

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

**Estabilidade de Equilíbrio e Órbitas
Periódicas em um Sistema
Lotka-Volterra com Duas Presas e
um Predador**

por

Kélem Gomes Lourenço

Brasília
2008

Dedicatória

*Aos meus pais
Marizete Gomes Neto e José Lourenço Neto.*

Agradecimentos

A Deus, pela oportunidade divina de poder realizar este trabalho.

A minha família: Marizete Gomes Neto, José Lourenço Neto, Keid Gomes Lourenço, Katiani Gomes Lourenço, Letícia Lourenço Ribeiro e Guilherme Lourenço de Melo.

Ao querido Lineu da Costa Araújo Neto, pelo imenso companheirismo neste momento de minha vida.

Agradeço ao meu orientador Helmar Nunes Moreira e aos professores que compuseram a banca: Ronaldo Alves Garcia e Jorge Carlos Lucero.

Aos professores Alexei Krassilnikov, Ary Vasconcelos Medino, Carlos Maber Carrion Rivero, Cátia Regina Gonçalves, José Valdo Abreu Gonçalves dos quais tive o prazer de ser aluna.

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, me ajudaram na realização deste trabalho: Walter, Luverci, Renato, Evander, Débora, Jhone, Eunice, Adriana, Mariana, Igor, Kaliana, Sergio, Michael, Tainara, Anyelle, Sandrinha, Janete, Manuela, Ricardo(s), Bianca, Paulo Angelo, Abilio, Tertuliano, Magno, Luciene, Miguel e Carminha, Enai, Fernanda, Geovani, Ana Lídia, Lindemberg, Jorge, Marcos, César, Manoel, Hailton, Luiz, Tânia, Jander, Pereira, Isabel e Cristiano.

Ao CNPq e à Capes, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho analisamos o sistema de equações diferenciais com duas presas e um predador do tipo Lotka-Volterra, com e sem colheita. Inicialmente estudamos a estabilidade local e global dos pontos de equilíbrio no primeiro modelo. Posteriormente, no segundo modelo, estudamos o coeficiente de estabilidade das órbitas periódicas, através da forma normal e estimativas numéricas.

Através do recurso Maple 11, verificamos o comportamento das soluções e o surgimento das órbitas periódicas.

Palavras Chaves: Estabilidade local e global; sistemas Lotka-Volterra; bifurcação de Hopf; forma normal.

Abstract

In this work we analyzed the Lotka-Volterra system of differential equations with two preys and a predator, with and without harvesting. Initially we studied the local and global stability of the points of equilibrium in the first model. Later, in the second model, we studied the coefficient of stability of the periodic orbits, by using normal form and numerical estimatives.

By using Maple 11, we verified the behavior of the solutions and the appearance of the periodic orbits.

Key words: global and local stability; Lotka-Volterra systems; Hopf bifurcation; normal form.

Sumário

Introdução	1
1 Estabilidade Local e Global no Sistema de Duas Presas e Um Predador (Sem Colheita)	4
1.1 Estabilidade Local	4
1.2 Estabilidade Global	7
1.3 Análise Gráfica do Sistema Presa-Predador Sem Colheita	20
2 Existência e Estabilidade de Órbitas Periódicas (com Colheita)	43
2.1 Existência de Órbitas Periódicas	43
2.2 Equações Básicas do Modelo e Estados Estacionários	47
2.3 Forma Normal e Critério de Estabilidade	49
2.4 Análise de a , H_c , H_f e o Coeficiente de Estabilidade R_c	60
2.5 Gráficos do Sistema Presa-Predador sem Colheita	60
Conclusão	74
A Resultados Gerais	76
A.1 Resultados sobre Matrizes	76

A.2	Estabilidade Local	78
A.3	Estabilidade de Liapunov	80
A.4	O Critério de Liapunov	81
A.5	Resultados sobre a Teoria de Bifurcação de Hopf	82
B	Programas Maple 11	83
B.1	Programa 1: Comportamento Soluções em \mathbb{R}^2	83
B.2	Programa 2: Interseção das Superfícies, Comportamento das Soluções em \mathbb{R}^3 e Cálculo dos Auto-valores e Auto-vetores	86
B.3	Programa 3: Órbitas Periódicas	89
	Referências Bibliográficas	90

Introdução

Os modelos estudados neste trabalho são descritos pelos seguintes sistemas de equações diferenciais:

Sistema Lotka-Volterra sem colheita:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_1(b_1 - x_1 - \alpha x_2 - \epsilon y), \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2(b_2 - \beta x_1 - x_2 - \mu y), \\ \frac{dy}{dt} &= y(-b_3 + d\epsilon x_1 + d\mu x_2).\end{aligned}$$

Sistema Lotka-Volterra com colheita:

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= N_1[\epsilon_1 - a_{11}N_1 - a_{12}N_2 - a_{13}N_3], \\ \frac{dN_2}{dt} &= N_2[\epsilon_2 - a_{21}N_1 - a_{22}N_2 - a_{23}N_3], \\ \frac{dN_3}{dt} &= N_3[-\epsilon_3 + a_{31}N_1 + a_{32}N_2] - H.\end{aligned}$$

Sucintamente este trabalho está estruturado do seguinte modo:

No primeiro capítulo estudamos a estabilidade local dos equilíbrios utilizando o teorema de Routh-Hurwitz [12]. Analisamos a estabilidade global através do critério de Liapunov em torno das soluções que se encontram no primeiro octante positivo [18]. Utilizamos como aplicação o sistema presa-predador sem colheita, e variando os parâmetros, obtemos geometricamente o comportamento das soluções.

No capítulo dois, estudamos as órbitas periódicas (na região de bifurcação) e apresentamos um resultado similar ao do teorema de bifurcação de Hopf (no Apêndice A) cuja aplicação se baseará no sistema presa-predador com colheita. Existem vários significados para o nome colheita. Por exemplo: efeito migratório; a retirada de predadores feita pelo homem; a mortalidade dos predadores e outros. Apresentamos o coeficiente de estabilidade (obtido em Hassard et al. [7] e Wiggins [19]) via forma normal [1], para verificar se o ponto de bifurcação é subcrítico ou supercrítico. Novamente aqui fazemos gráficos, utilizando o programa Maple 11, dando um enfoque maior às órbitas periódicas e ao comportamento local das soluções.

Em 1983, Takeuchi e Adachi [17] executaram uma análise matemática em um modelo determinístico com 2 presas e um predador sem nenhuma colheita. Eles estudaram a coexistência das espécies em um tal sistema em estados estacionários, periódicos assim como caóticos. Usando o Teorema da bifurcação de Hopf, as condições suficientes para a existência e estabilidade de órbitas periódicas foram estabelecidas.

Em 1995, Azar [2] et al. executaram a análise numérica de um modelo de 2-presas e 1-predador proposto em [10], onde o predador é colhido.

Kumar et al. [8], em 2002 admitindo os parâmetros dados em Azar [2], empregou duas diferentes estratégias de colheita para o predador: cota de colheita constante e esforço de colheita constante. Usando estas duas diferentes estratégias, eles compararam os critérios de estabilidade do modelo e enfatizaram a vantagem do esforço de colheita constante com a cota de colheita constante.

Estes autores escolheram os parâmetros do modelo de tal forma que, na ausência do predador, uma espécie de presa conduz a outra presa competidora à extinção. Como resultado, um sistema competitivo de duas espécies de presas torna-se instável. A característica importante deste modelo é a estabilidade do sistema inteiro com a introdução do predador ao sistema de duas espécies de presas. No artigo de Kumar et al. [8], a taxa de colheita constante é usado como parâmetro de controle no modelo. Sabemos que quando uma espécie particular é colhida num modelo de interação de múltiplas espécies, o estado de equilíbrio é drasticamente alterado.

Neste trabalho analisamos a coexistência num sistema de dois níveis tróficos (de presa e predador), com duas espécies de presas e uma espécie predadora. Em um primeiro

caso, consideramos um sistema duas presas - um predador sem colheita. Posteriormente, consideramos o caso com colheita.

O modelo clássico de Lotka-Volterra para multi-espécies tem gerado muitas pesquisas no estudo das interações de populações do tipo presa-predador [18]. Uma das linhas de estudo considera o fato de alguns predadores polípagos deslocarem sua preferência para uma determinada presa, dependendo da frequência relativa desta. Um predador que se alimenta de várias espécies de presa não ataca todos os tipos indiscriminadamente. Quando um tipo de presa torna-se escasso no meio ambiente, o predador pode parar de procurar por esta espécie e começar a caçar uma outra espécie mais abundante [11].

De suma importância em nosso trabalho são as bifurcações, que se tratam de mudanças qualitativas na resposta de um sistema dinâmico devido às variações dos parâmetros de controle. Elas ocorrem quando há uma mudança qualitativa (perda de estabilidade estrutural) da topologia do retrato de fase em um determinado ponto, denominado ponto de bifurcação.

Em 1942, E. Hopf estabeleceu condições para a ocorrência de um tipo de bifurcação num sistema n -dimensional. Entretanto, esse tipo de bifurcação já havia sido sugerido por Poincaré, em 1892, e estudado por Andronov, em 1929, para um sistema bidimensional. Assim, esse tipo de bifurcação também é chamada de bifurcação de Poincaré-Andronov-Hopf [18].

Capítulo 1

Estabilidade Local e Global no Sistema de Duas Presas e Um Predador (Sem Colheita)

Ao longo deste capítulo estudaremos a estabilidade local dos pontos de equilíbrio do sistema com 2 presas e 1 predador através do critério de Routh-Hurwitz e a estabilidade global utilizando o teorema de Liapunov. Analisaremos as interações de um sistema dinâmico com duas presas e um predador, verificando as condições de coexistência entre as espécies.

1.1 Estabilidade Local

Nesta seção vamos utilizar alguns resultados importantes que se encontram no Apêndice A, com a finalidade de analisar a estabilidade local e global dos pontos de equilíbrio no sistema de 2 presas e 1 predador:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1(b_1 - x_1 - \alpha x_2 - \epsilon y) \\ \dot{x}_2 &= x_2(b_2 - \beta x_1 - x_2 - \mu y) \\ \dot{y} &= y(-b_3 + d\epsilon x_1 + d\mu x_2), \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $y(t)$ indicam a densidade da população de presas 1, presas 2 e predadores respectivamente, $b_i > 0$ ($i = 1, 2, 3$) são as taxas intrínsecas de crescimento ou decrescimento, ϵ e μ são coeficientes de decrescimento devido a predação, $d > 0$ é a taxa de crescimento de predadores devido ao aumento de presas, $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ são parametros representando efeitos competitivos entre duas presas.

Um papel muito importante no estudo da geometria do plano de fase é desempenhada pelas soluções constantes de (1.1), as quais são precisamente os zeros do sistema

$$\begin{cases} x_1(b_1 - x_1 - \alpha x_2 - \epsilon y) = 0 \\ x_2(b_2 - \beta x_1 - x_2 - \mu y) = 0 \\ y(-b_3 + d\epsilon x_1 + d\mu x_2) = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Essas soluções são chamadas *pontos de equilíbrio*.

Através da solução do sistema (1.2), obtemos 7 pontos de equilíbrio não-negativos, isto é;

(i) Equilíbrio de três espécies:

Quando x_1, x_2 e y são não-nulos, resolvendo o sistema (1.2), obtemos através da regra de Cramer $(E_3) = E_{+++} = (x_1^*, x_2^*, y^*)$, onde

$$x_1^* = \tilde{x}_i / |A| \quad (i = 1, 2), \quad y^* = \tilde{y} / |A|, \quad (1.3)$$

$$\tilde{x}_1 = b_3\epsilon - db_1\epsilon\mu - \alpha b_3\mu + db_1\mu^2, \quad (1.4)$$

$$\tilde{x}_2 = db_2\epsilon^2 - db_1\epsilon\mu - b_3\beta\epsilon + b_3\mu, \quad (1.5)$$

$$\tilde{y} = b_3(\alpha\beta - 1) + d\mu(b_2 - \beta b_1) + d\epsilon(b_1 - \alpha b_2), \quad (1.6)$$

$$|A| = d(\epsilon^2 + \mu^2 - (\alpha + \beta)\epsilon\mu). \quad (1.7)$$

(ii) Equilíbrio de duas espécies:

Quando temos x_1 nulo e x_2, y não nulos, resolvendo o sistema (1.2) com estas condições obtemos:

$$(E_{0++}) = (0, b_3\mu, db_2\mu - b_3) / d\mu^2.$$

Quando $x_2 = 0$, x_1 e y não nulos teremos:

$$(E_{+0+}) = (b_3\epsilon, 0, db_1\epsilon - b_3) / d\epsilon^2.$$

Quando $y = 0$, x_1 e x_2 não nulos resulta em:

$$(E_{++0}) = (b_1 - \alpha b_2, b_2 - \beta b_1, 0) / (1 - \alpha\beta); \quad \alpha\beta \neq 1.$$

(iii) Equilíbrio de uma espécie:

Quando x_1 e y são ambos nulos e $b_2 - x_2 = 0$ obtemos o ponto de equilíbrio:

$$(E_{0+0}) = (0, b_2, 0).$$

Quando x_2 e $y = 0$ são ambos nulos e $b_1 - x_1 = 0$ resulta no ponto de equilíbrio:

$$(E_{+00}) = (b_1, 0, 0).$$

(iv) Quando x_1 e x_2 são ambos nulos (não existem presas), não haverá alimento para o predador, e este será extinto, isto é, $y = 0$. Obtemos assim:

$$(E_{000}) = (0, 0, 0).$$

o qual é um equilíbrio instável.

Pelo critério de Routh-Hurwitz obtemos as condições de estabilidade local, conforma tabela (1.1).

Pontos de Equilíbrio	Condições de Existência Não-negativa	Condições de Estabilidade Local
$(E_3) = (x_1^*, x_2^*, y^*)$	$x_1^* \geq 0, x_2^* \geq 0, z^* \geq 0$	$\begin{cases} a_1 = x_1^* + x_2^* & > 0 \\ a_2 = (1 - \alpha\beta)x_1^*x_2^* + \\ + d(\epsilon^2x_1^* + \mu^2x_2^*)y^* & > 0 \\ a_3 = x_1^*x_2^*y^* A & > 0 \\ a_1a_2 - a_3 & > 0 \end{cases}$
E_{+0+}	$\epsilon > b_3/db - 1$	$\tilde{x}_2 < 0$
E_{0++}	$\mu > b_3/db_2$	$\tilde{x}_1 < 0$
E_{++0}	$(b_1 - \alpha b_2)(b_2 - \beta b_1) > 0$	$\alpha\beta < 1, \tilde{y} < 0$
E_{+00}	Sempre	$\beta > b_2/b_1, \epsilon < b_3/(db_1)$
E_{0+0}	Sempre	$\alpha > b_1/b_2, \mu < b_3/(db_2)$
E_{000}	Sempre	Instável

Tabela 1.1: Condições de existência e estabilidade local para pontos de equilíbrio não-negativo do sistema (1.1) de duas-presas e um-predador.

1.2 Estabilidade Global

Enunciaremos alguns teoremas e definições, que nos darão condições de estabilidade para o sistema (1.1).

Observação 1.1. *Veja Apêndice A para definição de matriz S_w ou matriz \bar{S}_w .*

Teorema 1.1. *Se $A = (a_{ij}) \in S_w$, então o sistema (1.1) tem um equilíbrio estável e não-negativo para cada $b = (b_i) \in \mathbb{R}^3$.*

Descrição do sistema e notação: Vamos considerar a equação diferencial tridimensional

$$\frac{d}{dt}x_i = x_i(b_i - \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j) \quad (1.8)$$

ou na forma vetorial,

$$\frac{d}{dt}x = X(b - Ax), \quad (1.9)$$

chamada de equação de Lotka-Volterra. Denote o ponto de equilíbrio por $x^* = (x_1^*, x_2^*, y^*)$ do sistema (1.8) com x^* satisfazendo

$$X^*(b - Ax^*) = 0, \quad (1.10)$$

onde $X = \text{diag}(x_1^*, x_2^*, y^*)$.

Existem no máximo 2^3 soluções da equação (1.10), pois A é não singular. Assuma que o ponto de equilíbrio x^* satisfaça

$$b - Ax^* = 0,$$

e seja não-negativo, isto é,

$$x^* = A^{-1}b \geq 0. \quad (1.11)$$

Deste modo, consideremos a estabilidade de x^* . Substituindo (1.11) em (1.9) obtemos

$$\frac{d}{dt}x = X(Ax^* - Ax) = -XA(x - x^*),$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}x_i = -x_i \sum_{j=1}^3 a_{ij}(x_j - x_j^*). \quad (1.12)$$

Observação 1.2. *O próximo teorema é condição suficiente para x^* ser estável.*

Reescreveremos o teorema (1.1), sendo que no sistema (1.1) existe um ponto de equilíbrio não-negativo dado pela tabela (1.1).

Observação 1.3. *Veja Apêndice A sobre definição de matriz positiva definida.*

Teorema 1.2. *Assuma a existência de um ponto de equilíbrio $x^* = A^{-1}b$ para o sistema (1.8) (ou (1.1)). Então x^* é estável se existe uma matriz W diagonal positiva definida tal que a matriz $(WA + A^T W)$ seja positiva definida.*

Demonstração: Consideremos por simplicidade, que a 2ª componente do ponto de equilíbrio x^* seja igual a zero e os outros sejam positivos, isto é,

$$x_2^* = 0, x_i^* > 0; i = 1, 3. \quad (1.13)$$

A solução de (1.12) é positiva se o valor inicial é positivo, daí, é possível definir uma transformação tal que

$$\begin{cases} y_i = \ln\left(\frac{x_i}{x_i^*}\right), & i = 1, 3 \\ y_2 = x_2, \end{cases}$$

isto é,

$$\begin{cases} x_i = x_i^* e^{y_i}, & i = 1, 3 \\ x_2 = y_2, \end{cases} \quad (1.14)$$

Pela transformação, (1.12) torna-se:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^* e^{y_1} \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 = \dot{y}_2 \\ \dot{x}_3 = x_3^* e^{y_3} \dot{y}_3, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_i^* e^{y_i} \dot{y}_i, & i = 1, 3 \\ \dot{x}_2 = \dot{y}_2. \end{cases} \quad (1.15)$$

Por (1.12) resulta:

$$\begin{cases} i \neq 2 \Rightarrow \dot{x}_i = -x_i^* e^{y_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^3 a_{ij} (x_j e^{y_j} - x_j^*), \\ i = 2 \Rightarrow \dot{x}_i = -y_i \sum_{j=2}^2 a_{ij} (y_j). \end{cases} \quad (1.16)$$

Assim pela relação (1.15) obtemos:

$$\begin{cases} i \neq 2 \Rightarrow \dot{y}_i = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^3 a_{ij} x_j^* (e^{y_j} - 1), \\ i = 2 \Rightarrow \dot{y}_i = -y_i \sum_{j=2}^2 a_{ij} (y_j). \end{cases} \quad (1.17)$$

Daí

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1^* & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x_3^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{y_1} - 1 \\ y_2 \\ e^{y_3} - 1 \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Pela transformação, x^* é transformado num ponto de equilíbrio, $y = 0$ de (1.18). Em seguida, defina uma função continuamente diferenciável $V(y)$,

$$\begin{aligned} V(y) &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^3 x_i^* w_i (e^{y_i} - y_i - 1) + w_2 y_2 \\ &= \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^* & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x_3^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{y_1} - y_1 - 1 \\ y_2 \\ e^{y_3} - y_3 - 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

onde w_i é a i -ésima ($i = 1, 2, 3$) componente de w , isto é, $w = \text{diag}(w_1, w_2, w_3)$, $w_i > 0, \forall i = 1, 2, 3$.

Além disso, defina um conjunto fechado e limitado

$$\Omega = \{y/y_2 \geq 0, V(y) \leq L(y(t_0))\},$$

onde $L(y(t_0))$ é um número constante positivo que depende da condição de valor inicial $y(t_0)$, e satisfaz $L(y(t_0)) \geq V(y(t_0))$, V é denominada função de Liapunov.

Obtemos as seguintes propriedades de $V(y)$:

- (1) $V(y) \geq 0$ em Ω ,
- (2) $V(y) = 0$, é válido apenas para $y = 0$ em Ω .

A derivada de $V(y(t_0))$ em relação a t ao longo da solução de (1.18) é

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}V(y(t)) |_{(1.18)} &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^3 x_i^* w_i (e^{y_i} \dot{y}_i - \dot{y}_i) + w_2 \dot{y}_2 \\
 &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^3 x_i^* w_i (e^{y_i} - 1) (-Ax_i^* (e^{y_i} - 1)) - y_2 w_2 Ay_2 \\
 &= -Z^T W A Z \\
 &= -\frac{1}{2} Z^t (W A + A^T W) Z,
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

onde

$$Z = \begin{pmatrix} x_1^* & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x_3^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{y_1} - 1 \\ y_2 \\ e^{y_3} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^*(y_1 - 1) \\ y_2 \\ x_3^*(e^{y_3} - 1) \end{pmatrix}. \tag{1.21}$$

Por hipótese, o lado direito da última igualdade de (1.20) é negativo definido. Pela equação (1.18) e a unicidade da solução $y_2(t) = 0$ para $t \geq t_0$ se $y_2(t_0) = 0$. Então, $y_2(t) \geq 0$ para $t \geq t_0$ se $y_2(t_0) \geq 0$.

