agora analisar o comportamento crítico do sistema e, para isso, vamos encontrar as soluções estacionárias. Para um acoplamento forte o suficiente, é possível encontrar uma solução não nula para o parâmetro de ordem  $0 < r < 1$ . Nessas condições, cada oscilador que inicialmente move-se com uma velocidade  $v$  dada pela Eq. (2.38) poderá sincronizar, movendo-se com um ângulo estavelmente fixo em relação a fase média ( $v = 0$ ), quando as relações:  $Kr \sin(\theta - \psi) = \omega$  e  $-\pi/2 \leq (\theta - \psi) \leq \pi/2$  forem satisfeitas [26]. Assim, para um dado acoplamento limiar, chamado de acoplamento crítico  $K = K_c$ , os osciladores se dividirão em dois grupos: o primeiro, com frequências obedecendo  $|\omega| \leq Kr$  ficarão sincronizados com fases  $\theta$  fixas em relação a fase média

$$\theta - \psi = \sin^{-1} \left( \frac{\omega}{Kr} \right), \quad (2.40)$$

e um segundo grupo, com frequências cujo módulo  $|\omega| > Kr$  estarão oscilando incoerentemente. A condição de estacionariedade é obtida para um tempo longo,  $t \rightarrow \infty$  quando o sistema relaxa e a distribuição da Eq. (2.37) se torna independente do tempo  $\partial \rho / \partial t = 0$ , e  $v\rho = C$  sendo  $C$  uma constante. Levando em consideração esses dois grupos de osciladores, podemos escrever a distribuição estacionária como

$$\rho(\theta, \omega) = \begin{cases} \delta \left[ \theta - \psi - \sin^{-1} \left( \frac{\omega}{Kr} \right) \right] & \text{se } |\omega| \leq Kr \\ \frac{C}{|\omega + Kr \sin(\psi - \theta)|} & \text{em outros casos.} \end{cases} \quad (2.41)$$

A constante  $C$  pode ser obtida da condição de normalização, considerando que  $\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta, \omega, t) d\theta = 1$ , assim

$$C = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega^2 - (Kr)^2} \quad (2.42)$$

Conhecendo a distribuição estacionária  $\rho(\theta, \omega)$  dada pela Eq. (2.41) podemos agora avaliar o parâmetro de ordem no estado de sincronização parcial utilizando a Eq. (2.39),

$$r = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{|\omega| \leq Kr} e^{i(\theta-\psi)} \delta \left[ \theta - \psi - \sin^{-1} \left( \frac{\omega}{Kr} \right) \right] g(\omega) d\omega d\theta \\ + \int_{-\pi}^{\pi} \int_{|\omega| > Kr} e^{i(\theta-\psi)} \frac{Cg(\omega)}{|\omega + Kr \sin(\psi - \theta)|} d\omega d\theta. \quad (2.43)$$

Assumindo que a frequência média  $\omega_0 = 0$  segue que a distribuição de frequências  $g(\omega) = g(-\omega)$ . Então, a relação de simetria  $\rho(\theta + \pi, -\omega) = \rho(\theta, \omega)$  implica que o segundo termo da Eq. (2.43) é zero. Como o parâmetro de ordem  $r$  é real, o primeiro termo fornece

$$r = \int_{|\omega| < Kr} \cos[\sin^{-1}(\omega/Kr)] g(\omega) d\omega = \int_{|\omega| < Kr} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{K^2 r^2}} g(\omega) d\omega, \quad (2.44)$$

realizando a transformação de variáveis  $d\omega = Kr \cos(\theta - \psi) d\theta$  obtemos

$$r = Kr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta, \quad (2.45)$$

onde assumimos  $\psi = 0$  sem perda de generalidade. A Eq (2.45) possui uma solução trivial  $r = 0$  que está associada ao estado de completa incoerência, onde as fases dos osciladores possuem uma distribuição uniforme  $\rho(\theta, \omega) = 1/2\pi$ . Uma segunda solução, que corresponde ao estado parcialmente sincronizado, pode ser obtida considerando primeiro o acoplamento crítico  $K_c$  necessário para que o sistema inicie o processo de sincronização. Partindo da equação

$$1 = K \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta, \quad (2.46)$$

e tomando o limite de  $r \rightarrow 0^+$  na mesma, encontramos

$$1 = K_c \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(0) d\theta = K_c g(0) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = K_c g(0) \frac{\pi}{2}. \quad (2.47)$$

Assim,

$$K_c = \frac{2}{\pi g(0)}. \quad (2.48)$$

Este é o valor do acoplamento crítico necessário para produzir um estado parcialmente sincronizado.

Agora que é conhecido o valor do acoplamento em que o parâmetro de ordem começa a crescer a partir do zero, é interessante saber o comportamento inicial de  $r$  nas proximidades de  $K_c$ . Para isso, vamos expandir a função  $g(Kr \sin \theta)$  na Eq. (2.46) em torno de  $r = 0$

$$1 = K \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta \left[ g(0) + \frac{1}{2} g''(0) (Kr \sin \theta)^2 \right] d\theta, \quad (2.49)$$

aqui desconsideramos o segundo termo da expansão uma vez que  $g(\omega)$  tem um máximo no zero,  $g'(0) = 0$ . Assim, resolvendo a integral

$$1 = K \left[ \frac{\pi}{2} g(0) + \frac{\pi K^3 r^2 g''(0)}{16} \right] = \frac{K}{K_c} + \frac{\pi K^3 r^2 g''(0)}{16}, \quad (2.50)$$

e assumindo que nas proximidades da região crítica  $K^3 \approx K_c^3$ , podemos explicitar o parâmetro de ordem  $r$  obtendo

$$r = \sqrt{\frac{-16}{\pi g''(0) K_c^4}} (K - K_c)^{1/2}. \quad (2.51)$$

Na região de transição de fase, o parâmetro de ordem  $r \sim (K - K_c)^{1/2}$  cresce com expoente 1/2 quando o acoplamento  $K$  aumenta em relação a  $K_c$  evidenciando o caráter de campo médio do sistema.

### 2.3.2 Distribuição de frequências e comportamento crítico

Na subseção anterior, apenas atribuímos propriedades gerais para a distribuição de frequências naturais  $g(\omega)$ , assumindo que essa distribuição é unimodal e simétrica em torno da frequência média  $\omega_0 = 0$ . A escolha de uma expressão para distribuição de frequências pode permitir que a equação para o parâmetro de ordem seja obtida de maneira explícita. A distribuição de frequências também é responsável

pela definição do comportamento crítico do sistema, como veremos, influenciando no tipo de transição de fase para o estado sincronizado [27].

Na análise clássica realizada por Kuramoto [16] a distribuição de frequências utilizada foi uma distribuição de Lorentz

$$g(\omega) = \frac{\gamma}{\pi(\gamma^2 + \omega^2)}, \quad (2.52)$$

onde  $\gamma$  é uma constante que especifica a largura da distribuição. Substituindo essa distribuição na Eq. (2.46) e resolvendo a integral é possível obter

$$r = \sqrt{1 - \frac{2\gamma}{K}}, \quad (2.53)$$

e o acoplamento crítico pode ser obtido da Eq. (2.48)

$$K_c = \frac{2}{\pi g(\omega)} = \frac{2}{\pi \frac{1}{\pi\gamma}} = 2\gamma, \quad (2.54)$$

assim

$$r = \sqrt{1 - K_c/K}. \quad (2.55)$$

Essa expressão mostra que o parâmetro de ordem cresce continuamente a partir do acoplamento crítico  $K_c$  caracterizando uma transição de segunda ordem, como mostrado na Fig. (2.5).

Outra distribuição  $g(\omega)$  de frequências naturais que fornece uma expressão explícita para o parâmetro de ordem é uma distribuição uniforme. Foi mostrado que essa distribuição permite uma transição de fase descontínua no modelo de Kuramoto [28]. Considerando uma distribuição uniforme dada por

$$g(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\gamma} & , \text{ para } |\omega| \leq \gamma, \\ 0 & , \text{ para } |\omega| > \gamma. \end{cases} \quad (2.56)$$

É possível utilizar a Eq. (2.44) e, substituindo a distribuição dada pela Eq. (2.56) obter

$$r = \int_{-\gamma}^{\gamma} g(\omega) \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{K^2 r^2}} d\omega$$

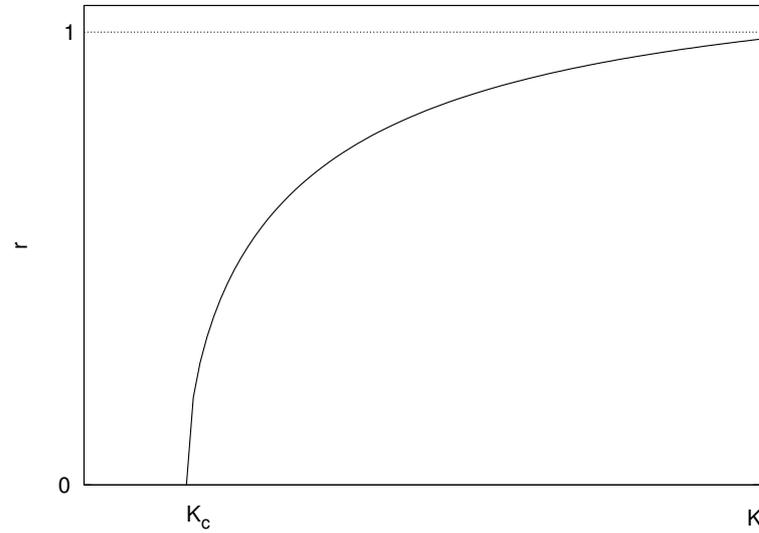


FIGURA 2.5: Parâmetro de ordem  $r$  em função do acoplamento  $K$  para o modelo de Kuramoto com distribuição de Lorentz para as frequências naturais

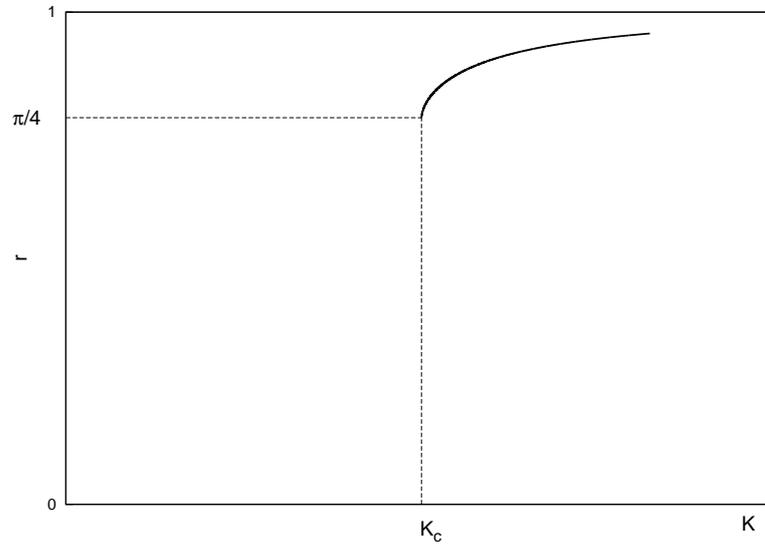


FIGURA 2.6: Parâmetro de ordem  $r$  em função do acoplamento  $K$  para o modelo de Kuramoto com distribuição uniforme para as frequências naturais [27]

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{K^2 r^2}} + \frac{Kr}{2\gamma} \arcsin\left(\frac{\gamma}{Kr}\right). \quad (2.57)$$

A Eq. (2.57) é uma equação transcendental que fornece a dependência de  $r$  sobre  $K$ . Uma solução com  $r > 0$  existe somente para  $Kr \geq \gamma$ . No ponto crítico,  $K_c r_c = \gamma$ , a solução de sincronização desaparece em  $r < r_c = \pi/4$ . O valor correspondente para o acoplamento crítico é

$$K_c = \frac{4\gamma}{\pi}, \quad (2.58)$$

ou seja, contrariamente ao que acontece com distribuições unimodais como a de Lorentz, a distribuição uniforme de frequências naturais permite uma transição do tipo de primeira ordem, onde o parâmetro de ordem “salta” descontinuamente do zero para um valor  $r_c$  como mostrado na Fig. (2.6). É possível verificar também que nesse caso o parâmetro de ordem cresce a partir do acoplamento crítico com uma lei de escala do tipo  $r - r_c \sim (K - K_c)^{2/3}$  [28].

Em um trabalho mais recente [29] foi mostrado que é possível generalizar os casos anteriores utilizando uma distribuição de frequências naturais dada por

$$g(\omega) = g(0) - C(\omega - \omega_0)^m H(\omega - \omega_0), \quad (2.59)$$

onde  $C$  é uma constante,  $m \geq 0$  um parâmetro,  $\omega_0 > 0$  a frequência média e  $H(\omega)$  é uma função de Heaviside. Neste trabalho encontrou-se uma lei de escala para o parâmetro de ordem do tipo

$$r - r_c \sim (K - K_c)^{2/(2m+3)}, \quad (2.60)$$

com  $r_c = \pi\omega_0 g(0)/2$ .

Assim, para  $m = 0$  o modelo tem uma transição de primeira ordem com expoente crítico  $2/3$  para o parâmetro de ordem. No caso de  $m = 1/2$  e tomando o limite da frequência média  $\omega_0 \rightarrow 0$ , a transição de fase se torna de segunda ordem com expoente crítico  $1/2$ .

### 2.3.3 Efeitos de ruído na transição de fase

Em 1987 Hidetsugu Sakaguchi estudou o modelo de Kuramoto sob efeitos de campos externos de duas espécies: campos devido a forças periódicas e campos

devido a ruídos aleatórios [19]. Neste último caso, Sakaguchi propôs um modelo que ficou conhecido como modelo de Kuramoto-Sakaguchi (K-S) dado por

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) + \xi_i(t) \quad i = 1, \dots, N \quad (2.61)$$

onde  $\xi_i(t)$  é um ruído Gaussiano branco que possui as seguintes propriedades

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0 \quad (2.62)$$

$$\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = 2D \delta_{i,j} \delta(t - t'). \quad (2.63)$$

Utilizando a forma discreta da equação para o parâmetro de ordem Eq. (2.35) e definindo  $\psi = \omega_0 t + \theta_0$ , temos

$$r e^{i(\omega_0 t + \theta_0)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}, \quad (2.64)$$

assim, o modelo de K-S pode ser escrito por uma equação de Langevin na forma

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega - Kr \sin \phi + \xi_i(t), \quad (2.65)$$

onde  $\omega = \omega_i - \omega_0$  e  $\phi = \theta_i - \omega_0 t - \theta_0$ . No limite contínuo, o modelo é descrito em termos de uma função de distribuição  $\rho(\phi, \omega, t)$  cuja evolução é governada pela seguinte equação de Fokker-Planck

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial \phi^2} - \frac{\partial}{\partial \phi} [(\omega - Kr \sin \phi) \rho]. \quad (2.66)$$

A solução estacionária  $\rho_s(\phi, \omega)$  da Eq. (2.66) satisfazendo a condição periódica de contorno  $\rho(\phi, \omega) = \rho(\phi + 2\pi, \omega)$  é dada por [19]

$$\rho_s(\phi, \omega) = \mathcal{N} e^{(\omega\phi - Kr + Kr \cos \phi)/D} \left[ 1 + \frac{(e^{-2\pi\omega/D} - 1) \int_0^\phi e^{(-\omega\phi' - Kr \cos \phi')/D} d\phi'}{\int_0^{2\pi} e^{(-\omega\phi' - Kr \cos \phi')/D} d\phi'} \right]. \quad (2.67)$$

onde a constante de normalização  $\mathcal{N}$  é determinada pela condição de normalização

$$\int_0^{2\pi} \rho_s(\phi, \omega) d\phi = 1. \quad (2.68)$$

Para encontrar o acoplamento crítico  $K_c$  deste modelo, Sakaguchi substituiu a distribuição estacionária Eq. (2.67) na equação contínua para o parâmetro de ordem Eq. (2.39) e, tomando a parte real da equação e expandindo em potências de  $Kr/D$  obteve

$$r = Kr \left[ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g(D\omega + \omega_0) \frac{d\omega}{\omega^2 + 1} + \frac{K^2 r^2}{4D^2} \int_{-\infty}^{\infty} g(D\omega + \omega_0) \left( \frac{1}{\omega^2 + 4} - \frac{\omega}{(\omega^2 + 1)^2} \right) d\omega + \mathcal{O} \left( \frac{K^4 r^4}{D^4} \right) \right]. \quad (2.69)$$

O primeiro termo da expansão na Eq. (2.69) fornece o acoplamento crítico para sincronização do modelo

$$K_c(D) = \frac{2}{\int_{-\infty}^{\infty} g(D\omega + \omega_0) \frac{d\omega}{\omega^2 + 1}}, \quad (2.70)$$

e, considerando a expansão até o segundo termo, é possível verificar que o parâmetro de ordem próximo do ponto crítico se comporta da forma  $r \sim (K_c - K)^{1/2}$ .

Assim como no caso sem ruído, é possível calcular explicitamente o valor do acoplamento crítico  $K_c$  em alguns casos particulares de distribuições  $g(\omega)$  das frequências naturais. Fazendo  $\omega_0 = 0$  e utilizando uma distribuição de Lorentz  $g(\omega) = \gamma/\pi(\gamma^2 + \omega^2)$  na Eq. (2.70), encontramos

$$K_c(D) = \frac{2}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma}{\pi(\gamma^2 + D^2\omega^2)} \frac{d\omega}{\omega^2 + 1}} = 2(D + \gamma). \quad (2.71)$$

Fazendo uma transformação de variáveis  $\omega \rightarrow \omega/D$  na Eq. (2.70) e utilizando uma distribuição uniforme de frequências naturais  $g(\omega) = 1/2\gamma$  para  $-\gamma \leq \omega \leq \gamma$  e  $g(\omega) = 0$  para qualquer outro valor, o acoplamento crítico é dado por

$$K_c(D) = \frac{4\gamma D}{\int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{d\omega}{(1 + \omega^2/D^2)}} = \frac{2\gamma}{\arctan \frac{\gamma}{D}}. \quad (2.72)$$

Com o intuito de comparação, apresentamos uma tabela com os acoplamentos críticos do modelo de Kuramoto sem ruído, dados pelas equações Eq. (2.54) e Eq. (2.58) e as equações Eq. (2.71) e Eq. (2.72) respectivamente, que correspondem aos acoplamentos críticos do modelo de Kuramoto-Sakaguchi. A partir desses da-

| Distribuição |   | Acoplamento crítico         |  |
|--------------|---|-----------------------------|--|
| Tipo         | Equação   | Sem ruído                   | Com ruído                                  |
| Lorentz      | $g(\omega) = \frac{\gamma}{\pi(\gamma^2 + \omega^2)}$   | $K_c = 2\gamma$             | $K_c = 2(\gamma + D)$                      |
| Uniforme     | $g(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\gamma} & , \text{ para }  \omega  \leq \gamma, \\ 0 & , \text{ para }  \omega  > \gamma. \end{cases}$ | $K_c = \frac{4\gamma}{\pi}$ | $K_c = \frac{2}{\arctan \frac{\gamma}{D}}$ |

dos é possível observar que os efeitos do ruído aditivo, introduzidos pela constante de difusão, têm o único papel de aumentar o acoplamento crítico que dá início ao processo de sincronização do sistema de osciladores  $K_c(D) > K_c$  [27].

## Capítulo 3

# Termodinâmica de osciladores de fase com ruído aditivo

Neste capítulo iniciaremos a apresentação de resultados da tese abordando um caso particular do modelo de K-S de uma perspectiva da termodinâmica do equilíbrio. Com esse propósito vamos considerar que cada oscilador do sistema possui uma mesma frequência natural, ou seja  $g(\omega) = \delta(\omega)$ . Em diversos trabalhos foi mostrado que a heterogeneidade de frequências naturais leva o sistema a um estado estacionário de não equilíbrio [30, 31, 32]. Por outro lado, considerando uma função de acoplamento ímpar, como é o caso do modelo de K-S e, frequências naturais idênticas, o sistema satisfaz o balanço detalhado e é possível interpretar o modelo de K-S como uma difusão de partículas brownianas sob a ação de um potencial periódico [33]. Para este modelo, utilizando o formalismo da equação de Fokker-Planck, podemos encontrar a distribuição estacionária, que neste caso corresponde a distribuição que caracteriza o equilíbrio termodinâmico. Como resultados novos apresentaremos uma definição de temperatura para o modelo e a partir da distribuição de equilíbrio obteremos e analisaremos as expressões analíticas da entropia e calor específico por oscilador do sistema.

### 3.1 Equações de Langevin e Fokker-Planck

Considere o modelo de K-S dado pela Eq. (2.61) com osciladores de fase idênticos  $\omega_i = \omega$  descritos pela equação estocástica

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) + \xi_i(t), \quad i = 1, \dots, N \quad (3.1)$$

onde  $\xi_i(t)$  é um ruído Gaussiano branco cuja média é  $\langle \xi_i(t) \rangle = 0$  e a correlação é dada por  $\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = 2D \delta_{i,j} \delta(t - t')$ .

Nesse sistema, a dinâmica ordem-desordem é controlada simplesmente por dois parâmetros: o acoplamento global  $K$  que define a intensidade da interação entre os osciladores e age no sentido de ordenar o sistema, sincronizando-o, e as forças de flutuação, devidas ao ruído, cuja intensidade é dada pelo parâmetro  $D$  e que atuam independentemente na dinâmica de cada oscilador, tendo um efeito dispersivo.

A transformação  $\theta_i \rightarrow \theta_i + \omega t$  permite-nos escrever a Eq. (3.1) de maneira ainda mais simples

$$\frac{d\theta_i}{dt} = Kr \sin(\psi - \theta_i) + \xi_i(t), \quad i = 1, \dots, N \quad (3.2)$$

onde aqui utilizamos a definição discreta do parâmetro de ordem dada pela Eq. (2.35). A Eq. (3.2) é uma equação de Langevin desacoplada que descreve a dinâmica do oscilador  $\theta_i(t)$ . O efeito dos outros osciladores do sistema aparecem em termos das quantidades de campo médio  $r$  e  $\psi$ . O ruído Gaussiano branco  $\xi_i(t)$  é independente do estado do sistema e nesse caso é identificado na literatura como um *ruído aditivo* [33]. A partir daqui, denominaremos a Eq. (3.2) de modelo de Kuramoto com ruído aditivo - KRA.

No intuito de desenvolver uma abordagem termodinâmica do estado de sincronização do modelo de KRA, é conveniente mudar a perspectiva de descrição da dinâmica do processo. Em vez de considerar a dinâmica de um processo estocástico dado pela equação de Langevin Eq. (3.2), vamos analisar o processo de sincronização por meio da evolução de uma função de distribuição das fases e, para fazer isso,

tomamos o limite do contínuo, onde  $N \rightarrow \infty$ . Uma vez que há um número infinito de osciladores, em vez de acompanhar a fase de cada oscilador individualmente, os osciladores podem ser descritos em termos de uma função de distribuição  $\rho(\theta, t)$  sendo que  $\rho(\theta, t)d\theta$  fornece a fração de osciladores que situam entre  $\theta$  e  $\theta + d\theta$ , no tempo  $t$ . A distribuição de fase evolui no tempo de acordo com a seguinte equação de Fokker-Planck:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} [rK \sin(\theta - \psi) \rho]. \quad (3.3)$$

Podemos encontrar a solução estacionária  $\rho_s(\theta)$  dessa equação fazendo  $\partial \rho / \partial t = 0$

$$\rho_s(\theta) \propto \exp \left[ \frac{Kr}{D} \cos(\theta - \psi) \right], \quad (3.4)$$

a constante de proporcionalidade da expressão acima é obtida da condição de normalização  $\int_0^{2\pi} \rho_s(\theta) d\theta = 1$ . Assim, como mostrado em [34, 35], a distribuição estacionária é dada por

$$\rho_s(\theta) = \mathcal{N}^{-1} \exp \left[ \frac{Kr}{D} \cos(\theta - \psi) \right], \quad (3.5)$$

e onde a constante de normalização  $\mathcal{N}$

$$\mathcal{N} = 2\pi I_0(Kr/D), \quad (3.6)$$

é escrita em termos de uma função modificada de Bessel de primeira espécie, expressa de modo geral como [36]

$$I_n(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\kappa \cos(\theta)} \cos(n\theta) d\theta. \quad (3.7)$$

Uma distribuição semelhante a Eq. (3.5) aparece no contexto da engenharia de rádio (eletrônica) no estudo de osciladores sob ação de flutuações de voltagens externas, como mostrado por Stratonovich [37] e também no contexto da estatística direcional, onde é conhecida como “distribuição de Von Mises” [38].

A partir da distribuição estacionária Eq. (3.5) é possível encontrar a expressão analítica para o parâmetro de ordem no limite contínuo

$$r e^{i\psi} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} = \int_0^{2\pi} \rho_s(\theta) e^{i\theta} d\theta, \quad (3.8)$$

assim [34],

$$r = \int_0^{2\pi} e^{i(\theta-\psi)} \rho_s(\theta) d\theta = \frac{I_1(Kr/D)}{I_0(Kr/D)}. \quad (3.9)$$

### 3.2 Estabilidade do estado incoerente

Nesta seção analisaremos a estabilidade linear do estado incoerente do modelo de KRA no intuito de encontrar o acoplamento crítico para sincronização. Sabemos que o sistema pode exibir uma transição para um regime de sincronização quando o acoplamento excede um certo valor limiar. Para este dado acoplamento, os osciladores espontaneamente sincronizam. Seguindo uma metodologia semelhante a apresentada no trabalho de Strogatz e Mirollo [39], vamos linearizar a equação de Fokker-Planck do modelo de KRA em torno do estado incoerente para encontrar as condições que levam o sistema de osciladores ao regime sincronizado.

Partindo da equação de Fokker-Planck,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} [rK \sin(\theta - \psi) \rho], \quad (3.10)$$

vamos adicionar uma pequena perturbação na solução incoerente  $\rho_0 = 1/2\pi$  que corresponde ao estado onde os osciladores estão distribuídos uniformemente em torno de um círculo de raio unitário, assim

$$\rho(\theta, t) = \frac{1}{2\pi} + \epsilon \eta(\theta, t). \quad (3.11)$$

A perturbação  $\eta$  é uma função arbitrária de  $\theta$  e  $t$  e sua intensidade é especificada pelo parâmetro  $\epsilon$ , onde  $\epsilon \in \mathbb{R}$  e  $0 < \epsilon \ll 1$ . Devido a condição de normalização:  $\int_0^{2\pi} \rho(\theta, t) d\theta = 1$ , temos que ter

$$\int_0^{2\pi} \eta(\theta, t) d\theta = 0. \quad (3.12)$$

Substituindo a solução perturbativa na equação de Fokker-Planck e tomando as derivadas em  $\theta$  obtemos

$$\epsilon \frac{\partial \eta}{\partial t} = \epsilon D \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} + \left( \frac{1}{2\pi} + \epsilon \eta \right) rK \cos(\theta - \psi) + rK \sin(\theta - \psi) \epsilon \frac{\partial \eta}{\partial \theta}. \quad (3.13)$$

Como

$$\begin{aligned}
r &= \int_0^{2\pi} e^{i(\theta-\psi)} \rho(\theta, t) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} e^{i(\theta-\psi)} \left[ \frac{1}{2\pi} + \epsilon\eta \right] d\theta \\
&= \epsilon \int_0^{2\pi} e^{i(\theta-\psi)} \eta(\theta, t) d\theta.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Podemos definir  $r \equiv \epsilon r_p$ , onde  $r_p$  é o parâmetro de ordem perturbado. Escrevendo a equação (3.13) em termos do parâmetro de ordem perturbado e retendo os termos da ordem  $\mathcal{O}(\epsilon)$  temos

$$\epsilon \frac{\partial \eta}{\partial t} = \epsilon D \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} + \epsilon \frac{K}{2\pi} r_p \cos(\theta - \psi), \tag{3.15}$$

assim

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2\pi} K r_p \cos(\theta - \psi). \tag{3.16}$$

A equação Eq. (3.16) governa a dinâmica da perturbação  $\eta$ . Ela será utilizada para encontrar as condições nas quais  $\eta$  extingue (aumenta), caso em que o estado incoerente é estável (instável).

Uma vez que  $\eta(\theta, t)$  é uma função periódica que tem período de  $2\pi$  em  $\theta$ , podemos escrevê-la, de maneira conveniente, em termos de uma série de Fourier

$$\eta(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t) e^{in\theta} = c(t) e^{i\theta} + c^*(t) e^{-i\theta} + \eta^\perp(\theta, t), \tag{3.17}$$

onde  $c = c_1$  é o primeiro coeficiente da expansão e  $c^* = c_1^*$  é o seu conjugado complexo. Como  $\eta$  é real,  $c_{-1} = c_1^*$ . O termo  $c_0$  foi desconsiderado devido a condição Eq. (3.12) e o termo  $\eta^\perp$  contém todos os harmônicos de ordem superior.

Substituindo a expansão Eq. (3.17) no parâmetro de ordem perturbado

$$\begin{aligned}
r_p &= \int_0^{2\pi} e^{i(\theta-\psi)} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t) e^{in\theta} \right) d\theta \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t) e^{-i\psi} \int_0^{2\pi} e^{i(1+n)\theta} d\theta \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t) e^{-i\psi} \delta_{n,-1} 2\pi \\
&= 2\pi c_{-1}(t) e^{-i\psi}, \tag{3.18}
\end{aligned}$$

assim

$$r_p = 2\pi c^*(t) e^{-i\psi}. \tag{3.19}$$

Sendo:  $r_p \cos(\psi - \theta) = \mathbb{R}[r_p e^{i(\psi-\theta)}]$  e utilizando o fato que  $\mathbb{R}(f) = (f + f^*)/2$ , podemos escrever

$$r_p \cos(\psi - \theta) = \pi [c^*(t) e^{-i\theta} + c(t) e^{i\theta}], \tag{3.20}$$

substituindo agora as Eqs. (3.20) e (3.17) na equação que governa a dinâmica da perturbação, Eq. (3.16), temos

$$\frac{\partial}{\partial t} [c e^{i\theta} + c^* e^{-i\theta} + \eta^\perp] = D \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} [c e^{i\theta} + c^* e^{-i\theta} + \eta^\perp] + \frac{K}{2} [c e^{i\theta} + c^* e^{-i\theta}], \tag{3.21}$$

Tomando as derivadas e agrupando os termos

$$e^{i\theta} \left[ \frac{\partial c}{\partial t} + Dc - \frac{K}{2}c \right] + e^{-i\theta} \left[ \frac{\partial c^*}{\partial t} + Dc^* - \frac{K}{2}c^* \right] + \left[ \frac{\partial \eta^\perp}{\partial t} - D \frac{\partial^2 \eta^\perp}{\partial \theta^2} \right] = 0, \tag{3.22}$$

sendo essa equação válida para qualquer  $\theta$ , cada termo entre colchetes deve ser nulo. Como o segundo termo entre colchetes é apenas o conjugado complexo do primeiro, ele não nos fornece nenhuma informação nova, assim ficamos com duas equações

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \left[ \frac{1}{2}K - D \right] c \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial \eta^\perp}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \eta^\perp}{\partial \theta^2}. \tag{3.24}$$

Vamos analisar a evolução do modo fundamental  $c(t)$  na Eq. (3.23) uma vez que ele determina o comportamento de  $r(t)$

$$r(t) = \epsilon r_p(t) = \epsilon [2\pi c^*(t) e^{-i\psi}]. \tag{3.25}$$

A Eq. (3.23) tem como solução:  $c(t) = e^{\lambda t}$  onde

$$\lambda = \frac{1}{2}K - D. \quad (3.26)$$

Como  $c(t)$  é real, para termos sincronização, o parâmetro de ordem  $r(t)$  na Eq. (3.25) deve crescer com o tempo, assim, é necessário que tenhamos  $\lambda > 0$ . Se  $\lambda < 0$  a perturbação decresce com o tempo e, por sua vez  $r(t) \rightarrow 0$ .

Assim, para  $\lambda > 0$  na Eq. (3.26), devemos ter  $K > 2D$ . O acoplamento crítico é obtido fazendo  $\lambda = 0$

$$K_c = 2D. \quad (3.27)$$

### 3.3 Abordagem termodinâmica

#### 3.3.1 Análise do equilíbrio

O modelo de KRA descrito pela Eq. (3.2) pode ser expresso de maneira geral como

$$\frac{d\theta}{dt} = f(\theta, t) + \xi(t), \quad (3.28)$$

onde a função de acoplamento é dada por  $f(\theta, t) = -Kr \sin(\theta - \psi)$ . Quando o sistema não tem heterogeneidade de frequências naturais  $\omega_i = \omega$  e a função de acoplamento é ímpar, isto é  $f(\theta) = -f(-\theta)$ , o sistema obedece o balanço detalhado e as soluções para o estado estacionário correspondem a soluções de equilíbrio termodinâmico [31]. As consequências físicas dessas condições seguem que a função  $f$  pode ser interpretada como uma força periódica conservativa, ou seja, o trabalho realizado em um caminho fechado, quando a fase do oscilador varia de  $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$  é nulo

$$W = \oint f(\theta) d\theta = 0 \quad (3.29)$$

e a força pode ser escrita em termos do gradiente de um potencial

$$f(\theta) = -\frac{\partial}{\partial \theta} V(\theta), \quad (3.30)$$

sendo  $V(\theta) = -Kr \cos(\psi - \theta)$  no caso do modelo de KRA. A distribuição das fases no equilíbrio é uma distribuição tipo Boltzmann dada por

$$\rho_{eq}(\theta) = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-\beta V(\theta)}, \quad (3.31)$$

onde

$$\mathcal{Z} = \int_0^{2\pi} e^{-\beta V(\theta)} d\theta, \quad (3.32)$$

é a função de partição determinada pela condição de normalização  $\int_0^{2\pi} \rho_{eq}(\theta) d\theta = 1$ . Comparando essa distribuição com a Eq. (3.5) encontrada na resolução da Fokker-Planck para o modelo de KRA, identificamos o parâmetro  $\beta = 1/D$ .

Outra consequência do balanço detalhado que caracteriza o equilíbrio termodinâmico é que no estado estacionário, a corrente de probabilidade se anula [40]. Podemos mostrar isso utilizando o formalismo da equação de Fokker-Planck para o modelo. Vamos começar reescrevendo a equação de Fokker-Planck Eq. (3.3) na forma de uma equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial J(\theta, t)}{\partial \theta}, \quad (3.33)$$

onde

$$J(\theta, t) = rK \sin(\psi - \theta)\rho - D \frac{\partial \rho}{\partial \theta}, \quad (3.34)$$

é a corrente de probabilidade.

Podemos relacionar a velocidade angular média do oscilador (ou frequência média) com a corrente de probabilidade no estado estacionário. A frequência média é definida como

$$\Omega = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t \dot{\theta} dt. \quad (3.35)$$

De acordo com a condição ergódica, a média temporal pode ser substituída por uma média de ensemble  $\Omega = \langle d\theta_i/dt \rangle$ . Assim, utilizando a Eq. (3.2)

$$\Omega = \langle d\theta_i/dt \rangle = \langle rK \sin(\psi - \theta_i) \rangle = \int_0^{2\pi} rK \sin(\psi - \theta_i) \rho_s(\theta) d\theta, \quad (3.36)$$

onde usamos o fato que  $\langle \xi_i(t) \rangle = 0$ .

A condição para obtenção da solução estacionária é que para um tempo suficientemente longo  $t \rightarrow \infty$  a distribuição  $\partial\rho/\partial t = 0$ . Assim  $\rho(\theta, \infty) = \rho_s(\theta)$  implica diretamente  $J(\theta, \infty) = J_s = \text{constante}$ , de acordo com a Eq. (3.33). Reescrevendo o último termo da Eq. (3.36) em termos da corrente de probabilidade no estado estacionário, temos

$$\Omega = \int_0^{2\pi} J_s d\theta + D \int_0^{2\pi} \frac{\partial\rho_s}{\partial\theta} d\theta = 2\pi J_s, \quad (3.37)$$

sendo que neste resultado consideramos a periodicidade da distribuição de fases  $\rho_s(\theta + 2\pi) = \rho_s(\theta)$ .

Esse resultado nos mostra que a velocidade angular média do oscilador está diretamente relacionada com a corrente de probabilidade no estado estacionário. Utilizando a distribuição estacionária Eq. (3.5) encontramos

$$\frac{\partial\rho_s}{\partial\theta} = \frac{rK}{D} \sin(\psi - \theta)\rho_s(\theta), \quad (3.38)$$

e substituindo na Eq. (3.34) vemos que no estado estacionário a corrente de probabilidade se anula  $J_s = 0$ , mostrando que nesse estado a velocidade angular média do oscilador não tem um sentido preferencial.

Essas condições nos permite afirmar que o sistema de osciladores alcança um estado estacionário em que a distribuição de fases  $\rho_s(\theta)$  pode ser identificada com a distribuição de equilíbrio do sistema  $\rho_{eq}(\theta)$  e grandezas termodinâmicas podem ser obtidas a partir dela. Com esse fim, primeiro vamos definir uma temperatura generalizada  $T$  para o sistema considerando o valor do acoplamento crítico Eq. (3.27)

$$T = \frac{K_c}{K} = \frac{2D}{K}. \quad (3.39)$$

Essa definição é conveniente no sentido de reduzir os parâmetros de análise e também reescala para o valor unitário o ponto de transição de fase do sistema  $T_c = 1$ . Assim, a distribuição de equilíbrio para o modelo de KRA em termos da temperatura generalizada se torna

$$\rho_{eq}(\theta) = \frac{1}{Z} \exp \left[ \frac{2r}{T} \cos(\theta - \psi) \right], \quad (3.40)$$

onde

$$\mathcal{Z} = 2\pi I_0(2r/T) \quad (3.41)$$

é a função de partição. A distribuição de equilíbrio Eq. (3.40) será utilizada na próxima subseção para obtenção da expressão para entropia do modelo.

O parâmetro de ordem Eq. (3.9) escrito em termos da temperatura generalizada é dado por

$$r = \frac{I_1(2r/T)}{I_0(2r/T)}. \quad (3.42)$$

Na Fig. (3.1) é mostrado o comportamento do parâmetro de ordem Eq. (3.42) em função da temperatura. Para  $T \rightarrow 0$ , ou seja,  $K \rightarrow \infty$  o parâmetro de ordem tende para  $r \rightarrow 1$  indicando que o sistema está completamente sincronizado. Para  $T = 1$ , ou seja,  $K = K_c$ , o parâmetro de ordem é nulo, correspondendo ao estado completamente incoerente, onde os osciladores estão se movendo de forma desordenada. O sistema não muda o seu estado, permanecendo completamente desordenado, para todo  $T > 1$ , ou seja, qualquer  $K < K_c$ . Uma característica importante desse sistema de osciladores é a semelhança de comportamento do parâmetro de ordem com a magnetização de um sistema de spins em função da temperatura. Esta figura deixa claro a utilidade da nossa definição de temperatura.