Assim, toda solução de (1.18) permanece em Ω . Portanto, todas as soluções iniciando em Ω se aproximam da origem $y = 0$ quando $t \rightarrow +\infty$ pelo teorema da estabilidade estendida de La Salle [9].

Além disso, a origem é estável com respeito a Ω visto que toda solução inicialmente em Ω permanece em Ω .

O conjunto Ω aproxima o conjunto $\{y/y_2 \geq 0, y_i \in \mathbb{R}, \forall i \neq 2\}$ quando $L(y(t_0)) \rightarrow \infty$.

Este conjunto corresponde a:

$$\mathbb{R}_*^3 = \{x/x \in \mathbb{R}^3, x_2 \geq 0, x_i > 0 \text{ para cada } i \neq 2\}$$

por (1.14).

Portanto, o ponto de equilíbrio descrito por (1.13) é globalmente estável com respeito a \mathbb{R}_*^3 no sentido da definição (A.5) no Apêndice A.

Com relação ao ponto de equilíbrio não-negativo $x^* = A^{-1}b$ cujas componentes nulas são mais que uma ou com relação ao ponto de equilíbrio positivo, pode ser provada similarmente que x^* é estável. ■

O próximo resultado nos mostra que as soluções não “explodirão”, isto é, que elas são limitadas no octante positivo.

Teorema 1.3. *Todas as soluções do sistema (1.1) iniciando em $\mathbb{R}_{+0}^3 = \{x_i \geq 0, (i = 1, 2), y \geq 0\}$ são limitadas.*

Demonstração: Defina a função

$$w = \sum_{j=1}^2 dx_j + y. \quad (1.22)$$

A derivada temporal de W ao longo da solução do sistema (1.1) é descrita como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}w(x(t), y(t)) |_{(1.1)} &= \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= d(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + \dot{y} \\ &= d(b_1 - x_1 - \alpha x_2 - \epsilon y) + x_2(b_2 - \beta x_1 - x_2 - \mu y) \\ &\quad + y(-b_3 + d\epsilon x_1 + d\mu x_2) \\ &= d[(b_1 - x_1)x_1 + (b_2 - x_2)x_2 - (\alpha + \beta)x_1x_2] - b_3y \\ &= (d, d) \begin{bmatrix} b_1 - x_1 & -\alpha x_1 \\ -\beta x_2 & b_2 - x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - b_3y. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Para algum $\lambda > 0$, a seguinte desigualdade vale para (1.22), (1.23), $\alpha > 0$ e $\beta > 0$:

$$\frac{d}{dt}w |_{(1.1)} + \lambda w \leq \sum_{i=1}^2 d(\lambda + b_i - x_i)x_i + y(\lambda - b_3). \quad (1.24)$$

Se $\lambda < b_3$ o lado direito de (1.24) é limitado superiormente $\forall (x_1, x_2, z) \in \mathbb{R}_{+0}^3$.

Assim

$$\frac{d}{dt}w |_{(1.1)} + \lambda w < P. \quad (1.25)$$

Resolvendo esta EDO através do método de fator integrante, a expressão acima resulta em

$$0 \leq w(x(t), z(t)) \leq \frac{P}{\lambda} + w(x(0), z(0))e^{-\lambda t}, \quad (1.26)$$

onde P é um número constante positivo.

Por (1.22) e (1.26) todas as componentes da solução $(x(t), z(t))$ são limitadas.

■

O seguinte resultado ajudará a determinar a estabilidade de um ponto de equilíbrio.

Teorema 1.4. *A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \epsilon \\ \beta & 1 & \mu \\ -d\epsilon & -d\mu & 0 \end{pmatrix}$ pertence a \bar{S}_w se e somente se $\alpha + \beta \leq 2$.*

Demonstração: Visto que $A \in \bar{S}_w$, existe uma matriz diagonal definida positiva $w = \text{diag}(w_i)$ tal que $B = (WA + A^T W)$ seja positiva definida e todo menor principal de B seja não-negativo.

O determinante das matrizes obtidas omitindo a 1ª (ou 2ª) linha e coluna de B são não-negativos se e somente se

$$B = (WA + A^T W) = \begin{pmatrix} 2w_1 & \alpha w_1 + \beta w_2 & \epsilon w_1 - d\epsilon w_2 \\ \beta w_2 + \alpha w_1 & 2w_2 & \mu w_2 - d\mu w_3 \\ -d\epsilon w_3 + \epsilon w_1 & -d\mu w_3 + \mu w_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 2w_2 & \mu w_2 - d\mu w_3 \\ -d\mu w_3 + \mu w_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A_{11} = -(\mu w_2 - d\mu w_3)^2 = -\mu^2(w_2 - dw_3)^2 \geq 0,$$

se e somente se

$$w_2 = dw_3 \quad (1.27)$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} 2w_1 & \epsilon w_1 - d\epsilon w_2 \\ -d\epsilon w_3 + \epsilon w_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

$$\det A_{22} = -(\epsilon w_1 - d\epsilon w_3)^2 = -\epsilon^2(w_1 - dw_3)^2 \geq 0,$$

se e somente se

$$w_1 = dw_3$$

isto é:

$$w_1 = w_2 = dw_3.$$

Note que, o determinante da matriz obtida por B, omitindo a 3ª linha e coluna é:

$$A_{33} = \begin{pmatrix} 2w_1 & \alpha w_1 + \beta w_2 \\ \beta w_2 + \alpha w_1 & 2w_2 \end{pmatrix}$$

$$\det A_{33} = 4w_1w_2 - (\alpha w_1 + \beta w_2)^2 = (4 - (\alpha + \beta)^2)w_1^2 \geq 0,$$

se e somente se

$$(\alpha + \beta)^2 \leq 4,$$

se e somente se

$$(\alpha + \beta) \leq 2.$$

Reciprocamente escolhemos

$$w > 0; w = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; d > 0.$$

É evidente que

$$w = \text{diag}(d; d; 1); d > 0$$

é definida positiva. Logo

$$A \in \overline{S}_w.$$

■

Analogamente, obteremos um critério de estabilidade através da função de Liapunov para os seguintes pontos de equilíbrio:

- (i) E_{++0} ;
- (ii) E_{+0+} ;
- (iii) E_{0++} ;
- (iv) E_{+00} ;
- (v) E_{0+0} .

(i) Seja $V(x_1, x_2, y)$ uma função definida positiva sobre E_{++0} dada por

$$V(x_1, x_2, y) = w_1 \left(x_1 - x_1^* - x_1^* \log \left(\frac{x_1}{x_1^*} \right) \right) + w_2 \left(x_2 - x_2^* - x_2^* \log \left(\frac{x_2}{x_2^*} \right) \right) + w_3 y,$$

onde $w_i > 0$ ($i = 1, 2, 3$). Então a derivada em relação ao tempo de V ao longo das soluções do sistema (1.1) é

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1(t), x_2(t), y(t)) &= V_{x_1} \dot{x}_1 + V_{x_2} \dot{x}_2 + V_y \dot{y} \\ &= w_1 \left[\frac{x_1 - x_1^*}{x_1} \right] \dot{x}_1 + w_2 \left[\frac{x_2 - x_2^*}{x_2} \right] \dot{x}_2 + w_3 \dot{y} \\ &= w_1 [x_1 - x_1^*] (b_1 - x_1 - \alpha x_2 - \epsilon y) + w_2 [x_2 - x_2^*] (b_2 - \beta x_1 - x_2 - \mu y) \\ &\quad + w_3 (-b_3 + d\epsilon x_1 + d\mu x_2) y. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Da última igualdade obtemos

$$\begin{aligned}
 w_1[x_1 - x_1^*](b_1 - x_1 - \alpha x_2 - \epsilon y) &= w_1[x_1 - x_1^*][b_1 - (x_1 - x_1^* + x_1^*) \\
 &\quad - \alpha(x_2 - x_2^* + x_2^*) - \epsilon(y - y^* + y^*)] \\
 &= w_1[x_1 - x_1^*][(b_1 - x_1^* - \alpha x_2^* - \epsilon y^*) - (x_1 - x_1^*)] \quad (1.30) \\
 &\quad - \alpha(x_2 - x_2^*) - \epsilon(y - y^*)] \\
 &= [-(x_1 - x_1^*)^2 - \alpha(x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) - \epsilon(x_1 - x_1^*)y].
 \end{aligned}$$

De modo análogo temos

$$\begin{aligned}
 w_2[x_2 - x_2^*](b_2 - \beta x_1 - x_2 - \mu y) &= w_2[-\beta(x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) \\
 &\quad - (x_2 - x_2^*)^2 - \mu(x_2 - x_2^*)y]; \quad (1.31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_3(-b_3 + d\epsilon x_1 + d\mu x_2)y &= w_3[-b_3 + d\epsilon(x_1 - x_1^* + x_1^*) \\
 &\quad + d\mu(x_2 - x_2^* + x_2^*)]y \quad (1.32) \\
 &= w_3[d\epsilon(x_1 - x_1^*) + d\mu(x_2 - x_2^*)]y \\
 &= w_3d[\epsilon(x_1 - x_1^*) + \mu(x_2 - x_2^*)]y.
 \end{aligned}$$

Substituindo as expressões (1.30), (1.31) e (1.32) em $\dot{V}(x_1, x_2, y)$ teremos:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x_1, x_2, y) &= w_1[-(x_1 - x_1^*)^2 - \alpha(x_1 - x_1^*)x_2 - \epsilon(x_1 - x_1^*)(y - y^*)] + \\
&\quad + w_2y[-\beta(x_1 - x_1^*) - x_2 - \mu(y - y^*)] \\
&\quad + w_3d[\epsilon(x_1 - x_1^*) + \mu(x_2 - x_2^*)]y \\
&= -\sqrt{w_1^2}(x_1 - x_1^*)^2 - \sqrt{w_2^2}(x_2 - x_2^*)^2 \\
&\quad + (x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*)[-\alpha w_1 - \beta w_2] + (x_1 - x_1^*)y(-\epsilon w_1 + d\epsilon w_3) \\
&\quad + (x_2 - x_2^*)y[-\mu w_2 + d\mu w_3] \\
&\hspace{15em} (1.33) \\
&= -\{[\sqrt{w_1}(x_1 - x_1^*) + \sqrt{w_2}(x_2 - x_2^*)]^2 - 2\sqrt{w_1 w_2}(x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) \\
&\quad + (\alpha w_1 + \beta w_2)(x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*)\} + (x_1 - x_1^*)y(-\epsilon w_1 + d\epsilon w_3) \\
&\quad + (x_2 - x_2^*)y(-\mu w_2 + d\mu w_3) \\
&= -[\sqrt{w_1}(x_1 - x_1^*) + \sqrt{w_2}(x_2 - x_2^*)]^2 + 2\sqrt{w_1 w_2}(x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) \\
&\quad - (\alpha w_1 + \beta w_2)(x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) + (x_1 - x_1^*)y(-\epsilon w_1 + d\epsilon w_3) \\
&\quad + (x_2 - x_2^*)y(-\mu w_2 + d\mu w_3).
\end{aligned}$$

Fazendo $w_1 = dw_3$ e $w_2 = dw_3$ obtemos $w_1 = w_2$. Assim

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x_1, x_2, y) &= -[\sqrt{w_1}(x_1 - x_1^*) + \sqrt{w_2}(x_2 - x_2^*)]^2 + [2 - (\alpha + \beta)]w_1(x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) \\
&= -[\sqrt{w_1}(x_1 - x_1^*) + \sqrt{w_2}(x_2 - x_2^*)]^2 - [(\alpha + \beta) - 2]w_1(x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) \\
&= -w_1[(x_1 - x_1^*)^2 + (\alpha + \beta)(x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*)] - w_1(x_2 - x_2^*)^2.
\end{aligned}$$

Completando os quadrados obtemos

$$\begin{aligned}
 &= -w_1 \left\{ \left[(x_1 - x_1^*) + \frac{(\alpha + \beta)}{2}(x_2 - x_2^*) \right]^2 - \frac{(\alpha + \beta)^2}{4}(x_2 - x_2^*)^2 \right\} - w_1(x_2 - x_2^*)^2 \quad (1.34) \\
 &= -w_1 \left[(x_1 - x_1^*) + \frac{(\alpha + \beta)}{2}(x_2 - x_2^*) \right]^2 + w_1(x_2 - x_2^*)^2 \left[\frac{(\alpha + \beta)^2}{4} - 1 \right].
 \end{aligned}$$

Logo $\dot{V} < 0$ se e somente se $\alpha + \beta < 2$.

(ii) Seja $V(x_1, x_2, y)$ uma função definida positiva sobre E_{+0+} dada por

$$V(x_1, x_2, y) = w_1 \left(x_1 - x_1^* - x_1^* \log \left(\frac{x_1}{x_1^*} \right) \right) + w_2 x_2 + w_3 \left(y - y^* - y^* \log \left(\frac{y}{y^*} \right) \right)$$

onde $w_i > 0$ ($i = 1, 2, 3$). Então a derivada em relação ao tempo de V ao longo das soluções do sistema (1.1) é dado por:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x_1(t), x_2(t), y(t)) &= V_{x_1} \dot{x}_1 + V_{x_2} \dot{x}_2 + V_y \dot{y} \\
 &= w_1 \left[\frac{x_1 - x_1^*}{x_1} \right] \dot{x}_1 + w_2 \dot{y} + \left[\frac{y - y^*}{y} \right] \dot{y} \quad (1.35) \\
 &= w_1 [x_1 - x_1^*] (b_1 - x_1 - \alpha x_2 - \epsilon y) + w_2 x_2 (b_2 - \beta x_1 - x_2 - \mu y) \\
 &\quad + w_3 [y - y^*] (-b_3 + d\epsilon x_1 + d\mu x_2).
 \end{aligned}$$

Analisando cada membro da última igualdade obtemos

$$\begin{aligned}
 w_1 [x_1 - x_1^*] (b_1 - x_1 - \alpha x_2 - \epsilon y) &= w_1 [-(x_1 - x_1^*)^2 - \alpha(x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) \\
 &\quad - \epsilon(x_1 - x_1^*)(y - y^*)] \quad (1.36) \\
 &= w_1 [-(x_1 - x_1^*)^2 - \alpha(x_1 - x_1^*)x_2 - \epsilon(x_1 - x_1^*)(y - y^*)];
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_2 x_2 (b_2 - \beta x_1 - x_2 - \mu y) &= w_2 x_2 [b_2 - \beta(x_1 - x_1^* + x_1^*) \\
 &\quad - (x_2 - x_2^* + x_2^*) - \mu(y - y^* + y^*)] \quad (1.37) \\
 &= w_2 x_2 [-\beta(x_1 - x_1^*) - x_2 - \mu(y - y^*)].
 \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}
 w_3 (-b_3 + d\epsilon(x_1 - x_1^*) + d\mu x_2)(y - y^*) &= w_3 [-b_3 + d\epsilon(x_1 - x_1^* + x_1^*) \\
 &\quad + d\mu(x_2 - x_2^* + x_2^*)][y - y^*] \quad (1.38) \\
 &= w_3 [y - y^*][d\epsilon(x_1 - x_1^*) + d\mu(x_2 - x_2^*)] \\
 &= w_3 [d\epsilon(y - y^*)(x_1 - x_1^*) + d\mu(x_2)(y - y^*)].
 \end{aligned}$$

Substituindo as expressões (1.36), (1.37) e (1.38) em $\dot{V}(x_1, x_2, y)$ teremos:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x_1, x_2, y) &= w_1[-(x_1 - x_1^*)^2 - \alpha(x_1 - x_1^*)x_2 - \epsilon(x_1 - x_1^*)(y - y^*)] + \\
 &\quad + w_2x_2[-\beta(x_1 - x_1^*) - x_2 - \mu(y - y^*)] \\
 &\quad + w_3d[\epsilon(x_1 - x_1^*)(y - y^*) + \mu x_2(y - y^*)] \\
 &= -\{[\sqrt{w_1}(x_1 - x_1^*) + \sqrt{w_2}x_2]^2 - 2\sqrt{w_1w_2}(x_1 - x_1^*)x_2 \\
 &\quad + (\alpha w_1 + \beta w_2)(x_1 - x_1^*)x_2\} + (x_1 - x_1^*)(y - y^*)(-\epsilon w_1 + d\epsilon w_3) \quad (1.39) \\
 &\quad + x_2(y - y^*)(-\mu w_2 + d\mu w_3) \\
 &= -[\sqrt{w_1}(x_1 - x_1^*) + \sqrt{w_2}x_2]^2 + 2\sqrt{w_1w_2}(x_1 - x_1^*)x_2 \\
 &\quad - (\alpha w_1 + \beta w_2)(x_1 - x_1^*)x_2 + (x_1 - x_1^*)(y - y^*)(-\epsilon w_1 + d\epsilon w_3) \\
 &\quad + x_2(y - y^*)(-\mu w_2 + d\mu w_3).
 \end{aligned}$$

Fazendo $w_1 = dw_3$ e $w_2 = dw_3$ obtemos $w_1 = w_2$. Assim

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x_1, x_2, y) &= -[\sqrt{w_1}(x_1 - x_1^*) + \sqrt{w_2}(x_2 - x_2^*)]^2 + [2 - (\alpha + \beta)]w_1(x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) \\
 &= -[\sqrt{w_1}(x_1 - x_1^*) + \sqrt{w_2}x_2]^2 - [(\alpha + \beta) - 2]w_1(x_1 - x_1^*)x_2 \quad (1.40) \\
 &= -w_1[(x_1 - x_1^*)^2 - (\alpha + \beta)(x_1 - x_1^*)x_2] - w_1x_2^2.
 \end{aligned}$$

Completando os quadrados obtemos

$$\begin{aligned}
 &= -w_1 \left\{ \left[(x_1 - x_1^*) - \frac{(\alpha + \beta)}{2} x_2 \right]^2 - \frac{(\alpha + \beta)^2}{4} x_2^2 \right\} - w_1 x_2^2 \\
 &= -w_1 \left[(x_1 - x_1^*) - \frac{(\alpha + \beta)}{2} x_2 \right]^2 + w_1 x_2^2 \left[\frac{(\alpha + \beta)^2}{4} - 1 \right].
 \end{aligned} \tag{1.41}$$

Logo $\dot{V} < 0$ se e somente se $\alpha + \beta < 2$.

Analogamente obtemos a estabilidade para os itens restantes, desde que $\alpha + \beta < 2$ ocorra. Através do teorema (1.4) e das demonstrações de estabilidade (acima), obtemos o seguinte resultado:

Teorema 1.5. *Suponha que $\alpha + \beta < 2$.*

(i) *Se (E_3) existe, então (E_3) é estável.*

(ii) *Se (E_3) não existe, então um dos $(E_{0++}), (E_{+0+}), (E_{++0}), (E_{+00})$ e (E_{0+0}) é estável.*

1.3 Análise Gráfica do Sistema Presa-Predador Sem Colheita

Utilizando os resultados obtidos sobre estabilidade local e global do sistema (1.1), verificaremos alguns resultados gráficos em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , onde mostram as interações da população de presas e predadores ao longo do tempo. Estes resultados são obtidos através do programa Maple, com atribuições particulares aos parâmetros. Veja Apêndice B para maiores detalhes da programação.

Observação 1.4. *Ressaltamos alguns problemas ao utilizar o recurso Maple. Ao plotar alguns gráficos, percebemos que a população de presas ou predadores se torna zero e depois volta a crescer. Este problema decorre da escala do Maple.*

No primeiro caso, atribuiremos valores aos parâmetros onde as condições de estabilidade (que estão listados na tabela (1.1)) são satisfeitas.

- Consideremos o sistema com três espécies em equilíbrio, onde o ponto de estabilidade satisfaz o critério de Routh-Hurwitz (veja tabela (1.1)):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(1 - x_1 - x_2 - 5y) \\ \dot{x}_2 = x_2(1 - 1.5x_1 - x_2 - y) \\ \dot{y} = y(-1 + 2.5x_1 + 0.5x_2) \end{cases} \quad (1.42)$$

Observação 1.5. *Notemos que $\alpha + \beta > 2$ neste primeiro sistema.*

Através de cálculos (Apêndice B) obtemos os seguintes valores:

$$E_{+++} = (0.2962962963, 0.5185185185, 0.03703703704)$$

$$a_1 = 0.8148148148$$

$$a_2 = 0.06995884768$$

$$a_3 = 0.0384087915$$

$$a_1 a_2 - a_3 = 0.01859472637,$$

onde os auto-valores:

$$\lambda_1 = -0,7878946851, \lambda_2 = -0,01346006481 + 0,2203802336i$$

$$\text{e } \lambda_3 = -0,01346006481 - 0,2203802336i,$$

implicam que E_{+++} é um foco atrator. Vejamos o comportamento destas soluções ao longo do sistema (1.42).