O comportamento crítico do parâmetro de ordem pode ser obtido expandindo a Eq. (3.42) na região crítica  $T \approx T_c = 1$  que corresponde a  $r \approx 0$ . Expandindo a razão das funções de Bessel obtemos

$$r \approx \frac{r}{T} - \frac{r^3}{2T^3} + \mathcal{O}(r^5), \quad (3.43)$$

considerando  $T^2 \approx T_c^2 = 1$ , encontramos

$$r = \sqrt{2}(T_c - T)^{1/2}. \quad (3.44)$$

O expoente 1/2 para o parâmetro de ordem na região crítica evidencia as características de campo médio do modelo na transição de fase.

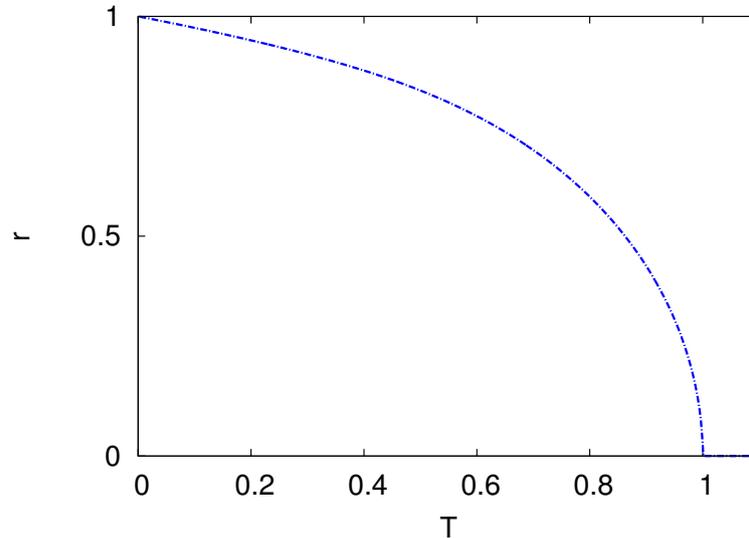


FIGURA 3.1: Parâmetro de ordem  $r$  em função da temperatura  $T$  para o modelo de Kuramoto com ruído aditivo.

### 3.3.2 Entropia

A entropia é uma das grandezas termodinâmicas fundamentais [41]. Na termodinâmica do equilíbrio, ela está associada a direção natural de ocorrência dos processos que envolvem distribuição e transferência de energia entre estados de equilíbrio [42]. A entropia de um sistema isolado tende a aumentar, e esse aumento pode ser interpretado microscopicamente como uma maior desordem das partículas que compõe o sistema [41]. No caso de um sistema dissipativo de osciladores, como é o caso do modelo de KRA, quando a temperatura se reduz abaixo da temperatura crítica, o sistema sincroniza exibindo uma transição de fase contínua, onde o parâmetro de ordem aumenta indicando uma ordenação interna do sistema. Essa ordenação deve refletir-se numa redução da entropia do sistema, que acontece como resultado de uma liberação de energia na forma de calor para o ambiente.

A análise da entropia é importante para quantificar de um outro ponto de vista o estado de ordem do sistema de osciladores, e a partir dela, obter outras grandezas termodinâmicas de interesse. Com o objetivo de obter uma expressão analítica para a entropia do modelo de KRA, vamos adotar a definição de entropia

dada por Gibbs

$$S = - \int \rho_{eq}(\theta) \ln \rho_{eq}(\theta) d\theta, \quad (3.45)$$

onde aqui admitimos o valor unitário para a constante de Boltzmann  $\kappa_B = 1$ . Substituindo a distribuição de equilíbrio Eq. (3.40) na Eq. (3.45) obtemos

$$S = - \int_0^{2\pi} \rho_{eq}(\theta) \left[ \frac{2r}{T} \cos(\theta - \psi) - \ln[2\pi I_0(2r/T)] \right] d\theta$$

integrando essa equação, podemos escrever a entropia para o modelo de KRA como

$$S = \ln[2\pi I_0(2r/T)] - \frac{2r}{T} \frac{I_1(2r/T)}{I_0(2r/T)}. \quad (3.46)$$

Essa expressão estabelece a relação da entropia, uma “mensuração de desordem”, com o parâmetro de ordem do sistema. A partir dela podemos estender a compreensão termodinâmica da transição de fase no modelo de KRA.

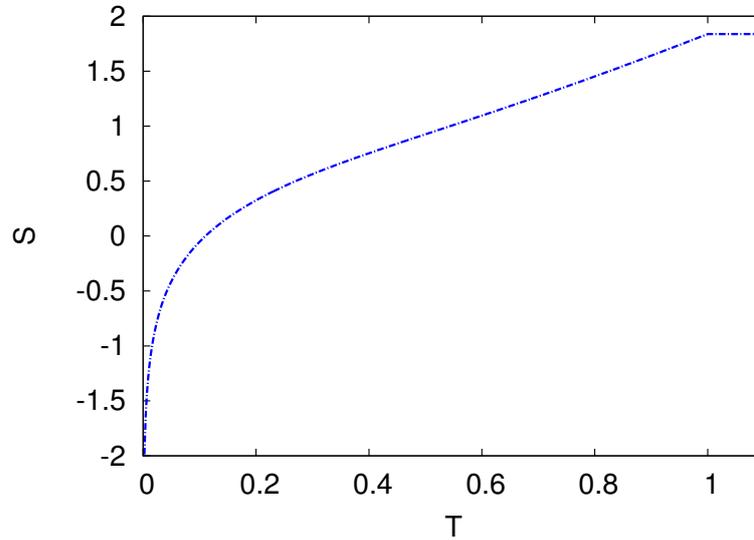


FIGURA 3.2: Entropia  $S$  em função da temperatura  $T$  para o modelo de Kuramoto com ruído aditivo.

Na Fig. (3.2) mostramos o comportamento da entropia  $S$  expressa pela Eq. (3.46) em função da temperatura  $T$ . É possível ver que na temperatura crítica  $T_c = 1$  a entropia é máxima  $S_{max}$  indicando o estado de maior desordem do sistema. À medida que a temperatura decai  $T < T_c$  a entropia diminui tendendo para menos

infinito quando a temperatura vai para  $T \rightarrow 0$ . Esse comportamento para entropia em  $T = 0$  é semelhante ao que ocorre para a entropia de um gás ideal.

Os limites físicos da entropia podem ser obtidos a partir da Eq. (3.46), considerando primeiro o caso de temperaturas próximas a temperatura crítica, ou seja  $T \approx T_c, r \approx 0$ . Nesse caso as funções modificadas de Bessel tendem para  $I_0(2r/T) \approx 1 + r^2/T^2$  e  $I_1(2r/T)/I_0(2r/T) \approx r/T$  e a expressão para entropia se torna

$$S = \ln(2\pi) - \frac{r^2}{T^2}. \quad (3.47)$$

Quando  $T = T_c$  o parâmetro de ordem se anula  $r = 0$ , e o valor máximo para entropia é  $S = S_{max} = \ln(2\pi)$ . Assim, próximo da região crítica, para  $T < T_c$  a entropia diminui com

$$\Delta S = S - S_{max} = -\frac{r^2}{T^2}. \quad (3.48)$$

Considerando agora o limite de baixas temperaturas  $T \rightarrow 0, r \approx 1$ , a função modificada de Bessel toma a forma  $I_0(2r/T) \approx e^{2r/T} / \sqrt{4\pi r/T}$  e a entropia tende para

$$S = \frac{1}{2} \ln(\pi T), \quad (3.49)$$

evidenciando uma divergência típica de um gás ideal, quando  $T \rightarrow 0$  a entropia tende para  $S \rightarrow -\infty$ .

### 3.3.3 Energia interna

A energia interna do sistema de osciladores pode ser obtida a partir de outro potencial termodinâmico, a energia livre de Helmholtz

$$F = U - TS. \quad (3.50)$$

A partir da física estatística, sabemos que a energia livre está relacionada com a função de partição Eq. (3.41) da forma

$$F = -T \ln \mathcal{Z} = -T \ln[2\pi I_0(2r/T)], \quad (3.51)$$

assim, utilizando a energia livre Eq. (3.51) e a entropia Eq. (3.46) podemos escrever a energia interna da relação termodinâmica Eq. (3.50) como

$$U = -2r \frac{I_1(2r/T)}{I_0(2r/T)} = -2r^2. \quad (3.52)$$

Esse resultado nos permite interpretar a sincronização como análoga a um processo de resfriamento, onde a energia interna  $U$  do sistema de osciladores decai com o aumento do parâmetro de ordem  $r$ , tendo como resultado uma liberação de calor  $Q$  para o ambiente. Na próxima subseção vamos verificar como o sistema armazena calor para uma dada temperatura por meio da análise do calor específico.

### 3.3.4 Calor específico

O calor específico  $C$ , por definição, é a razão da quantidade infinitesimal de calor  $dQ$  absorvida por unidade de massa do corpo para um aumento infinitesimal de temperatura  $dT$ . No modelo de KRA, o calor específico representa a quantidade de energia na forma de calor que o sistema armazena por oscilador em uma dada variação de temperatura. Assim

$$C = \frac{dQ}{dT}. \quad (3.53)$$

Como estamos considerando processos em equilíbrio termodinâmico, podemos relacionar a quantidade de calor com a variação da entropia  $dQ = TdS$ . Partindo da Eq. (3.46) vamos definir convenientemente  $\kappa \equiv 2r/T$  e escrever a entropia como

$$S = \ln[2\pi I_0(\kappa)] - \kappa \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)}. \quad (3.54)$$

Portanto,

$$dS = \frac{\partial S}{\partial \kappa} d\kappa, \quad (3.55)$$

e, uma vez que  $\kappa = \frac{2}{T} \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)}$ , podemos escrever  $\kappa$  como um funcional  $\kappa \mapsto L(\kappa, T)$ .

Assim

$$d\kappa = \left[ 1 - \left( \frac{\partial L}{\partial \kappa} \right)_T \right]^{-1} \left( \frac{\partial L}{\partial T} \right)_\kappa dT. \quad (3.56)$$

Efetuada as derivadas parciais

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial \kappa} &= -\kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} \left( \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} \right), \\ \left( \frac{\partial L}{\partial \kappa} \right)_T &= \frac{2}{T} \frac{\partial}{\partial \kappa} \left( \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} \right), \\ \left( \frac{\partial L}{\partial T} \right)_\kappa &= -\frac{2}{T^2} \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)}.\end{aligned}\quad (3.57)$$

Definindo  $\Phi(\kappa) \equiv \frac{\partial}{\partial \kappa} \left( \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} \right)$ , podemos escrever a expressão para o calor específico Eq. (3.53) do modelo de KRA como

$$C = \frac{\kappa^2 \Phi(\kappa)}{1 - \frac{2}{T} \Phi(\kappa)} \quad (3.58)$$

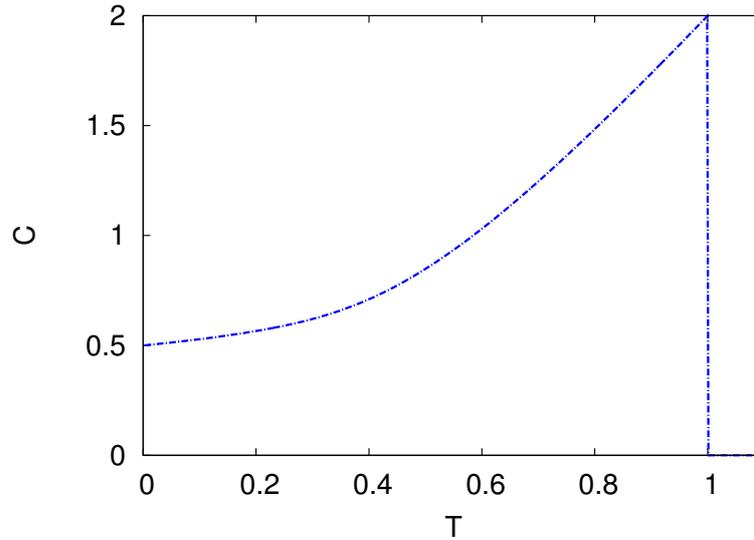


FIGURA 3.3: Calor específico  $C$  em função da temperatura  $T$  para o modelo de Kuramoto com ruído aditivo.

Na Fig. (3.3) mostramos o comportamento do calor específico  $C$  expresso pela Eq. (3.58) em função da temperatura  $T$ . Quando a temperatura é nula  $T = 0$ , o calor específico tende para uma constante  $C = 0.5$ . Para  $T > 0$  o calor específico aumenta monotonicamente com a temperatura até atingir um valor máximo em  $T = T_c$ , onde  $C = 2$ . Em  $T > T_c$  o calor específico se anula indicando o limite de armazenamento de energia entre os osciladores do sistema.

Assim como fizemos para a entropia, podemos obter analiticamente os limites físicos do calor específico. Partindo da Eq. (3.58), quando  $T \rightarrow 0$  o parâmetro  $\kappa = 2r/T \rightarrow \infty$  e nessas condições temos  $I_1(\kappa)/I_0(\kappa) \approx 1 - 1/2\kappa - \mathcal{O}(1/\kappa^2)$ . Então

$$\Phi(\kappa) = \frac{\partial}{\partial \kappa} \left( \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} \right) \approx \frac{1}{2\kappa^2}, \quad (3.59)$$

e a expressão para o calor específico se torna

$$C = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{T}{4r^2} \right)^{-1}. \quad (3.60)$$

Quando  $T = 0$  o parâmetro de ordem é  $r = 1$  e a Eq. (3.60) fornece  $C = 1/2$ . Esse resultado pode ser obtido diretamente da expressão assintótica da entropia para baixas temperaturas Eq. (3.49) considerando que  $dS = dT/2T$  nesse limite. Assim

$$C = T \frac{dS}{dT} = \frac{1}{2} \quad (3.61)$$

O limite do calor específico em  $T = T_c$  pode ser obtido facilmente utilizando as expressões da entropia Eq. (3.47) e parâmetro de ordem Eq. (3.44) na região crítica.

$$S = S_{max} - 2 \frac{(T_c - T)}{T^2}. \quad (3.62)$$

Assim

$$C = \lim_{T \rightarrow T_c} T \frac{dS}{dT} = \lim_{T \rightarrow T_c} \left[ \frac{4(T_c - T)}{T^2} + \frac{2}{T} \right] = 2, \quad (3.63)$$

uma vez que  $T_c = 1$ .

## Capítulo 4

# Termodinâmica de osciladores de fase com ruído multiplicativo

Neste capítulo, propomos uma generalização do modelo de Kuramoto com ruído aditivo e estudamos as suas propriedades termodinâmicas. O ruído multiplicativo proposto para generalizar o modelo pode ser interpretado como um campo agindo sobre as fases dos osciladores permitindo tanto o aumento quanto a redução do estado de sincronização. Nesse sentido podemos estender ainda mais a analogia termodinâmica obtendo, além da entropia e calor específico, o campo externo atuando sobre os osciladores e a susceptibilidade do sistema. A riqueza de comportamento do modelo proposto é evidenciada nas analogias de comportamento com sistemas magnéticos e sistemas fluidos.

### 4.1 Equações de Langevin e Fokker-Planck

Começamos introduzindo uma equação diferencial estocástica geral na forma de Ito [43] que governa a dinâmica dos osciladores acoplados

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + f_i(\{\theta\}) + \sqrt{g(\{\theta\})}\xi_i(t) \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.1)$$

onde  $\omega_i$  são as frequências naturais dos osciladores, enquanto que os termos  $f_i(\{\theta\})$  e  $g_i(\{\theta\})$  são funções de acoplamento gerais e não lineares das fases  $\{\theta\} = \theta_1, \dots, \theta_N$

e  $\xi_i$  é um ruído Gaussiano branco que obedece as relações

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0 \quad \text{com} \quad \langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = 2D\delta_{ij}\delta(t-t'), \quad (4.2)$$

sendo  $D$  a constante de difusão das fases dos osciladores. Nosso propósito é estudar a termodinâmica de osciladores de fase com ruído multiplicativo com funções de acoplamento dadas por

$$\begin{cases} f_i(\{\theta\}) = \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \\ g_i(\{\theta\}) = 1 + \frac{\sigma}{N} \sum_{j=1}^N \cos(\theta_j - \theta_i). \end{cases} \quad (4.3)$$

Na Eq. (4.3) o termo  $f_i$  é controlado pela intensidade de acoplamento  $K$ . De modo geral, o acoplamento é um número real cujo domínio vai de  $-\infty \leq K \leq \infty$  e como já foi dito, quando  $K > 0$  a interação é atrativa e para  $K < 0$  a interação é repulsiva. O termo  $g_i$  é controlado pelo acoplamento de ruído  $\sigma$  que determina a intensidade da modulação global do ruído. Devido a raiz quadrada no último termo da Eq. (4.1), o acoplamento de ruído assume valores reais delimitados entre  $-1 \leq \sigma \leq 1$ . Um ruído modulado pelo estado do sistema é chamado na literatura de ruído multiplicativo [33]. Os efeitos de um ruído multiplicativo similar ao nosso foram analisados em [44] no qual foi demonstrado que os osciladores obedeciam uma estatística angular hiperbólica.

A Eq. (4.1), com os termos  $f_i$  e  $g_i$  definidos pela Eq. (4.3), inclui dois casos particulares importantes analisados anteriormente: o modelo de Kuramoto convencional [16], considerando  $g_i(\{\theta\}) = 0$  e o modelo de Kuramoto com ruído Gaussiano branco proposto por Sakaguchi [19], onde  $g_i(\{\theta\}) = 1$ , o qual pode ser facilmente alcançado tomando  $\sigma = 0$ . Como definido na Eq. (4.3), o termo  $g_i$  inclui uma função periódica das diferenças de fases estabelecida pela função cosseno. Essa função permite um acoplamento periódico com o banho térmico sem preferência nas diferenças de fases, além de manter a invariância do modelo com respeito a um deslocamento constante das fases. Neste ponto de vista, o parâmetro  $\sigma$  determina fisicamente a intensidade de acoplamento do banho térmico ao estado do sistema e,

nesse sentido, o ruído multiplicativo pode ser interpretado como um campo, como será mostrado posteriormente.

Considerando a Eq. (4.1) e a Eq. (4.3) podemos escrever explicitamente o sistema de osciladores de fase com ruído multiplicativo como

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) + \sqrt{1 + \frac{\sigma}{N} \sum_{j=1}^N \cos(\theta_j - \theta_i)} \xi_i(t) \quad (4.4)$$

onde assumimos novamente frequências naturais iguais  $\omega_i = \omega$  para os osciladores, tendo em vista o equilíbrio termodinâmico do modelo, como discutido no capítulo anterior. Aqui, o ruído multiplicativo é de modulação global uma vez que o ruído Gaussiano branco agindo sobre cada oscilador é modulado por todos osciladores, ou seja, pelo estado do sistema. Exemplos de modulação global de ruído no modelo de Kuramoto foram mostrados em [45, 44]. Além disso, exemplos interessantes de efeitos de modulação local podem ser vistos em [46, 47], nos quais o ruído multiplicativo que afeta cada oscilador é determinado unicamente por seu próprio estado dinâmico.

Realizando agora a transformação  $\theta_i \rightarrow \theta_i + \omega t$  e utilizando a definição discreta do parâmetro de ordem Eq. (2.35), podemos reescrever a Eq.(4.4) como a seguinte equação geral de Langevin

$$\frac{d\theta_i}{dt} = Kr \sin(\psi - \theta_i) + \sqrt{1 + r\sigma \cos(\psi - \theta_i)} \xi_i(t). \quad (4.5)$$

A Eq. (4.5) é uma equação desacoplada que governa a dinâmica estocástica do oscilador  $\theta_i(t)$ , onde os efeitos dos outros osciladores do sistema aparecem nas quantidades de campo médio  $r$  e  $\psi$ . A partir daqui denominaremos a Eq. (4.5) de modelo de Kuramoto com ruído multiplicativo - KRM.