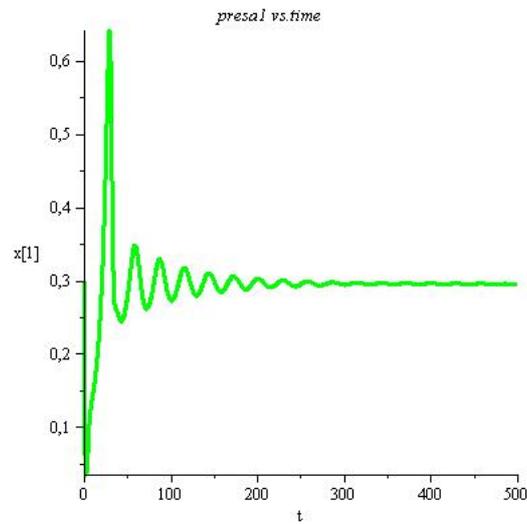


Figura 1.1: População da presa 1 (x_1). Para $\alpha = 1$, $\beta = 1.5$, $d = 0.5$, $\mu = 1$, $b_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$) e $\epsilon = 5$ no sistema (1.1).

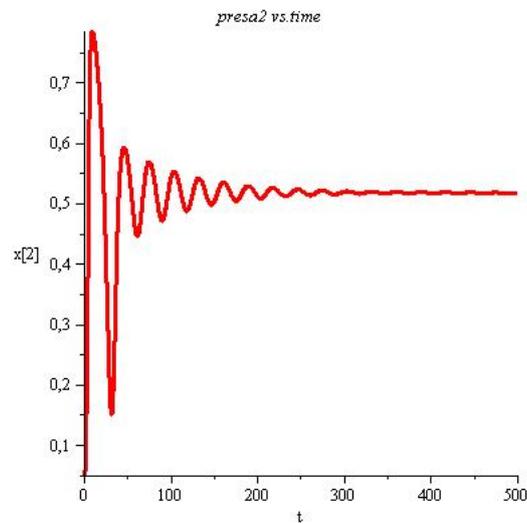


Figura 1.2: População da presa 2 (x_2). Para $\alpha = 1$, $\beta = 1.5$, $d = 0.5$, $\mu = 1$, $b_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$) e $\epsilon = 5$ no sistema (1.1).

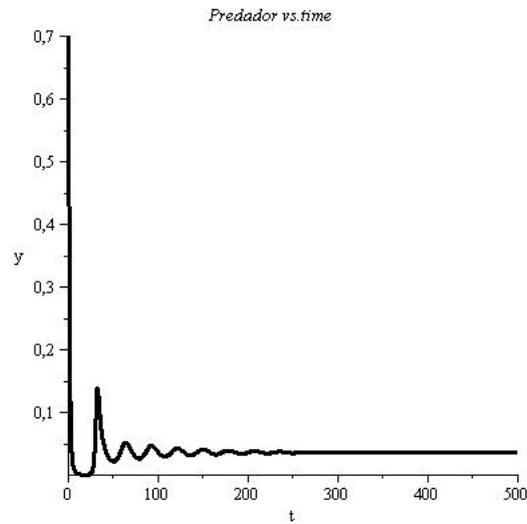


Figura 1.3: População do predador (y). Para $\alpha = 1$, $\beta = 1.5$, $d = 0.5$, $\mu = 1$, $b_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$) e $\epsilon = 5$ no sistema (1.1).

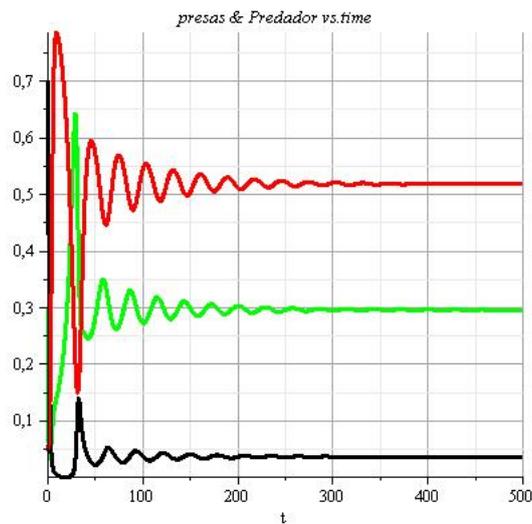


Figura 1.4: Interações entre populações da presa 1 (x_1 - verde), presa 2 (x_2 - vermelho) e predador (y - preto) com respeito ao tempo. Tomamos no sistema (1.1) $\alpha = 1$, $\beta = 1.5$, $d = 0.5$, $\mu = 1$, $b_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$) e $\epsilon = 5$.

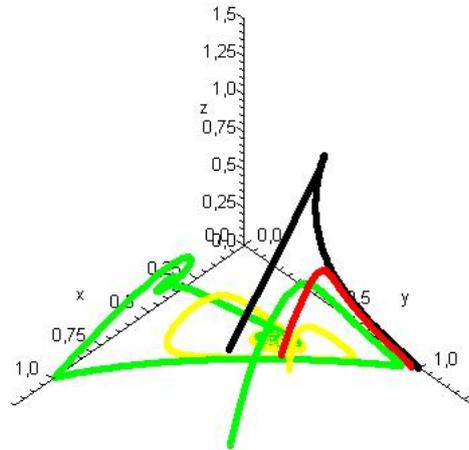


Figura 1.5: Comportamento das soluções em \mathbb{R}^3 ao longo do sistema (1.42)

Agora tomamos valores para α e β , tal que a condição $\alpha + \beta < 2$ ocorra. Podemos ver que neste caso, as soluções oscilam menos, isto é, o comportamento das soluções são estáveis, com esta pequena mudança.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(1 - x_1 - 0.9x_2 - 5y) \\ \dot{x}_2 = x_2(1 - 0.95x_1 - x_2 - y) \\ \dot{y} = y(-1 + 2.5x_1 + 0.5x_2) \end{cases} \quad (1.43)$$

Novamente, através de cálculos (Apêndice B) obtemos os seguintes valores:

$$E_{+++} = (0.2507462687, 0.7462686567, 0.01552238806)$$

$$a_1 = 0.9970149254$$

$$a_2 = 0.08157718871$$

$$a_3 = 0.02432613064$$

$$a_1 a_2 - a_3 = 0.05700754418$$

Onde os auto-valores:

$$\lambda_1 = -0,9376831737, \lambda_2 = -0.02966587558 + 0.1583121586i$$

$$\text{e } \lambda_3 = -0.02966587558 - 0.1583121586i$$

implicam que E_{+++} é um foco atrator. Vejamos o comportamento destas soluções ao longo do sistema (1.43).

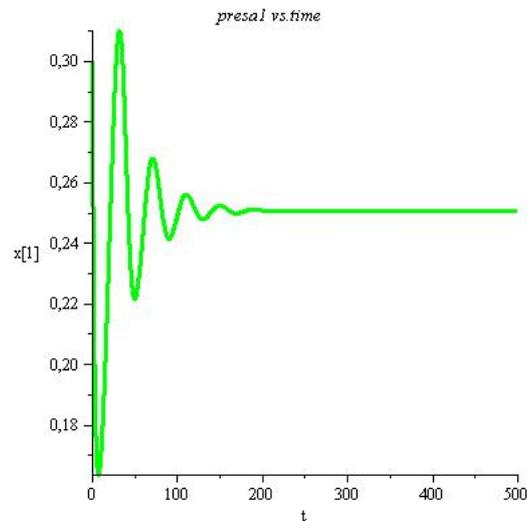


Figura 1.6: População da presa 1 (x_1). Para $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.95$, $d = 0.5$, $\mu = 1$, $b_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$) e $\epsilon = 5$ no sistema (1.1).

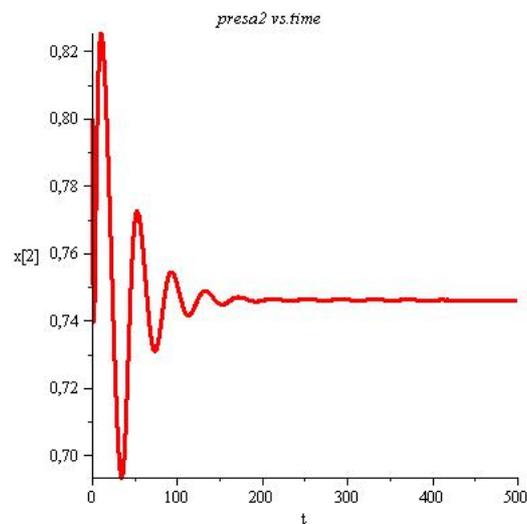


Figura 1.7: População da presa 2 (x_2). Para $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.95$, $d = 0.5$, $\mu = 1$, $b_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$) e $\epsilon = 5$ no sistema (1.1).

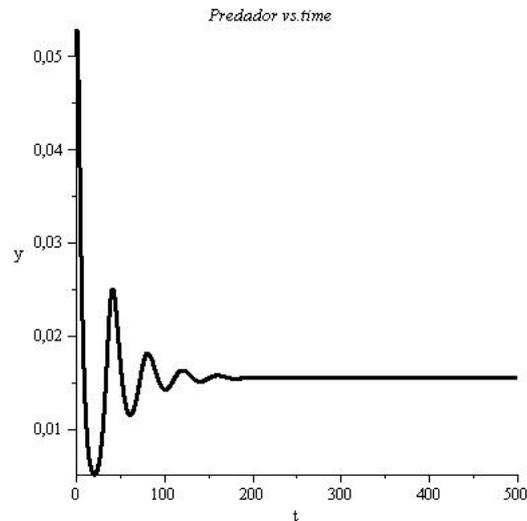


Figura 1.8: População do predador (y). Para $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.95$, $d = 0.5$, $\mu = 1$, $b_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$) e $\epsilon = 5$ no sistema (1.1).

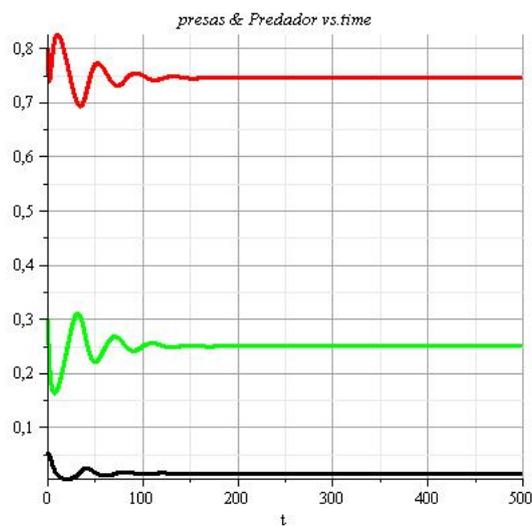


Figura 1.9: Interações entre populações da presa 1 (x_1 - verde), presa 2 (x_2 - vermelho) e predador (y - preto) com respeito ao tempo. Tomamos no sistema (1.1) $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.95$, $d = 0.5$, $\mu = 1$, $b_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$) e $\epsilon = 5$.

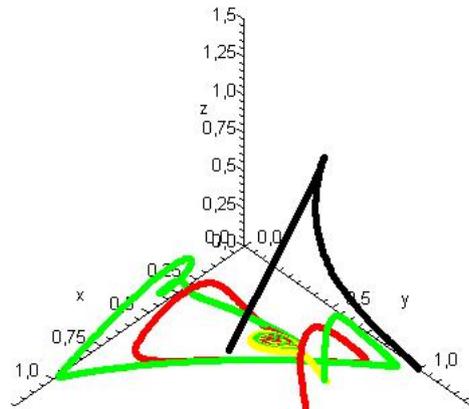


Figura 1.10: Comportamento das soluções em \mathbb{R}^3 ao longo do sistema (1.43)

- Sistema com apenas duas espécies:

Consideremos primeiramente o sistema com apenas a presa 1 e o predador sobrevivendo. Vamos verificar o comportamento das soluções quando $\alpha + \beta < 2$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1(1.5 - x_1 - 4y), \\ \dot{x}_2 &= 0, \\ \dot{y} &= y(-1.2 + 2x_1). \end{cases} \quad (1.44)$$

Com estes parâmetros obtemos os seguintes valores que satisfazem a tabela (1.1):

$$E_{+0+} = (0.5, 0, 0.25)$$

$$\tilde{x}_2 = -0.16$$

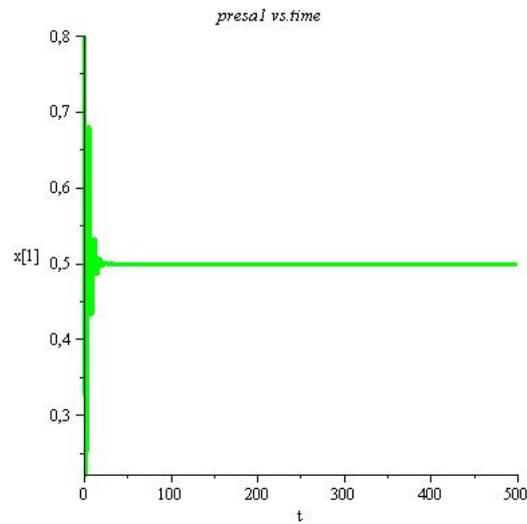


Figura 1.11: População da presa 1 (x_1). Para $\alpha = 0.95$, $\beta = 0.90$, $d = 0.5$, $\mu = 1$, $b_1 = 1.5$, $b_2 = 0.5$, $b_3 = 1$ e $\epsilon = 4$ no sistema (1.1).

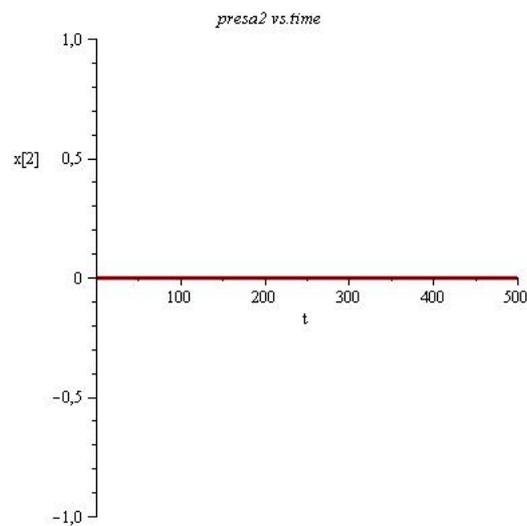


Figura 1.12: População da presa 2 (x_2). Para $\alpha = 0.95$, $\beta = 0.90$, $d = 0.5$, $\mu = 1$, $b_1 = 1.5$, $b_2 = 0.5$, $b_3 = 1$ e $\epsilon = 4$ no sistema (1.1).

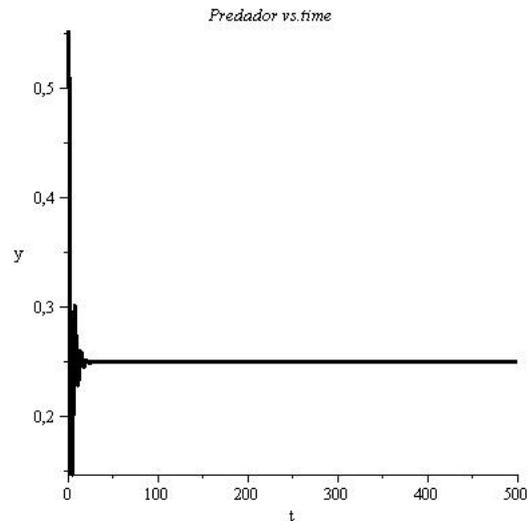


Figura 1.13: População do predador (y). Para $\alpha = 0.95$, $\beta = 0.90$, $d = 0.5$, $\mu = 1$, $b_1 = 1.5$, $b_2 = 0.5$, $b_3 = 1$ e $\epsilon = 4$ no sistema (1.1).

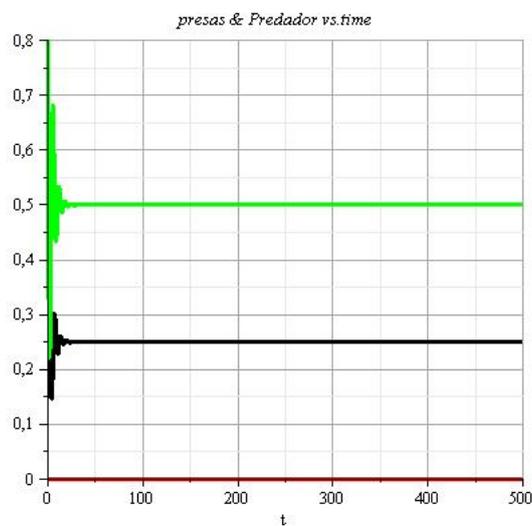


Figura 1.14: Interações entre populações da presa 1 (x_1 – verde), presa 2 (x_2 – vermelho) e predador (y – preto) com respeito ao tempo. Tomamos no sistema (1.1) $\alpha = 0.95$, $\beta = 0.90$, $d = 0.5$, $\mu = 1$, $b_1 = 1.5$, $b_2 = 0.5$, $b_3 = 1$ e $\epsilon = 4$.

Considerando ainda o ponto de equilíbrio E_{+0+} , quando $\alpha + \beta > 2$ no sistema de

uma presa e um predador.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1(1 - x_1 - 3y), \\ \dot{x}_2 &= 0, \\ \dot{y} &= y(-1.2 + 1.5x_1). \end{cases} \quad (1.45)$$

Com estes parâmetros obtemos os seguintes valores que satisfazem a tabela (1.1):

$$E_{+0+} = (0.7999999999, 0, 0.0666666666)$$

$$\tilde{x}_2 = -0.75$$

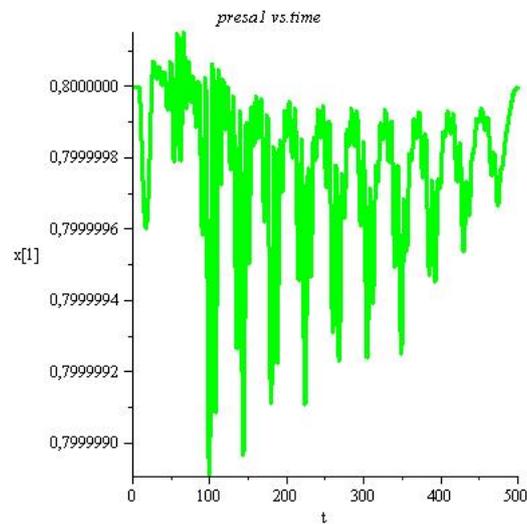


Figura 1.15: População da presa 1 (x_1). Para $\alpha = 1.2$, $\beta = 1$, $d = 0.5$, $\mu = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0.7$, $b_3 = 1.2$ e $\epsilon = 3$ no sistema (1.1).

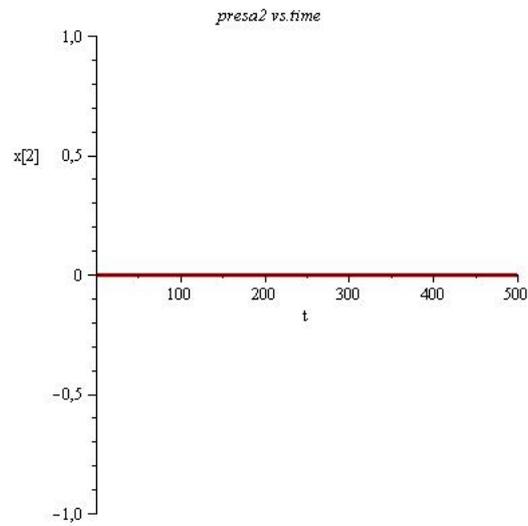


Figura 1.16: População da presa 2 (x_2). Para $\alpha = 1.2$, $\beta = 1$, $d = 0.5$, $\mu = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0.7$, $b_3 = 1.2$ e $\epsilon = 3$ no sistema (1.1).

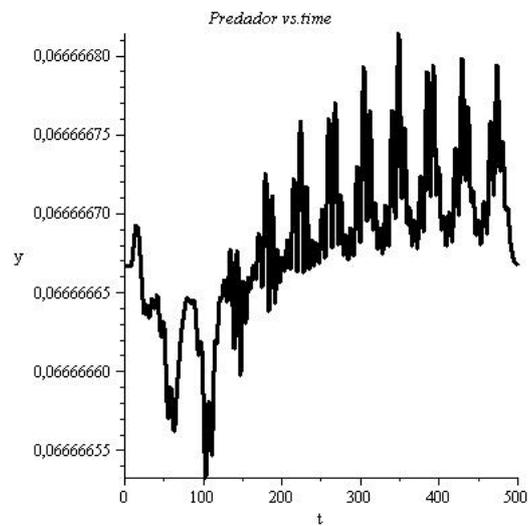


Figura 1.17: População do predador (y). Para $\alpha = 1.2$, $\beta = 1$, $d = 0.5$, $\mu = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0.7$, $b_3 = 1.2$ e $\epsilon = 3$ no sistema (1.1).

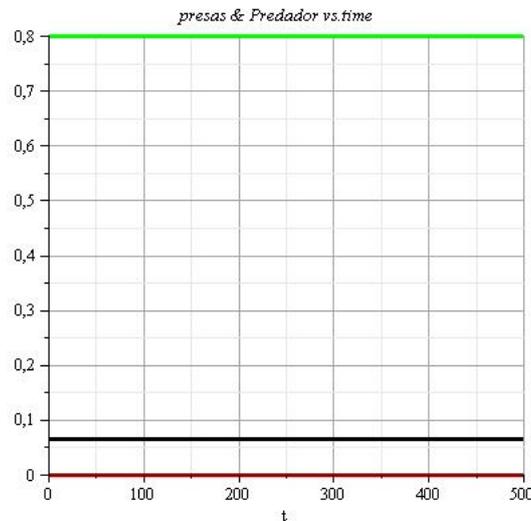


Figura 1.18: Interações entre populações da presa 1 (x_1 – verde), presa 2 (x_2 – vermelho) e predador (y – preto) com respeito ao tempo. Tomamos no sistema (1.1) $\alpha = 1.2$, $\beta = 1$, $d = 0.5$, $\mu = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0.7$, $b_3 = 1.2$ e $\epsilon = 3$.

Para o ponto E_{++0} , com $\alpha + \beta < 2$ no sistema de duas presas.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1(0.96 - x_1 - 0.95x_2), \\ \dot{x}_2 &= x_2(1 - 0.95x_1 - x_2), \\ \dot{y} &= 0. \end{cases} \quad (1.46)$$

Com estes parâmetros obtemos os seguintes valores que satisfazem a tabela (1.1):

$$E_{++0} = (0.1025641026, 0.9025641029, 0)$$

$$y = -0.05310$$

$$\alpha + \beta = 1.90$$

$$\alpha\beta = 0.9025$$

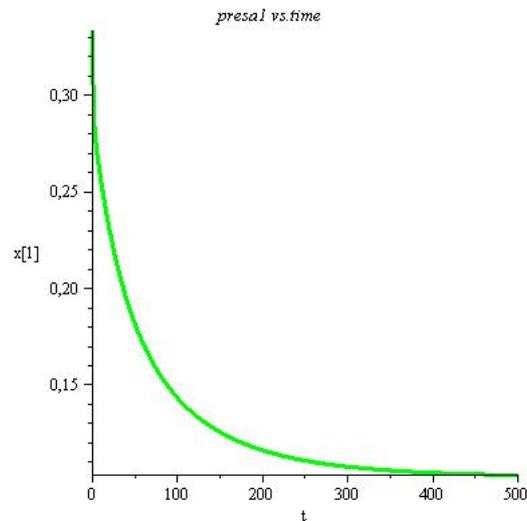


Figura 1.19: População da presa 1 (x_1). Para $\alpha = 0.95$, $\beta = 0.95$, $d = 0.3$, $\mu = 1$, $b_1 = 0.96$, $b_2 = 1$, $b_3 = 1$ e $\epsilon = 6$ no sistema (1.1).

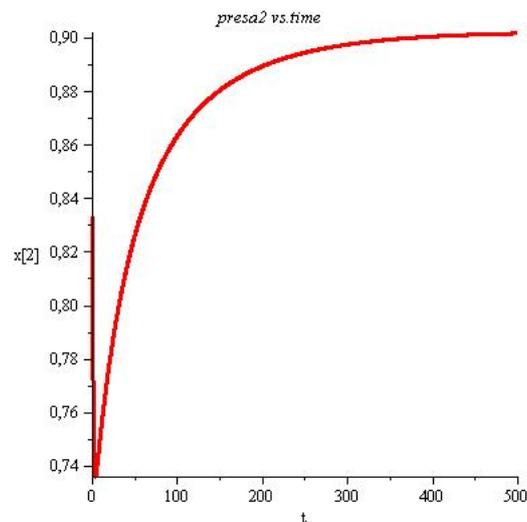


Figura 1.20: População da presa 2 (x_2). Para $\alpha = 0.95$, $\beta = 0.95$, $d = 0.3$, $\mu = 1$, $b_1 = 0.96$, $b_2 = 1$, $b_3 = 1$ e $\epsilon = 6$ no sistema (1.1).

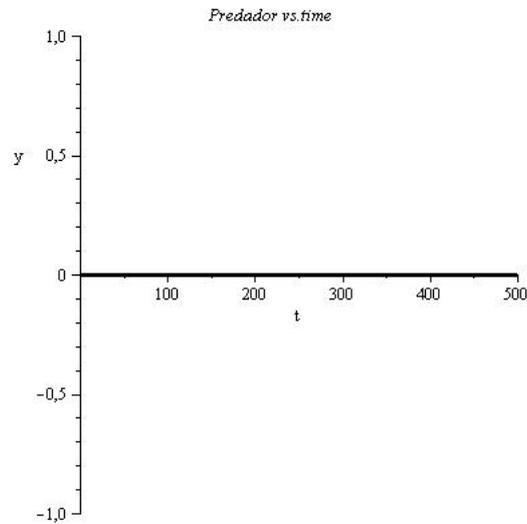


Figura 1.21: População do predador (y). Para $\alpha = 0.95$, $\beta = 0.95$, $d = 0.3$, $\mu = 1$, $b_1 = 0.96$ $b_2 = 1$, $b_3 = 1$ e $\epsilon = 6$ no sistema (1.1).

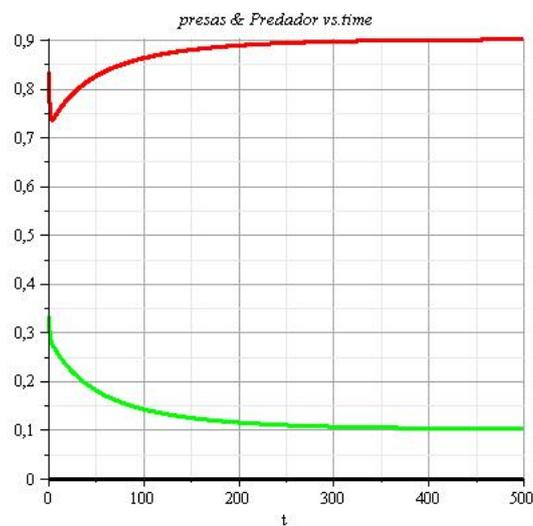


Figura 1.22: Interações entre populações da presa 1 (x_1 – verde), presa 2 (x_2 – vermelho) e predador (y – preto) com respeito ao tempo. Tomamos no sistema (1.1) $\alpha = 0.95$, $\beta = 0.95$, $d = 0.3$, $\mu = 1$, $b_1 = 0.96$ $b_2 = 1$, $b_3 = 1$ e $\epsilon = 6$.

Observação 1.6. *O ponto de equilíbrio E_{0++} tem análise similar, no qual não o faremos aqui.*

- Sistema com uma espécie: Quando apenas a presa 1 ou a presa 2 sobrevive.

Para o ponto de equilíbrio E_{+00} com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1(3 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= 0, \\ \dot{y} &= 0. \end{cases} \quad (1.47)$$

Com os parâmetros acima, obtemos os seguintes valores que satisfazem a tabela (1.1):

$$\begin{aligned} E_{+00} &= (3, 0, 0) \\ \beta - \frac{b_2}{b_1} &= 0.166666667 \\ \frac{b_3}{db_1} - \epsilon &= 0.166666667 \end{aligned}$$

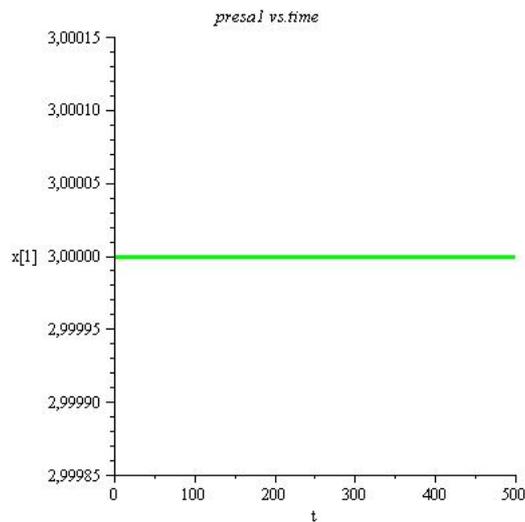


Figura 1.23: População da presa 1 (x_1). Para $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $d = 0.4$, $\mu = 1$, $b_1 = 3b_2 = 1$, $b_3 = 5$ e $\epsilon = 4$ no sistema (1.1).

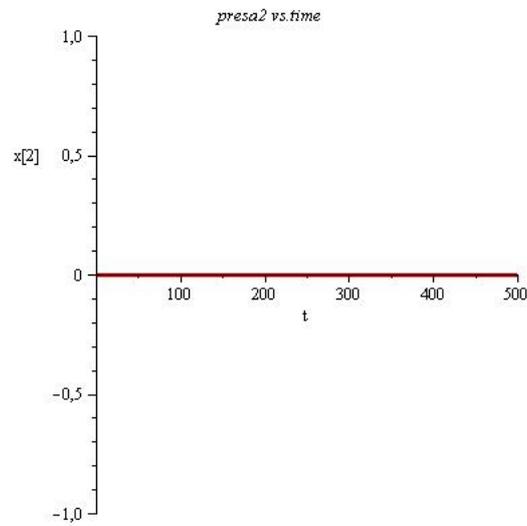


Figura 1.24: População da presa 2 (x_2). Para $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $d = 0.4$, $\mu = 1$, $b_1 = 3$, $b_2 = 1$, $b_3 = 5$ e $\epsilon = 4$ no sistema (1.1).

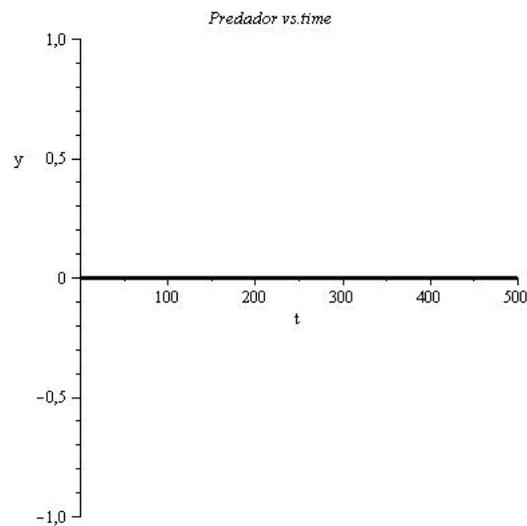


Figura 1.25: População do predador (y). Para $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $d = 0.4$, $\mu = 1$, $b_1 = 3$, $b_2 = 1$, $b_3 = 5$ e $\epsilon = 4$ no sistema (1.1).

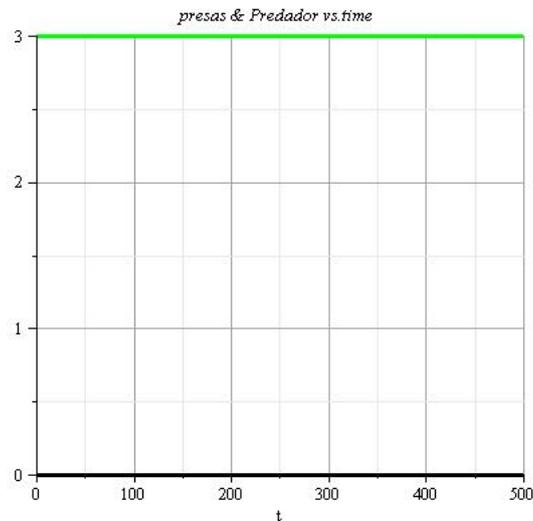


Figura 1.26: Interações entre populações da presa 1 (x_1 – verde), presa 2 (x_2 – vermelho) e predador (y – preto) com respeito ao tempo. Tomamos no sistema (1.1) $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $d = 0.4$, $\mu = 1$, $b_1 = 3b_2 = 1$, $b_3 = 5$ e $\epsilon = 4$.

Observação 1.7. *O ponto de equilíbrio E_{+00} tem análise similar.*

Mais alguns casos:

Caso onde os parâmetros não satisfazem a tabela (1.1), temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(1 - x_1 - x_2 - 8y), \\ \dot{x}_2 = x_2(1 - 1.5x_1 - x_2 - y), \\ \dot{y} = y(-1 + 4x_1 + 0.5x_2), \end{cases} \quad (1.48)$$

Onde $a_1a_2 - a_3 = -0.02870781896$.

O comportamento das soluções são dados pelos seguintes gráficos:

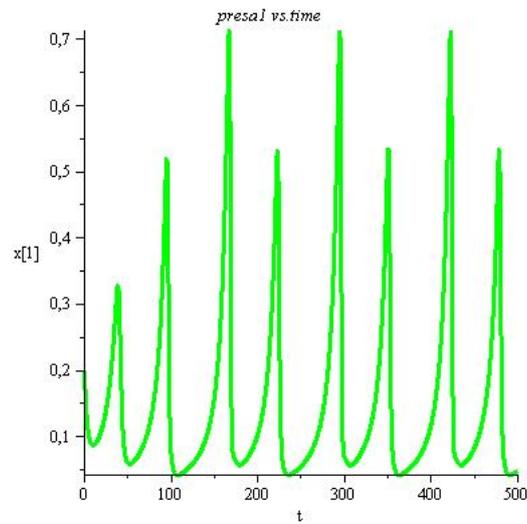


Figura 1.27: População da presa 1- x_1 . Para $\alpha = 1$, $\beta = 1.5$, $d = 0.5$, $\mu = 1$, $b_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$) e $\epsilon = 8$ no sistema (1.1).

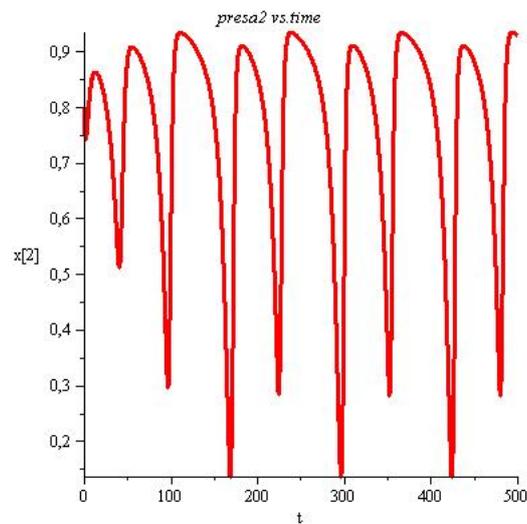


Figura 1.28: População da presa 2- x_2 . Para $\alpha = 1$, $\beta = 1.5$, $d = 0.5$, $\mu = 1$, $b_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$) e $\epsilon = 8$ no sistema (1.1).

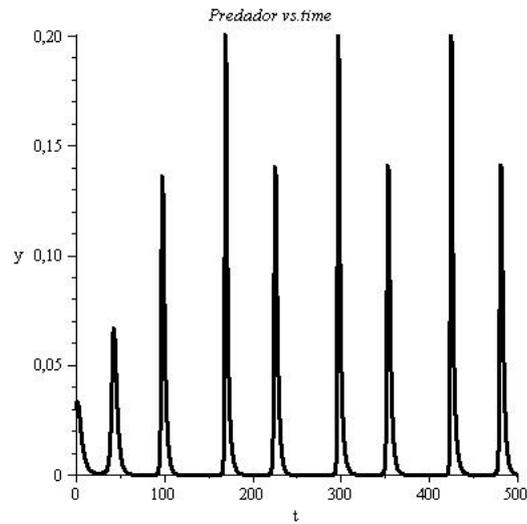


Figura 1.29: População do predador- y . Para $\alpha = 1$, $\beta = 1.5$, $d = 0.5$, $\mu = 1$, $b_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$) e $\epsilon = 8$ no sistema (1.1).

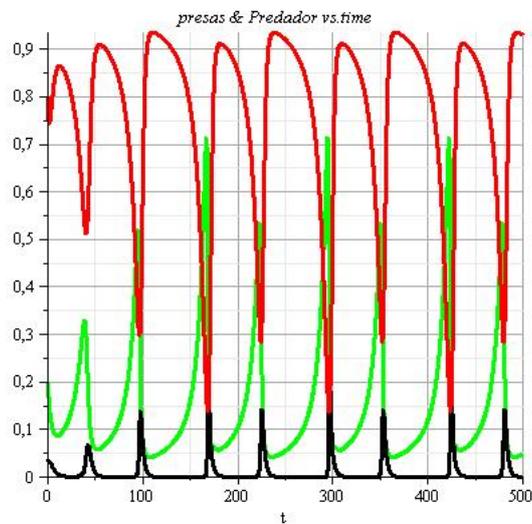


Figura 1.30: Interações entre populações da presa 1 (x_1 – verde), presa 2 (x_2 – vermelho) e predador (y – preto) com respeito ao tempo. Tomamos no sistema (1.1) $\alpha = 1$, $\beta = 1.5$, $d = 0.5$, $\mu = 1$, $b_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$) e $\epsilon = 8$.

Outro caso onde os parâmetros não satisfazem a tabela (1.1), temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(1 - x_1 - x_2 - 6y) \\ \dot{x}_2 = x_2(1 - 1.5x_1 - x_2 - y) \\ \dot{y} = y(-1 + 3x_1 + 0.5x_2), \end{cases} \quad (1.49)$$

onde $a_1a_2 - a_3 = -0.0357365252$ e $a_2 = -0.0234569013$.

O comportamento das soluções são dados pelos seguintes gráficos:

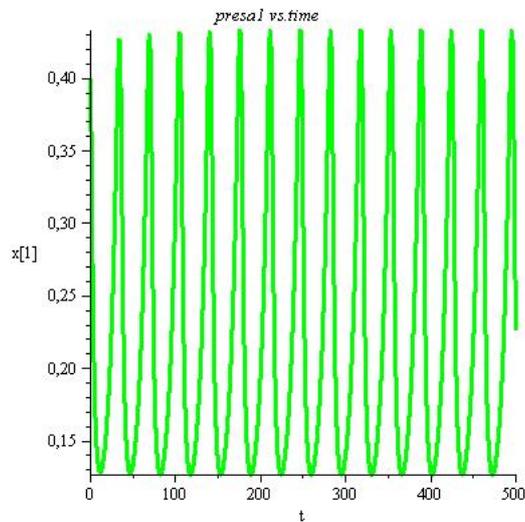


Figura 1.31: População da presa 1- x_1 . Para $\alpha = 1$, $\beta = 1.5$, $d = 0.5$, $\mu = 1$, $b_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$) e $\epsilon = 6$ no sistema (1.1).

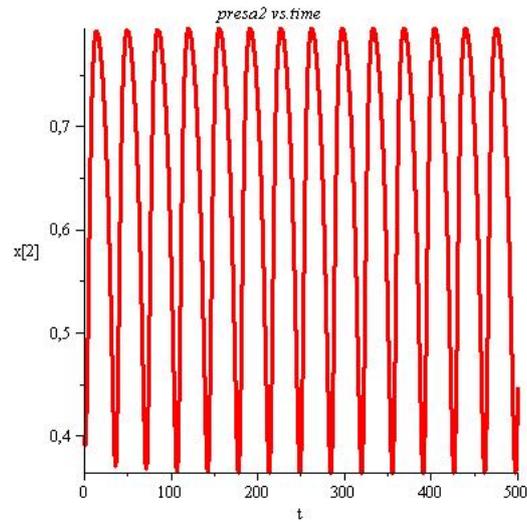


Figura 1.32: População da presa 2- x_2 . Para $\alpha = 1$, $\beta = 1.5$, $d = 0.5$, $\mu = 1$, $b_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$) e $\epsilon = 6$ no sistema (1.1).

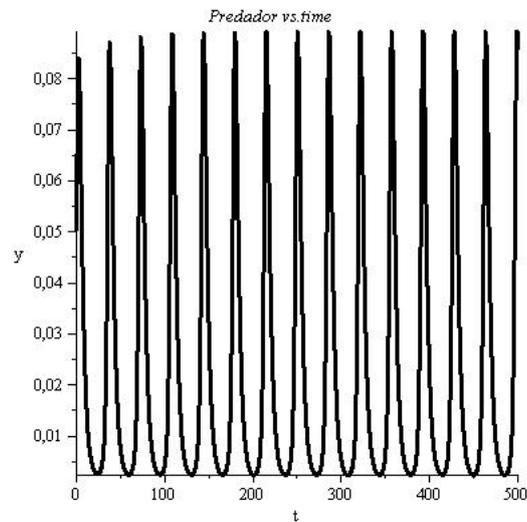


Figura 1.33: População do predador- y . Para $\alpha = 1$, $\beta = 1.5$, $d = 0.5$, $\mu = 1$, $b_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$) e $\epsilon = 6$ no sistema (1.1).