Tendo em vista uma análise termodinâmica, é interessante tomar o limite do contínuo e analisar o modelo de KRM a partir da evolução de uma função de distribuição da fase. Portanto, a densidade de fase  $\rho(\theta, t)$  do oscilador, no limite contínuo  $N \rightarrow \infty$ , é governada pela equação de Fokker-Planck não linear

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} [(1 + r\sigma \cos(\psi - \theta))\rho] - \frac{\partial}{\partial \theta} [rK \sin(\psi - \theta)\rho], \quad (4.6)$$

sendo que para obtenção da Eq. (4.6) assumimos a interpretação de Ito para a equação estocástica do modelo de KRM.

A distribuição estacionária  $\rho_s(\theta)$  dessa equação é dada por

$$\rho_s(\theta) \propto [1 + r\sigma \cos(\psi - \theta)]^{K/D\sigma-1} \quad (4.7)$$

onde a constante de proporcionalidade da expressão acima é obtida da condição de normalização  $\int_0^{2\pi} \rho_s(\theta) d\theta = 1$ . Realizando a transformação de variáveis

$$z = (1 - \sigma^2 r^2)^{-1/2}, \quad (4.8)$$

e utilizando a condição de normalização, obtemos

$$\rho_s(\theta) = \mathcal{N}^{-1} [z + \text{sgn}(\sigma) \sqrt{z^2 - 1} \cos(\psi - \theta)]^\nu. \quad (4.9)$$

Aqui,  $\text{sgn}(\sigma)$  é a função sinal. A constante de normalização  $\mathcal{N}$  e o parâmetro  $\nu$  são

$$\mathcal{N} = 2\pi P_\nu^0(z), \quad \text{e} \quad \nu = \frac{K}{D\sigma} - 1, \quad (4.10)$$

onde  $P_\nu^0(z)$  é uma função associada de Legendre de ordem zero.

A expressão analítica para o parâmetro de ordem  $r$  no estado estacionário é obtida no limite contínuo  $N \rightarrow \infty$

$$r e^{i\psi} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} = \int_0^{2\pi} \rho_s(\theta) e^{i\theta} d\theta, \quad (4.11)$$

e pode ser expressa como

$$r = \int_0^{2\pi} e^{i(\theta-\psi)} \rho_s(\theta) d\theta = \frac{\text{sgn}(\sigma) P_\nu^1(z)}{1 + \nu P_\nu^0(z)}. \quad (4.12)$$

Para este cálculo e para obtenção da distribuição estacionária, utilizamos as funções de Legendre definidas em Gradshteyn [48] (8.711.2)

$$P_\nu^m(z) = \frac{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+m)}{\pi} \int_0^\pi [z + \sqrt{z^2-1} \cos \varphi]^\nu \cos m\varphi d\varphi \quad (4.13)$$

$$= \frac{(-1)^m \nu(\nu-1)\cdots(\nu-m+1)}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos m\varphi d\varphi}{[z + \sqrt{z^2-1} \cos \varphi]^{\nu+1}}. \quad (4.14)$$

## 4.2 Estabilidade do estado incoerente

Nesta seção analisaremos a estabilidade do estado incoerente a partir da equação de Fokker-Planck do modelo de KRM. Sabemos que o sistema pode exibir uma transição para um regime de sincronização quando o acoplamento excede um certo valor limiar. Para este dado acoplamento os osciladores espontaneamente sincronizam. Utilizando a mesma metodologia do capítulo anterior, com base no trabalho do Strogatz e Mirollo [39], vamos linearizar a equação de Fokker-Planck em torno do estado incoerente para encontrar as condições que levam o sistema de osciladores ao regime sincronizado.

Partindo da equação de Fokker-Planck Eq.(4.6), vamos adicionar uma pequena perturbação na solução incoerente

$$\rho(\theta, t) = \frac{1}{2\pi} + \epsilon\eta(\theta, t), \quad (4.15)$$

onde  $\epsilon \in \mathbb{R}$  e  $0 < \epsilon \ll 1$ . Devido a condição de normalização:  $\int_0^{2\pi} \rho(\theta, t) d\theta = 1$ , temos que ter

$$\int_0^{2\pi} \eta(\theta, t) d\theta = 0. \quad (4.16)$$

Substituindo a solução perturbativa na equação de Fokker-Planck Eq. (4.6) e tomando as derivadas em  $\theta$  obtemos

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial \eta}{\partial t} &= D \left[ -r\sigma \cos(\psi - \theta) \left( \frac{1}{2\pi} + \epsilon\eta \right) + 2\epsilon r\sigma \sin(\psi - \theta) \frac{\partial \eta}{\partial \theta} + \epsilon (1 + r\sigma \cos(\psi - \theta)) \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} \right] \\ &+ \left( \frac{1}{2\pi} + \epsilon\eta \right) rK \cos(\psi - \theta) - rK \sin(\psi - \theta) \epsilon \frac{\partial \eta}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Como

$$\begin{aligned} r &= \int_0^{2\pi} e^{i(\theta-\psi)} \rho(\theta, t) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} e^{i(\theta-\psi)} \left[ \frac{1}{2\pi} + \epsilon\eta \right] d\theta \\ &= \epsilon \int_0^{2\pi} e^{i(\theta-\psi)} \eta(\theta, t) d\theta. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Podemos definir  $r \equiv \epsilon r_p$ , onde  $r_p$  é o parâmetro de ordem perturbado. Escrevendo a equação (4.17) em termos do parâmetro de ordem perturbado e retendo os termos da ordem  $\mathcal{O}(\epsilon)$  temos

$$\epsilon \frac{\partial \eta}{\partial t} = D \left[ \epsilon \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} - \epsilon \frac{\sigma}{2\pi} r_p \cos(\psi - \theta) \right] + \epsilon \frac{K}{2\pi} r_p \cos(\psi - \theta), \quad (4.19)$$

assim

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2\pi} (K - D\sigma) r_p \cos(\psi - \theta). \quad (4.20)$$

Esta é a equação que governa a dinâmica da perturbação e que, por sua vez, fornece o critério de estabilidade de um pequeno desvio da solução incoerente.

Como  $\eta$  é periódica em  $\theta$ , podemos escrever a perturbação em termos de uma série de Fourier

$$\eta(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t) e^{in\theta} = c(t) e^{i\theta} + c^*(t) e^{-i\theta} + \eta^\perp(\theta, t), \quad (4.21)$$

onde  $c = c_1$  é o primeiro coeficiente da expansão e  $c^* = c_1^*$  é o seu conjugado complexo. Uma vez que  $\eta$  é real,  $c_{-1} = c_1^*$ . O termo  $\eta^\perp$  contém todos os harmônicos de ordem superior.

Substituindo a expansão (4.21) no parâmetro de ordem perturbado

$$\begin{aligned} r_p &= \int_0^{2\pi} e^{i(\theta-\psi)} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t) e^{in\theta} \right) d\theta \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t) e^{-i\psi} \int_0^{2\pi} e^{i(1+n)\theta} d\theta \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t) e^{-i\psi} \delta_{n,-1} 2\pi \\ &= 2\pi c_{-1}(t) e^{-i\psi}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

assim

$$r_p = 2\pi c^*(t) e^{-i\psi}. \quad (4.23)$$

Sendo:  $r_p \cos(\psi - \theta) = \mathbb{R} [r_p e^{i(\psi - \theta)}]$  e usando o fato que  $\mathbb{R}(f) = (f + f^*)/2$ , podemos escrever

$$r_p \cos(\psi - \theta) = \pi [c^*(t) e^{-i\theta} + c(t) e^{i\theta}], \quad (4.24)$$

substituindo agora (4.24) e (4.21) na equação que governa a dinâmica da perturbação, Eq. (4.20)

$$\frac{\partial}{\partial t} [ce^{i\theta} + c^*e^{-i\theta} + \eta^\perp] = D \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} [ce^{i\theta} + c^*e^{-i\theta} + \eta^\perp] + \frac{(K - D\sigma)}{2} [ce^{i\theta} + c^*e^{-i\theta}], \quad (4.25)$$

Tomando as derivadas e agrupando os termos

$$e^{i\theta} \left[ \frac{\partial c}{\partial t} + Dc - \frac{(K - D\sigma)}{2}c \right] + e^{-i\theta} \left[ \frac{\partial c^*}{\partial t} + Dc^* - \frac{(K - D\sigma)}{2}c^* \right] + \left[ \frac{\partial \eta^\perp}{\partial t} - D \frac{\partial^2 \eta^\perp}{\partial \theta^2} \right] = 0, \quad (4.26)$$

uma vez que essa equação é válida para qualquer  $\theta$ , cada termo entre colchetes deve ser nulo. Como o segundo termo entre colchetes é apenas o conjugado complexo do primeiro, ele não nos fornece nenhuma informação nova, assim ficamos com duas equações

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \left[ \frac{1}{2}(K - D\sigma) - D \right] c \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial \eta^\perp}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \eta^\perp}{\partial \theta^2}. \quad (4.28)$$

Vamos analisar a evolução do modo fundamental  $c(t)$  na Eq. (4.27) uma vez que ele determina o comportamento de  $r(t)$

$$r(t) = \epsilon r_p(t) = \epsilon [2\pi c^*(t)e^{-i\psi}]. \quad (4.29)$$

A Eq. (4.27) tem como solução:  $c(t) = e^{\lambda t}$  onde

$$\lambda = \frac{1}{2}(K - D\sigma) - D. \quad (4.30)$$

Como  $c(t)$  é real, para termos sincronização, o parâmetro de ordem  $r(t)$  em (4.29) deve crescer com o tempo, assim, é necessário que tenhamos  $\lambda > 0$ . Se  $\lambda < 0$  a perturbação decresce com o tempo e, por sua vez  $r(t) \rightarrow 0$ .

Assim, para  $\lambda > 0$  na Eq. (4.30), devemos ter  $K > D(2 + \sigma)$ . O acoplamento crítico é obtido fazendo  $\lambda = 0$

$$K_c = D(2 + \sigma) \quad (4.31)$$

A Eq. (4.31) mostra que para  $\sigma = 0$  recuperamos o clássico  $K_c = 2D$  da Eq. (3.27) para o modelo de Kuramoto com ruído aditivo (KRA). Para  $\sigma < 0$ , o ruído multiplicativo tende a enfraquecer a ação dispersiva sobre os osciladores, permitindo que o sistema de osciladores sincronize com um acoplamento menor do que o modelo de KRA. Por outro lado, para  $\sigma > 0$  o ruído multiplicativo dificulta o processo de sincronização, aumentando o acoplamento crítico em relação ao modelo de KRA. Eq. (4.31) mostra que para  $\sigma = 0$  recuperamos o clássico  $K_c = 2D$  do modelo de Kuramoto com ruído aditivo (KRA). Para  $\sigma < 0$ , o ruído multiplicativo tende a enfraquecer a ação dispersiva sobre os osciladores, permitindo que o sistema de osciladores sincronize com um acoplamento menor do que o modelo de KRA. Por outro lado, para  $\sigma > 0$  o ruído multiplicativo dificulta o processo de sincronização, aumentando o acoplamento crítico em relação ao modelo de KRA.

### 4.3 Abordagem termodinâmica

#### 4.3.1 Análise do equilíbrio

A equação de Langevin para o modelo de KRM Eq. (4.5) pode ser escrita em uma forma geral como

$$\frac{d\theta}{dt} = f(\theta, t) + \sqrt{g(\theta, t)}\xi(t), \quad (4.32)$$

podemos escrever sua equação de Fokker-Planck correspondente, na forma de Ito, sendo esta dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} [g(\theta, t)\rho] - \frac{\partial}{\partial \theta} [f(\theta, t)\rho]. \quad (4.33)$$

A vantagem da interpretação de Ito para equação de Langevin com ruído multiplicativo Eq. (4.32) é a identificação direta das funções  $f$  e  $g$  com os coeficientes de deriva e difusão da equação de Fokker-Planck, respectivamente. De acordo com a

Eq. (4.5) esses coeficientes são expressos por

$$\begin{cases} f(\theta, t) = rK \sin(\psi - \theta) \\ g(\theta, t) = 1 + r\sigma \cos(\psi - \theta). \end{cases} \quad (4.34)$$

Para demonstrar o equilíbrio térmico, é mais conveniente transformar a equação de Langevin com ruído multiplicativo para uma equação de ruído aditivo e interpretar a dinâmica do sistema como uma difusão sob a ação de um potencial. É sempre possível fazer isso para um sistema unidimensional [33] como o dado pela Eq. (4.32). Partindo da equação de Fokker-Planck Eq. (4.33), vamos fazer essa transformação considerando que o primeiro termo do lado direito pode ser escrito como

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(g\rho) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \sqrt{g} \right) \sqrt{g}\rho \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sqrt{g}\rho) \right]. \quad (4.35)$$

Assim, podemos reescrever a equação de Fokker-Planck como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sqrt{g}\rho) \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{f}{\sqrt{g}} - D \frac{\partial}{\partial \theta} \sqrt{g} \right] \sqrt{g}\rho. \quad (4.36)$$

Agora vamos definir uma nova distribuição de probabilidade em uma nova variável  $\phi$

$$P(\phi, t) = \sqrt{Dg(\theta)}\rho(\theta, t), \quad (4.37)$$

esta transformação deve obedecer a condição de normalização

$$P(\phi, t)d\phi = \rho(\theta, t)d\theta, \quad (4.38)$$

usando a definição de  $P(\phi, t)$  e integrando a expressão anterior, obtemos a transformação de variáveis

$$\phi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{D}} \int_0^\theta \frac{d\theta'}{\sqrt{g(\theta')}}. \quad (4.39)$$

A derivada parcial  $\partial/\partial\theta$  se transforma como

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{1}{\sqrt{Dg}} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (4.40)$$

assim

$$\sqrt{g} \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (4.41)$$

Multiplicando a Eq. (4.36) por  $\sqrt{Dg}$  temos

$$\frac{\partial P(\phi, t)}{\partial t} = D \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{P}{\sqrt{D}} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{f}{\sqrt{g}} - D \frac{\partial}{\partial \theta} (\sqrt{g}) \right] \frac{P}{\sqrt{D}}. \quad (4.42)$$

Por fim essa equação de Fokker-Planck em novas variáveis pode ser escrita como

$$\frac{\partial P(\phi, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2} - \frac{\partial}{\partial \phi} [\mathcal{F}(\phi)P], \quad (4.43)$$

onde

$$\mathcal{F}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{D}} \left[ \frac{f(\theta)}{\sqrt{g(\theta)}} - D \frac{\partial}{\partial \theta} \sqrt{g(\theta)} \right]_{\theta=\theta(\phi)}. \quad (4.44)$$

Assim, a equação de Langevin correspondente a Eq. (4.43) é dada por

$$\frac{d\phi}{dt} = \mathcal{F}(\phi) + \xi(t), \quad (4.45)$$

sendo  $\xi$  um ruído aditivo Gaussiano de média zero e variância unitária.

A equação de Langevin com ruído aditivo simples Eq. (4.45) é similar a Eq. (3.28) analisada anteriormente para o modelo de KRA, no entanto esconde a sua complexidade na força periódica dada pela função  $\mathcal{F}(\phi)$ . Para obter uma expressão analítica para  $\mathcal{F}(\phi)$  é necessário avaliar a integral na Eq. (4.39) e inverter a expressão resultante para obter a função  $\theta(\phi)$  que aparece na Eq. (4.44). No entanto, é possível determinar se a força de deriva  $\mathcal{F}(\phi)$  é conservativa e inferir se o sistema alcança o equilíbrio térmico, mesmo sem uma expressão explícita para essa função [49].

Primeiro, notamos que se  $\mathcal{F}(\phi)$  é conservativa, o trabalho em um caminho fechado deve ser nulo

$$\oint \mathcal{F}(\phi) d\phi = 0. \quad (4.46)$$

Podemos agora escrever um ansatz [49] para a força  $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F}(\phi) = \lambda - \frac{\partial}{\partial \phi} V(\phi), \quad (4.47)$$

onde o primeiro termo do lado direito é uma força de não equilíbrio constante e o segundo é uma força conservativa derivada de um potencial  $V(\phi)$ . Para determinar

formalmente que  $\lambda = 0$  e o sistema alcança o equilíbrio, vamos escrever  $\mathcal{F}(\phi)$  como uma série de Fourier

$$\mathcal{F}(\phi) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\phi}{\mathcal{T}}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\phi}{\mathcal{T}}\right) \right], \quad (4.48)$$

onde, usando a Eq. (4.39)

$$\mathcal{T} = \phi(\pi) - \phi(0) = \frac{1}{2\sqrt{D}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta'}{\sqrt{g(\theta')}}, \quad (4.49)$$

é a metade do intervalo transformado  $[-\pi, \pi]$ .

Os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  usualmente são dados por

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} \mathcal{F}(\phi) \cos\left(\frac{n\phi}{\mathcal{T}}\right) d\phi, \\ b_n &= \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} \mathcal{F}(\phi) \sin\left(\frac{n\phi}{\mathcal{T}}\right) d\phi. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Comparando a Eq. (4.47) com a série de Fourier dada pela Eq. (4.48) vemos que  $\lambda = a_0/2$  de modo que a questão de determinar se  $\mathcal{F}(\phi)$  é conservativa e o sistema alcança o equilíbrio térmico é equivalente a encontrar a condição  $a_0 = 0$ .

Tomando

$$a_0 = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} \mathcal{F}(\phi) d\phi, \quad (4.51)$$

e aplicando a mudança de variáveis

$$a_0 = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{\phi(-\mathcal{T})}^{\phi(\mathcal{T})} \mathcal{F}(\phi(\theta)) \frac{d\phi}{d\theta} d\theta, \quad (4.52)$$

utilizando a Eq. (4.39) temos

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{1}{\sqrt{Dg(\theta)}}. \quad (4.53)$$

Definindo  $\theta(\pm\mathcal{T}) = \pm\pi$  e conhecendo  $\mathcal{F}(\phi)$  da Eq. (4.44) podemos escrever o coeficiente  $a_0$  como

$$a_0 = \frac{1}{\mathcal{T}D} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{f(\theta)}{g(\theta)} - \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \ln g(\theta) \right] d\theta. \quad (4.54)$$

O segundo termo do integrando desaparece devido a periodicidade de  $g(\theta)$ . A integral do primeiro termo explicitamente é dada por

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\theta)}{g(\theta)} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{rK \sin(\psi - \theta)}{1 + r\sigma \cos(\psi - \theta)} d\theta. \quad (4.55)$$

Assim, numa integração simples, encontramos

$$a_0 = \frac{K}{\mathcal{T}D\sigma} [\ln(1 + r\sigma \cos(\psi - \theta))]_{-\pi}^{\pi} = 0. \quad (4.56)$$

Com isso, provamos que no sistema atuam forças conservativas e ele relaxa para um estado de equilíbrio termodinâmico.

Assim como fizemos no capítulo anterior, podemos demonstrar que o sistema alcança o equilíbrio termodinâmico por um outro caminho, analisando a sua distribuição estacionária. A distribuição estacionária Eq. (4.9) permite que as quantidades físicas obtidas a partir dela sejam independentes do tempo. Para que o equilíbrio termodinâmico seja garantido, a condição de estacionariedade da distribuição  $\rho_s(\theta)$  deve satisfazer o critério de balanço detalhado, produzindo uma corrente de probabilidade nula no espaço de configuração [40], nestes termos, podemos garantir que a distribuição estacionária corresponde a distribuição de equilíbrio. Nesta subseção mostraremos que a distribuição estacionária satisfaz esse critério e relacionaremos a frequência média do oscilador com a corrente de probabilidade no regime estacionário.

Vamos começar aplicando a condição ergódica para a frequência média  $\Omega$  do oscilador

$$\Omega = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t \dot{\theta}_i dt. \quad (4.57)$$

Esta expressão pode ser calculada substituindo a média no tempo pela média de ensemble da frequência, *i.e.*  $\Omega = \langle d\theta_i/dt \rangle$ . Utilizando a equação de Langevin Eq. (4.5), temos

$$\Omega = \left\langle \frac{d\theta_i}{dt} \right\rangle = \langle rK \sin(\psi - \theta_i) \rangle = \int_0^{2\pi} rK \sin(\psi - \theta_i) \rho_s(\theta) d\theta,$$

onde  $\langle \sqrt{1 + r\sigma \cos(\psi - \theta_i)} \xi_i(t) \rangle = \langle \sqrt{1 + r\sigma \cos(\psi - \theta_i)} \rangle \langle \xi_i(t) \rangle = 0$  uma vez que não existe correlação entre  $\theta$  e  $\xi$ . É conhecido que a equação de Fokker-Planck pode ser bem definida em termos de uma corrente de probabilidade  $J$  como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial J(\theta, t)}{\partial \theta}. \quad (4.58)$$

Então, comparando a Eq. (4.58) com a Eq. (4.6) encontramos

$$J(\theta, t) = rK \sin(\psi - \theta_i) \rho(\theta, t) - D \frac{\partial}{\partial \theta} [(1 + r\sigma \cos(\psi - \theta_i)) \rho(\theta, t)]. \quad (4.59)$$

A condição para solução estacionária é que para  $t \rightarrow \infty$ , temos  $\partial \rho / \partial t = 0$ . Assim  $\rho(\theta, \infty) = \rho_s(\theta)$  implica diretamente  $J(\theta, \infty) = J_s = \text{constante}$ . Agora, utilizando a condição periódica de contorno  $\rho_s(\theta + 2\pi) = \rho_s(\theta)$ , a expressão para  $\Omega$  pode ser escrita em termos da corrente de probabilidade estacionária  $J_s$ , como

$$\begin{aligned} \Omega &= \int_0^{2\pi} J_s d\theta + D \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} [(1 + r\sigma \cos(\psi - \theta_i)) \rho_s] d\theta. \\ &= 2\pi J_s + D [(1 + r\sigma \cos(\psi - 2\pi)) \rho_s(2\pi) - (1 + r\sigma \cos(\psi)) \rho_s(0)] \\ &= 2\pi J_s. \end{aligned} \quad (4.60)$$

No entanto, podemos expressar  $J_s$  como

$$J_s = (K - D\sigma)r \sin(\psi - \theta_i) \rho_s - D [(1 + r\sigma \cos(\psi - \theta_i)) \frac{\partial \rho_s}{\partial \theta}].$$

Tomando a derivada  $\partial \rho_s / \partial \theta$  da Eq. (4.9)

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial \theta} = \frac{\nu \sigma r \sin(\psi - \theta) \rho_s(\theta)}{1 + r\sigma \cos(\psi - \theta_i)}, \quad (4.61)$$

podemos escrever

$$J_s = [K - D\sigma(1 + \nu)] r \sin(\psi - \theta_i) \rho_s, \quad (4.62)$$

como  $\nu = K/D\sigma - 1$ , obtemos precisamente  $J_s = 0$ , o qual resulta na condição de equilíbrio termodinâmico. Assim, no regime estacionário  $\Omega = 0$ , mostrando que a velocidade angular média do oscilador não tem um sentido preferido de rotação.

Uma vez que o equilíbrio termodinâmico foi demonstrado, podemos afirmar que a distribuição estacionária  $\rho_s(\theta)$  na Eq. (4.9) é a distribuição de equilíbrio do

sistema  $\rho_{eq}(\theta)$  e estamos aptos agora a construir a termodinâmica do modelo de KRM a partir dela. O interesse principal aqui é analisar as implicações termodinâmicas da introdução de um ruído multiplicativo no sistema de osciladores, controlado pelo parâmetro de acoplamento de ruído  $\sigma$ . Para isso, utilizaremos a mesma definição de temperatura Eq. (3.39) feita para o modelo de KRA e definiremos uma “temperatura efetiva”  $T_{eff}$  que escalona a transição de fase do modelo de KRM no valor unitário.

Considerando o acoplamento crítico para sincronização obtido na seção anterior Eq. (4.31), vamos definir a temperatura efetiva  $T_{eff}$  do sistema de osciladores, como

$$T_{eff} \equiv \frac{K_c}{K} = \left(\frac{\sigma}{2} + 1\right) T, \quad (4.63)$$

onde  $T = 2D/K$  é a temperatura para  $\sigma = 0$ , *i.e.*, para o sistema com ruído aditivo. Então, para qualquer  $\sigma$  a temperatura efetiva crítica é  $T_{effc} = 1$ . Em termos da temperatura, podemos escrever a distribuição Eq. (4.9) de equilíbrio

$$\rho_{eq}(\theta) = \frac{1}{\mathcal{Z}} [z + \text{sgn}(\sigma) \sqrt{z^2 - 1} \cos(\psi - \theta)]^\nu, \quad (4.64)$$

onde

$$\mathcal{Z} = 2\pi P_\nu^0(z), \quad (4.65)$$

é a função de partição e o parâmetro de ordem Eq. (4.12)

$$r = \frac{\text{sgn}(\sigma) P_\nu^1(z)}{1 + \nu P_\nu^0(z)}. \quad (4.66)$$

Nas equações (4.64)-(4.66),  $z = 1/\sqrt{1 - \sigma^2 r^2}$  e o parâmetro  $\nu$  é dado por

$$\nu = \frac{2}{T\sigma} - 1. \quad (4.67)$$

Na Fig. (4.1) mostramos o comportamento do parâmetro de ordem  $r$  em função da temperatura efetiva  $T_{eff}$  para diversos valores do acoplamento de ruído  $\sigma$ . O parâmetro de ordem foi implementado numericamente com o cálculo auto-consistente da Eq. (4.66). Apesar da temperatura efetiva ser útil na convergência de todas as curvas para um único ponto de transição, permitindo que se obtenha a

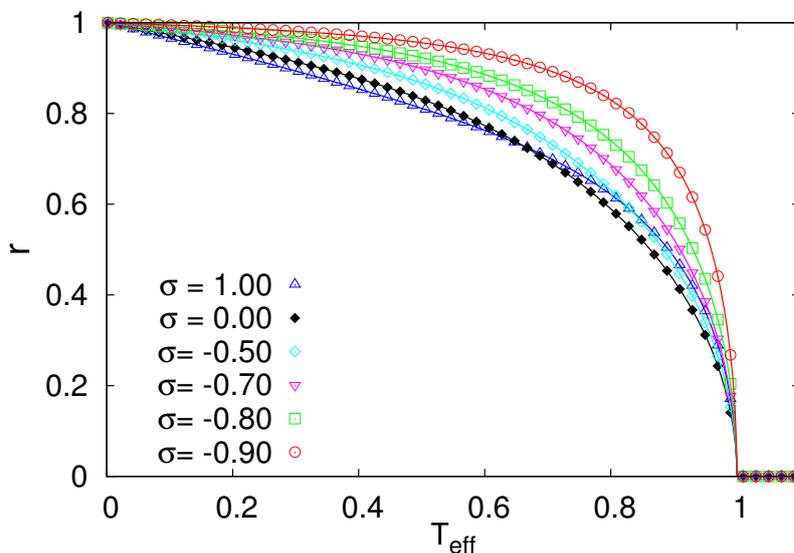


FIGURA 4.1: Parâmetro de ordem  $r$  em função da temperatura efetiva  $T_{eff}$  para vários valores de  $\sigma$ .

relação entre  $\sigma$  e  $T$  que leva o sistema ao início da sincronização, ela esconde muito da influência de  $\sigma$  no comportamento do sistema de osciladores. Tendo em vista estudar os efeitos do ruído multiplicativo que generaliza o modelo de KRA, a maior parte de nossa análise será feita utilizando a temperatura  $T$  e considerando  $\sigma$  como um parâmetro independente.

Na Fig. (4.2) mostramos o espectro do parâmetro de ordem  $r$  no espaço  $(\sigma, T_{eff})$ . A faixa preta corresponde a região com  $r = 0$ , enquanto o violeta inferior é a região com máxima ordem que corresponde a  $r \approx 1$ . É evidente a assimetria entre as regiões com  $\sigma > 0$  e  $\sigma < 0$ , mostrando que valores negativos de  $\sigma$  favorecem a sincronização. É interessante também observar que a presença de  $\sigma$  na definição da temperatura efetiva Eq. (4.63) permite a existência de uma “fase parasincronizada”, *i.e.* a existência de um valor diferente de zero do parâmetro de ordem para  $T > 1$  contanto que  $T_{eff} < 1$ . Isto ocorre para valores de  $\sigma$ , na região entre  $T_{eff} = \sigma/2 + 1$  e  $T_{eff} = 1$ . A fase parasincronizada se tornará clara na Fig. (4.3) abaixo.

Na Fig. (4.3) mostramos o comportamento de  $r$  como uma função do parâmetro de acoplamento  $\sigma$  para as três isothermas. Em todas as curvas vemos que, para uma

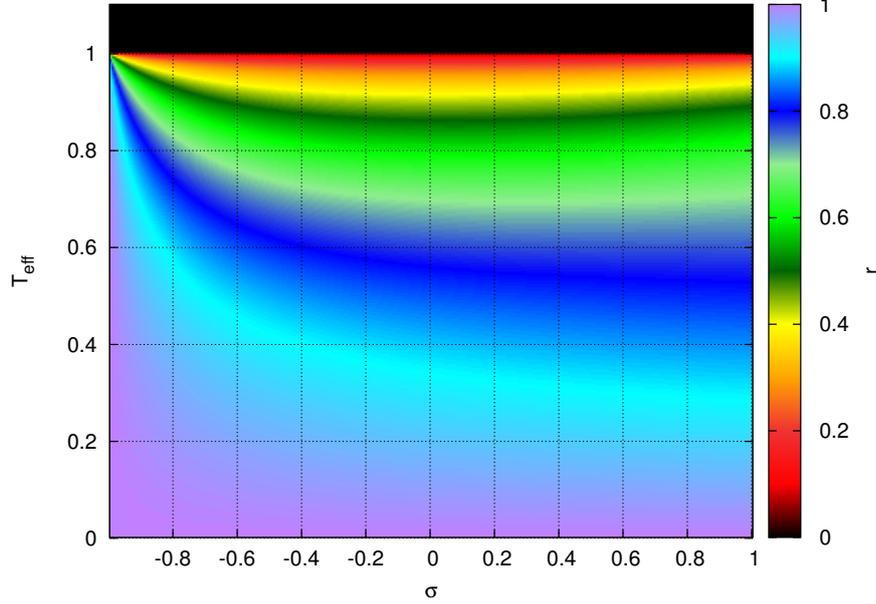


FIGURA 4.2: O espectro do parâmetro de ordem  $r$  no espaço  $(T_{eff}, \sigma)$ . A região preta acima de  $T_{eff} = T_{effc} = 1$ , define a região sem ordem  $r = 0$ . Note que a região  $T_{effc} < 1$  contém toda a região de sincronização, incluindo aquela para qual  $T > 1$ , que denominamos de uma “fase parasincronizada”.

dada temperatura  $T$  fixa,  $r$  é uma função decrescente de  $\sigma$ . Então, observamos que a curva  $T = 1$  separa a região interna, antes mencionada como “fase parasincronizada”, estabelecida para  $T \geq 1$ , da fase sincronizada com  $T < 1$ . A fase parasincronizada existe somente para  $\sigma < 0$  e para todas curvas nas quais  $T_{eff} \leq 1$  é verificada. A assimetria no comportamento de sincronização para os valores de  $\sigma$  e  $-\sigma$  é claramente mostrada, como discutido anteriormente.

Na Fig. (4.4) mostramos o comportamento do parâmetro de ordem  $r$  como função da temperatura  $T$ . Da esquerda para direita temos  $\sigma = +0.5$ ,  $0$ , e  $-0.5$ . Podemos ver um comportamento típico de campo médio onde o parâmetro de ordem decresce com a temperatura. A curva do meio, para  $\sigma = 0$ , corresponde ao comportamento do parâmetro de ordem para o modelo com ruído aditivo simples (KRA), para o qual  $T = T_{eff}$  e, conseqüentemente, as temperaturas críticas  $T_c$  e  $T_{effc}$  são as mesmas. As curvas com acoplamento de ruído não nulo apresentam

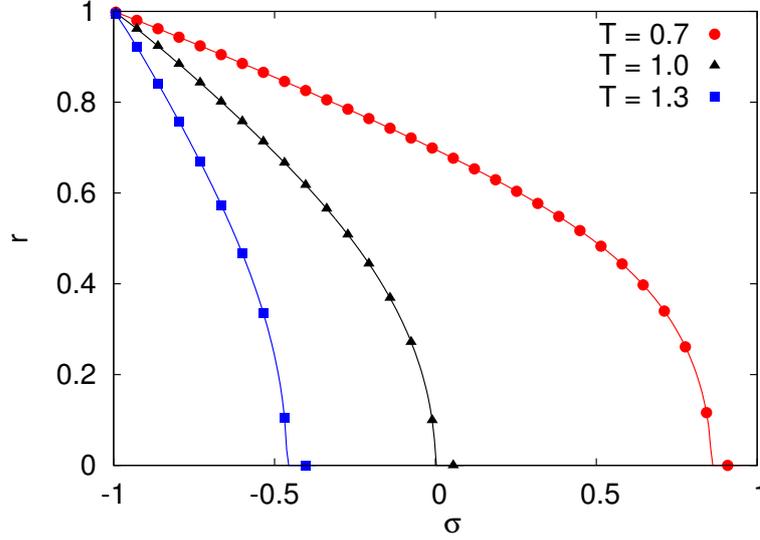


FIGURA 4.3: O parâmetro de ordem  $r$  como função do acoplamento de ruído  $\sigma$  para as isotermas  $T = 1$ ,  $T > 1$  e  $T < 1$ . A região  $T \geq 1$  caracteriza a fase parasincronizada com  $\sigma < 0$ . A região  $T < 1$  corresponde a fase sincronizada.

uma assimetria entre  $\sigma = 0.5$ , com  $T_c = 4/5$ , e  $\sigma = -0.5$  com  $T_c = 4/3$  a última apresenta ordem mesmo para  $T > 1$ . Note da Eq (4.63) que as duas curvas têm respectivamente  $T_{effc} = (1 + 0.5/2)4/5 = 1$  e  $T_{effc} = (1 - 0.5/2)4/3 = 1$ . Assim se torna claro que o conceito de temperatura efetiva é útil para escalar todas essas curvas em um único ponto de transição  $T_{effc} = 1$ .

O ruído multiplicativo na Eq. (4.5) apresenta alguns aspectos físicos interessantes. Ao contrário do ruído aditivo simples, que somente aumenta a dispersão desincronizando os osciladores, o acoplamento de ruído  $\sigma$  direciona o ruído aleatório, amplificando ou reduzindo a sincronização do sistema. Isso significa que o parâmetro  $\sigma$  fisicamente acopla o banho térmico ao estado do sistema.

Uma vez que identificamos o papel do acoplamento de ruído  $\sigma$  como responsável pela indução de uma transição de fase contínua no sistema de osciladores, como mostrado na Fig. (4.3), vamos interpretar a sua atuação, dentro do contexto da termodinâmica, em termos de um campo. Considerando a energia interna do sistema como função da entropia e do parâmetro de ordem  $U = U(S, r)$ , podemos

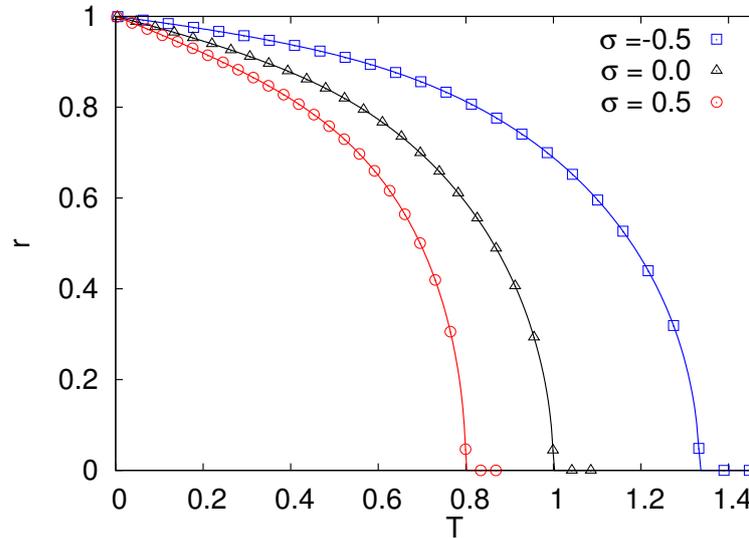


FIGURA 4.4: O parâmetro de ordem  $r$  como uma função da temperatura  $T$  para três valores de  $\sigma$ . Note que todas as curvas mostram um comportamento de campo médio padrão.

escrever a equação fundamental como

$$dU = TdS - H_s dr, \quad (4.68)$$

onde aqui definimos o termo  $H_s$  como o campo de sincronização. O sinal negativo surge do fato de que um aumento do parâmetro de ordem, mantendo a entropia constante, resulta em uma diminuição da energia interna do sistema. Assim, a entropia e o campo de sincronização são grandezas fundamentais para a compreensão termodinâmica do sistema. Vamos primeiro obter uma expressão analítica para entropia  $S$  e logo em seguida, na seção (4.4), deduzir uma expressão para o campo de sincronização  $H_s$ .

### 4.3.2 Entropia

A entropia é uma das principais grandezas na termodinâmica. Ela nos permite compreender o nível de organização do sistema e como ele distribui energia entre seus estados acessíveis. Além disso, ela nos permite estudar outras propriedades termodinâmicas do estado de sincronização dos osciladores, muito além da

análise convencional do parâmetro de ordem.

A entropia de Gibbs em unidades da constante de Boltzmann  $k_B$  é definida para distribuição Eq. (4.64), e resulta em

$$S = - \int \rho_{eq}(\theta) \ln \rho_{eq}(\theta) d\theta = \ln \mathcal{N} - \nu \mathcal{N}^{-1} \int_0^{2\pi} [\lambda(z, \theta)]^\nu \ln[\lambda(z, \theta)] d\theta, \quad (4.69)$$

sendo a função  $\lambda(z, \theta)$  expressa como

$$\lambda(z, \theta) = z + \text{sgn}(\sigma) \sqrt{z^2 - 1} \cos(\psi - \theta). \quad (4.70)$$

Aqui realizamos uma integração por partes bem como utilizamos a condição de normalização  $\mathcal{N}^{-1} \int_0^{2\pi} \rho(\theta) d\theta = 1$ . O método de integração do último termo da Eq. (4.69) consiste em reescrevê-lo usando  $q = \lambda^{\nu+\varphi}$ , onde  $\varphi$  é um parâmetro auxiliar. Considerando que  $\lambda$  não é uma função de  $\varphi$  podemos escrever diretamente  $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\partial q}{\partial \varphi} = \lambda^\nu \ln \lambda$ , tal que

$$\int_0^{2\pi} [\lambda(z, \theta)]^\nu \ln[\lambda(z, \theta)] d\theta = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^{2\pi} [\lambda(z, \theta)]^{\nu+\varphi} d\theta = 2\pi \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \varphi} P_{\nu+\varphi}^0(z).$$

Então, assumindo  $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \varphi} P_{\nu+\varphi}^0(z) = \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} P_\varphi^0(z) \right]_{\varphi=\nu}$  (veja Cohl [50]), isto resulta em uma equação geral para entropia

$$S = \left( 1 - \nu \frac{\partial}{\partial \nu} \right) \ln [2\pi P_\nu^0(z)]. \quad (4.71)$$

Esta é uma equação muito abrangente da entropia que é função das variáveis termodinâmicas  $r$  e  $T$ . Note que o parâmetro  $\nu$  depende sobre a temperatura  $T$  via Eq. (4.67) enquanto o argumento  $z$  é uma função do parâmetro de ordem  $r$  de acordo com a Eq. (4.8). Ambos  $\nu$  e  $z$  são funções também do acoplamento de ruído  $\sigma$ . Assim, a entropia Eq. (4.71) engloba as propriedades termodinâmicas gerais do sistema.