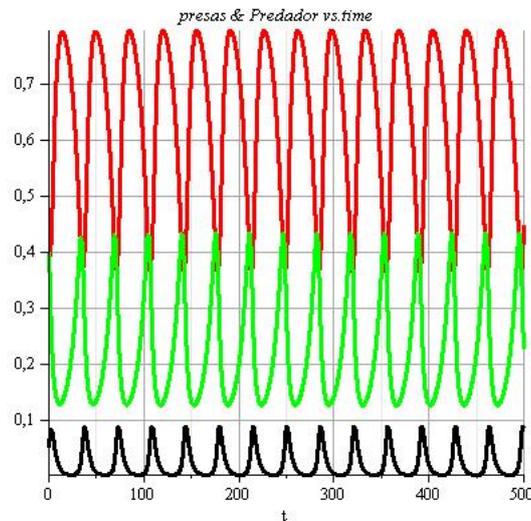


Figura 1.34: Interações entre populações da presa 1 (x_1 – verde), presa 2 (x_2 – vermelho) e predador (y – preto) com respeito ao tempo. Tomamos no sistema (1.1) $\alpha = 1$, $\beta = 1.5$, $d = 0.5$, $\mu = 1$, $b_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$) e $\epsilon = 6$.

Observação 1.8. Cabe aqui fazermos uma pequena observação quanto ao comportamento instável desses dois últimos casos. Para tal ϵ , parece surgir uma órbita periódica do tipo Hopf, já que para $\epsilon = 5$ o sistema torna-se estável. Esta mudança repentina de estabilidade para instabilidade, através da troca do parâmetro ϵ , gera uma órbita periódica, teoria na qual estudaremos no capítulo 2.

Capítulo 2

Existência e Estabilidade de Órbitas Periódicas (com Colheita)

Veremos neste capítulo a interação de um predador e duas-presas com “colheita”. Esta taxa de colheita será usada como um parâmetro de controle. Para que não haja extinção das espécies, estaremos estudando a influência deste parâmetro, sobre a existência de órbitas periódicas e os artigos ([8], [2]) que tratam da estabilidade dessas órbitas. Para tal estudo, usaremos o teorema da bifurcação de Hopf.

2.1 Existência de Órbitas Periódicas

Iniciaremos este capítulo, trazendo um resultado similar ao do Teorema de Bifurcação de Hopf, cujo resultado garante a existência de órbitas periódicas. Para demonstrar tal resultado, iremos utilizar o sistema presa-predador (1.1).

Admitindo as mesmas condições de \tilde{x}_1 , \tilde{x}_2 e \tilde{y} dadas no capítulo 1, consideremos o seguinte gráfico e resultado:

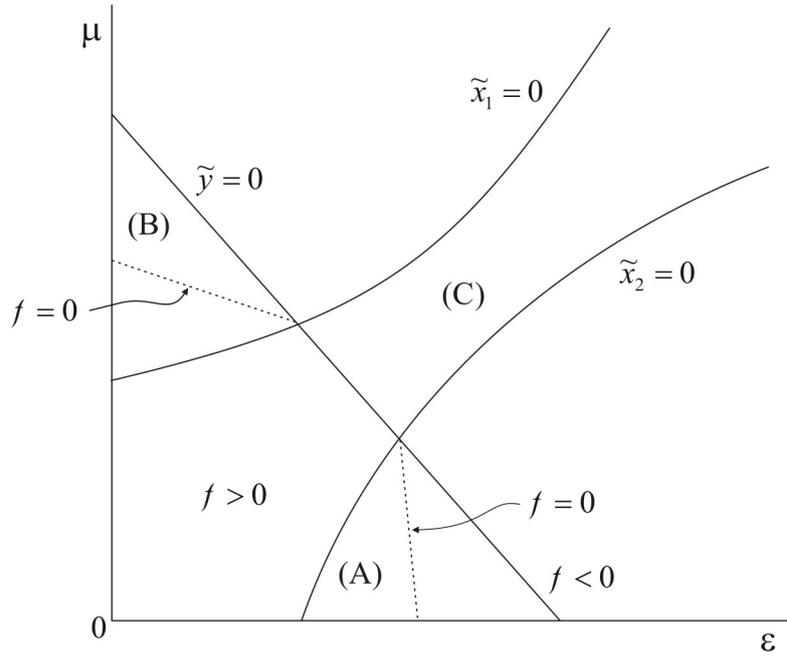


Figura 2.1: Região paramétrica de bifurcação

Teorema 2.1. (i) Na região paramétrica (A) [ou(B)] existe pelo menos um valor paramétrico da bifurcação de Hopf ϵ^* (ou μ^*) para cada ϵ (ou μ) fixado se

$$\frac{d}{d\epsilon}(a_1 a_2 - a_3) |_{\epsilon=\epsilon^*} \neq 0 \quad (\text{ou} \quad \frac{d}{d\mu}(a_1 a_2 - a_3) |_{\mu=\mu^*} \neq 0), \quad (2.1)$$

onde

$$a_1 = x_1^* + x_2^*,$$

$$a_2 = (1 - \alpha\beta)x_1^*x_2^* + d(\mu^2x_2^* + \epsilon^2x_1^*)y^*, \quad (2.2)$$

$$a_3 = x_1^*x_2^*y^* |A|.$$

$$e |A| = d[\epsilon^2 + \mu^2 - (\alpha + \beta)].$$

(ii) Em (C) não existe solução periódica do tipo Hopf.

Demonstração: (i) Na região paramétrica (A) da figura 3(b)

$$|A| > 0 \text{ e } (x_1^*, x_2^*, y^*) > 0, \quad (2.3)$$

o qual resulta em

$$a_1 > 0 \text{ e } a_3 > 0. \quad (2.4)$$

Na fronteira indicada pelo $x_2^* = 0$ de (A),

$$a_1 > 0, a_2 > 0 \text{ e } a_3 = 0, \quad (2.5)$$

o qual implica que

$$a_1 a_2 - a_3 > 0 \quad (2.6)$$

Similarmente, na fronteira indicada por $\tilde{y} = 0$ de (A),

$$a_1 > 0, a_2 < 0 \text{ e } a_3 = 0 \quad (2.7)$$

se $\alpha\beta > 1$.

Daí, 2.7 implica que

$$a_1 a_2 - a_3 < 0. \quad (2.8)$$

Assuma a unicidade de $f(\epsilon, \mu)$. A função $f(\epsilon, \mu) = a_1(\epsilon, \mu)a_2(\epsilon, \mu) - a_3(\epsilon, \mu)$ é contínua. Portanto existe pelo menos uma solução ϵ^* para cada μ fixado em (A) tal que pelo torema do valor intermediário, obtemos

$$f(\epsilon^*, \mu) = 0$$

de (2.6) e (2.8).

O valor mínimo de um tal ϵ é denotado por ϵ^* . De $(a_1 > 0 \text{ e } a_3 > 0)$ e $f(\epsilon^*, \mu) = 0$ implica que

$$a_i(\epsilon^*) > 0, i = 1, 2, 3. \quad (2.9)$$

Portanto $a_1 a_2 - a_3 > 0$ e $a_i(\epsilon^*) > 0, i = 1, 2, 3$ implicam nas condições (i), (iv) e (v) pois (i) $a_1 a_2 - a_3 > 0$ e $a_i(\epsilon^*) > 0$, então A é estável, pelo critério de R. Hurwitz, assim todos os autovalores tem parte real negativa, ou seja,

$$\Gamma(dx_\epsilon(a(\mu))) \subset \{z \in \mathbb{C}/\text{Re}(z) < 0\} \text{ para } \epsilon < \epsilon^*.$$

(iv) Temos $\lambda(\epsilon^*) \neq 0$.

(v) Os demais elementos de $\Gamma(dx_\epsilon(a(\epsilon)))$ permanece no semi-plano esquerdo limitado pelo

eixo imaginário para $\epsilon = \epsilon^*$.

Além disso

$$f(\epsilon^*, \mu) = 0 \text{ acarreta em } a_1(\epsilon^*, \mu)a_2(\epsilon^*, \mu) - a_3(\epsilon^*, \mu) = 0,$$

isto é,

$$a_1a_2 - a_3 = 0$$

o que implica $-S_1S_2 + S_3 = 0$ se e somente se $(\lambda^2 + S_2)(\lambda - S_1) = 0$, onde

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{a_2} \text{ e } \lambda_3 = S_1 = -a_1 < 0,$$

resultando em (ii) do teorema de bifurcação de Hopf (A.4), onde μ e μ_0 das condições são substituídas por ϵ e ϵ^* neste teorema.

A condição (iii) do teorema de bifurcação de Hopf, é a equação (2.1) no teorema (2.1), onde $\lambda(\epsilon^*)$ é tal que

$$(a_1a_2 - a_3) |_{\epsilon=\epsilon^*} = 0,$$

ou seja,

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0.$$

Então

$$\lambda' = -\frac{a_1'\lambda^2 + a_2'\lambda + a_3'}{3\lambda^2 + 2a_1\lambda + a_2}, \quad (2.10)$$

onde $\lambda' = \frac{d}{d\epsilon}\lambda(\epsilon)$.

Daí através da equação característica $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$, obtemos as seguintes relações:

$$S_3 = -a_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 < 0,$$

onde

$$\lambda_1 = iw, \lambda_2 = -iw \text{ para algum } w > 0 \text{ e } \lambda_3 < 0.$$

Segue que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -a_1$ e $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -a_1 = w^2\lambda_3$.

Portanto

$$\lambda_3 = -a_1 \text{ e } -a_3 = w^2(-a_1)$$

implica que $w^2 = \frac{a_3}{a_1}$, isto é, $w = \sqrt{\frac{a_3}{a_1}}$.

Substituindo $\lambda = iw$ em (2.10) obtemos:

$$\begin{aligned}\lambda' &= \frac{-a'_1(-w^2) + a'_2(iw) + a'_3}{-3w^2 + 2a_1iw + a_2} \\ &= \frac{(w^2a'_1 - a'_3)(a_2 - 3w^2) - i(a'_2w)(a_2 - 3w^2) - i(w^2a'_1 - a'_3)(2a_1w) - (a'_2w)(2a_1w)}{(a_2 + 3w^2)^2 + (2a_1w)^2}\end{aligned}\quad (2.11)$$

Assim

$$\frac{d}{d\epsilon} Re(\lambda) |_{\epsilon=\epsilon^*} = \frac{(w^2a'_1 - a'_2)(a_2 - 3w^2) - (a'_2w)(2a_1w)}{(a_2 + 3w^2)^2 + (2a_1w)^2} |_{\epsilon=\epsilon^*}.$$

Note que $a_2 = w^2$. Substituindo na expressão acima obtemos:

$$\frac{d}{d\epsilon} Re(\lambda) = \frac{-2a_2(a'_2a_1 + a'_1a_2 - a'_3)}{16a_2^2 + 4a_1^2a_2} |_{\epsilon=\epsilon^*} \neq 0.$$

Portanto existe uma órbita pelo teorema da bifurcação de Hopf (A.4).

Na região paramétrica (B) a demonstração pode ser dada similarmente.

(ii) Na região paramétrica (C),

$|A| < 0$ e $(x_1^*, x_2^*, y^*) > 0$, o qual resulta em $a_3 < 0$.

Se a matriz tem autovalores imaginários puros, então

$$(a_3 < 0)$$

implica que o outro autovalor real é positivo. Portanto não existe órbita fechada do tipo Hopf.

Assim o teorema (2.1) está provado. ■

2.2 Equações Básicas do Modelo e Estados Estacionários

As equações dinâmicas dadas pela interação de três espécies com taxa de “colheita” constante são dadas por:

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1[\epsilon_1 - a_{11}N_1 - a_{12}N_2 - a_{13}N_3], \quad (2.12)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = N_2[\epsilon_2 - a_{21}N_1 - a_{22}N_2 - a_{23}N_3], \quad (2.13)$$

$$\frac{dN_3}{dt} = N_3[-\epsilon_3 + a_{31}N_1 + a_{32}N_2] - H, \quad (2.14)$$

onde N_1 , N_2 denotam as populações das comunidades de duas-presas, N_3 denota a população de predador e ϵ_i ($i = 1, 2, 3$) são taxas intrínsecas de crescimento e decaimento das três espécies (sufixos 1 e 2 são para as presas e 3 para o predador). Aqui a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) com $i \neq j$ e a_{ii} são os coeficientes de interações competitivas inter-espécies e intra-espécies, respectivamente, a_{13} e a_{23} são os coeficientes para a perda de N_1 e N_2 , respectivamente, como um resultado da interação do predador com a presa 1 e a presa 2, enquanto que a_{31} e a_{32} são os coeficientes para o crescimento do predador como resultado do consumo de presas por eles.

Atribuindo valores aos parâmetros do sistema (2.12), como em Azar [2].

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = a_{11} = a_{22} = a_{12} = a_{23} = 1,$$

$$a_{21} = 1,5, a_{32} = 0,5, a_{13} = a, a_{31} = \frac{1}{2}a,$$

obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = N_1(1 - N_1 - N_2 - aN_3), \\ \frac{dN_2}{dt} = N_2(1 - \frac{3}{2}N_1 - N_2 - N_3), \\ \frac{dN_3}{dt} = N_3(-1 + \frac{1}{2}aN_2 + \frac{1}{2}N_2) - H. \end{cases} \quad (2.15)$$

Notamos que com esta escolha dos parâmetros, o sistema é instável na ausência do predador. Na presença do predador, o sistema de três espécies torna-se estável. Além disso, a presa 1 é competitivamente superior à presa 2 e a presa 2 causa alguma perda à presa 1 quando ambas estão compartilhando a mesma fonte de comida. No fim deste capítulo discorreremos acerca deste assunto.

O modelo acima (2.15), exhibe 7 estados estacionários. Determinamos o estado estacionário não-nulo onde todas as três espécies existem. Seus valores de equilíbrio são dados por N_1^* , N_2^* e N_3^* , e para obtê-los devemos resolver o sistema abaixo.

$$\begin{cases} 1 - N_1 - N_2 - aN_3 = 0 \\ 1 - 1.5N_1 - N_2 - N_3 = 0 \\ N_3(-1 + \frac{1}{2}aN_2 + \frac{1}{2}N_2) - H = 0, \end{cases} \quad (2.16)$$

resultando em:

$$N_1^* = 2(a - 1)N_3^*, \quad (2.17)$$

$$N_2^* = 1 - (3a - 2)N_3^*, \quad (2.18)$$

$$N_3^* = \frac{1 + \sqrt{1 + 8H(a - 2)(2a - 1)}}{2(a - 2)(2a - 1)}. \quad (2.19)$$

Para que este estado de equilíbrio exista (bem definido), devemos ter $a > 2$.

A equação (2.18) põe um limite crítico (H_c) na taxa de colheita do predador para que a presa 2 não se torne extinta. Este limite é obtido fazendo $N_2^* = 0$. Usando $N_2^* = 0$ na equação (2.18), a equação (2.19) se torna

$$H_c = \frac{a^2 - 4a + 2}{(3a - 2)^2}, \quad (2.20)$$

Daí H_c será positivo se $a > 3,414$.

Notemos nas equações (2.17)-(2.19), que neste modelo, o aumento da taxa de colheita, os valores do estado estacionário do predador (N_3^*) e da presa 1 (N_1^*) aumentam, enquanto o valor da presa 2 (N_2^*) diminui. Portanto, devemos ajustar a taxa de colheita dentro do intervalo tal que não seja pequeno.

Além disso, é necessário monitorar continuamente a população da presa 2. Se o seu número torna-se muito baixo, é uma indicação definida que excedemos os limites permitidos de cota de colheita do predador e assim o sistema irá "colapsar" de um sistema de três espécies para um de duas espécies e finalmente para um de uma espécie. A presença da presa 2 em número suficiente será um indicador da diversidade e da harmonia das três espécies.

2.3 Forma Normal e Critério de Estabilidade

Nesta seção nós reduziremos o conjunto de equações diferenciais (2.12)-(2.14) na forma normal, para análise posterior do seu modelo e seu critério de estabilidade. Para encontrarmos tal forma normal, utilizaremos o procedimento desenvolvido em Wiggins [19], Hassard [7], De Almeida e Moreira [1].

Inicialmente transformamos o ponto de equilíbrio (N_1^*, N_2^*, N_3^*) para a origem por uma translação

$$\begin{cases} x_1 = N_1 - N_1^*, \\ x_2 = N_2 - N_2^*, \\ x_3 = N_3 - N_3^*. \end{cases} \quad (2.21)$$

isto é,

$$\begin{cases} N_1 = x_1 + N_1^*, \\ N_2 = x_2 + N_2^*, \\ N_3 = x_3 + N_3^*. \end{cases} \quad (2.22)$$

Assim derivando (2.22) e substituindo (2.15) teremos

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= (x_1 + N_1^*)[1 - (x_1 + N_1^*) - (x_2 + N_2^*) - a(x_3 + N_3^*)] \\ &= x_1 - x_1N_1^* - x_1N_2^* - ax_1N_3^* + N_1^* - N_1^{*2} - N_1^*N_2^* - aN_1^*N_3^* \\ &\quad - x_1N_1^* - x_2N_1^* - aN_1^*x_3 - x_1(x_1 + x_2 + ax_3) \\ &= -x_1(x_1 + x_2 + ax_3) - N_1^*(x_1 + x_2 + ax_3), \end{aligned} \quad (2.23)$$

pois

$$1 - N_1^* - N_2^* - aN_3^* = 0.$$

De modo análogo obtemos $\frac{dN_2}{dt}$ e $\frac{dN_3}{dt}$.

Assim, em termos das novas variáveis, as equações dinâmicas (2.12)-(2.47) podem ser escritas na forma matricial como

$$\dot{X} = AX + B, \quad (2.24)$$

onde \dot{X} denota a derivada. Aqui AX é a parte linear do sistema e B representa a parte não-linear. Além disso,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

E através das expressões obtidas anteriormente temos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -N_1^* & -N_1^* & -aN_1^* \\ -\frac{3}{2}N_2^* & -N_2^* & -N_2^* \\ \frac{a}{2}N_3^* & \frac{1}{2}N_3^* & \frac{H}{N_3^*} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

e

$$B = \begin{pmatrix} -x_1(x_1 + x_2 + ax_3) \\ -x_2(\frac{3}{2}x_1 + x_2 + x_3) \\ x_3(\frac{a}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2) \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Os autovalores da matriz A ajudam a entender a estabilidade do sistema. A equação característica da matriz A é

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \quad (2.28)$$

onde através de cálculos obtemos:

$$a_1 = N_1^* + N_2^* - \frac{H}{N_3^*}, \quad (2.29)$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(N_2^* + a^2N_1^*)N_3^* - \frac{1}{2}N_1^*N_2^* - (N_1^* + N_2^*)\frac{H}{N_3^*}, \quad (2.30)$$

$$a_3 = \frac{1}{4}N_1^*N_2^*N_3^*[(2a - 1)(a - 2) + \frac{2H}{(N_3^*)^2}]. \quad (2.31)$$

Observação 2.1. *Temos que*

$$a_1 = -S_1, \quad a_2 = S_2 \quad e \quad a_3 = -S_3$$

resultando em

$$P(\lambda) = \lambda^3 - S_1\lambda^2 + S_2\lambda - S_3 = 0.$$

Veja Apêndice A para maiores detalhes sobre S_1, S_2 e S_3 .

Através do critério de Routh-Hurwitz (apêndice) verificamos o estado de equilíbrio, que será localmente estável se $a_i > 0$ ($i = 1, 2, 3$) e $a_1a_2 - a_3 > 0$. Estas condições garantem que todos os três autovalores encontrados a partir da equação (2.28) têm partes reais negativas.

Notemos que os a_i 's dependem de a e H . A bifurcação de Hopf ocorre quando a equação característica (2.28) tem um par de raízes imaginárias puras $\lambda_{1,2}$ com uma terceira raiz real λ_3 , como é dado no teorema da bifurcação de Hopf.

No ponto de bifurcação de Hopf, o estado de equilíbrio perde sua estabilidade e bifurca-se para uma órbita periódica. Assim, obtemos o valor de H no ponto de bifurcação de Hopf, denotado por H_f , mantendo a fixado e resolvendo a equação

$$a_1a_2 - a_3 = 0. \tag{2.32}$$

No ponto de bifurcação de Hopf, onde as partes reais dos autovalores complexos conjugados são zero, as raízes da equação 2.28 são:

$$\lambda_{1,2} = \pm iw_0, \lambda_3 = -a_1, \tag{2.33}$$

onde $w_0 = |\sqrt{a_3}|$ e a_2 devem ser avaliados no ponto de bifurcação. No fim deste capítulo faremos uma distinção entre H_f e H_c determinadas pelas equações (2.32) e (2.20), respectivamente.