É importante destacar que a Eq. (4.71) é analiticamente bem definida e requer o conhecimento das derivadas das funções de Legendre com respeito ao seu grau, cuja forma geral é dada por

$$\frac{\partial P_\nu^0(z)}{\partial \nu} = -P_\nu^0(z) \ln \frac{z+1}{2} + \frac{1}{2^\nu \pi i} \oint_{C(+)} d\zeta \frac{(\zeta^2 - 1)^\nu}{(\zeta - z)^{\nu+1}} \ln \frac{\zeta + 1}{2},$$

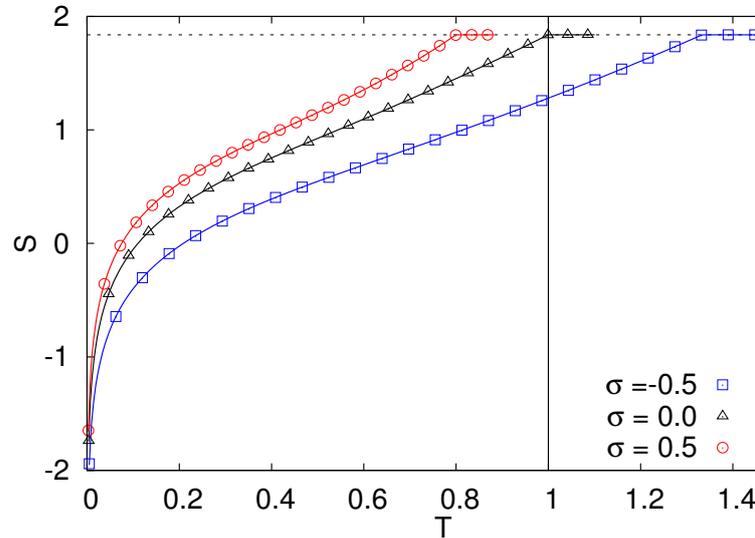


FIGURA 4.5: Entropia como uma função da temperatura  $T$  para valores de  $\sigma$ . Note que todas as curvas de entropia alcançam o valor máximo em  $\ln(2\pi)$ , o qual é o estado completamente incoerente. Todas as curvas de entropia vão para  $S = -\infty$  quando  $T = 0$ , que é o estado completamente sincronizado.

onde  $\mathcal{C}^+$  é um domínio definido em [51].

Na Fig. (4.5) mostramos o comportamento da entropia, Eq. (4.71), como uma função da temperatura  $T$ . É possível observar que na temperatura efetiva crítica  $T_{effc} = (\sigma/2 + 1)T = 1$  todas as curvas de entropia alcançam um valor máximo constante. Quando a temperatura vai para zero, as curvas de entropia divergem para menos infinito. Vamos analisar estes limites físicos da Eq. (4.71) obtendo os valores exatos. Primeiro, consideramos o limite da temperatura igual a  $T_{effc}$  onde o parâmetro de ordem  $r = 0$  e, por sua vez,  $z = (1 - \sigma^2 r^2)^{-1/2} = 1$ . Neste limite a função associada de Legendre  $P_\nu^0(1) = 1$  e a entropia se torna

$$S_{max} = \ln(2\pi), \quad (4.72)$$

o qual corresponde ao valor da entropia para o estado completamente incoerente.

Agora, consideramos o limite de  $T \rightarrow 0$ . Neste limite,  $\nu = (2/T\sigma - 1) \rightarrow \infty$  e podemos utilizar a forma assintótica da função de Legendre devido a Olver [52], a

qual redefinimos em termos do parâmetro  $z$  como

$$F_\nu^0(z) \approx \left( \frac{\cosh^{-1}(z)}{\sqrt{z^2 - 1}} \right)^{1/2} I_0(\nu \cosh^{-1}(z)) \quad \text{quando } \nu \rightarrow \infty, \quad (4.73)$$

onde  $I_n(\kappa)$  é a função modificada de Bessel de primeira espécie de ordem  $n$  definida anteriormente pela Eq. (3.7). Neste limite, a entropia é dada por

$$S = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{4\pi^2 \cosh^{-1}(z)}{\sqrt{z^2 - 1}} \right) + \ln[I_0(\varepsilon)] - \varepsilon \frac{I_1(\varepsilon)}{I_0(\varepsilon)}, \quad (4.74)$$

e os parâmetros são expressos agora como

$$\varepsilon \equiv \nu \cosh^{-1}(z), \quad z = (1 - \sigma^2 r'^2)^{-1/2} \quad \text{e} \quad r' = \lim_{\nu \rightarrow \infty} r = \frac{I_1(\varepsilon)}{I_0(\varepsilon)}. \quad (4.75)$$

Quando  $T \rightarrow 0$  temos  $\varepsilon \rightarrow \infty$  e, por sua vez, a função modificada de Bessel toma a forma assintótica  $I_n(\varepsilon) \sim e^\varepsilon / \sqrt{2\pi\varepsilon}$  [52]. Assim tomando  $T = 0$  na Eq. (4.74) obtemos

$$S(T = 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} S = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2\pi \cosh^{-1}(z)}{\varepsilon \sqrt{z^2 - 1}} \right) \rightarrow -\infty. \quad (4.76)$$

Neste limite a entropia assume o mesmo comportamento da entropia de um gás ideal em  $T = 0$ . Assumimos também que para  $T = 0$  as fases de todos os osciladores tem o mesmo valor e consequentemente a densidade de fase do sistema é equivalente a uma função delta de Dirac. Assim, este resultado é esperado uma vez que o sistema de osciladores tratado aqui é descrito em um espaço de fase clássico.

Note que a condição de acoplamento de ruído fraco  $\sigma \approx 0$  também implica  $\nu \rightarrow \infty$  e podemos utilizar a expressão da entropia Eq. (4.74) para encontrar, como caso particular, a entropia do modelo com ruído aditivo, fazendo  $\sigma = 0$ . Assim, considerando que

$$\cosh^{-1}(z) / \sqrt{z^2 - 1} \approx 1 \quad \text{quando } \sigma \rightarrow 0, \quad (4.77)$$

e tomando o limite  $\sigma \rightarrow 0$  na Eq. (4.74) obtemos a entropia para o modelo de Kuramoto com ruído aditivo (KRA), que resulta em

$$S = \ln [2\pi I_0(k)] - k \frac{I_1(k)}{I_0(k)}, \quad (4.78)$$

com

$$k = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \varepsilon = \frac{2r_0}{T} \quad \text{e} \quad r_0 = \lim_{\sigma \rightarrow 0} r' = \frac{I_1(k)}{I_0(k)}. \quad (4.79)$$

A Eq. (4.78) é equivalente a Eq. (3.46) obtida no capítulo anterior.

### 4.3.3 Energia interna

A expressão para energia interna do modelo de KRM pode ser obtida, como fizemos anteriormente, a partir da energia livre de Helmholtz  $F = U - TS$ . Utilizando a função de partição Eq. (4.65), temos

$$F = -T \ln \mathcal{Z} = -T \ln[2\pi P_\nu^0(z)], \quad (4.80)$$

assim, conhecendo a expressão para entropia Eq. (4.71), podemos escrever a energia interna do modelo de KRM como

$$U = -T\nu \frac{\partial}{\partial \nu} \ln[2\pi P_\nu^0(z)]. \quad (4.81)$$

É interessante observar que para  $\sigma \approx 0$ , ou seja,  $\nu \rightarrow \infty$ , a função associada de Legendre  $P_\nu^0(z)$  toma a forma assintótica definida na Eq. (4.73) e as expressões da energia livre e energia interna do modelo de KRM se tornam

$$F = -T \ln \left[ 2\pi \left( \frac{\cosh^{-1}(z)}{\sqrt{z^2 - 1}} \right)^{1/2} I_0(\varepsilon) \right], \quad \text{e} \quad U = -T\varepsilon \frac{I_1(\varepsilon)}{I_0(\varepsilon)}, \quad (4.82)$$

respectivamente, com parâmetros  $\varepsilon$  e  $z$  definidos na Eq. (4.75). Tomando  $\sigma = 0$  encontramos

$$F = -T \ln[2\pi I_0(k)] = -T \ln[2\pi I_0(2r_0/T)], \quad (4.83)$$

e

$$U = -Tk \frac{I_1(k)}{I_0(k)} = -2r_0^2, \quad (4.84)$$

com parâmetros  $k$  e  $r_0$  definidos na Eq. (4.79). As Eqs. (4.83) e (4.84) são exatamente a energia livre Eq. (3.51) e energia interna Eq. (3.52) do modelo de KRA, como esperado.

#### 4.3.4 Calor específico

Uma vez que conhecemos a entropia, podemos agora obter o calor específico do sistema de osciladores mantendo o acoplamento de ruído  $\sigma$  constante. Isto requer determinar  $C_\sigma = T (\partial S / \partial T)_\sigma$  tomando as seguintes considerações: a entropia  $S$ , veja a Eq. (4.71), é explicitamente uma função  $S \rightarrow S(\nu, z)$  sendo  $\nu$  e  $z$  funções da temperatura  $T$ . Assim

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial T} &= \left( \frac{\partial S}{\partial \nu} \right)_z \frac{\partial \nu}{\partial T} + \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)_\nu \frac{\partial z}{\partial T} \\ &= \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial \nu} \right)_z + \frac{1}{\left[ 1 - \left( \frac{\partial J}{\partial z} \right)_\nu \right]} \left( \frac{\partial J}{\partial \nu} \right)_z \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)_\nu \right] \frac{\partial \nu}{\partial T}. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Aqui eliminamos a derivada  $\partial z / \partial T$  considerando que o parâmetro  $z = (1 - \sigma^2 r^2)^{-1/2}$  é uma função direta de  $r$ , e utilizando a Eq. (4.12) obtemos

$$z = \cosh \left[ \tanh^{-1} \left( \frac{\operatorname{sgn}(\sigma) P_\nu^1(z)}{1 + \nu P_\nu^0(z)} \right) \right], \quad (4.86)$$

sendo o funcional  $z \mapsto J(\nu, z)$  uma função altamente transcendental [53]. Isto nos permite escrever a derivada

$$\frac{\partial z}{\partial T} = \left( \frac{\partial J}{\partial \nu} \right)_z \frac{\partial \nu}{\partial T} + \left( \frac{\partial J}{\partial z} \right)_\nu \frac{\partial z}{\partial T}, \quad (4.87)$$

a qual pode ser expressa na forma

$$\frac{\partial z}{\partial T} = \frac{1}{\left[ 1 - \left( \frac{\partial J}{\partial z} \right)_\nu \right]} \left( \frac{\partial J}{\partial \nu} \right)_z \frac{\partial \nu}{\partial T}. \quad (4.88)$$

Segue que as derivadas da Eq. (4.85) foram computadas utilizando as Eqs. (4.66), (4.71), e (4.86), resultando em

$$\left( \frac{\partial S}{\partial \nu} \right)_z = \frac{\operatorname{sgn}(\sigma)}{\sqrt{z^2 - 1}} \left[ r - \nu(\nu + 1) \frac{\partial r}{\partial \nu} \right], \quad (4.89)$$

$$\left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)_\nu = -\nu \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \ln [2\pi P_\nu^0(z)], \quad (4.90)$$

$$\left(\frac{\partial J}{\partial z}\right)_{\nu} = -z\sigma Q_0^1(r\sigma) \sinh [Q_0^0(r\sigma)] \frac{\partial r}{\partial z} = -\varsigma(z) \frac{\partial r}{\partial z}, \quad (4.91)$$

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \nu}\right)_z = -z\sigma Q_0^1(r\sigma) \sinh [Q_0^0(r\sigma)] \frac{\partial r}{\partial \nu} = -\varsigma(z) \frac{\partial r}{\partial \nu}. \quad (4.92)$$

onde  $Q_0^0(x)$  e  $Q_0^1(x)$  são as funções associadas de Legendre de segunda espécie [53] e  $\varsigma(z) = z\sigma Q_0^1(r\sigma) \sinh [Q_0^0(r\sigma)]$ . Levando em conta todas as derivadas acima, podemos obter a equação para o calor específico

$$C_{\sigma} = \vartheta(z, \nu) \left[ r \frac{\partial r}{\partial \nu} - \nu(\nu + 1) \left( \frac{\partial r}{\partial \nu} \right)^2 \right] + \nu(\nu + 1) \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \ln [2\pi P_{\nu}^0(z)], \quad (4.93)$$

com

$$\vartheta(z, \nu) = \frac{\text{sgn}(\sigma)\nu(\nu + 1)\varsigma(z)}{\sqrt{z^2 - 1} \left( 1 + \varsigma(z) \frac{\partial r}{\partial z} \right)}. \quad (4.94)$$

Note que esta é uma expressão altamente transcendental envolvendo os parâmetros  $r$ ,  $\nu$  e  $z$ . Na Eq. (4.93) as derivadas parciais  $\partial r/\partial \nu$  e  $\partial r/\partial z$  são bem definidas analiticamente.

Na Fig. (4.6) mostramos o calor específico Eq. (4.93) como uma função da temperatura  $T$  para três valores de  $\sigma$ . Vemos que todas as curvas partem de  $C_{\sigma}(T = 0) = \frac{1}{2}$  e então o calor específico cresce continuamente até alcançar um valor máximo na temperatura efetiva crítica  $T_{effc} = (\sigma/2 + 1)T = 1$ . O aumento na entropia devido ao fluxo de calor para o sistema implica na redução da sincronização, o que sempre resulta em  $C_{\sigma}(T > 0) > C_{\sigma}(0)$ . A estabilidade termodinâmica é imediatamente satisfeita uma vez que  $C_{\sigma} > 0$  para todo  $\sigma$ . Como esperado, note que para  $T > T_{effc}$  o sistema alcança um estado totalmente desincronizado e o calor específico se reduz a zero.

Podemos encontrar o valor exato do calor específico  $C_{\sigma}$  para  $T = 0$ . Primeiro obtemos  $C_{\sigma}$  para  $T \rightarrow 0$  considerando a expressão assintótica da entropia obtida da Eq. (4.74)

$$C_{\sigma} = \frac{\sigma\varepsilon}{2} \left[ \frac{2\varepsilon}{\sigma z^2} - \frac{1}{\cosh^{-1}(z)} + \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}} \right] \frac{\Phi(\varepsilon)}{1 - \nu\sigma\Phi(\varepsilon)}, \quad (4.95)$$

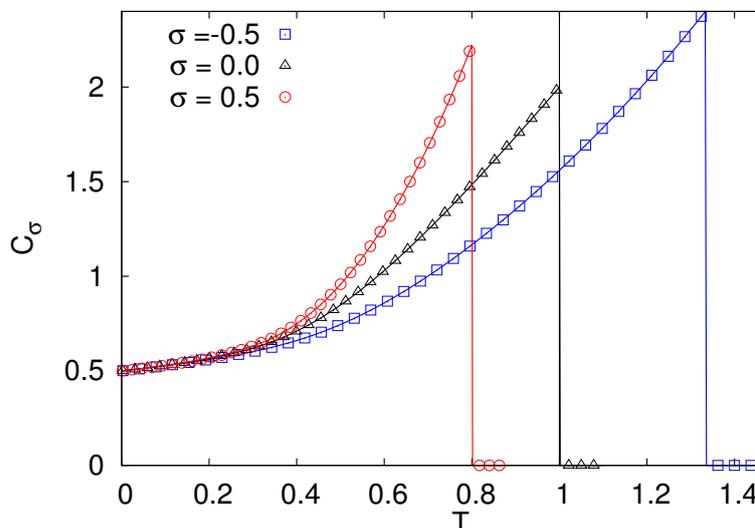


FIGURA 4.6: O calor específico  $C_\sigma(T)$  como uma função da temperatura  $T$  para valores de  $\sigma$ . Todas as curvas partem de  $C_\sigma = \frac{1}{2}$  para  $T = 0$  e crescem até alcançar um valor máximo em  $T_{effc} = 1$ . Para  $T > T_{effc}$ ,  $C_\sigma = 0$  como esperado.

onde temos definido

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \cosh^{-1}(z(\varepsilon)). \quad (4.96)$$

O calor específico para  $T = 0$  requer as considerações

$$\varepsilon \rightarrow \infty, \quad r' \approx 1 - \frac{1}{2\varepsilon}, \quad \text{e} \quad \Phi(\varepsilon) \approx \frac{1}{(1 - \sigma^2)} \frac{1}{2\varepsilon^2}, \quad (4.97)$$

onde da Eq. (4.95) obtemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\sigma \varepsilon}{2} \left[ \frac{2\varepsilon}{\sigma z^2} - \frac{1}{\cosh^{-1}(z)} + \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}} \right] \Phi(\varepsilon) = \frac{1}{2} \quad (4.98)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \nu \sigma \Phi(\varepsilon) = 0. \quad (4.99)$$

Assim, todas as curvas de calor específico convergem para

$$C_\sigma(T = 0) = \frac{1}{2}. \quad (4.100)$$

Isto é precisamente o que obtemos para as curvas numéricas. Note que este resultado é equivalente ao valor do calor específico em volume constante  $C_v$  de um gás ideal clássico.

Como foi discutido na expressão para entropia assintótica, a Eq. (4.95) é válida também para um acoplamento de ruído fraco ( $\sigma \approx 0$ ). Em particular para  $\sigma = 0$ , a Eq. (4.95) se torna

$$C_{\sigma=0} = \frac{k^2 \Phi(k)}{1 - \frac{2}{T} \Phi(k)}. \quad (4.101)$$

Aqui,

$$\Phi(k) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \Phi(\varepsilon) = \frac{\partial r_0}{\partial k}, \quad (4.102)$$

sendo  $k$  e  $r_0$  definidos em (4.79). Chamamos atenção para o fato de que a Eq. (4.101) é equivalente a Eq. (3.58) para o calor específico do modelo sem acoplamento de ruído  $\sigma$ , *i.e.*, do modelo de Kuramoto com ruído aditivo (KRA).

## 4.4 Efeitos de campo

### 4.4.1 Campo de sincronização

Agora, conhecendo os efeitos do ruído multiplicativo e a influência do acoplamento de ruído  $\sigma$  no estado de sincronização do sistema, estamos aptos a compreender o campo de sincronização  $H_s$  agindo sobre o sistema, como função deste parâmetro. Para tanto, vamos fazer analogias de  $H_s$  com o campo efetivo  $H_{eff}$  definido na teoria de campo médio para sistemas magnéticos [54].

A energia livre de Helmholtz  $F = F(T, r)$ , obtida por meio de uma transformada de Legendre da energia interna  $U = U(S, r)$ , pode ser escrita, em sua forma diferencial, como

$$dF = -SdT - H_s dr, \quad (4.103)$$

onde para isso, utilizamos a Eq. (4.68). Essa expressão nos permite obter a entropia  $S$  e o campo de sincronização  $H_s$  por meio da energia livre.