Agora determinemos uma matriz de transformação P que reduza a matriz A para a forma

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -w_0 & 0 \\ w_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_1 \end{pmatrix}, \tag{2.34}$$

onde a matriz não-singular P é dada por

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix}.$$

Os auto-vetores

$$v = \begin{pmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ P_{31} \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} P_{12} \\ P_{22} \\ P_{32} \end{pmatrix} \text{ e } w = \begin{pmatrix} P_{13} \\ P_{23} \\ P_{33} \end{pmatrix}$$

são obtidos das seguintes relações:

$$Aw = S_1 w \text{ e } A(u + iv) = iw_0(u + iv);$$

isto é,

$$Aw = S_1 w, Au = -w_0 v \text{ e } Av = w_0$$

onde

$$w_0 = \sqrt{S_2} \text{ sendo } S_2 = a_2 > 0.$$

Através de cálculos obtemos assim:

$$\begin{aligned} P_{11} &= \frac{w_0}{|A|} [c_{12}P_{12} + c_{22}P_{22} + c_{32}P_{32}], \\ P_{21} &= \frac{w_0}{|A|} [d_{12}P_{12} + d_{22}P_{22} + d_{32}P_{32}], \\ P_{31} &= \frac{w_0}{|A|} [e_{12}P_{12} + e_{22}P_{22} + e_{32}P_{32}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{12} &= \frac{1}{\left(a_{11} + \frac{c_{12}w_0^2}{|A|}\right)} \left\{ \left(a_{13} + \frac{c_{32}w_0^2}{|A|}\right) \left[\left(a_{11} + \frac{c_{12}w_0^2}{|A|}\right) \left(a_{22} + \frac{d_{22}w_0^2}{|A|}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(a_{12} + \frac{c_{22}w_0^2}{|A|}\right) \left(a_{21} + \frac{d_{12}w_0^2}{|A|}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \left(a_{12} + \frac{c_{22}w_0^2}{|A|}\right) \left[\left(a_{11} + \frac{c_{12}w_0^2}{|A|}\right) \left(a_{23} + \frac{d_{32}w_0^2}{|A|}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(a_{13} + \frac{c_{32}w_0^2}{|A|}\right) \left(a_{21} + \frac{d_{12}w_0^2}{|A|}\right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{22} &= \left(a_{11} + \frac{C_{12}w_0^2}{|A|} \right) \left(a_{23} + \frac{d_{32}w_0^2}{|A|} \right) - \left(a_{13} + \frac{c_{32}w_0^2}{|A|} \right) \left(a_{21} + \frac{d_{12}w_0^2}{|A|} \right), \\
 P_{32} &= \left(a_{11} + \frac{C_{12}w_0^2}{|A|} \right) \left(a_{22} + \frac{d_{22}w_0^2}{|A|} \right) - \left(a_{12} + \frac{c_{22}w_0^2}{|A|} \right) \left(a_{21} + \frac{d_{12}w_0^2}{|A|} \right), \\
 P_{13} &= \frac{1}{a_{22} + a_{33}} \left\{ a_{13} \left[(a_{22} + a_{33})(a_{11} + a_{33}) - a_{12}a_{21} \right] \right. \\
 &\quad \left. + a_{12} \left[a_{23}(a_{22} + a_{33}) + a_{13}a_{21} \right] \right\}, \\
 P_{23} &= a_{13}a_{21} + a_{23}(a_{22} + a_{33}), \\
 P_{33} &= (a_{11} + a_{33})(a_{22} + a_{33}) - a_{12}a_{21},
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 c_{12} &= a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}, \\
 c_{22} &= a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}, \\
 c_{32} &= a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}, \\
 d_{12} &= a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}, \\
 d_{22} &= a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}, \\
 d_{32} &= a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}, \\
 e_{12} &= a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}, \\
 e_{22} &= a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}, \\
 e_{32} &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.
 \end{aligned}$$

Observação 2.2. Os coeficientes a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) são dados na matriz (2.26).

Substituindo os a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) na matriz P obtemos:

$$P = \begin{pmatrix} (a-1)N_1^*N_2^* & -w_0aN_1^* & aN_1^*(N_2^* - a_1) - N_1^*N_2^* \\ (1 - \frac{3}{2}a)N_1^*N_2^* & -w_0aN_2^* & N_2^*(N_1^* - a_1) - \frac{3}{2}aN_1^*N_2^* \\ \frac{1}{2}N_1^*N_2^* + w_0^2 & w_0(N_1^* + N_2^*) & \frac{3}{2}N_1^*N_2^* - (N_1^* - a_1)(N_2^* - a_1) \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Para obtermos a forma normal de (2.24) fazemos outra mudança de variáveis

$$X = PY,$$

onde

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} x_1 &= P_{11}y_1 + P_{12}y_2 + P_{13}y_3, \\ x_2 &= P_{21}y_1 + P_{22}y_2 + P_{23}y_3, \\ x_3 &= P_{31}y_1 + P_{32}y_2 + P_{33}y_3. \end{aligned}$$

Através de uma manipulação algébrica de (2.24) teremos a seguinte forma

$$\dot{Y} = \Omega Y + F, \tag{2.36}$$

desde que $\Omega = P^{-1}AP$ e

$$Y = \begin{pmatrix} F^1(y_1, y_2, y_3) \\ F^2(y_1, y_2, y_3) \\ F^3(y_1, y_2, y_3) \end{pmatrix}. \tag{2.37}$$

Temos que

$$\begin{aligned} P^{-1} &= |P|^{-1} (\text{adj}P) \\ &= |P|^{-1} \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= (P_{22}P_{33} - P_{23}P_{32}), \\ \Gamma_{12} &= -(P_{21}P_{22} - P_{23}P_{31}), \\ \Gamma_{13} &= (P_{21}P_{32} - P_{22}P_{31}), \\ \Gamma_{21} &= -(P_{12}P_{33} - P_{13}P_{32}), \\ \Gamma_{22} &= (P_{11}P_{33} - P_{13}P_{31}), \\ \Gamma_{23} &= -(P_{11}P_{32} - P_{12}P_{31}), \\ \Gamma_{31} &= (P_{12}P_{23} - P_{13}P_{22}), \\ \Gamma_{32} &= -(P_{11}P_{23} - P_{13}P_{21}), \\ \Gamma_{33} &= (P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}). \end{aligned}$$

Para obtermos F , usamos novamente a relação

$$\begin{aligned}x_1 &= P_{11}y_1 + P_{12}y_2 + P_{13}y_3, \\x_2 &= P_{21}y_1 + P_{22}y_2 + P_{23}y_3, \\x_3 &= P_{31}y_1 + P_{32}y_2 + P_{33}y_3.\end{aligned}$$

e substituimos estas expressões em (2.27), obtendo assim

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} f^1(y_1, y_2, y_3) \\ f^2(y_1, y_2, y_3) \\ f^3(y_1, y_2, y_3) \end{pmatrix}.$$

Como $F = P^{-1}\bar{B}$ chegamos a:

$$\begin{aligned}F_1(y_1, y_2, y_3) &= |P|^{-1} [\Gamma_{11}f^1(y_1, y_2, y_3) + \Gamma_{12}f^2(y_1, y_2, y_3) + \Gamma_{13}f^3(y_1, y_2, y_3)], \\F_2(y_1, y_2, y_3) &= |P|^{-1} [\Gamma_{21}f^1(y_1, y_2, y_3) + \Gamma_{22}f^2(y_1, y_2, y_3) + \Gamma_{23}f^3(y_1, y_2, y_3)], \\F_3(y_1, y_2, y_3) &= |P|^{-1} [\Gamma_{31}f^1(y_1, y_2, y_3) + \Gamma_{32}f^2(y_1, y_2, y_3) + \Gamma_{33}f^3(y_1, y_2, y_3)],\end{aligned}$$

onde as f 's são dadas por

$$\begin{aligned}f^1(y_1, y_2, y_3) &= -a(a-1)w_0^2N_1^*N_2^*y_1^2 + a(a-1)w_0^2N_1^*N_2^*y_2^2 \\&\quad - \left(aN_1^* + N_2^* - \frac{aH}{N_3^*} \right)^2 a_1N_1^*y_3^2 \\&\quad - [(a-1)^2N_2^{*2} - a^2w_0^2]w_0N_1^*y_1y_2 \\&\quad + [(a-1)a_1N_2^* + aw_0^2]N_1^* \left(aN_1^* + N_2^* - \frac{aH}{N_3^*} \right) y_1y_3 \\&\quad - \left(aN_1^* + N_2^* - \frac{aH}{N_3^*} \right)^2 w_0N_1^*y_2y_3,\end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}
 f^2(y_1, y_2, y_3) = & -\left(1 - \frac{3}{2}a\right)w_0^2N_1^*N_2^*y_1^2 + \left(1 - \frac{3}{2}a\right)w_0^2N_1^*N_2^*y_2^2 \\
 & -\left(\frac{3}{2}aN_1^* + N_2^* - \frac{H}{N_3^*}\right)^2 a_1N_1^*y_3^2 \\
 & -\left[\left(1 - \frac{3}{2}a\right)^2 N_1^{*2} - w_0^2\right]w_0N_2^*y_1y_2 \\
 & +\left[\left(1 - \frac{3}{2}a\right)N_1^*a_1 + w_0^2\right]N_2^*\left(\frac{3}{2}aN_1^* + N_2^* - \frac{H}{N_3^*}\right)y_1y_3 \\
 & -w_0N_2^*\left(\frac{3}{2}aN_1^* + N_2^* - \frac{H}{N_3^*}\right)^2 y_2y_3,
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}
 f^3(y_1, y_2, y_3) = & \left[\left(\frac{1}{2}N_1^*N_2^* + w_0^2\right)AN_1^*N_2^*y_1^2 - \frac{1}{2}w_0^2(N_1^* + N_2^*)(a^2N_1^* + N_2^*)y_2^2\right. \\
 & \left.- B\left\{\frac{3}{2}N_1^*N_2^* - (N_1^* - a_1)(N_2^* - a_1)\right\}y_3^2\right] \\
 & +\left[-\left(\frac{1}{2}N_1^*N_2^* + w_0^2\right)\frac{1}{2}(a^2N_1^* + N_2^*)w_0\right. \\
 & \left.+ AN_1^*N_2^*w_0(N_1^* + N_2^*)\right]y_1y_2 + \left[-\left(\frac{1}{2}N_1^*N_2^* + w_0^2\right)B\right. \\
 & \left.+ AN_1^*N_2^*\left\{\frac{3}{2}N_1^*N_2^* - (N_1^* - a_1)(N_2^* - a_1)\right\}\right]y_1y_3 \\
 & +\left[-Bw_0(N_1^* + N_2^*) - \frac{1}{2}(a^2N_1^* + N_2^*)\right. \\
 & \left.\times w_0\left\{\frac{3}{2}N_1^*N_2^* - (N_1^* - a_1)(N_2^* - a_1)\right\}\right]y_2y_3,
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

onde

$$A = \frac{1}{4}(2a - 1)(a - 1)$$

e

$$B = \left[\frac{5}{4}aN_1^*N_2^* + \frac{1}{2}(a^2N_1^{*2} + N_2^{*2}) - \frac{H}{2N_3^*}(a^2N_1^* + N_2^*) \right].$$

A equação (2.36) é a forma normal de (2.24), no qual o coeficiente de estabilidade da órbita periódica poderá ser obtido.

A expressão geral do coeficiente de estabilidade (R_c) encontrado em Hassard [7] é dado por

$$\begin{aligned} R_c = & \frac{1}{16w_0} \left[\left(\frac{\partial^2 F^1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 F^1}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial^2 F^1}{\partial y_1 \partial y_2} - \left(\frac{\partial^2 F^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 F^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial^2 F^2}{\partial y_1 \partial y_2} \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 F^1}{\partial y_2^2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y_2^2} - \frac{\partial^2 F^1}{\partial y_1^2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y_1^2} \right] \\ & + \frac{1}{16} \left[\frac{\partial^3 F^1}{\partial y_1^3} + \frac{\partial^3 F^2}{\partial y_2^3} + \frac{\partial^3 F^1}{\partial y_1 \partial y_2^2} + \frac{\partial^3 F^2}{\partial y_1^2 \partial y_2} \right] \\ & + \frac{1}{16a_1(a_1^2 + 4w_0^2)} \frac{\partial^2 F^1}{\partial y_1 \partial y_3} \left[(3a_1^2 + 8w_0^2) \frac{\partial^2 F^3}{\partial y_1^2} + (a_1^2 + 8w_0^2) \frac{\partial^2 F^3}{\partial y_2^2} \right. \\ & \left. - 4w_0a_1 \frac{\partial^2 F^3}{\partial y_1 \partial y_2} \right] \\ & + \frac{1}{16a_1(a_1^2 + 4w_0^2)} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y_2 \partial y_3} \left[(a_1^2 + 8w_0^2) \frac{\partial^2 F^3}{\partial y_1^2} + (3a_1^2 + 8w_0^2) \frac{\partial^2 F^3}{\partial y_2^2} \right. \\ & \left. + 4w_0a_1 \frac{\partial^2 F^3}{\partial y_1 \partial y_2} \right] \\ & + \frac{1}{16a_1(a_1^2 + 4w_0^2)} \left(\frac{\partial^2 F^1}{\partial y_2 \partial y_3} + \frac{\partial^2 F^2}{\partial y_1 \partial y_3} \right) \left[2w_0a_1 \frac{\partial^2 F^3}{\partial y_1^2} - 2w_0a_1 \frac{\partial^2 F^3}{\partial y_2^2} \right. \\ & \left. + 2a_1^2 \frac{\partial^2 F^3}{\partial y_1 \partial y_2} \right]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Na equação (2.41) acima, todas as derivadas são determinadas no ponto de bifurcação H_f assim como na origem ($y_1 = y_2 = y_3 = 0$).

Em nosso caso, as F' s não contém termos cúbicos de y' s, assim todas as derivadas parciais de terceira ordem se anulam em (2.41).

O sinal de R_c é crucial, pois através dele descobrimos se a órbita é instável ou estável, ou seja, se o seu valor é negativo a órbita periódica do sistema será estável, enquanto que se seu valor for positivo teremos uma órbita periódica instável no sistema.

2.4 Análise de a , H_c , H_f e o Coeficiente de Estabilidade R_c

Através das expressões obtidas em (2.20), (2.32), (2.41) e o valor atribuído ao parâmetro a obtemos estimativas numéricas, que sugerem que estes estados de equilíbrio são muito sensíveis ao parâmetro de controle H , no qual pode ser manipulado de fora do sistema. Com estas estimativas obtemos alguns gráficos que mostram o comportamento das soluções. Cabe aqui ressaltar que as estimativas obtidas diferem um pouco do valor citado no artigo.

Nível de Predação a	Taxa de colheita Crítica H_c	Valores de Bifurcação H_f	Parâmetro de Estabilidade R_c
4.80	0.03798	$H_{fL} : 0.0054769$ $H_{fU} : 0.0161785$	$R_L : -1.155183073$ $H_U : -12.82533210$
4.95	0.04059	$H_{fL} : 0.002287$ $H_{fU} : 0.0271905$	$R_L : -0.3900503707$ $H_U : -215.6994803$
5.00	0.04142	$H_{fL} : 0.0017988$ $H_{fU} : 0.030332$	$R_L : -0.3387746038$ $H_U : -1994.508955$
5.20	0.04455	$H_{fL} : 0.0006714$ $H_{fU} : 0.0426877$	$R_L : -0.3447925581$ $H_U : 2400.415949$

Tabela 2.1: Há dois valores de H_f representados por H_{fL} (valor inferior de H_f) e H_{fU} (valor superior de H_f). Mostramos também os valores do parâmetro de estabilidade R_c . Quando $R_c < 0$, a bifurcação de Hopf é supercrítica e as órbitas periódicas são estáveis. No caso onde $R_c > 0$, a bifurcação é subcrítica e as órbitas periódicas são instáveis.

2.5 Gráficos do Sistema Presa-Predador sem Colheita

Através das estimativas obtidas na tabela, construímos gráficos (através do programa Maple 11), onde analisaremos o comportamento das soluções periódicas.

Posteriormente veremos em \mathbb{R}^2 o comportamento das populações de presas1 (N_1), presas2

(N_2) e predadores (N_3) , em torno dos parâmetros a e H . Veja Apêndice B para maiores detalhes.

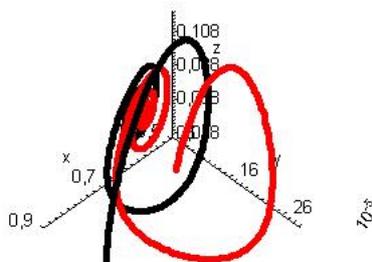


Figura 2.2: Órbita periódica estável: $a = 4.80$, $H_c = 0.03798$ e $H_f L = 0.0054769$

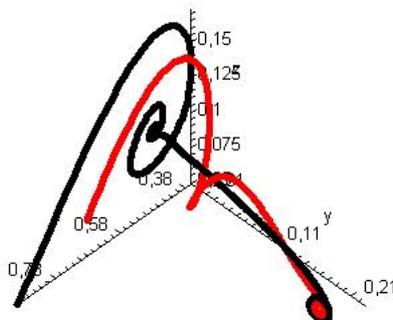


Figura 2.3: Órbita periódica estável: $a = 4.80$, $H_c = 0.03798$ e $H_f U = 0.0161785$

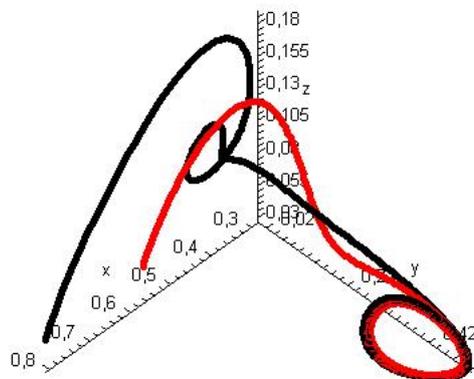


Figura 2.4: Órbita periódica estável: $a = 4.95$, $H_c = 0.04059$ e $H_f L = 0.002287$

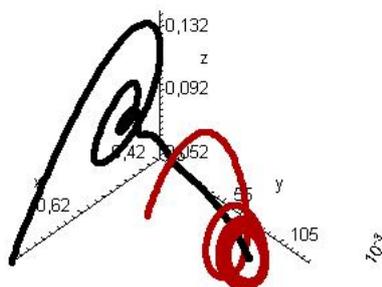


Figura 2.5: Órbita periódica estável: $a = 4.95$, $H_c = 0.04059$ e $H_f U = 0.0271905$

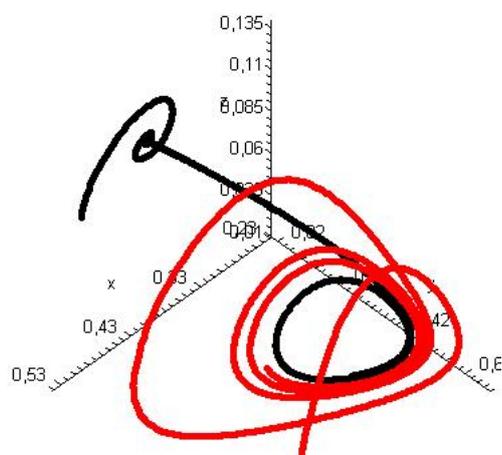


Figura 2.6: Órbita periódica estável: $a = 5$, $H_c = 0.04142$ e $H_f L = 0.0017988$

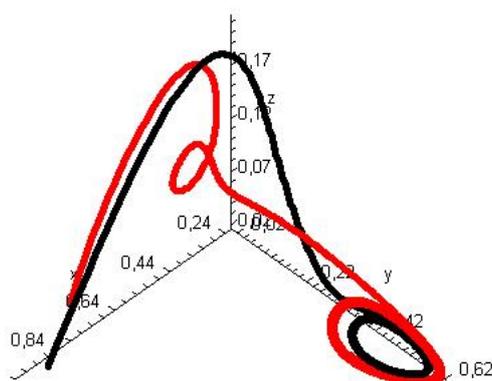


Figura 2.7: Órbita Periódica estável: $a = 5.20$, $H_c = 0.04455$ e $H_f L = 0.0006714$.

Gráficos utilizando H_c .

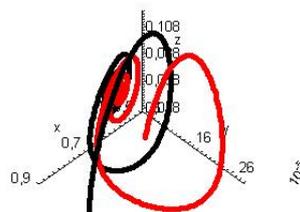


Figura 2.8: Órbita Periódica estável: $a = 4.8$ e $H_c = 0.03798$.

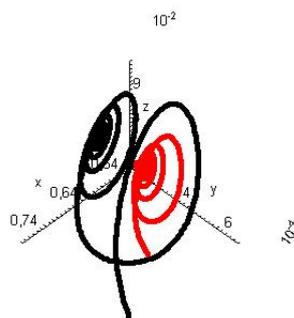


Figura 2.9: Órbita Periódica estável: $a = 5$ e $H_c = 0.04142$.

Examinaremos o comportamento das populações do sistema presa-predador, utilizando primeiramente o valor de H_c .

Consideremos o seguinte sistema para $a = 4.80$. Neste sistema a coexistência local entre as três espécies é possível, porém, não será globalmente estável. A longo prazo, sobrevivem apenas a presa 1 e o predador (N_1 e N_3 respectivamente), e a presa 2 será extinta.

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = N_1(1 - N_1 - N_2 - 4.80N_3), \\ \frac{dN_2}{dt} = N_2(1 - \frac{3}{2}N_1 - N_2 - N_3), \\ \frac{dN_3}{dt} = N_3(-1 + \frac{4.80}{2}N_2 + \frac{1}{2}N_2) - 0.03798. \end{cases} \quad (2.42)$$

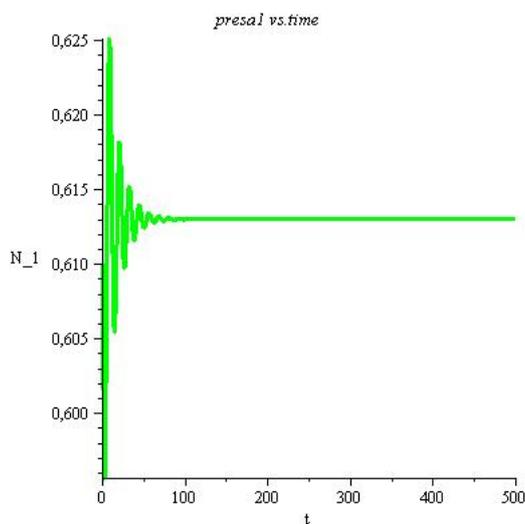


Figura 2.10: População da presa 1 (N_1) do sistema (2.42).

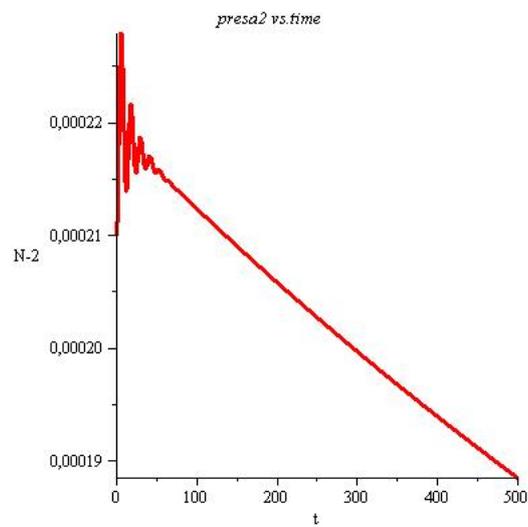


Figura 2.11: População da presa 2 (N_2) do sistema (2.42).

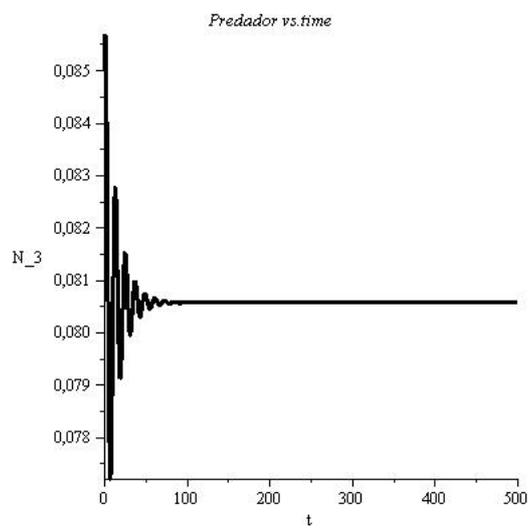


Figura 2.12: População do predador (N_3) do sistema (2.42).

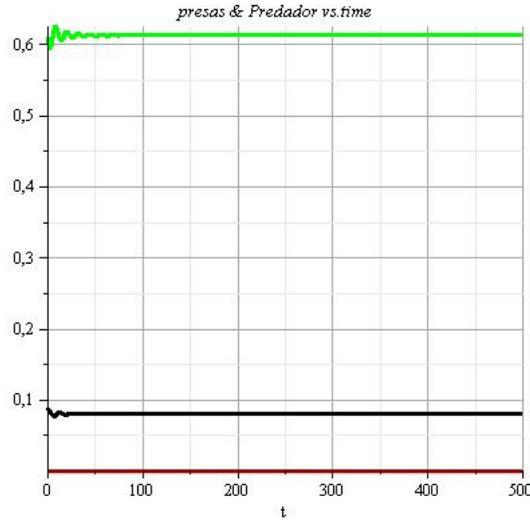


Figura 2.13: Interações entre populações da presa 1 (N_1 – verde), presa 2 (N_2 – vermelho) e predador (N_3 – preto) do sistema (2.42) com respeito ao tempo, havendo colheita.

Para $a = 4.95$ teremos uma estabilidade local para três espécies (apesar do nível de oscilação ser maior que o anterior) e global apenas para presa 1 (N_1) e para o predador (N_3), pois a presa 2 (N_2) se extingue.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_1}{dt} = N_1(1 - N_1 - N_2 - 4.95N_3), \\ \frac{dN_2}{dt} = N_2(1 - \frac{3}{2}N_1 - N_2 - N_3), \\ \frac{dN_3}{dt} = N_3(-1 + \frac{4.95}{2}N_2 + \frac{1}{2}N_2) - 0.04059. \end{array} \right. \quad (2.43)$$

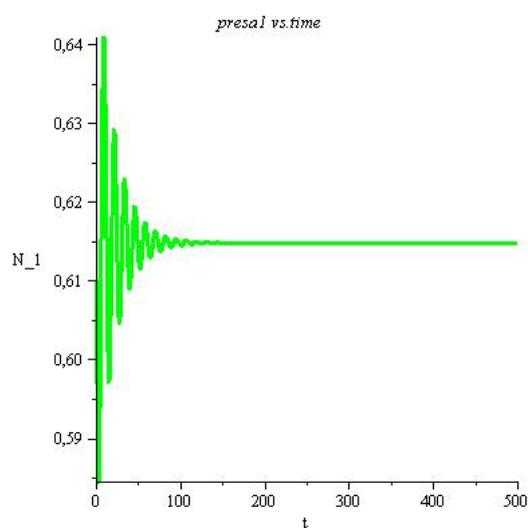


Figura 2.14: População da presa 1 (N_1) do sistema (2.43).

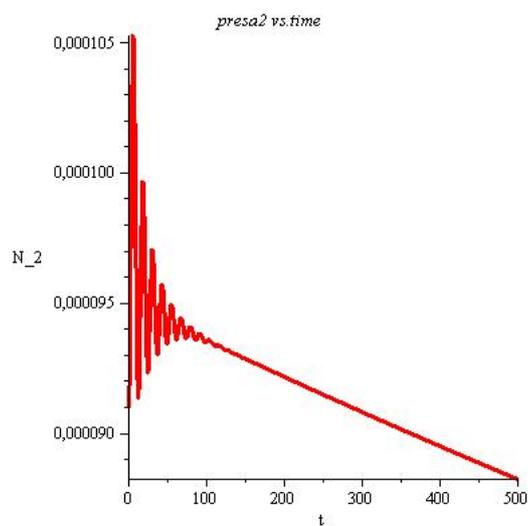


Figura 2.15: População da presa 2 (N_2) do sistema (2.43).

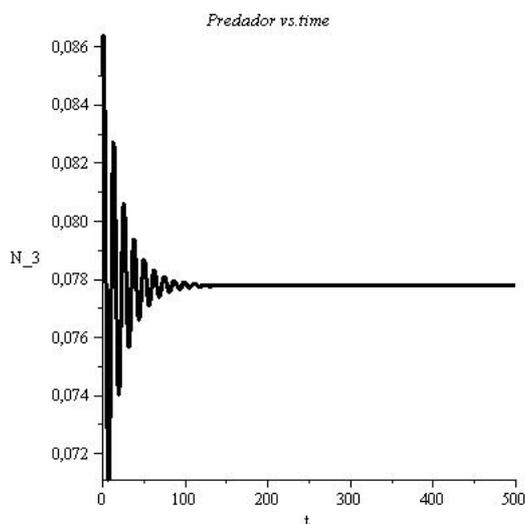


Figura 2.16: População do predador (N_3) do sistema (2.43).

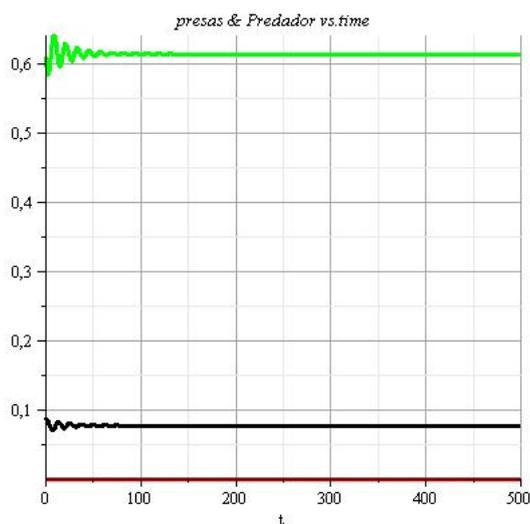


Figura 2.17: Interações entre populações da presa 1 (N_1 – verde), presa 2 (N_2 – vermelho) e predador (N_3 – preto) do sistema (2.43) com respeito ao tempo, havendo colheita.

Em seguida analisaremos o sistema utilizando H_f e $a = 5$. Observaremos que para este parâmetro, as soluções oscilam com maior frequência em relação aos outros casos. Há uma coexistência local entre as três espécies.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_1}{dt} = N_1(1 - N_1 - N_2 - 5N_3) \\ \frac{dN_2}{dt} = N_2(1 - \frac{3}{2}N_1 - N_2 - N_3) \\ \frac{dN_3}{dt} = N_3(-1 + \frac{5}{2}N_2 + \frac{1}{2}N_2) - 0.0017988 \end{array} \right. \quad (2.44)$$

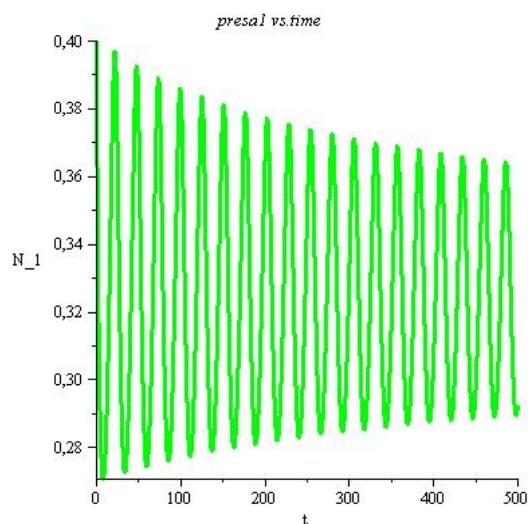


Figura 2.18: População da presa 1 (N_1) do sistema (2.44).

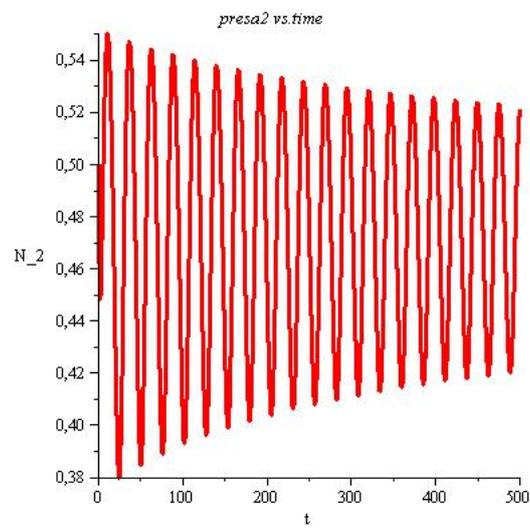


Figura 2.19: População da presa 2 (N_2) do sistema (2.44).

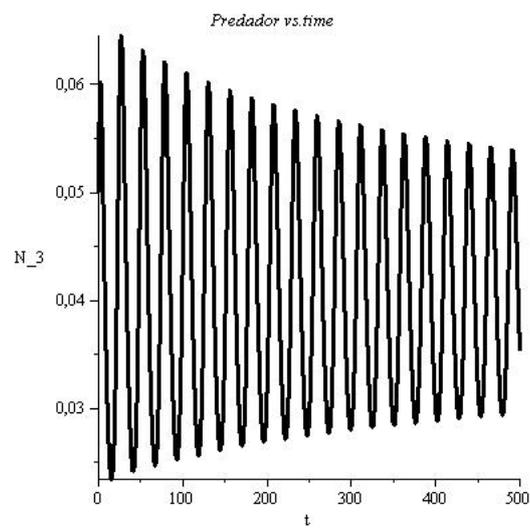


Figura 2.20: População do predador (N_3) do sistema (2.44).

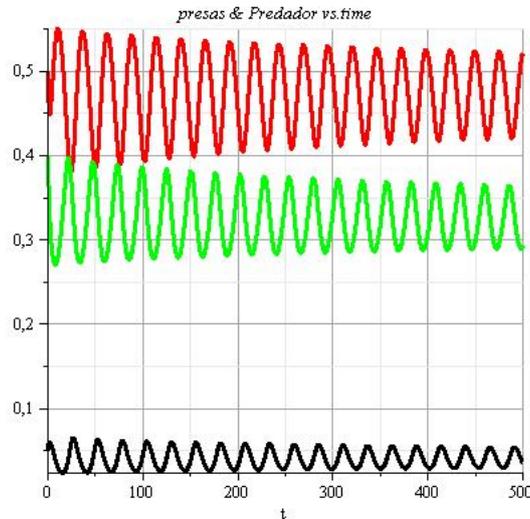


Figura 2.21: Interações entre populações da presa 1 (N_1 – verde), presa 2 (N_2 – vermelho) e predador (N_3 – preto) do sistema (2.44) com respeito ao tempo, havendo colheita.

Uma breve análise das figuras, mostra que a presa 1 é dominante sobre a presa 2. Isso pode ocorrer por vários fatores. Por exemplo: a presa 1 ser mais resistente (mais forte) que a presa 2; o predador preferir consumir a presa 2, etc. Na luta pela sobrevivência, esses detalhes influenciam na coexistência das três espécies.

Obtemos uma estabilidade maior, porém local, quando tomamos o parâmetro $a = 4.95$. Infelizmente o espaço amostral é pequeno em virtude do tempo. Porém cabe ressaltar que muitas variações comportamentais existem para este sistema. Não encontramos aqui um exemplo de estabilidade global entre as três espécies, porém este trabalho foi feito no capítulo 1, no sistema presa-predador sem colheita.

Cabe aqui fazer uma diferenciação do H_c e H_f .

O valor H_c , determinado pela equação $N_2 = 0$, põe um valor crítico para que a espécie 2 (N_2) sobreviva, já que este fator pode acarretar na extinção da espécie 3 (N_3), trazendo o desequilíbrio para o sistema.

Já o valor H_f , determinado pela expressão $a_0 a_1 - a_2 = 0$, está relacionado com a existência de órbitas periódicas, através da troca de parâmetro, onde há uma mudança da estabilidade para instabilidade e vice-versa.

Kumar et al. [8], em suas observações finais, ressalta que não é razoável considerar valores de $H_f > H_c$, visto que isto conduzirá à extinção da presa 2.

Na terceira coluna da tabela (2.1), H_{fL} e H_{fU} são os valores inferior e superior de H_f que

restam após “descartar” as raízes acima da equação (2.32). Estes resultados mostram que se a taxa de “colheita” está no intervalo $H_{fL} < H < H_{fU}$, soluções periódicas estáveis existem.

Observando na tabela (2.1), que quando $a \approx 5$, H_{fU} é aproximadamente 8 a 30 vezes maior que H_{fL} . Análise numérica de nossos resultados indica que para $H_{fL} > H > 0$ e $H_c > H > H_{fU}$ o sistema está em equilíbrio estável local.

Conclusão

Neste trabalho foi analisado um sistema de equações diferenciais com duas presas e um predador do tipo Lotka-Volterra, com e sem colheita, utilizando os artigos de Kumar et al. [8] e Takeuchi et al. [17] como referências principais. Mais precisamente:

Sistema presa-predador sem colheita

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 (b_1 - x_1 - \alpha x_2 - \epsilon y), \\ \dot{x}_2 = x_2 (b_2 - \beta x_1 - x_2 - \mu y), \\ \dot{y} = y (-b_3 + d\epsilon x_1 + d\mu x_2). \end{cases} \quad (2.45)$$

Sistema presa-predador com colheita

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= N_1[\epsilon_1 - a_{11}N_1 - a_{12}N_2 - a_{13}N_3], \\ \frac{dN_2}{dt} &= N_2[\epsilon_2 - a_{21}N_1 - a_{22}N_2 - a_{23}N_3], \\ \frac{dN_3}{dt} &= N_3[-\epsilon_3 + a_{31}N_1 + a_{32}N_2] - H. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Em ambos modelos estudamos o comportamento dinâmico para a coexistência das espécies no sistema de duas presas e um predador.

No primeiro modelo analisamos a estabilidade local e global dos pontos de equilíbrio, assim como a existência de órbitas periódicas via bifurcação de Hopf. Enquanto que no segundo modelo estudamos o coeficiente de estabilidade das órbitas periódicas, através da forma normal e estimativas numéricas.

Verificamos que os parâmetros estabelecidos, influenciam no comportamento das soluções e na coexistência estável entre as espécies.

Infinitas escolhas para os parâmetros existem para este sistema, assim como várias interações entre as espécies. Por exemplo os sistemas: Um predador e três presas, dois

predadores e duas presas, etc. Para trabalhos futuros podemos fazer um estudo teórico sobre estes sistemas.

Resultados numéricos e gráficos, via Maple 11, foram exaustivamente explorados em nosso trabalho.

Apêndice A

Resultados Gerais

Neste apêndice apresentaremos teoremas e definições importantes, utilizadas em nosso capítulo 1 e 2.

A.1 Resultados sobre Matrizes

Definição A.1. Matriz Diagonal

Uma matriz quadrada $W = (w_{ij})$ é diagonal se seus elementos não-diagonais são todos nulos.

Definição A.2. Matriz Simétrica

Uma matriz real A é dita simétrica se $A^T = A$. Equivalentemente, $A = (a_{ij})$ é simétrica se elementos simétricos (imagens espelho na diagonal) são iguais, isto é, se cada $a_{ij} = a_{ji}$.

Uma forma quadrática q nas variáveis $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ é um polinômio

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i < j} c_{ij} x_i x_j, \quad (\text{A.1})$$

onde cada termo é do segundo grau. A forma quadrática (A.1) pode expressar-se de maneira única em forma matricial

$$q(X) = X^T A X, \quad (\text{A.2})$$

onde $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ e A é uma matriz simétrica.

A matriz simétrica acima A é chamada representação matricial da forma quadrática q por (A.2). Qualquer matriz simétrica A define uma forma quadrática q por (A.2). Assim, há uma correspondência biunívoca entre formas quadráticas q e matrizes simétricas A . Além disso, uma forma quadrática q é diagonalizada se e somente se a matriz simétrica correspondente A é diagonal.

Definição A.3. Matrizes Simétricas Positivas Definidas

Diz-se que uma matriz real simétrica A é positiva definida se

$$(X^T A X) > 0$$

para todo vetor (coluna) não-nulo X em \mathbb{R}^n . Analogamente, diz-se que uma forma quadrática q é positiva definida se $q(X) > 0$ para todo vetor não-nulo em \mathbb{R}^n . Alternativamente, uma matriz real simétrica A ou sua forma quadrática é positiva definida se qualquer representação diagonal tem apenas elementos diagonais positivos.

Observação A.1. *Uma matriz real simétrica A é definida positiva se e somente se todos os menores principais de A são positivos*

Definição A.4. Para uma matriz $A_{n \times n}$ temos:

- (i) $A \in S_w$ (ou $A \in \overline{S}_w$) implica que existe uma matriz diagonal W positiva definida tal que $(WA + A^T W)$ seja positiva definida (ou positiva semi-definida);
- (ii) $A \in P$ implica que todo menor principal de A é positivo (P-matriz);
- (iii) Se a parte real de todos os autovalores de A é negativa, então A é chamado estável.

A.2 Estabilidade Local

Nesta seção determinaremos a equação característica de uma matriz A e enunciaremos o teorema de Routh-Hurwitz, importante resultado sobre a estabilidade local do equilíbrio, para sistemas lineares de equações diferenciais ordinárias.

Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by + cz, \\ \dot{y} = dx + ey + fz, \\ \dot{z} = gx + hy + iz, \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

onde x, y, z são funções reais de t , e a, b, \dots, i são constantes reais.

Seja a matriz de coeficientes do sistema (A.3) denotado por:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Então, (A.3) pode ser escrito como $\dot{X} = AX$ onde $X = (x, y, z)$ é uma matriz (3×1) .