Antes de prosseguir com o campo de sincronização, é instrutivo demonstrar a coerência da nossa expressão para energia livre Eq. (4.80) recuperando a expressão da entropia de uma forma alternativa. Da Eq. (4.103), temos

$$S = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_r = \ln[2\pi P_\nu^0(z)] + T \frac{\partial}{\partial T} \ln[2\pi P_\nu^0(z)]. \quad (4.104)$$

Essa expressão pode ser definida em termos do parâmetro  $\nu$ . Para isso, vamos fazer uma transformação na derivada  $\partial/\partial T = \partial\nu/\partial T (\partial/\partial\nu)$ , e, usando a equação (4.67), temos  $\partial\nu/\partial T = -(\nu + 1)/T$ , de modo que podemos escrever a entropia como

$$S = \ln[2\pi P_\nu^0(z)] + (-\nu - 1) \frac{\partial}{\partial\nu} \ln[2\pi P_\nu^0(z)]. \quad (4.105)$$

Então, realizando uma mudança de variáveis  $\nu' = -\nu - 1$ , a derivada com respeito a  $\nu$  transforma como  $\partial/\partial\nu = \partial\nu'/\partial\nu (\partial/\partial\nu') = -\partial/\partial\nu'$ , o que resulta em

$$S = \ln[2\pi P_{-\nu'-1}^0(z)] - \nu' \frac{\partial}{\partial\nu'} \ln[2\pi P_{-\nu'-1}^0(z)]. \quad (4.106)$$

Utilizando a propriedade das funções de Legendre  $P_{-\nu'-1}^{\pm m}(z) = P_\nu^{\pm m}(z)$  e trocando  $\nu' \rightarrow \nu$  encontramos a expressão da entropia

$$S = \left(1 - \nu \frac{\partial}{\partial\nu}\right) \ln[2\pi P_\nu^0(z)]. \quad (4.107)$$

que é a mesma da Eq. (4.71), como queríamos demonstrar.

Retomando o objetivo inicial, vamos estabelecer o campo de sincronização  $H_s$  que age sobre o sistema de osciladores, partindo da relação termodinâmica Eq. (4.103) como

$$H_s = - \left( \frac{\partial F}{\partial r} \right)_T, \quad (4.108)$$

na qual a energia livre  $F$  é dada pela Eq. (4.80). Na Eq. (4.108) um aumento no parâmetro de ordem  $r$  resulta em um decréscimo na energia livre  $F$ , de modo que  $\partial F/\partial r < 0$ , nessas condições  $H_s > 0$ . Isto tem analogia com o comportamento da pressão, na termodinâmica de sistemas fluidos  $P = -(\partial F/\partial V)_T$ , na qual o volume  $V$  é análogo ao parâmetro de ordem  $r$ . Aqui, chamamos atenção para a complexidade deste sistema de osciladores, onde para baixas temperaturas  $T \rightarrow 0$ , a entropia se comporta como  $S(T) \rightarrow \ln(T) \rightarrow -\infty$  e o calor específico  $C_\sigma \rightarrow 1/2$ , o que é mais similar ao comportamento de um gás ideal clássico do que o de um sistema magnético. Para altas temperaturas, o sistema apresenta uma fase sincronizada e uma fase parasincronizada, admitindo uma analogia direta com o magnetismo.

A analogia com a teoria de campo médio para o magnetismo é melhor compreendida quando analisamos o campo  $H_s$  como constituído de duas partes, sendo uma delas função de um campo externo agindo sobre o sistema, como resultado do ruído multiplicativo, isso ficará claro posteriormente. Primeiro, precisamos determinar a expressão completa para  $H_s$ , assim, sabendo que  $z = (1 - \sigma^2 r^2)^{-1/2}$ , a derivada parcial com respeito a  $r$  transforma-se da forma  $\partial/\partial r = z^3 \sigma^2 r (\partial/\partial z)$ . Utilizando a Eq. (4.108), obtemos a expressão para o campo de sincronização

$$H_s = T z^3 \sigma^2 r \frac{\partial}{\partial z} \ln[2\pi P_\nu^0(z)], \quad (4.109)$$

a qual pode ser expressa de uma forma simples

$$H_s = \frac{T(1 + \nu) z^3 \sigma^2 r^2 \operatorname{sgn}(\sigma)}{\sqrt{z^2 - 1}}, \quad (4.110)$$

por meio da Eq. (4.66) e utilizando a relação  $P_\nu^1(z) = (z^2 - 1)^{1/2} dP_\nu^0(z)/dz$ .

Agora, para compreender melhor os efeitos do campo de sincronização sobre o sistema, vamos decompor  $H_s$  na forma

$$H_s = H_0 + H_\sigma, \quad (4.111)$$

onde definimos o campo interno  $H_0$

$$H_0 = H_s(\sigma = 0, r, T), \quad (4.112)$$

o qual corresponde a parte que não depende explicitamente de  $\sigma$ . Portanto, podemos obter a expressão de  $H_0$  tomando o limite  $\sigma \rightarrow 0$  na Eq. (4.110), que resulta em

$$H_0 = \lim_{\sigma \rightarrow 0} H_s = 2r = 2 \frac{I_1(2r/T)}{I_0(2r/T)}. \quad (4.113)$$

Note que o campo interno  $H_0$  leva em conta somente os efeitos do ruído aditivo sobre o sistema.

O campo externo  $H_\sigma$  é definido como

$$H_\sigma = H_s(\sigma, r, T) - H_0, \quad (4.114)$$

o qual é diretamente relacionado aos efeitos do ruído multiplicativo que atua no sistema de osciladores. Ele corresponde a parte do campo  $H_s$  que depende explicitamente de  $\sigma$ .

Aqui enfatizamos a diferença particular da teoria de campo médio convencional para o magnetismo [54] e a decomposição do campo de sincronização  $H_s$  como estabelecido na Eq. (4.111). Na teoria de campo médio, é definido um campo efetivo como  $H_{eff} = c_0 m + H$ , onde  $c_0$  é uma constante,  $m$  é a magnetização e  $H$  é um campo externo que não depende de parâmetros internos. Nesta tese, definimos um campo de sincronização  $H_s$  que tem um papel de um campo efetivo, o qual pode ser analisado como sendo a soma de um campo interno  $H_0 = 2r$ , como pode ser visto na Eq. (4.113), com um campo externo  $H_\sigma$ , definido pela Eq. (4.114). No nosso caso, o campo externo  $H_\sigma$  é longe de ser uma constante, ele é uma função que depende intrinsecamente sobre  $r$ ,  $T$ , e  $\sigma$ . No entanto, em muitos aspectos  $H_\sigma$  é similar ao campo externo  $H$  no sentido de que age diretamente sobre o estado do sistema, por meio do ruído multiplicativo, podendo tanto reduzir quanto ampliar o estado de sincronização.

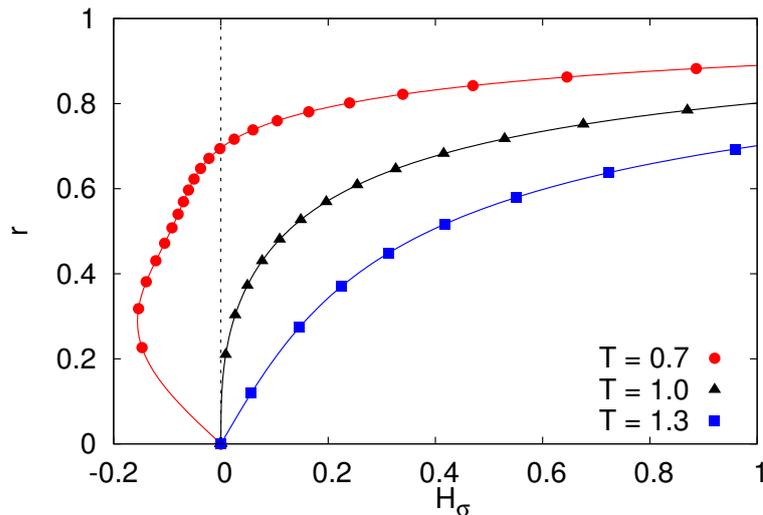


FIGURA 4.7: O parâmetro de ordem  $r$  como uma função do campo externo  $H_\sigma$  para três isotermas  $T$ . Todas as curvas saturam em  $r = 1$ , análogo a um sistema magnético.

A curva  $T = 1$  separa a fase sincronizada  $T \leq 1$  da fase parasincronizada  $T > 1$ .

#### 4.4.2 Campo externo e susceptibilidade

Agora é possível definir uma susceptibilidade isotérmica  $\chi$  estritamente em termos do campo externo  $H_\sigma$  como

$$\chi^{-1} = \left( \frac{\partial H_\sigma}{\partial r} \right)_T, \quad (4.115)$$

através da qual podemos compreender melhor a resposta do sistema de osciladores devido ao campo externo aplicado.

Na Fig. (4.7) mostramos as isotermas do parâmetro de ordem  $r$  como uma função do campo externo  $H_\sigma$ . Note que todas as curvas tendem a saturar em  $r = 1$  para valores grandes de  $H_\sigma$  analogamente a um sistema magnético. Isto diz respeito ao fato de que  $H_\sigma$  exerce o papel de um campo externo, como esperado. As variáveis conjugadas  $(r, H_\sigma)$  tem um valor máximo para  $\sigma = -1$ , e decrescem em direção ao ponto  $(0, 0)$  para  $\sigma = 1$ , *i.e.*,  $T_{eff} = 1$ , o ponto final das curvas. A curva isoterma  $T = 1$  delimita a fase sincronizada  $T < 1$  da fase parasincronizada  $T \geq 1$ . A fase parasincronizada existe somente para  $H_\sigma > 0$  e sua susceptibilidade é sempre finita e positiva, exceto para  $T = 1$  onde ela diverge com  $H_\sigma \rightarrow 0$ , como esperado, veja o Cap. (5) onde o comportamento crítico será analisado em detalhes.

Na fase sincronizada, para  $T = 0.7$ , quando  $\sigma$  aumenta,  $H_\sigma$  decresce, e  $r$  decresce alcançando um valor não nulo no primeiro zero de  $H_\sigma(r) = 0$  o qual corresponde a uma sincronização espontânea, *i.e.*, sincronização em um campo externo nulo. Isto é muito similar ao que acontece para o comportamento da magnetização. À medida que  $\sigma$  continua aumentar,  $r$  decresce e  $T_{eff}$  aumenta em direção  $T_{eff} = 1$ , para o qual  $r = H_\sigma = 0$ .

A fase sincronizada, para  $H_\sigma \leq 0$ , exibe um comportamento anômalo, uma vez que permite uma região com  $\chi < 0$  e uma divergência de  $\chi$ . Isto acontece devido a dois fatos: primeiro, no modelo de Kuramoto  $r$  é definido como o módulo de um número complexo que é sempre positivo. Isto difere de sistemas magnéticos onde a magnetização  $m$  se torna negativa para campos externos reversos  $H_0 < 0$ . Segundo,  $H_\sigma$  é uma função de  $r$  e  $\sigma$  com dois zeros. Entre estes dois zeros temos um

mínimo tal que  $\partial H_\sigma / \partial r = 0$  com  $\chi = \infty$ . Uma situação similar ocorre para líquidos complexos tal como a água, onde a densidade decresce com a temperatura na região  $0^\circ C \leq T \leq 4^\circ C$ .

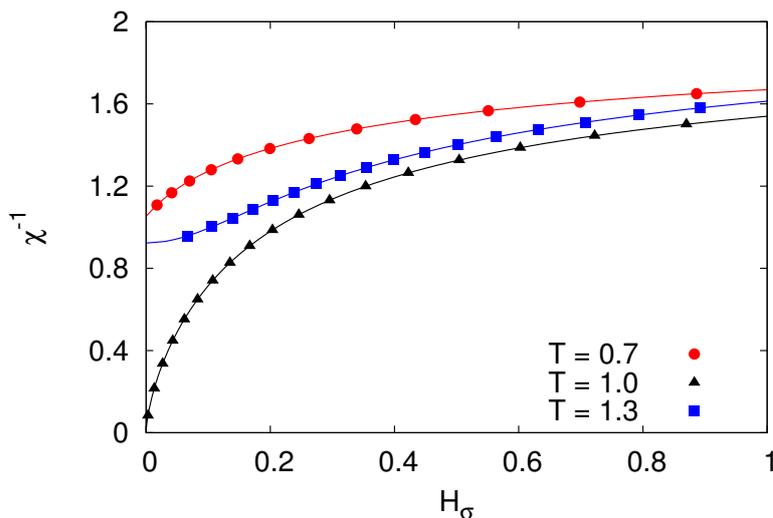


FIGURA 4.8: Inverso da susceptibilidade  $\chi^{-1}$  como uma função do campo externo  $H_\sigma$  para isotermas fixas  $T$ . As curvas  $T = 1.3$  e  $T = 1$  correspondem a fase parasincronizada. A curva  $T = 0.7$  corresponde a fase sincronizada. Note que a temperatura crítica  $T = 1$  e o campo nulo  $H_\sigma \rightarrow 0$ ,  $\chi$  diverge em acordo com a Eq. (5.18), como esperado.

Para um líquido, considere a identidade matemática

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -1, \quad (4.116)$$

onde  $p$  é a pressão e  $V$  o volume. Uma vez que a compressibilidade isotérmica definida como

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T, \quad (4.117)$$

é sempre positiva,  $\kappa_T > 0$ , então, na região crítica

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V < 0 \quad \text{implica que} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p < 0, \quad (4.118)$$

satisfazendo a Eq. (4.116). Assim, o volume diminui com o aumento da temperatura, na região entre  $0^\circ C$  e  $4^\circ C$ , o que constitui, de modo simples, na anomalia

de densidade da água. Matematicamente isto é facilmente compreendido porque a pressão  $p(V, T)$  não é uma função linear de  $V$ , conseqüentemente ela tem um extremo com derivadas nulas. O mecanismo físico é mais complicado, mas é bem estudado na literatura [55, 56].

Para nosso sistema, consideramos uma identidade similar

$$\left(\frac{\partial H_\sigma}{\partial r}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial H_\sigma}\right)_r \left(\frac{\partial r}{\partial T}\right)_{H_\sigma} = -1. \quad (4.119)$$

Uma vez que  $\left(\frac{\partial T}{\partial H_\sigma}\right)_r$  é sempre positiva, a susceptibilidade negativa  $\chi = \left(\frac{\partial r}{\partial H_\sigma}\right)_T < 0$ , na região anômala, implica  $\left(\frac{\partial r}{\partial T}\right)_{H_\sigma} > 0$ . Assim, nessa região, o parâmetro de ordem se comporta de maneira não convencional, aumentando com a temperatura. Isto é muito similar a anomalia na água.

Na Fig. (4.8) mostramos o inverso da susceptibilidade  $\chi^{-1}$  como uma função do campo  $H_\sigma$ . As temperaturas são  $T = 1.3$  e  $T = 1$  para a fase parasincronizada, e  $T = 0.7$  para a fase sincronizada. Quando  $H_\sigma \rightarrow 0$  a susceptibilidade  $\chi$  tende a valores finitos, exceto para a curva  $T = 1$  quando ela diverge, como esperado. Iremos abordar essa divergência entre outras propriedades do sistema na região de transição fase no capítulo seguinte.

## Capítulo 5

# Criticalidade de osciladores de fase com ruído multiplicativo

Neste capítulo estudaremos o comportamento crítico das quantidades termodinâmicas previamente estabelecidas, bem como, obteremos os expoentes críticos de campo médio envolvidos. Ao final do capítulo obteremos uma relação de flutuação-dissipação para o modelo que relaciona a flutuação do parâmetro de ordem na região de transição com a susceptibilidade do sistema ao campo externo.

### 5.1 Expoentes críticos

Começamos o estudo pela análise da expressão da entropia próxima a temperatura crítica  $T_c$ , que é obtida tomando os primeiros dois termos da função associada de Legendre expandida para  $r \approx 0$  (equivalentemente  $z \approx 1$ ), que resulta em  $P_\nu^0(z) \simeq 1 + \nu(\nu + 1)(z - 1)/2$ . Segue da Eq. (4.71) que a entropia nesse limite é dada por

$$S_c = S_{max} - \frac{\nu^2 \sigma^2}{4} r^2. \quad (5.1)$$

Agora precisamos determinar as expressões para os campos  $H_0$  e  $H_\sigma$  próximos da região crítica, onde a temperatura efetiva e o parâmetro de ordem são  $T_{eff} \approx 1$  e

$r \approx 0$  respectivamente. Assim, expandindo  $H_s$  na Eq. (4.110) encontramos

$$H_s = \left( \frac{1}{2} T \nu^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} T \nu \sigma^2 \right) r. \quad (5.2)$$

Sabendo que  $\nu = 2/T\sigma - 1$ , podemos escrever

$$H_s = \frac{2r}{T} - \sigma r = H_0 + H_\sigma. \quad (5.3)$$

Note que  $H_0 = H_s(\sigma = 0) = 2r/T$  corresponde exatamente a parte do campo de sincronização que não depende explicitamente do valor de  $\sigma$  de acordo com a definição Eq. (4.112). Por outro lado, o campo

$$H_\sigma = -\sigma r, \quad (5.4)$$

existe somente para  $\sigma \neq 0$  e tem o papel de um campo externo atuando sobre o sistema. O sinal negativo em  $H_\sigma$  mostra que a sincronização aumenta quando  $-\sigma$  cresce, como discutido no final do capítulo anterior.

Para obter os expoentes críticos, primeiro tomamos os dois primeiros termos da expansão do parâmetro de ordem  $r$  na Eq. (4.66) para  $z \approx 1$  (ou  $r \approx 0$ ), dados por

$$r = \frac{\sqrt{2} \operatorname{sgn}(\sigma) \nu}{2} (z-1)^{1/2} - \frac{\sqrt{2} \operatorname{sgn}(\sigma) (\nu^2 + \nu + 1) \nu}{8} (z-1)^{3/2}. \quad (5.5)$$

Tomamos também a expansão de  $z = (1 - r^2 \sigma^2)^{-1/2}$  para  $r \approx 0$ , que produz

$$z = 1 + \frac{r^2 \sigma^2}{2} + \frac{3r^4 \sigma^4}{8}. \quad (5.6)$$

Agora, introduzindo a Eq. (5.6) na Eq. (5.5) e considerando  $(1 + \frac{3}{4} r^2 \sigma^2)^{1/2} \simeq 1 + \frac{3}{8} r^2 \sigma^2$ , obtemos a expressão

$$r^2 \left[ \frac{\nu \sigma^3}{16} (2 - \nu^2 - \nu) \right] = 1 - \frac{\nu \sigma}{2} = 1 - \frac{1}{T} + \frac{\sigma}{2}, \quad (5.7)$$

onde utilizamos  $\nu = 2/T\sigma - 1$  para encontrar o lado direito desta equação.

Agora, sabendo que  $H_\sigma = -\sigma r$ , podemos escrever

$$r^2 \Lambda = 1 - \frac{1}{T} + \frac{\sigma}{2} = 1 - \frac{1}{T} - \frac{H_\sigma}{2r}, \quad (5.8)$$

com o parâmetro  $\Lambda$  dado por

$$\Lambda = \frac{\nu\sigma^3}{16}(2 - \nu^2 - \nu) = \frac{H_\sigma^3}{8r^3} + \frac{H_\sigma^2}{8r^2T} - \frac{H_\sigma}{2rT^2} - \frac{1}{2T^3}. \quad (5.9)$$

Na região de transição assumimos um pequeno desvio da temperatura crítica, para o qual usualmente é definido

$$\tau = T_c - T = 1 - T. \quad (5.10)$$

Agora observe que para  $T \rightarrow T_c = 1$  e campo nulo  $H_\sigma = 0$  temos  $\Lambda = -\frac{1}{2}$ . Então a Eq. (5.8) para  $H_\sigma = 0$  e  $\tau \rightarrow 0$  resulta no parâmetro de ordem

$$r = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[ \Lambda^{-1} \left( 1 - \frac{1}{T} \right) \right]^{1/2} \propto (T_c - T)^{1/2} \propto \tau^\beta, \quad (5.11)$$

o qual estabelece o expoente crítico  $\beta = \frac{1}{2}$  para o modelo. Isto foi obtido também em outros contextos diferentes para o modelo de Kuramoto [57, 58]. Assim, para apresentar uma descrição mais completa da transição de fase, iremos obter nesta tese os outros expoentes críticos importantes que não são atualmente apresentados na literatura.