Seja $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ os auto-valores de A , determinado pela equação característica $(A - \lambda I) = 0$, isto é,

$$\lambda^3 - S_1\lambda^2 + S_2\lambda - S_3 = 0,$$

onde $S_i (i = 1, 2, 3)$ denotam a soma de todos os menores principais de A de ordem i , isto é,

$$\begin{aligned} S_1 &= a + e + i = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ S_2 &= \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1, \\ S_3 &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned}$$

Teorema A.1. *A matriz $A_{n \times n}$ é estável se e somente se os coeficientes da equação característica*

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

satisfaz $D_1 = a_1 > 0$ e

$$D_k = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k \end{pmatrix} > 0, \quad (k = 2, 3, \dots, n),$$

onde $a_j = 0$ se $j > n$.

Demonstração: Ver [4].

■

Observação A.2. Notemos que se A é estável em \mathbb{R}^3 , então $a_i > 0$ ($i = 1, 2, 3$) e $a_1 a_2 - a_3 > 0$.

Listaremos alguns resultados que utilizamos para demonstrar o teorema (1.2) do capítulo 1.

A.3 Estabilidade de Liapunov

Considere uma solução $x(t)$, periódica ou singular, de um sistema de equações diferenciais. A grosso modo dizemos que $x(t)$ é estável quando toda solução com valores iniciais próximos aos de $x(t)$ está definida para todo $t \geq 0$ e permanece próxima a $x(t)$ quando $t \rightarrow \infty$. Consideremos o sistema

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{A.4}$$

onde $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua, $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ aberto.

Definição A.5. Seja $\varphi(t)$ uma órbita de (A.4) definida para $t \geq 0$.

Diz-se que $\varphi(t)$ é estável se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que se $\psi(t)$ é solução de (A.4) e $|\psi(0) - \varphi(0)| < \delta$ então $\psi(t)$ está definido para todo $t \geq 0$ e $|\psi(t) - \varphi(t)| < \epsilon \forall t \geq 0$. Se além disso existir δ_1 tal que $|\psi(0) - \varphi(0)| < \delta_1$ implica $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\psi(t) - \varphi(t)| = 0$, então ψ diz-se *assintoticamente estável*.

Um ponto singular x_0 de um sistema autônomo

$$\dot{x} = f(x), x \in \Delta \subset \mathbb{R}^n, \tag{A.5}$$

é estável quando para toda vizinhança U de x_0 existe uma vizinhança U_1 de x_0 tal que toda solução $\varphi(t)$ de (A.4) com $\varphi(0) \in U_1$ está definida e em U para todo $t \geq 0$. Se além disso $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = x_0$ diminuindo U_1 se necessário, então x_0 é *assintoticamente estável*.

A.4 O Critério de Liapunov

Consideremos um sistema autônomo

$$\dot{x} = f(x), f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ de classe } C^1, \Delta \subset \mathbb{R}^n \text{ aberto.} \quad (\text{A.6})$$

A solução de (A.6) passando por $x \in \Delta$ será sempre indicada por $\varphi_x(t)$, com $\varphi_x(0) = x$. Seja $V : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Consideremos, para cada $x \in \Delta$, $\dot{V}(x) = DV_x \cdot f(x)$, ou seja, $\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}V(\varphi_x(t))|_{t=0}$.

Definição A.6. Seja x_0 um ponto singular de (A.4). Uma função de Liapunov para x_0 é uma função $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável definida em um aberto $U \ni x_0$, satisfazendo às seguintes condições:

- (a) $V(x_0) = 0$ e $V(x) > 0, \forall x \neq x_0$;
- (b) $\dot{V} \leq 0$ em U .

A função de Liapunov V diz-se ser estrita quando

- (c) $\dot{V} < 0$ em $U - \{x_0\}$.

Teorema A.2. (*Estabilidade de Liapunov*) *Seja x_0 um ponto singular de (A.4). Se existe uma função de Liapunov para x_0 , então x_0 é estável. Se a função for estrita, x_0 é assintoticamente estável.*

Demonstração: Veja Sotomayor [13].

■

Teorema A.3. (*Princípio da Invariância de La Salle*)

Seja $V(x, y)$ uma função escalar com derivadas parciais contínuas $\forall (x, y)$. Suponha que $V(x, y) > 0 \forall (x, y)$ e $\dot{V}(x, y) \leq 0$.

Seja E o conjunto dos pontos tais que $\dot{V}(x) = 0$ e M o maximal subconjunto invariante de E .

Então toda solução limitada $(x(t), y(t))$ para $t > 0$ tende para M quando $t \rightarrow \infty$.

Demonstração: Veja La Salle [9].

■

A.5 Resultados sobre a Teoria de Bifurcação de Hopf

Nesta seção daremos condições necessárias para existência do parâmetro de bifurcação.

Teorema A.4. (*Teorema da Bifurcação de Hopf*) Seja $X_\mu \in C^k$ ($k \geq 5$) campo vetorial em \mathbb{R}^n . Assuma que $X_\mu(a(\mu)) = 0 \forall \mu$ e seja o espectro de $dX_\mu(a(\mu))$ satisfazendo:

(i) $\Gamma(dX_\mu(a(\mu))) \subset \{z/z \in \mathbb{C} \text{ e } \text{Re}(z) < 0\}$ para $\mu < \mu_0$.

(ii) $dX_\mu(a(\mu))$ tem dois conjugados complexos, autovalores simples $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\bar{\mu})$ em $\mu = \mu_0$.

(iii) $\frac{d}{d\mu} \text{Re}\lambda(\mu) |_{\mu=\mu_0} \neq 0$.

(iv) $\lambda(\mu_0) \neq 0$.

(v) O restante de $\Gamma(dX_\mu(a(\mu)))$ permanece no semi-plano esquerdo limitado pelo eixo imaginário para $\mu = \mu_0$.

Aqui dX_μ representa a matriz linearizada de X_μ e $\Gamma(dX_\mu)$ é o conjunto de autovalores da matriz dX_μ . Então $(X_\mu, \mu > \mu_0)$ possui uma órbita fechada hiperbólica com período próximo de $\frac{2\pi}{|\lambda(\mu_0)|}$.

Demonstração: Veja Hassard [7]

■

Apêndice B

Programas Maple 11

B.1 Programa 1: Comportamento Soluções em \mathbb{R}^2

Exemplo 1:

```
>with(plots):
```

```
> eq1 := diff(x[1](t), t) = x[1] - x[1]^2 - x[1] * x[2] - 5 * y * x[1];
```

```
> eq2 := diff(x[2](t), t) = x[2] - 1.5 * x[1] * x[2] - x[2]^2 - x[2] * y;
```

```
> eq3 := diff(y(t), t) = -y + 2.5 * y * x[1] + 0.5 * x[2] * y;
```

```
> vars := [x[1](t), x[2](t), y(t)];
```

```
> init1 := [0, 0.3, 0.5e - 1, 0.7]; init2 := [0, 0.5, 0.6, 0.9]; init3 := [0, 1, 1, 1.5]; domain :=  
0..500;
```

```
> X[1] := DEplot([eq1, eq2, eq3], vars, domain, init1, stepsize = .1, scene = [t, x[1]], linecolor =  
green);
```

```
> X[2] := DEplot([eq1, eq2, eq3], vars, domain, init1, stepsize = .1, scene = [t, x[2]], linecolor =  
red);
```

```
> Y := DEplot([eq1, eq2, eq3], vars, domain, init1, stepsize = .1, scene = [t, y], linecolor =  
black);
```

```
> display({X[1]}, title = 'presa1vs.time');
```

```
> display({X[2]}, title = 'presa2vs.time');
```

```
> display({Y}, title = 'Predadorvs.time');
```

```
> display({Y, X[2], X[1]}, title = 'presas&Predadorvs.time');
```

Com estes comandos obtemos as seguintes figuras respectivamente:

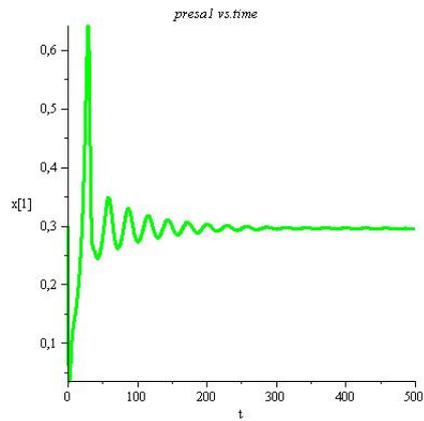


Figura B.1: Exemplo 1.1

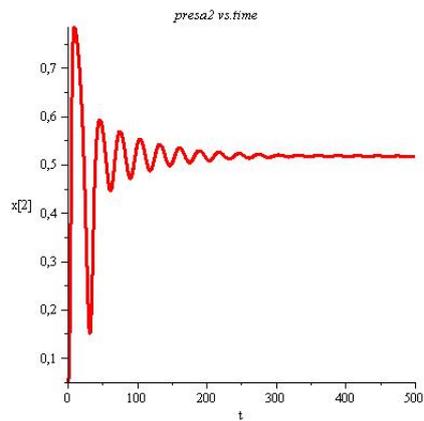


Figura B.2: Exemplo 1.2

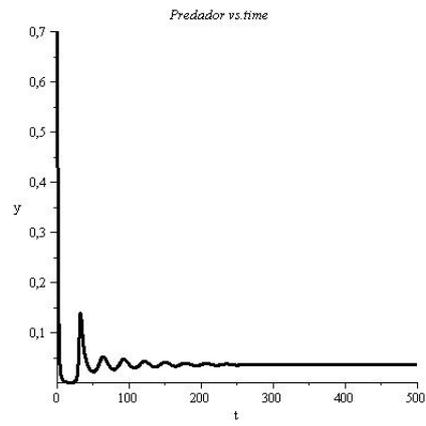


Figura B.3: Exemplo 1.3

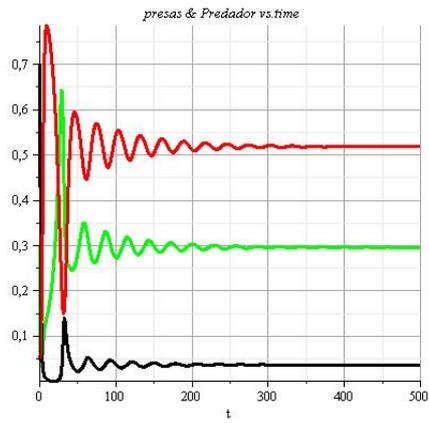


Figura B.4: Exemplo 1.4

B.2 Programa 2: Interseção das Superfícies, Comportamento das Soluções em \mathbb{R}^3 e Cálculo dos Auto-valores e Auto-vetores

Exemplo 2:

```
> restart;

> with(plots, display);
> S1 := plot3d([x, (1 - x - 5 * z)/(0.9), z], x = -30..50, z = -30..50, color = red);
> S2 := plot3d([x, 1 - 0.95 * x - z, z], x = -30..30, z = -30..30, color = green);
> S3 := plot3d([x, (1 - 2, 5 * x)/(0.5), z], x = -31..30, z = -30..30, color = maroon);
> display(S1, S2, S3, axes = normal, labels = [x, y, z], title = 'interseção entre su-
perfícies',
view = [-5..50, -5..50, -50..50], orientation = [-45, 30]);
```

Com esse comando obtemos:

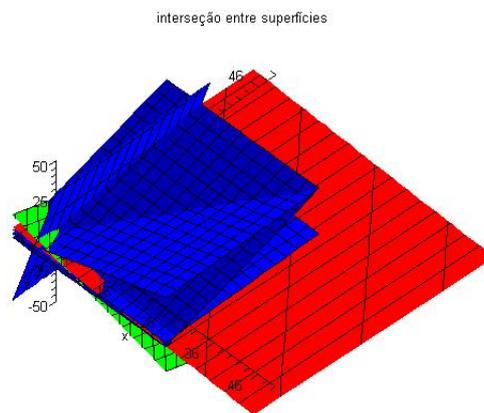


Figura B.5: Exemplo 2

```

> eq1 := (t, x, y, z) -> x - x^2 + (-1) * .9 * x * y - 5 * z * x;
> eq2 := (t, x, y, z) -> y + (-1) * .95 * x * y - y^2 - y * z;
> eq3 := (t, x, y, z) -> -z + 2.5 * x * z + .5 * y * z;
> eqns:= eq1(t, x, y, z) = 0, eq2(t, x, y, z) = 0, eq3(t, x, y, z) = 0;
> equil1 :=solve(eqns, z, x, y);
> with(DEtools);
> DEplot3d({diff(x(t), t) = x(t) - x(t)^2 - x(t) * y(t) - 5 * z(t) * x(t),
diff(y(t), t) = y(t) - 1.5 * x(t) * y(t) - y(t)^2 - y(t) * z(t), diff(z(t), t) =
-z(t) + 2.5 * z(t) * x(t) + .5 * y(t) * z(t)}, [x(t), y(t), z(t)], t = 0..1000, {[x(0) = 0.3, y(0) =
0.8, z(0) = 0.2e - 1],
[x(0) = 1, y(0) = 1, z(0) = 1], [x(0) = 0.5, y(0) = 0.9, z(0) = 0.1], [x(0) = 0.4, y(0) =
0.9, z(0) = 0.2]}},
x = 0..1.2, y = 0..1.3, z = 0..1.5, stepsize = 0.1, colour = magenta,
linecolor = [yellow, black, red, green], arrows = none, axes = normal );

```

Com este comando teremos:

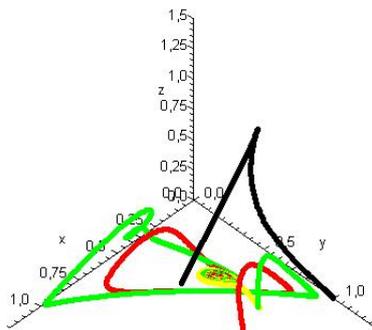


Figura B.6: Exemplo 2.1

```

> linalg[jacobian]([eq1(t, x, y, z), eq2(t, x, y, z), eq3(t, x, y, z)], [x, y, z]);
> subs(x = 0.2507462687, y = 0.7462686567, z = 0.1552238806e - 1, %);
> linalg[eigenvals](%);
-0.9376831737, -0.02966587558 + 0.1583121586I, -0.02966587558 - 0.1583121586I
> linalg[jacobian]([eq1(t, x, y, z), eq2(t, x, y, z), eq3(t, x, y, z)], [x, y, z]);
> subs(x = 0, y = 0, z = 0, %);
> linalg[eigenvals] (%);
-1., 1., 1.
> linalg[jacobian]([eq1(t, x, y, z), eq2(t, x, y, z), eq3(t, x, y, z)], [x, y, z]);
> subs(x = 0, y = 1, z = 0, %);
> linalg[eigenvals](%); -1., 0.1000000000, -0.5000000000
> linalg[jacobian]([eq1(t, x, y, z), eq2(t, x, y, z), eq3(t, x, y, z)], [x, y, z]);
> subs(x = 0, y = 2, z = -1, %);
> linalg[eigenvals](%); 0.4142135624, -2.414213562, 4.200000000
> linalg[jacobian]([eq1(t, x, y, z), eq2(t, x, y, z), eq3(t, x, y, z)], [x, y, z]);
> subs(x = 1, y = 0, z = 0, %);
> linalg[eigenvals](%);
-1., 0.0500000000, 1.500000000
> linalg[jacobian]([eq1(t, x, y, z), eq2(t, x, y, z), eq3(t, x, y, z)], [x, y, z]);
> subs(x = 0.4, y = 0, z = 0.12, %);
> linalg[eigenvals](%);
-0.2000000000 + 0.7483314774I, -0.2000000000 - 0.7483314774I, 0.5000000000
> linalg[jacobian]([eq1(t, x, y, z), eq2(t, x, y, z), eq3(t, x, y, z)], [x, y, z]);
> subs(x = 0.6896551724, y = 0.344827586210, z = 0, %);
> linalg[eigenvals](%);
-1.000000000, -0.03448275866, 0.8965517241

```

B.3 Programa 3: Órbitas Periódicas

Exemplo 3:

```
> eq1 := (t, x, y, z) -> x - x^2 - x * y - 6 * z * x;
> eq2 := (t, x, y, z) -> y + (-1) * 1.5 * x * y - y^2 - y * z;
> eq3 := (t, x, y, z) -> -z + 3 * z * x + .5 * y * z;
eqns := {eq1(t, x, y, z) = 0, eq2(t, x, y, z) = 0, eq3(t, x, y, z) = 0};
equil1 := solve(eqns, {z, x, y});
{z = 0, y = 0, x = 0}, {z = 0, x = 0, y = 1}, {z = 0., y = 0., x = 1.},
{z = 0, x = 0, y = 1}, {y = 0, x = 0.3333333333, z = 0.1111111111},
{x = 0, y = 2, z = -1}, {x = 0.2272727273, y = 0.6363636364, z = 0.2272727273e - 1}
```

```
> with(DEtools);
```

```
> DEplot3d({diff(x(t), t) = x(t) - x(t)^2 - x(t) * y(t) - 6 * z(t) * x(t), diff(y(t), t) =
y(t) - 1.5 * x(t) * y(t) - y(t)^2 - y(t) * z(t),
diff(z(t), t) = -z(t) + 3 * z(t) * x(t) + .5 * y(t) * z(t)}, [x(t), y(t), z(t)], t = 0..100,
[[x(0) = .4, y(0) = .4, z(0) = 0.2e - 1], [x(0) = .39, y(0) = .39, z(0) = 0.6e - 1]],
stepsize = .1, colour = magenta, linecolor = [black, red], arrows = none, axes = normal);
```

Com este comando obtemos o seguinte:

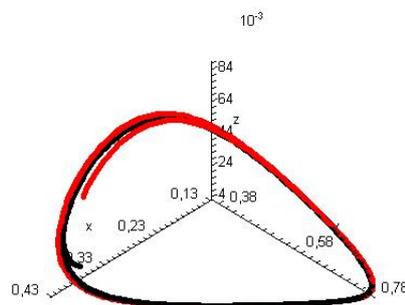


Figura B.7: Exemplo 3

Referências Bibliográficas

- [1] Almeida, M. C.; Moreira, H. N., *A mathematical model of immune response in cutaneous leishmaniasis*, Journal of Biological Systems **15**: 313-354 (2007).
- [2] Azar, C.; Holmberg, J.; Lindgren K., *Stability analysis of harvesting in a predator-prey model*, Journal of Theoretical Biology **174**: 13-19 (1995).
- [3] Boyce, W. E.; Di Prima, R. C., *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, LTC, Rio de Janeiro (1998).
- [4] Chetaev., *The Stability of Motion*. Pergamon Press, New York (1961).
- [5] Cramer, N. F.; May; R. M., *Interspecific competition, predation and species diversity: a comment*, Journal of Theoretical Biology **34**: 289-293 (1972).
- [6] Fujii, K., *Complexity-stability relationship of two-prey, one-predator species system model: local and global stability.*, Journal of Theoretical Biology **69**: 613-623 (1977).
- [7] Hassard, B. D.; Kazarinoff, Y.; Wan, H., *Theory and Applications of Hopf Bifurcation*, Cambridge University Press, Cambridge (1981).
- [8] Kumar, S.; Srivastava, S. K.; Chigakham, P., *Hopf bifurcation and stability analysis in a harvested one-predator two-prey model*, Applied Mathematics and Computation, **129**: 107-118 (2002).
- [9] LA Salle, J.; Lefschetz, S., *Stability by Lyapunov's Direct Method with Applications*, Academic Press, New York (1981).
- [10] Parrish J. D.; Salla S. B., *Interspecific competitions, predation and species diversity*, Journal of Theoretical Biology **27**: 207-220 (1970).

- [11] Palomino-Bean, S.; Vilcarromero A. C. S.; Fernandes, J. F. R.; Bonato O., *Co-existência de espécies em sistemas presa-predador com switching*, TEMA **7**: 317-326 (2006).
- [12] Reyn, J. W., *Classification and description of the singular points of a system of three linear differential equations*, Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP) **15**: 540-557, (1964).
- [13] Sotomayor, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, IMPA, Rio de Janeiro (1979).
- [14] Takeuchi, Y.; Adachi N.; Tokumaru H., *The stability of generalized Volterra equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **62**: 453-473 (1978).
- [15] Takeuchi, Y.; Adachi N., *The existence of globally stable equilibria of ecosystem of the generalized Volterra type*, Journal of Mathematica Biology **10**: 401-415 (1980).
- [16] Takeuchi, Y.; Adachi N., *Stable equilibrium of systems of generalized Volterra type*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **88**: 157-169 (1982).
- [17] Takeuchi, Y.; Adachi N., *Existence and bifurcation of equilibrium in two-prey, one-predator communities*, Bulletin of Mathematical Biology **45**: 877-900 (1983).
- [18] Takeuchi, Y., *Global Dynamical Properties of Lotka-Volterra Systems*, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ (1996).
- [19] Wiggins, S., *Introdution to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer, New York (1990).