Diante disso, utilizando a Eq. (5.4) podemos expressar também a entropia Eq. (5.1) como uma função de  $H_\sigma$  na forma

$$S_c = S_{max} - \frac{r^2}{T^2} - \frac{H_\sigma}{T}r - \frac{H_\sigma^2}{4}. \quad (5.12)$$

O calor específico em campo constante  $H_\sigma$  é então dado por

$$C_{H_\sigma} = T \left[ \frac{\partial S_c}{\partial T} \right]_{H_\sigma} = \frac{2r^2}{T^2} - \frac{2r}{T} \frac{dr}{dT} + H_\sigma \left( \frac{r}{T} - \frac{dr}{dT} \right). \quad (5.13)$$

Considerando agora a Eq. (5.13) para o campo nulo  $H_\sigma = 0$ ,  $\tau \rightarrow 0$ , e  $r \propto \tau^{1/2}$ , obtemos

$$C_{H_\sigma=0} \propto \tau^\alpha, \quad (5.14)$$

onde em  $C_{H_\sigma}$  permanece somente o termo  $(2r/T)dr/dT$  o qual se torna uma constante que produz o expoente crítico  $\alpha = 0$ . Além disso, observamos que ao longo da isoterma  $T = T_c = 1$  a Eq. (5.8) resulta em

$$r^3 \Lambda = -\frac{1}{2} H_\sigma, \quad (5.15)$$

tal que para  $\tau = 0$  e  $H_\sigma \rightarrow 0$  obtemos a relação entre  $r$  e  $H_\sigma$  como

$$r = - \lim_{H_\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{(2\Lambda)^{1/3}} H_\sigma^{1/3} \propto H_\sigma^{1/\delta}, \quad (5.16)$$

que fornece o expoente crítico  $\delta = 3$  para o sistema.

Partindo da definição do inverso da susceptibilidade  $\chi^{-1}$  e tomando a Eq. (5.15) para o campo nulo  $H_\sigma = 0$ ,  $\Lambda = -1/2$ , e  $\tau \rightarrow 0$ , resulta em

$$\chi^{-1} = \left[ \frac{\partial H_\sigma}{\partial r} \right]_{H_\sigma=0} = - \lim_{\tau \rightarrow 0} 6\Lambda r^2 \propto \tau, \quad (5.17)$$

onde usamos  $r \propto \tau^{1/2}$ . Isto mostra claramente que a susceptibilidade é divergente

$$\chi \propto \tau^{-\gamma}, \quad (5.18)$$

com o expoente crítico  $\gamma = 1$ , como esperado.

Estes resultados concluem o estudo dos quatro principais expoentes críticos do sistema. É importante notar que os expoentes críticos  $\beta = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\delta = 3$ , e  $\gamma = 1$  são expoentes de campo médio e satisfazem respectivamente as leis de escala de Rushbrooke e Widom.

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \quad \text{e} \quad \gamma = \beta(\delta - 1). \quad (5.19)$$

Neste sentido, nós temos então realizado um estudo abrangente da termodinâmica e transição de fase do estado de sincronização fornecendo seus expoentes críticos.

## 5.2 Relação de flutuação-dissipação

Finalmente, é de interesse examinar a relação entre a flutuação do parâmetro de ordem  $\langle r^2 \rangle$  e sua função de resposta na vizinhança da transição de fase para o qual  $r \approx 0$ . A probabilidade de flutuação  $w(r)$  do parâmetro de ordem pode ser obtida como [59]

$$w(r) \propto \exp(\Delta S), \quad (5.20)$$

onde  $\Delta S$  é a mudança na entropia na flutuação que pode ser expressa como  $\Delta S = -W_{min}/T$  [60]. Aqui,  $W_{min}$  é o trabalho externo mínimo que deve ser realizado

sobre o sistema para produzir esta flutuação reversivelmente. Na região crítica, o trabalho externo mínimo é diretamente relacionado ao campo externo  $H_\sigma$ , Eq. (5.4), de acordo com  $W_{min} = \int_0^r H_\sigma dr = -\sigma r^2/2$ . Por outro lado, da definição de susceptibilidade, temos  $\chi^{-1} = [\partial H_\sigma / \partial r]_T = -\sigma$ , que permite reescrever a Eq. (5.20) na forma

$$w(r) \propto \exp\left(-\frac{r^2}{2\chi T}\right), \quad (5.21)$$

a qual é uma distribuição Gaussiana cuja flutuação quadrática média  $\langle r^2 \rangle$  toma a forma

$$\langle r^2 \rangle = T_c \chi. \quad (5.22)$$

Esta é a relação de flutuação-dissipação para o sistema de osciladores, relacionando sua resposta linear  $\chi$ , devido a ação do campo externo  $H_\sigma$ , com as flutuações do parâmetro de ordem em torno da região de equilíbrio  $\langle r \rangle = 0$ . De acordo com a Eq. (5.17), a flutuação quadrática média do parâmetro de ordem aumenta com  $1/\tau$  quando  $T \rightarrow T_c$ . Necessariamente, uma relação similar é conhecida em sistemas magnéticos para flutuação na magnetização [61].

## Capítulo 6

### Conclusão

Nesta tese apresentamos a termodinâmica dos estados de sincronização para o modelo de Kuramoto generalizado com ruído multiplicativo. Mostramos que o ruído multiplicativo tem o efeito de um campo que media a interação entre o banho térmico e as fases do sistema de osciladores. Tal interação pode ser controlada pelo parâmetro de acoplamento de ruído  $\sigma$  levando o sistema a amplificar ou reduzir seu estado de sincronização. Obtemos as expressões analíticas para a distribuição de equilíbrio e o parâmetro de ordem e isto nos permitiu derivar a entropia do sistema de osciladores estabelecendo a relação direta entre duas grandezas que quantificam o estado de ordem-desordem do sistema. Com base nos efeitos do ruído multiplicativo, estabelecemos a primeira lei da termodinâmica para o sistema definindo uma nova grandeza, a qual denominamos de campo de sincronização. Utilizando a entropia e a definição de campo pudemos obter o calor específico e a susceptibilidade do sistema respectivamente, sendo que essas grandezas ainda não tinham sido exploradas dentro do contexto do modelo de Kuramoto. Verificamos que para baixas temperaturas o sistema de osciladores se comporta semelhantemente a um gás ideal e que o estado sincronizado exibe um comportamento anômalo, análogo ao de líquidos complexos como a água, para o qual notamos uma divergência não trivial da susceptibilidade.

Conseguimos obter o conjunto dos quadro expoentes críticos de campo

médio  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1/2$ ,  $\gamma = 1$  e  $\delta = 3$  para o sistema de osciladores acoplados com ruído multiplicativo. Esses expoentes satisfazem as leis de escala de Rushbrooke e Widom. É importante destacar que é a primeira vez que esses quatro expoentes foram obtidos para um sistema de osciladores de fase, permitindo assim, além de uma extensão da análise termodinâmica de tais sistemas, uma melhor compreensão do comportamento crítico que leva a transição para o estado sincronizado.

O modelo de Kuramoto generalizado com ruído multiplicativo proposto nesta tese exhibe um comportamento rico englobando características de sistemas magnéticos, gases ideais e anomalias de líquidos complexos. A modelagem de sistemas neuronais, onde a teoria de osciladores de fase tem um reconhecido papel de importância [62, 63], pode ser um rico campo de aplicação para esse modelo. Dentro deste campo destacamos a modelagem de avalanches neuronais, baseadas no modelo de Ising, onde quantidades termodinâmicas tais como susceptibilidade e calor específico são utilizadas para estudar a criticalidade destes sistemas [64, 65, 66].

# Referências Bibliográficas

- [1] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths. Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences. 2001. [1.1](#), [1.1](#), [1.3](#), [2](#)
- [2] Henrique M Oliveira and Luís V Melo. Huygens synchronization of two clocks. *Scientific Reports*, 5, 2015. [1.1](#)
- [3] Britton Chance, Amal K Ghosh, and E Kendall Pye. *Biological and biochemical oscillators*. Academic Press, 2014. [1.2](#)
- [4] Theodosios Pavlidis. *Biological oscillators: their mathematical analysis*. Elsevier, 2012. [1.2](#)
- [5] Albert Goldbeter. *Biochemical oscillations and cellular rhythms: the molecular bases of periodic and chaotic behaviour*. Cambridge university press, 1997. [1.2](#)
- [6] Shun Yamaguchi, Hiromi Isejima, Takuya Matsuo, Ryusuke Okura, Kazuhiro Yagita, Masaki Kobayashi, and Hitoshi Okamura. Synchronization of cellular clocks in the suprachiasmatic nucleus. *Science*, 302(5649):1408–1412, 2003. [1.2](#)
- [7] Diego di Bernardo and Maria G Signorini. A model of two nonlinear coupled oscillators for the study of heartbeat dynamics. *International journal of Bifurcation and Chaos*, 8(10):1975–1985, 1998. [1.2](#)
- [8] Alex Arenas, Albert Díaz-Guilera, Jurgen Kurths, Yamir Moreno, and Changsong Zhou. Synchronization in complex networks. *Physics Reports*, 469(3):93–153, 2008. [1.2](#)

- 
- [9] G. Buzsaki. *Rhythms of the Brain*. Oxford University Press, USA, 2006. [1.2](#)
- [10] Danielle S Bassett, Andreas Meyer-Lindenberg, Sophie Achard, Thomas Duke, and Edward Bullmore. Adaptive reconfiguration of fractal small-world human brain functional networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 103(51):19518–19523, 2006. [1.2](#)
- [11] Cornelis J Stam. Nonlinear dynamical analysis of eeg and meg: review of an emerging field. *Clinical Neurophysiology*, 116(10):2266–2301, 2005. [1.2](#)
- [12] Peter Tass, MG Rosenblum, J Weule, J Kurths, A Pikovsky, J Volkmann, A Schnitzler, and H-J Freund. Detection of n: m phase locking from noisy data: application to magnetoencephalography. *Physical review letters*, 81(15):3291, 1998. [1.2](#)
- [13] Peter Dayan and Laurence F Abbott. *Theoretical neuroscience*, volume 806. Cambridge, MA: MIT Press, 2001. [1.2](#)
- [14] S.H. Strogatz. *Sync: The emerging science of spontaneous order*. Hyperion, 2003. [1.2](#)
- [15] ATJ Winfree. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *Theor. Biol*, 16:15–42, 1967. [1.4](#), [2.1](#)
- [16] Y. Kuramoto. *Chemical oscillations, waves, and turbulence*. Dover Pubns, 2003. [1.4](#), [2](#), [2.3](#), [2.3.2](#), [4.1](#)
- [17] Yoshiki Kuramoto. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. In Huzihiro Araki, editor, *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*, volume 39 of *Lecture Notes in Physics*, pages 420–422. Springer Berlin Heidelberg, 1975. [1.4](#)

- [18] I. G. Malkin. *Some problems in the theory of nonlinear oscillations*, volume 1. United States Atomic Energy Commission, Technical Information Service, 1959. [2](#)
- [19] Hidetsugu Sakaguchi. Cooperative phenomena in coupled oscillator systems under external fields. *Progress of theoretical physics*, 79(1):39–46, 1988. [2](#), [2.3.3](#), [2.3.3](#), [4.1](#)
- [20] John Guckenheimer and Philip Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, volume 42. Springer Science & Business Media, 1983. [2.1](#)
- [21] Frank Charles Hoppensteadt and Eugene M Izhikevich. *Weakly connected neural networks*, volume 126. Springer New York, 1997. [2.2](#)
- [22] Hyunsuk Hong and Steven H Strogatz. Conformists and contrarians in a kuramoto model with identical natural frequencies. *Physical Review E*, 84(4):046202, 2011. [2.3](#)
- [23] Hiroaki Daido. Quasientrainment and slow relaxation in a population of oscillators with random and frustrated interactions. *Physical review letters*, 68(7):1073, 1992. [2.3](#)
- [24] S.H. Strogatz. From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 143(1-4):1–20, 2000. [2.3](#)
- [25] Bryan C. Daniels. *Synchronization of Globally Coupled Nonlinear Oscillators: the Rich Behavior of the Kuramoto Model*, volume 7.2. Ohio Wesleyan Physics Dept., 2005. [2.4](#)
- [26] J.A. Acebrón, LL Bonilla, C.J. Pérez Vicente, F. Ritort, and R. Spigler. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Reviews of modern physics*, 77(1):137–185, 2005. [2.3.1](#)

- [27] Pedro Dias Pinto. *Transição de fase no modelo de Kuramoto*, volume xi, 66 f. Dissertação (Mestrado em Física). Universidade de Brasília, 2011. [2.3.2](#), [2.6](#), [2.3.3](#)
- [28] Diego Pazó. Thermodynamic limit of the first-order phase transition in the kuramoto model. *Physical Review E*, 72(4):046211, 2005. [2.3.2](#), [2.3.2](#)
- [29] Lasko Basnarkov and Viktor Urumov. Phase transitions in the kuramoto model. *Physical Review E*, 76(5):057201, 2007. [2.3.2](#)
- [30] CJ Perez and F Ritort. A moment-based approach to the dynamical solution of the kuramoto model. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 30(23):8095, 1997. [3](#)
- [31] Luis López Bonilla, CJ Pérez Vicente, F Ritort, and J Soler. Exactly solvable phase oscillator models with synchronization dynamics. *Physical review letters*, 81(17):3643, 1998. [3](#), [3.3.1](#)
- [32] Shamik Gupta, Alessandro Campa, and Stefano Ruffo. Kuramoto model of synchronization: equilibrium and nonequilibrium aspects. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2014(8):R08001, 2014. [3](#)
- [33] Hannes Risken. *The Fokker-Planck Equation*. Springer, 1984. [3](#), [3.1](#), [4.1](#), [4.3.1](#)
- [34] Alexander S Mikhailov and Vera Calenbuhr. *From cells to societies: models of complex coherent action*. Springer Science & Business Media, 2002. [3.1](#), [3.1](#)
- [35] Susanna C Manrubia, Alexander S Mikhailov, and Damían H Zannette. *Emergence of dynamical order: synchronization phenomena in complex systems*, volume 2. World Scientific, 2004. [3.1](#)
- [36] Milton Abramowitz, Irene A Stegun, et al. *Handbook of mathematical functions*, volume 1. Dover New York, 1972. [3.1](#)

- 
- [37] Rouslan L Stratonovich. *Topics in the theory of random noise*, volume 2. CRC Press, 1967. [3.1](#)
- [38] Kanti V Mardia and Peter E Jupp. *Directional statistics*, volume 494. John Wiley & Sons, 2009. [3.1](#)
- [39] S. H. Strogatz and R.E. Mirollo. Stability of incoherence in a population of coupled oscillators. *Journal of Statistical Physics*, 63(3):613–635, 1991. [3.2](#), [4.2](#)
- [40] Melvin Lax. Classical noise iii: Nonlinear markoff processes. *Rev. Mod. Phys.*, 38:359–379, Apr 1966. [3.3.1](#), [4.3.1](#)
- [41] Herbert B Callen. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. Wiley-VCH, 1985. [3.3.2](#)
- [42] Mool C Gupta. *Statistical thermodynamics*. New Age International, 2007. [3.3.2](#)
- [43] Crispin W Gardiner et al. *Handbook of stochastic methods*, volume 4. Springer Berlin, 1985. [4.1](#)
- [44] M-O Hongler, R Filliger, and Ph Blanchard. Hyperbolic angular statistics for globally coupled phase oscillators. *EPL (Europhysics Letters)*, 89(1):10001, 2010. [4.1](#), [4.1](#)
- [45] Seon Hee Park and Seunghwan Kim. Noise-induced phase transitions in globally coupled active rotators. *Physical Review E*, 53(4):3425, 1996. [4.1](#)
- [46] Yi Ming Lai and Mason A Porter. Noise-induced synchronization, desynchronization, and clustering in globally coupled nonidentical oscillators. *Physical Review E*, 88(1):012905, 2013. [4.1](#)
- [47] Peter Reimann, Christian Van den Broeck, and Ryoichi Kawai. Nonequilibrium noise in coupled phase oscillators. *Physical Review E*, 60(6):6402, 1999. [4.1](#)

- [48] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, series, and products*. New York: Academic Press, 2007. [4.1](#)
- [49] DI Russell and RA Blythe. Macroscopically observable probability currents in finite populations. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2013(06):P06008, 2013. [4.3.1](#), [4.3.1](#)
- [50] Howard S Cohl. Fourier expansions for a logarithmic fundamental solution of the polyharmonic equation. *Journal of Classical Analysis*, 2(2):107–127, 2013. [4.3.2](#)
- [51] Radosław Szmytkowski. On the derivative of the legendre function of the first kind with respect to its degree. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39(49):15147, 2006. [4.3.2](#)
- [52] Frank W. J. Olver. *Asymptotics and special functions*. Academic Press, New York, 1974. [4.3.2](#), [4.3.2](#)
- [53] A. Erdélyi et al. *Higher Transcendental Functions Vol. 1*. McGraw-Hill, New York, 1953. [4.3.4](#), [4.3.4](#)
- [54] H Eugene Stanley. *Introduction to phase transitions and critical phenomena*. Oxford University Press, 1987. [4.4.1](#), [4.4.1](#)
- [55] Marco Aurélio A Barbosa, Fernando Vito Barbosa, and Fernando Albuquerque Oliveira. Thermodynamic and dynamic anomalies in a one-dimensional lattice model of liquid water. *The Journal of chemical physics*, 134(2):024511, 2011. [4.4.2](#)
- [56] Marco Aurélio A Barbosa, Evy Salcedo, and Marcia C Barbosa. Multiple liquid-liquid critical points and density anomaly in core-softened potentials. *Physical Review E*, 87(3):032303, 2013. [4.4.2](#)

- [57] Lasko Basnarkov and Viktor Urumov. Phase transitions in the kuramoto model. *Physical Review E*, 76(5):057201, 2007. 5.1
- [58] John David Crawford. Scaling and singularities in the entrainment of globally coupled oscillators. *Physical review letters*, 74(21):4341, 1995. 5.1
- [59] Albert Einstein. Theorie der opaleszenz von homogenen flüssigkeiten und flüssigkeitsgemischen in der nähe des kritischen zustandes. *Annalen der Physik*, 338(16):1275–1298, 1910. 5.2
- [60] Lev Davidovich Landau. *Statistical Physics. Part 1: Course of Theoretical Physics*. Pergamon Press, 1980. 5.2
- [61] H Falk and Ludwig W Bruch. Susceptibility and fluctuation. *Physical Review*, 180(2):442, 1969. 5.2
- [62] Eugene M Izhikevich. *Dynamical systems in neuroscience*. MIT press, 2007. 6
- [63] G Bard Ermentrout and David H Terman. *Mathematical foundations of neuroscience*, volume 35. Springer Science & Business Media, 2010. 6
- [64] Shan Yu, Hongdian Yang, Oren Shriki, and Dietmar Plenz. Critical exponents, universality class, and thermodynamic “temperature” of the brain. *Criticality in Neural Systems*, pages 319–334, 2014. 6
- [65] Dietmar Plenz and Heinz Georg Schuster. *Criticality in neural systems*. Wiley-VCH New York, NY, 2014. 6
- [66] Dante R Chialvo. Emergent complex neural dynamics. *Nature physics*, 6(10):744–750, 2010. 6